



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université Dr. Tahar Moulay de Saida  
Faculté de Technologie

Département d'Electrotechnique

# Régimes transitoires des systèmes électriques

Présenté par :

**Dr. BOUANANE Abdelkrim**

**Maître de conférences « B » en Electrotechnique**

**Février 2018**

### Avant-propos

Ce cours des régimes transitoires des systèmes électriques est destiné aux étudiants de deuxième année Master en Electrotechnique. Il correspond au programme officiel du module enseigné en deuxième année Master électrotechnique industrielle. Ce manuel rédigé avec un souci permanent de simplicité est structuré en trois chapitres. Ils traitent des notions fondamentales de stabilité et protection d'un réseau électrique contre les différents défauts, notions aussi fondamentales des circuits électriques, lois de kirchhoff et théorèmes généraux de l'électricité en régime continu, circuits électriques en régime sinusoïdal et transitoire plus propagation et modélisation des phénomènes transitoires sur les lignes électriques avec une introduction sur les régimes transitoires des machines tournantes. Le deuxième chapitre propose de nombreux exercices avec leur solution entièrement détaillée à la fin de chaque circuit par les différentes méthodes d'analyse de régime transitoire. Une annexe avec les formulaires de mathématiques complète sur la transformation de Laplace exercé sur une des méthodes utilisé.

## Liste des symboles

### Paramètres :

R	( $\Omega$ )	Résistance,
L	(H)	Inductance,
C	(F)	Capacité,
q	(Cb)	Charge d'un condensateur,

### Repères :

$\theta$	(rd)	Position angulaire,
$\omega$	(rad/s)	Pulsation
$\varphi$	( $^{\circ}$ )	Angle de déphasage entre courant et tension
$\tau$	(s)	La constante de temps d'un circuit électrique

### Grandeurs :

v	(V)	Tension,
i	(A)	Courant,
$W_1$	(J)	Energie de champ magnétique
$W_2$	(J)	Energie de champ électrique
$\Phi$	(wb)	Flux magnétique
Q	(cb)	Charge d'une capacité
j	(A)	Intensité de courant
E	(V)	Tension de générateur
$U_R$	(V)	Tension aux bornes de la résistance
$U_L$	(V)	Tension aux bornes de l'inductance
$U_C$	(V)	Tension aux bornes de la capacité
$P_j$	(W)	Perte de Joule
$R_c$	( $\Omega$ )	Résistance critique
$Z_c$	( $\Omega$ )	Impédance caractéristique d'une de transmission

### Transformations :

$p$	Opérateur de Laplace,
$Q$	Facteur de qualité

### Sigles et Abréviations :

AC	Alternating current (courant alternatif),
DC	Direct current (Courant continue),
ZnO	Oxyde de Zinc

CC	Court circuit
THT	Très haute tension
EMTP	Logiciel de simulation (Electromagnetic Transient Program)
Cc	Court circuit

## Sommaire

Introduction Générale .....	1
Chapitre I : Les phénomènes transitoires et protection des réseaux électriques .....	3
I.1 Introduction .....	3
I.2 Définition de la stabilité d'un réseau électrique .....	3
I.3 Position de problème de stabilité transitoire.....	3
I.3.1 Les phénomènes transitoires électromécaniques .....	4
I.3.2 Les phénomènes transitoires électromagnétiques .....	4
I.4 Les défauts électriques .....	6
I.4.1 Les anomalies dans un système électrique .....	6
I.4.1.1 Les courts-circuits.....	6
I.4.1.2 Les surtensions .....	8
a - Surtensions par décharges électriques atmosphériques .....	8
b - Surtensions de commutation.....	8
I.5 Classification des surtensions .....	9
I.5.1 Les surtensions temporaires.....	9
I.5.2 Les surtensions transitoires.....	9
I.5.2.1 Les surtensions de manœuvres .....	10
I.5.2.2 Surtensions de foudre .....	11
I.6 Propagation des surtensions.....	12
I.7 La surcharge.....	12
I.7.1 Les oscillations .....	13
I.7.2 Les déséquilibres .....	13
I.8 Conséquences des défauts sur le réseau électrique.....	13
I.9 Transitoire de foudre.....	14
I.9.1 Contexte.....	14
I.9.2 Éléments sur le phénomène de foudre .....	14
I.9.3 Foudre directe et foudre indirecte.....	15
I.9.4 Prise en compte de l'aspect probabiliste.....	15
Chapitre II: Analyse transitoire des circuits électriques .....	16
II.1 Introduction.....	16
II.2 Méthodes d'analyse transitoire des circuits électriques .....	18

II.2.1	Analyse des équations différentielles .....	18
II.2.2	Analyse par variables d'états.....	19
II.2.3	Analyse par la transformée de Laplace .....	19
II.2.4	Analyse par la transformée de Fourier .....	20
II.3	Résolution des équations différentielles des circuits électriques .....	21
II.3.1	Introduction .....	21
II.3.2	Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension.....	21
II.3.2.1	Charge d'un condensateur .....	21
II.3.2.2	Décharge d'un condensateur.....	24
	Exercice d'application avec solution .....	25
II.3.3	Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension .....	26
	Exercice d'application avec solution.....	30
II.3.4	Réponse indicielle d'un circuit RLC Série (réponse à un échelon de tension .....	31
	Exercice d'application avec solution .....	36
II.3.5	Application sur l'analyse d'un circuit RL par la méthode de la transformée de Laplace .....	39
II.3.6	Application sur l'analyse d'un circuit RL par la méthode des équations différentielles alimenté par une source alternative.....	40
Chapitre III	: Propagation des phénomènes transitoires sur les lignes électriques et les machines tournants .....	42
III.1	Propagation et modélisation des phénomènes transitoires sur les lignes électriques .....	42
III.1.1	Introduction .....	42
III.1.2	Modélisation du phénomène transitoire .....	43
III.1.3	Propriétés des ondes de propagation de la tension et du courant dans une ligne .....	47
III.1.4	Comportement des ondes de courant et de tension en un point de jonction.....	49
III.1.4.1	Ondes incidente, transmise et réfléchi. ....	49
III.1.4.2	La continuité de la puissance au point de transition .....	50
III.1.4.3	Comportement des ondes de propagation du courant et de la tension à des points .....	50
III.1.5	Schéma de Petersen .....	52
III.1.6	cas d'une ligne fermée sur une résistance R.....	54
III.1.7	Capacité en dérivation .....	55
III.1.8	Oscillation des ondes mobiles .....	57
III.1.9	Diagramme de BEWLEY .....	59
III.1.10	Principe de protection contre les surtensions par le parafoudre .....	61

III.1.11 Emplacement du parafoudre .....	62
III.1.12 Principe de fonctionnement du parafoudre par les ondes mobiles .....	62
III.2 Régime transitoires des machines tournantes .....	65
III.2.1 Introduction.....	65
III.2.2 Intérêt et nécessité de l'étude des régimes transitoires.....	65
III.2.2.1 Contraintes lors de certains fonctionnements .....	65
III.2.2.2 Connaissance des fonctions de transfert .....	66
III.3 Hypothèses simplificatrices .....	66
III.3.1 Absence de saturation .....	66
III.3.2 Distribution sinusoïdale .....	66
III.3.3 Circuits à constantes localisées.....	67
Conclusion générale.....	68
Annexes .....	69
Références bibliographiques.....	73

## Introduction générale

Ce cours est appelé régimes transitoires des systèmes électriques et constitue une introduction à la stabilité d'un réseau électrique avec l'étude des différents phénomènes transitoires dans les systèmes électriques. Il débute par des rappels théoriques et des définitions et se poursuit par une présentation des principes de modélisation. Le cas particulier des lignes est abordé avec plus de détails.

L'objectif de ce cours est d'apporter un outil d'analyse des réseaux électriques en régime transitoire.

Les études de stabilité dynamique consistent à analyser et prédéterminer les variations dans le temps des grandeurs électriques en différents points d'un réseau et les évolutions des paramètres mécaniques des machines tournantes, suite à des perturbations brutales. Pour cela il faut envisager les principaux scénarios critiques (tels que court-circuit, perte d'énergie mécanique, perte de source électrique, variation de charge, contraintes de procès) et de prédire le comportement du réseau face à ces perturbations. Ces études permettent de préconiser les mesures à prendre en exploitation (type de protection, réglage de relais, délestage, configurations du réseau...) pour éviter les modes de fonctionnement indésirables.

Les phénomènes transitoires susceptibles d'apparaître sur un réseau étant très vaste, ce cours se concentre principalement sur deux phénomènes transitoires (électromécaniques et électromagnétiques).

L'analyse des transitoires électromagnétiques est un sujet important dans l'étude des réseaux électriques. Les phénomènes transitoires doivent être analysés dans les étapes de conception des réseaux pour assurer leur optimisation et garantir leur robustesse. Optimisation implique opération proche des limites techniques et réduction des coûts. Robustesse sous entend continuité de service, fiabilité, sécurité et qualité. Par ailleurs, la compréhension des phénomènes transitoires est essentielle dans les analyses menées quand surviennent des défaillances d'équipement ou des fonctionnements anormaux.

Les études de stabilité transitoire concernent les grandes perturbations comme les courts circuits, la perte d'ouvrage ou de groupe de production ... etc. La conséquence de ces défauts peut être très grave, pouvant même conduire à l'effondrement complet du réseau (blackout).

Les surtensions transitoires sont une augmentation de voltage, de durée très courte, mesurée entre deux conducteurs, ou entre conducteur et terre. Cela est dû parfois à des décharges atmosphériques (coups de foudre) ou à des processus de commutation ou d'avaries (contact à terre ou court-circuit). Bien que les surtensions aient existé depuis la création des réseaux électriques, actuellement la nécessité de protection (parafoudre) est beaucoup plus grande, puisque la technologie a évolué en créant les composants électroniques chaque fois plus petits et

plus sensibles aux perturbations électromagnétiques. Ces dispositifs présentent de meilleures caractéristiques de protection, moyennant toutefois un coût plus élevé.

Un exemple sur le principe de fonctionnement d'un parafoudre à oxyde métallique (ZnO) est traité à la fin de ce cours.

Ce cours est présenté de façon concise et directe afin de se concentrer sur l'essentiel d'analyse des phénomènes transitoires dans les systèmes électriques.

Le premier chapitre présente des généralités sur les phénomènes transitoires dans les réseaux électriques et leurs protections telles que les surtensions (origines, classification et propagation).

Dans le deuxième chapitre, l'analyse transitoire des circuits électriques est étudiée et appliquée à des circuits RL, RC et RLC. La méthode basée sur les équations différentielles est expliquée en détail permettant de l'utiliser dans diverses situations (*avec des exercices corrigés*) plus un exemple l'analyse d'un circuit RL alimenté par une source sinusoïdale et on termine ce chapitre par l'analyse un circuit RC avec source continue par l'utilisation de la transformé de Laplace

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation des phénomènes transitoires dans les lignes de transport d'énergie électrique. La méthode basée sur la théorie des ondes mobiles est présentée en détail.

## Chapitre I : Les phénomènes transitoires et protection des réseaux électriques

### I.1 Introduction :

Les réseaux électriques sont généralement constitués de trois étapes: la production, la transmission et la distribution. Dans la première étape, la génération, l'énergie électrique est générée en utilisant dans la plus part du temps des générateurs synchrones. Ensuite, le niveau de tension est élevé par des transformateurs avant que l'énergie électrique est transmise dans le but de réduire les courants de ligne qui permettent de réduire par conséquent les pertes de transmission. Après la transmission, la tension est abaissée à l'aide des transformateurs afin d'être distribué.

Les réseaux électriques sont conçus pour fournir une énergie continue qui maintient la stabilité de tension. Cependant, en raison d'événements indésirables, tels que la foudre, des accidents ou d'autres événements imprévisibles, les courts-circuits entre les conducteurs des lignes de transmission ou entre un conducteur et le sol peuvent se produire et sont appelés des défauts. Dus à l'occurrence des défauts un ou plusieurs générateurs peuvent être gravement perturbés causant un déséquilibre entre la production et la demande. Si un défaut persiste et n'est pas supprimé dans un laps de temps prédéfini, il peut causer de graves dommages aux équipements et qui peut entraîner une perte de puissance et une panne de courant.

L'analyse de la stabilité transitoire (ST) est l'un des outils les plus puissants pour étudier et améliorer le comportement des réseaux électriques. Pour traiter ce problème, les ingénieurs ont utilisé la modélisation et la simulation. Particulièrement, les études de stabilité sont devenues l'un des outils essentiels pour la planification, la conception et l'amélioration des réseaux électriques.

### I.2 Définition de la stabilité d'un réseau électrique :

La stabilité d'un réseau électrique de HT est une propriété d'un système de puissance qui lui permet de rester dans un état d'équilibre dans des conditions normales de fonctionnement et de retrouver un état acceptable d'équilibre après avoir été soumis à une perturbation.

### I.3 Position du problème de la stabilité transitoire :

Pour un réseau électrique on fonctionnement stable, la puissance mécanique de la turbine entraînant un générateur et la puissance électrique fournie par celui-ci sont équilibrées (en négligeant les pertes) pour toute machine.

Lorsque le réseau subit une perturbation importante lié aux phénomènes transitoires, la différence entre les puissances mécanique et électrique induit une accélération ou une décélération pouvant entraîner la perte de synchronisme d'un ou de plusieurs générateurs. Les angles rotoriques commencent à osciller jusqu'à l'intervention des systèmes de régulation de tension et de vitesse afin de restituer la marche en synchronisme et mener le réseau à un nouvel état de fonctionnement stable.

Il existe deux types de phénomènes transitoires dans les systèmes électriques :

### I.3.1 Les phénomènes transitoires électromécaniques :

Ce sont des phénomènes lents car ils sont directement liés à l'inertie des machines électriques de production. Leur durée varie de 1 seconde jusqu'à quelques minutes. Ils se manifestent par des oscillations ou des marches asynchrones des alternateurs. Sont principalement dus:

-  A la variation des grandes charges.
-  A une perte de production importante.
-  Ouverture de ligne d'interconnexion.
-  A la modification de la configuration du réseau suite au fonctionnement des protections sur défaut etc.

### I.3.2 Les phénomènes transitoires électromagnétiques :

Ce sont des phénomènes rapides qui durent de quelques millisecondes jusqu'à quelques centaines de secondes. Ils sont indésirables sur le réseau. Leur élimination nécessite l'intervention rapide et sélective des protections électriques.

Sont principalement dus:

- Aux courts circuits de tout type.
- A l'action des régulateurs de tension des alternateurs (désexcitation ou surexcitation).
- A la modification de la configuration du réseau suite au fonctionnement des protections } sur défaut etc.
- Enclenchement ou déclenchement de grandes charges etc.

Un certain nombre de phénomènes électriques correspondant à des variations brutales des grandeurs électriques d'un système ou d'un réseau peuvent être regroupés sous l'appellation « transitoires électromagnétique ». On peut y trouver les phénomènes de résonance, de ferrorésonance, de surtensions à front plus ou moins rapide telles que la tension transitoire de rétablissement aux bornes d'un disjoncteur ou celle suivant un impact de foudre, ou encore l'impact du courant d'enclenchement des transformateurs.

Ces phénomènes peuvent être non linéaires comme la ferrorésonance, phénomène électromagnétique pouvant apparaître dans certaines conditions sur les réseaux électriques comportant des transformateurs saturables (transformateurs de potentiel notamment) et des capacités (capacité parasite sur les câbles, bancs de compensation de réactif...).

Les conséquences de ses défauts peuvent être très graves, pouvant même conduire à l'effondrement complet du réseau. La stabilité transitoire est généralement influencée par les facteurs suivants :

- ❖ Point de fonctionnement stable (état statique) dans lequel se trouve le système avant
- ❖ le défaut ; Nature, étendue et lieu du défaut.
- ❖ Configuration du réseau avant, pendant et après l'isolation du défaut

Les défauts considérés dans les études de la stabilité transitoire sont généralement les courts circuits triphasés symétriques, malgré leur faible probabilité d'apparition relativement aux autres types de défauts. Les défauts électriques et en particuliers les courts-circuits font courir un danger : aux personnes, aux équipements électriques présents sur le réseau et à la fourniture d'électricité en termes de stabilité et de continuité.

En effet, en cas de court-circuit, un courant très important circule dans le réseau : nettement plus grand que celui nominal, tandis que la tension chute fortement. S'il n'est pas rapidement éliminé, les générateurs électriques qui alimentent le réseau peuvent s'emballer, les pertes joules causées par le courant peuvent provoquer des dommages importants sur les équipements électriques par échauffement des conducteurs. Par ailleurs, la baisse de tension qu'ils causent nuit à la qualité de l'électricité<sup>1</sup>.

Les surtensions, permanentes ou transitoires, mettent quant à elles en danger les personnes se trouvant à proximité d'installations électriques. Les surcharges sur les lignes à haute tension dilatent les conducteurs, provoquant un abaissement de la flèche entre les pylônes. En clair, la distance entre les conducteurs et le sol diminue, sans protection un court-circuit peut survenir, mettant également en danger les biens et les personnes.

## I.4 LES DEFAUTS ELECTRIQUES :

Comme son nom l'indique une protection électrique permet de protéger contre les défauts électriques. Il convient de les identifier correctement afin de définir correctement la protection adéquate. Les défauts possibles sont:

- Court-circuit phase-phase.
- Court-circuit phase-terre.
- Choc de foudre.
- Choc de manœuvre.
- Surtension.
- Défaillance d'un disjoncteur.
- Défaut à la masse.
- Surcharge thermique.
- sur fluxage.
- Perte de synchronisme.
- Baisse de fréquence importante.

Par ailleurs,

*Fugitif* : nécessitent une coupure très brève du réseau. Par exemple : balancement des conducteurs sous l'effet du vent, objets divers charriés par le vent, brouillard givrant, pluie en zone polluée, branche d'arbre proche d'une ligne, et brûlée par l'arc.

*Permanent* : nécessitent une intervention humaine pour remettre en route le réseau. Par exemple : rupture d'un câble, ou de sa pince d'ancrage, et chute sur le sol, chute d'un arbre, ou d'une grue, sur la ligne, acte de malveillance conduisant, par exemple, à la ruine d'un pylône, détoronage d'un brin de conducteur, qui s'approche d'une autre masse métallique.

*Auto-extincteur* : disparaissent spontanément rapidement.

*Semi-permanent* : nécessitent une coupure longue, de l'ordre de quelques dizaines de secondes, pour disparaître.

Chaque année, on estime à 10 000 le nombre de défauts électriques, défaut isolement pour être précis, apparaissant sur le réseau.

### I.4.1. Les anomalies dans un système électrique :

#### 1.4.1.1 Les courts-circuits :

Les courts-circuits sont des phénomènes transitoires, ils apparaissent lorsque l'isolement entre deux conducteurs de tensions différentes ou entre un conducteur sous tension et la terre est rompu. Ils engendrent des courants très importants dans les éléments constituant le réseau.

Les courts-circuits sont de natures et de types différents:

- Les courts-circuits monophasés à la terre.
- Les courts-circuits biphasés à la terre où isolés.
- Les courts-circuits triphasés à la terre où isolés.

Les courts-circuits peuvent provoquer des dégâts économiques importants s'ils ne sont pas éliminés rapidement par les systèmes de protection.

#### a) Origines d'un défaut de courts-circuits

Selon la nature du réseau électrique, on cite les origines des défauts de court-circuit comme suit :

- ◆ Pour les lignes aériennes, sont en particulier les perturbations atmosphériques (foudre, tempêtes,...etc.) qui peuvent enclencher un défaut de court-circuit. Aussi les défauts d'isolement et les agressions mécaniques peuvent conduire à un CC.
- ◆ Pour les câbles souterrains, sont les agressions extérieures, engins mécaniques de terrassement par exemple, qui entraînent des défauts de CC.
- ◆ Le matériel du réseau et des postes peuvent être aussi le siège d'un défaut de court-circuit. Ce matériel comporte des isolants placés entre pièces sous tensions et masses. Alors, les isolants subissent des dégradations conduisant à des défauts.

#### b) Caractéristiques

Plusieurs types de court-circuit (Figure I.1) peuvent se produire dans un réseau électrique :

##### **Court-circuit monophasé**

Il correspond à un défaut entre une phase et la terre, c'est le plus fréquent.

##### **Court-circuit triphasé**

Il correspond à la réunion des trois phases, c'est le courant de CC le plus élevé.

##### **Court-circuit biphasé isolé**

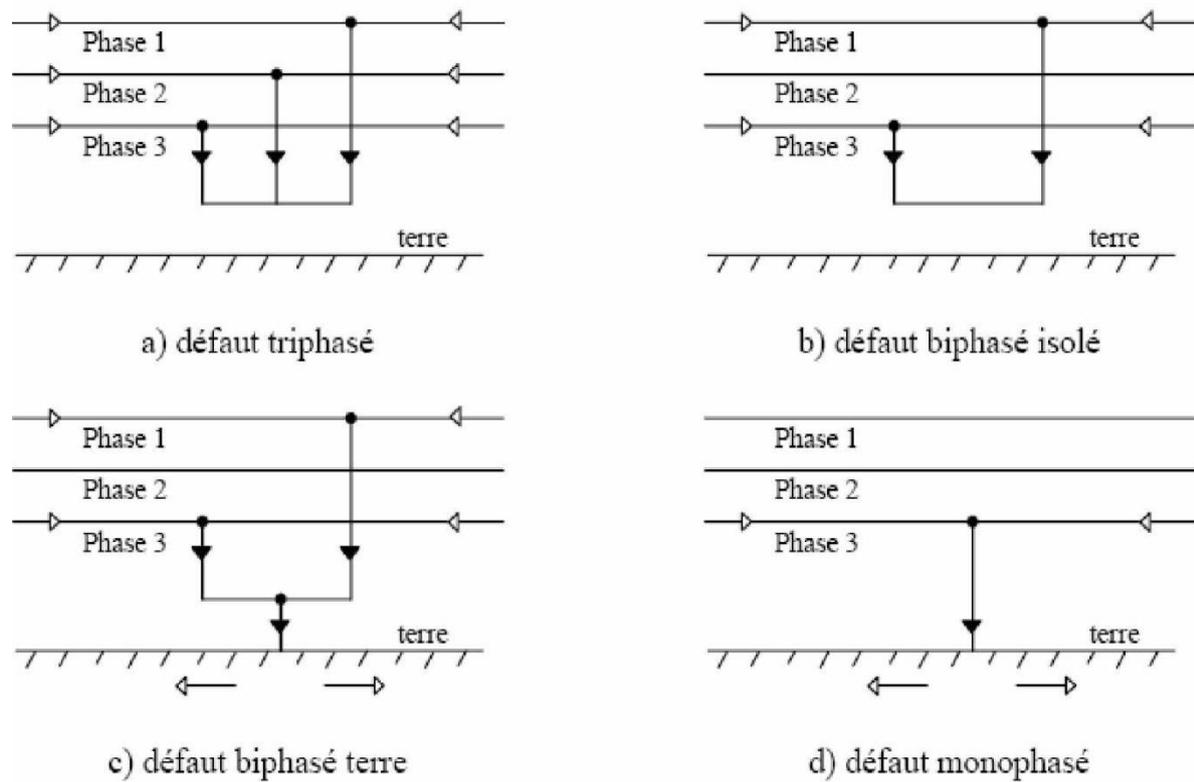
Il correspond à un défaut entre deux phases. Le courant résultant est plus faible que dans le cas du défaut triphasé, sauf lorsqu'il se situe à proximité immédiate d'un générateur.

##### **Court-circuit biphasé terre**

Il correspond à un défaut entre deux phases et la terre.

Outre ces caractéristiques, les courts-circuits peuvent être :

- Monophasés : 80 % des cas,
- Biphasés : 15 % des cas. Ces défauts dégénèrent souvent en défauts triphasés,
- Triphasés : 5 % seulement dès l'origine.



**Figure I.1.** Différents types de court-circuit.

#### I.4.1.2 Les surtensions :

Il existe deux classes des surtensions :

##### a. Surtensions par décharges électriques atmosphériques :

Les orages sont des événements très habituels, et aussi très dangereux. On estime que sur notre planète se produisent simultanément quelques 2000 orages et qu'environ 100 coups de foudre se déchargent sur la terre chaque seconde. Au total, cela représente environ 4000 orages quotidiens et 9 millions de décharges atmosphériques chaque jour.

Au moment de l'impact, la foudre provoque une impulsion de courant qui arrive à atteindre des dizaines de milliers d'ampères. Cette décharge génère une surtension dans le système électrique qui peut provoquer des incendies et la destruction des équipements électriques.

##### b. Surtensions de commutation :

Ces surtensions sont générées dans les lignes électriques, principalement en raison des commutations de machines de grande puissance. Les moteurs électriques sont des charges très inductives dont la connexion et le débranchement provoque des surtensions. Il existe de même d'autres processus capables de les produire, comme par exemple l'allumage et l'extinction de la soudure à l'arc.

### I.5 Classification des surtensions :

Selon leur durée d'application, les surtensions sont classées :

- Les surtensions transitoires de durée inférieure à 0,1s en 50Hz comprenant les ondes de foudre et de manœuvres.
- Les surtensions temporaires de durée supérieure à 0,1s de nature périodique ou oscillatoire.

#### I.5.1 Les surtensions temporaires :

Ces perturbations peuvent avoir des formes alternatives ou oscillatoires dont la durée est limitée au temps de fonctionnement des dispositifs de contrôle et de protection du réseau, elles se présentent soit à la fréquence industrielle, soit à d'autres fréquences plus élevées. Elles apparaissent lors de la modification brusque de la configuration du réseau ou lors d'un défaut à la terre. Parmi les causes on peut citer :

- Défauts entre phase et terre (déplacement du point du neutre);
- Déclenchement brusque d'une charge;
- Effet Ferranti provoqué par le fonctionnement à vide d'une ligne de grande longueur;
- Alimentation d'une charge capacitive au travers d'une impédance élevée ;
- Phénomène de ferorésonance; etc.

Ces différentes causes peuvent coexister et en conséquence, les surtensions générées se superposent. Les surtensions temporaires, ont une amplitude relativement non élevée ; elles sont de longue durée (quelques secondes) et de basse fréquence. En persistant sur le réseau pendant une période relativement longue, les surtensions temporaires peuvent être fatales pour les varistances ZnO qui ne seraient pas capables de dissiper l'énergie qui en résulte.

#### I.5.2 Les surtensions transitoires

Les ondes transitoires sont caractérisées par les paramètres suivants :

- Le temps de montée ( $T_{cr}$ ) en  $\mu s$
- La pente de montée mesurée en  $kV/\mu s$  ou en  $kA/\mu s$
- La durée de la surtension ( $T_h$ ) en  $\mu s$  correspondant à la descente à mi-amplitude.

Les surtensions transitoires sont classées en fonctions de leur origine en surtensions atmosphériques (foudre) et en ondes de manœuvres. Elles se superposent à la tension nominale.

### I.5.2.1 Les surtensions de manœuvres :

Les manœuvres d'interrupteurs ou de disjoncteurs entraînent des changements dans la configuration électrique des réseaux. Ces changements provoquent des surtensions plus ou moins élevées:

- Coupure des courants de ligne à vide, des câbles à vide ou de batteries de condensateurs;
- Coupure des faibles courants inductifs ou magnétisants (transformateurs à vide ou chargés par des inductances shunts);
- Mise sous tension des lignes;
- Rétablissement d'une ligne après défaut.

Ces surtensions se caractérisent généralement par un échelon de tension d'une amplitude 1,3 à 3,4 fois la tension normale d'un réseau aérien et 2,2 à 3,5 fois celle d'un réseau de câbles, et une durée de quelques ms. Leurs fréquences s'échelonnent entre 50 Hz et 200 kHz. Les valeurs de surtension de manœuvres les plus élevées sont obtenues lors du réamorçage de disjoncteurs.

Les surtensions de manœuvres sont moins dangereuses que celles de foudre. Toutefois la grande énergie qui leur est associée à cause de leur longue durée peut provoquer dans les cas les plus extrêmes l'emballement thermique de la varistance.

La forme conventionnelle d'une surtension de manœuvres est dite 250/2500 $\mu$ s figure I.2.

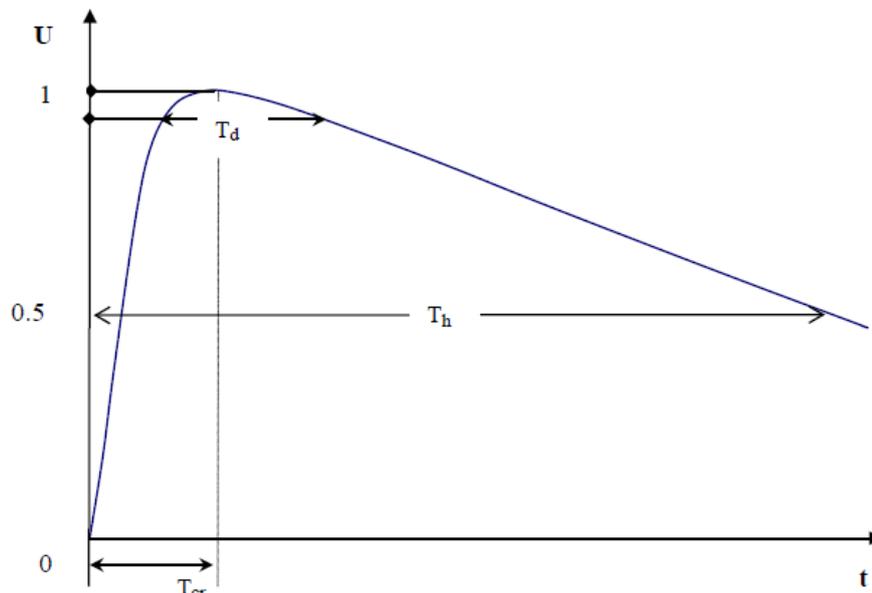


Figure I.2 : Choc de manœuvres normalisé.

### I.5.2.2 Surtension de foudre :

Elles ont pour origine des décharges atmosphériques de foudre. Les surtensions engendrées se propagent guidées par la ligne avec des vitesses proches de la vitesse de la lumière.

Le courant de foudre peut s'écouler directement dans des circuits électriques provoquant des différences de potentiel en raison de l'impédance de ces derniers. Les tensions ainsi créées ont une valeur importante, voir très élevées susceptibles de provoquer l'amorçage des isolateurs, même pour des réseaux à haute tension. Les courants écoulés sont également très importants et ils provoquent des destructions thermiques des objets qu'ils parcourent. On ne peut plus dans le cas de ces coups de foudre directs parler de simples perturbations. Ces phénomènes sont très destructeurs et très dangereux pour les personnes, d'où la mise en œuvre de dispositifs de protection par des écrans, paratonnerre ou des câbles de garde qui dirigent ces courants de foudre vers des prises de terre au lieu de les laisser atteindre des circuits électriques sous tension.

La forme normalisée de l'onde de choc de foudre est représentée à la figure I.3.

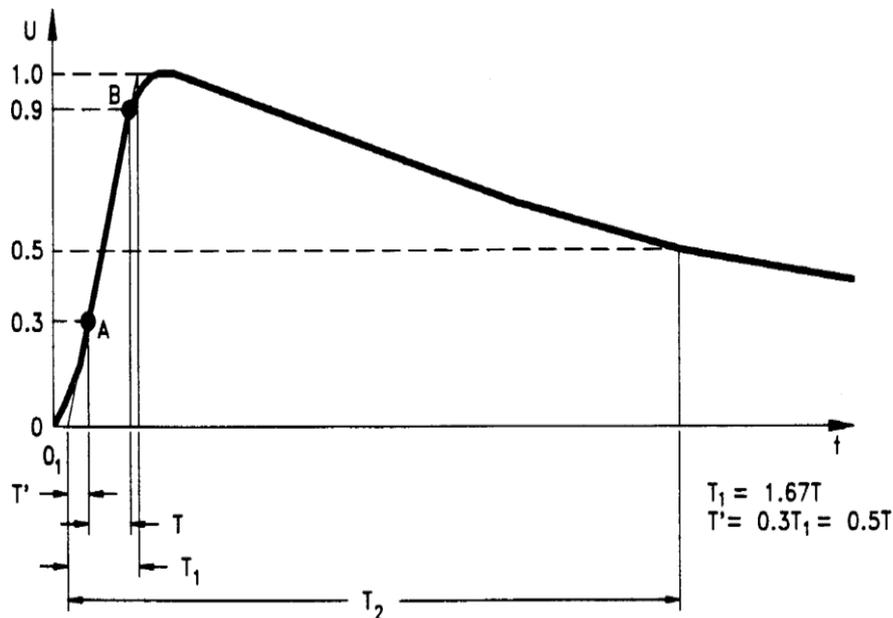


Figure I.3 : Choc de foudre normalisé.

### I.6 Propagation des surtensions :

Le mécanisme prédominant, de propagation des surtensions de commutation, est par conduction, puisqu'elles ont leur origine dans les réseaux d'alimentation électrique. C'est dans les décharges électriques atmosphériques où peut se manifester toute la gamme des formes de propagation. Par conséquent, on différencie les mécanismes suivants:

- Surtension conduite : La foudre peut avoir un impact direct sur les lignes électriques aériennes. La surtension se propage et arrive jusqu'à l'utilisateur, en dérivant à terre à travers ses équipements et en produisant des avaries à ces derniers.
- Surtension induite : Le champ électromagnétique provoqué par les décharges électriques, induit des courants transitoires dans les équipements à proximité, en les transmettant à l'intérieur des installations et en endommageant les équipements.
- Surtension par couplage capacitif : Il existe toujours un couplage capacitif, également appelé capacité parasite, entre n'importe quelle paire de conducteur. Plus la rapidité de la forme d'onde de tension impliquée est grande, plus les surtensions par couplage capacitif sont importantes.
- Augmentation du potentiel dans les prises de terre : Lorsqu'un coup de foudre atteint la terre, le courant de décharge peut élever le potentiel de terre à plusieurs milliers de volts autour du point d'impact dans le terrain comme conséquence du courant qui se disperse.

Tout objet sur le terrain touché aura la tension associée à ce moment, ce qui peut être à l'origine d'une différence de potentiel dangereuse par rapport à d'autres points de l'installation. Il faut particulièrement prêter attention aux éléments métalliques enterrés, comme les canalisations et les prises de terre.

### I.7 La surcharge :

La surcharge d'un appareil est caractérisée par un courant supérieur au courant admissible, les origines de surcharges sont :

- a. Les courts-circuits.
- b. Les reports de charge.
- c. Les pointes de consommation.
- d. L'enclenchement des grandes charges.

Les surcharges provoquent des chutes de tension importantes dans le réseau et accélère le vieillissement des équipements.

### 1.7.1 Les oscillations :

Les oscillations de la tension et du courant sont dues aux variations plus ou moins rapides de la charge qui agit directement sur la vitesse de rotation (fréquence) des machines de production de l'énergie électrique. Elles sont liées directement à la mécanique des machines électriques, c'est la raison pour laquelle on les appelle phénomènes transitoires électromécaniques.

### I.7.2 Les déséquilibres :

Les déséquilibres sont généralement dus à la mauvaise répartition des charges sur les trois phases. Ils apparaissent surtout dans les réseaux de distribution, ils donnent naissance à la composante inverse du courant, cette composante provoque :

-  Des chutes de tension supplémentaires.
-  Des pertes de puissance.
-  Des échauffements.

### I.8 Conséquences des défauts sur le réseau électrique :

Les effets néfastes des courts-circuits sont surtout à craindre sur les réseaux électriques THT sur lesquels débitent des groupes générateurs de forte puissance. Les courts-circuits, surtout polyphasés et proches des centrales de production, entraînent une rupture de l'équilibre entre le couple moteur et le couple résistant de la machine, s'ils ne sont pas éliminés rapidement, ils peuvent conduire à la perte de stabilité de groupes générateurs et à des fonctionnements hors synchronisme.

Des temps d'élimination des courts-circuits de l'ordre de 100 à 150 ms sont généralement considérés comme des valeurs à ne pas dépasser sur les réseaux électriques THT.

Les défauts de court-circuit amènent à deux types de contraintes :

1. **Contraintes thermiques :** Sont dues aux dégagements de chaleur par effet Joule dans les conducteurs électriques.
2. **Contraintes mécaniques :** Sont dues aux efforts électrodynamiques entraînent le balancement des conducteurs aériens et le déplacement des bobinages des transformateurs.

Ces efforts s'ils dépassent les limites admises sont souvent à l'origine d'avaries graves. De plus l'arc électrique consécutif à un défaut met en jeu un important dégagement local d'énergie pouvant provoquer d'important dégât au matériel.

## I.9 Transitoire de foudre

### I.9.1 Contexte :

Les coups de foudre qui tombent sur les lignes aériennes provoquent des surtensions très importantes qui se propagent le long des lignes pour atteindre les postes situés aux extrémités. Il est nécessaire de spécifier les isolements des matériels et de déterminer les protections à installer sur le réseau (parafoudres, éclateurs) pour rendre acceptable économiquement le risque de défaillance des équipements à cause de la foudre : c'est un des objectifs de la coordination des isolements.

Les surtensions de foudre provoquent aussi des amorçages des chaînes d'isolateurs des lignes aériennes qui dégradent la qualité de service aux points de livraison du réseau en donnant naissance à des coupures brèves ou des creux de tension.

### I.9.2 Éléments sur le phénomène de foudre :

Quand un coup de foudre frappe un objet au sol, cet objet devient relié au nuage orageux par un canal électrisé. Dans la plupart des cas, le canal est parcouru du sol vers le nuage par une première décharge de courant puis par plusieurs autres décharges en général de moindre intensité. Au niveau de l'objet au sol, le coup de foudre peut être vu comme une source de courant qui injecte une première impulsion suivie de plusieurs autres impulsions (figure I.4). Lors des études de transitoire, on ne considère en général pas ces impulsions supplémentaires car elles sont souvent beaucoup moins contraignantes que la première impulsion.

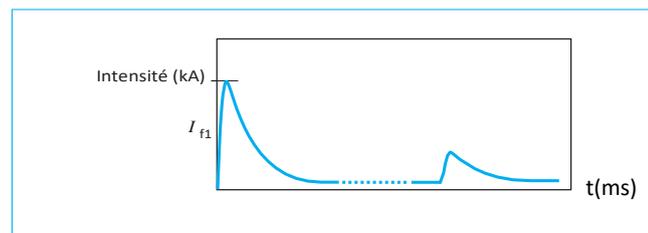


Figure I.4 – Représentation du courant de foudre

La valeur crête (intensité) du courant de la première impulsion  $I_{f1}$  est une variable aléatoire qui peut prendre une valeur comprise entre quelques kA et 200 kA, avec une valeur médiane de 31 kA. Le temps de front est typiquement de quelques micro-secondes. Le temps à mi-queue de la première impulsion est également une variable aléatoire, sa valeur médiane est de 75  $\mu$ s.

L'activité orageuse d'une région se mesure par la densité de coups de foudre au sol de la région. C'est le nombre de coups de foudre qui frappe 1 km<sup>2</sup> en moyenne par an. La détermination des points d'impact des coups de foudre est réalisée à l'aide d'une technique de calcul nommée modèle électro-géométrique

### I.9.3 Foudre directe et foudre induite :

L'interaction entre un coup de foudre et un réseau se fait suivant deux principes selon que le coup de foudre frappe ou non directement un élément du réseau

Si la foudre tombe à proximité du réseau (**foudre induite**), le canal de foudre se comporte comme une antenne et le courant de foudre qui se propage le long de ce canal crée un champ électro-magnétique qui induit des surtensions sur les ouvrages électriques. Ces surtensions ont dans la plupart des cas une valeur crête inférieure à 10 kV et ne sont donc problématiques que pour les réseaux de basse tension et les réseaux de distribution.

Si le coup de foudre frappe directement un conducteur de phase, un câble de garde ou un pylône, il se comporte comme une source de courant qui, compte tenu des impédances caractéristiques de ces éléments, va créer des surtensions très importantes

### I.9.4 Prise en compte de l'aspect probabiliste :

Dans le domaine des surtensions à front rapide dues à la foudre, on est conduit à réaliser deux types d'étude :

- ✓ le calcul du risque de défaillance des équipements. Ce risque peut s'estimer, par exemple, par la durée moyenne entre deux sur-tensions susceptibles de provoquer une défaillance de l'équipement considéré ;
- ✓ le calcul du taux d'amorçage des lignes aériennes : nombre moyen d'amorçages pour 100 km de ligne et par an.

Ces études nécessitent une procédure de calcul complexe qui repose sur les étapes suivantes.

1. Application d'un modèle électro-géométrique pour déterminer le nombre de coups de foudre frappant chaque élément des ouvrages aériens et la loi de probabilité suivie par ces coups de foudre ;
2. Simulation avec un logiciel de type EMTP des surtensions transitoires dues aux coups de foudre frappant les ouvrages aériens ;
3. Évaluation du taux d'amorçage de la ligne aérienne et/ou du risque de défaillance de l'équipement considéré en prenant en compte les résultats de l'étape précédente et la nature aléatoire de la foudre.

## Chapitre II : Analyse transitoire des circuits électriques

### II.1 Introduction :

Dans l'analyse d'un système électrique ou physique, une distinction est faite entre le régime permanent et le régime transitoire ou dynamique.

Un système électrique est dit être en régime permanent, lorsque les variables qui décrivent son comportement (tension, courant, etc..), sont soit invariables dans le temps (circuit DC) ou des fonctions périodiques du temps (circuit AC). Un système électrique est dit en régime transitoire quand les variables changent ou varient de manière non périodique.

Le régime transitoire disparaît dans le temps et un nouvel état d'équilibre apparaît. Donc le régime transitoire est le passage d'un état stable à un autre état stable.

Les paramètres du circuit L et C sont caractérisés par leur capacité à stocker de l'énergie.

L'énergie du champ magnétique est :  $W_1 = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} Li^2$

L'énergie du champ électrique est :  $W_1 = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$

Les sources de courant et de tension sont les éléments au travers desquels l'énergie est appliquée aux circuits. Ainsi, un système électrique comme un système physique est caractérisé par une quantité d'énergie. Sous les conditions d'un régime permanent, l'énergie stockée dans les différentes capacités et inductances et appliquée par une source continue est constante. Cependant, dans un circuit alternatif, l'énergie est périodiquement transférée entre le champ magnétique et le champ électrique. Lorsque se produit un changement soudain dans un circuit, il y a une redistribution d'énergie entre L et C et un changement dans l'état des sources, requis par les nouvelles conditions.

Cette redistribution d'énergie ne peut avoir lieu instantanément mais nécessite un certain temps qui est la durée du régime transitoire. La principale raison de cette situation est qu'un changement instantané de l'énergie exigerait une puissance infinie. En d'autres termes, suite à une commutation, interruption, court circuit ou tout autre changement brusque dans la structure d'un réseau, il y aura des phénomènes transitoires.

De façon générale, nous dirons qu'un régime transitoire est la phase qui sépare dans le temps deux phases de régime permanent distinctes d'un système physique.

L'étude du régime transitoire est souvent nécessaire afin de déterminer si les tensions et les courants qui en découlent ne présentent pas des évolutions dangereuses. Dans le cas de transformateurs de distribution d'énergie, le courant de démarrage peut atteindre jusqu'à 20 fois la valeur nominale. Il est donc impératif de prévoir cette valeur pour y adapter les organes de protection. Il est donc utile de savoir prédéterminer ces régimes, au moins dans les cas assez simples.

Un circuit électrique, représenté par un schéma, est l'ensemble des éléments idéaux fonctionnellement connectés de façon à constituer le modèle mathématique d'un système électrique. Ce modèle permet de comprendre le fonctionnement du système électrique qu'il représente.

Dans ce chapitre, les méthodes d'analyse transitoire des circuits électriques sont présentées. La méthode d'analyse utilisant les équations différentielles est étudiée et appliquée à des circuits du 1<sup>er</sup> ordre et du 2<sup>ème</sup> ordre.

### **Quelques définitions sur les régimes libres, forcés, transitoires et permanents**

Quelle sont les différences entre les régimes libre, forcé, transitoire et permanent ?

#### **Entre le régime libre et régime forcé :**

\* **Le régime libre** est le régime observé quand toutes les sources sont éteintes. Des composants passifs et linéaires forment un circuit dans lequel se trouve initialement de l'énergie sous forme de tension (dans un condensateur) ou de courant (dans une bobine).

\* **Le régime forcé** est le régime observé quand le circuit linéaire est soumis à une excitation. Par exemple lorsqu'on allume un générateur de courant et/ou de tension aux bornes du circuit.

#### **Entre le régime transitoire et permanent :**

\* **Le régime transitoire** est le régime d'évolution d'un circuit qui n'a pas atteint un état stable. Il apparaît par exemple à l'ouverture ou à la fermeture d'un interrupteur. Il prend la forme d'un régime aperiodique ou d'un régime pseudo-periodique.

*-Le régime est dit transitoire lorsqu'il est ni périodique ni continu.-*

\* **Le régime permanent** apparaît quand il s'est écoulé suffisamment de temps depuis l'enclenchement du système (fermeture d'un interrupteur par exemple), présentant des caractéristiques n'évoluant presque plus indépendamment du temps.

*- Le régime est dit permanent lorsque le régime transitoire est terminé.-*

**II.2 Méthode d'analyse transitoire des circuits électriques :**

Pour étudier la réponse d'un circuit électrique suite à l'application d'une excitation, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

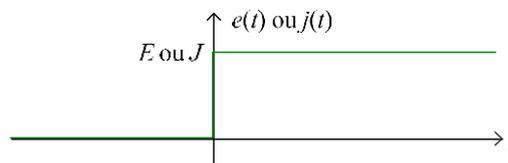
**II.2.1 Analyse par des équations différentielles :**

• Le réseau étant linéaire, l'évolution de toute grandeur électrique (intensité, tension, charge d'un condensateur. . .) est d'écrite par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$D_n \frac{d^n x}{dt^n} + D_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + D_1 \frac{dx}{dt} + D_0 x = f(x) \quad , \text{ avec les } D_i \text{ constants.}$$

Où l'ordre n de l'équation différentielle définit l'ordre du circuit. Nous étudierons le circuit d'ordre 1 et d'ordre 2.

A) Echelon de tension et de courant

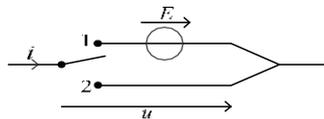


**1) Echelon de tension :**

Une source idéale de tension délivre un échelon de tension si la tension produite par la source est de la forme :

$$\begin{cases} e(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ e(t) = E \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Avec e(t) en Volt)



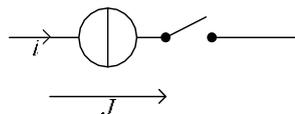
Réalisation :

$$\begin{cases} \text{Pour } t < 0, \text{ interrupteur en 2. } u = 0 \\ \text{Pour } t \geq 0, \text{ interrupteur en 1. } u = E \end{cases}$$

**2) Echelon de courant :**

$$\begin{cases} j(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ j(t) = J \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

Avec ( j(t) en Ampère )



Réalisation :

$$\begin{cases} \text{Pour } t < 0, \text{ interrupteur ouvert. } i = 0 \\ \text{Pour } t \geq 0, \text{ interrupteur fermé. } i = J \end{cases}$$

\* les deux échelons le temps t en second t(s)

**II.2.2 Analyse par variables d'états :**

Pour cette analyse on établit les équations d'état du circuit qui sont des équations différentielles, du premier ordre, écrites sous forme matricielle :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Où  $x$  : vecteur d'état =  $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$

$y$  : vecteur d'état =  $[y_1, y_2, \dots, y_n]^T$

$u$  : vecteur d'état =  $[u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

A : matrice  $n. n$

B : matrice  $n. p$

C : matrice  $m. n$

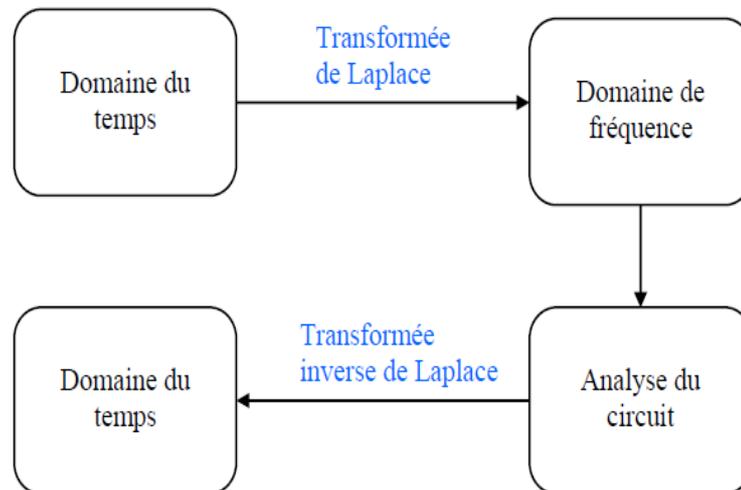
D : matrice  $m. p$

Ces équations relient les sorties  $y$  et les excitations.

Les résolutions des équations d'état donnera les sorties  $y$ .

**II.2.3 Analyse par la transformée de Laplace :**

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps au domaine de la fréquence. Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la transformée inverse de Laplace. Le diagramme de la figure 1.1 illustre ce concept.



figure(I.1) : Etapes d'analyse d'un circuit avec la transformée de Laplace

L'avantage principal d'analyser des circuits électriques de cette façon est que les calculs sont beaucoup plus simples dans le domaine de Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent à l'aide de simples opérations algébriques ; pas besoin d'équations différentielles.

#### **II.2.4 Analyse par la transformée Fourier :**

La transformée de Fourier est très utile pour l'analyse transitoire des circuits électriques et comme la transformée de Laplace c'est-à-dire convertit une fonction du temps (fonction de domaine temporel) en fonction de la fréquence (fonction de domaine fréquentiel).

En fait, la transformée de Fourier est un cas spécial de la transformée de Laplace. Alors pourquoi voudrait-on utiliser une autre transformée ? La raison est que la transformée de Fourier est plus utile dans certains domaines comme les télécommunications et le traitement de signaux.

#### **Remarque :**

La transformée de Laplace est plus utilisée pour calculer la réponse d'un circuit que la transformée de Fourier pour deux raisons :

- 1) l'intégrale de la transformée de Laplace converge pour plus de fonctions que l'intégrale de la transformée de Fourier
- 2) la transformée de Laplace permet d'accommoder les conditions initiales.

**II.3 Résolution des équations différentielles des circuits électriques :**

**II.3.1 Introduction :**

Les relations (COURANTS/TENSIONS) utilisables lors des régimes transitoires sont forcément les relations générales des dipôles. Ces relations, qui utilisent les dérivées des courants et tensions, font des équations de mailles ou de nœuds des circuits, des équations différentielles. Pour résoudre un régime transitoire il est donc nécessaire de savoir résoudre une équation différentielle.

**II.3.2 Réponse d'un circuit R, C à un échelon de tension :**

**II.3.2.1 Charge d'un condensateur :**

On considère le circuit constitué d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  en série avec un condensateur de capacité  $C$  : l'ensemble est soumis à une tension  $E$  Figure II.2.

a- Equation électrique du circuit R,C série :

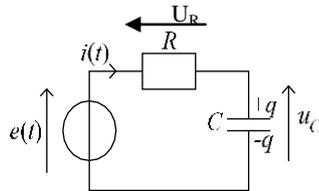
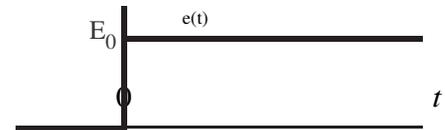


Figure II.2 Circuit R, C série .

$$\begin{cases} e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ e(t) = E_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



(II.1)

$$e(t) = u_R + u_c = Ri + \frac{1}{C} \int i \, dt$$

où  $e(t) = u_R + \frac{q}{C}$  avec  $[ i = \frac{dq}{dt} \text{ et } u_c = \frac{q}{C} ]$

Donc  $e(t) = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

La formule avec la charge  $q$  d'écrit :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{e(t)}{R} \tag{II.2}$$

On a  $i = \frac{dq}{dt}$ , et comme  $q = Cu_c$  alors  $i = C \frac{du_c}{dt}$  et  $u_R = RC \frac{du_c}{dt}$

En remplaçant  $U_R$  par son expression, l'équation 1 devient :

$$e(t) = RC \frac{du_c}{dt} + u_c \tag{II.3}$$

On montre, en mathématiques, que la solution g' générale d'une telle équation se met toujours sous la forme :

$$u(t) = \underbrace{u_G}_{\text{Régime libre (transitoire)}} + \underbrace{u_P}_{\text{régime forcé imposé par la source}}$$

• Où :

- ✓  $u_G$  est la solution générale de l'équation homogène (i.e. équation sans second membre) : elle correspond au régime libre du circuit (absence de source de tension ou de courant).
- ✓  $u_P$  est une solution particulière de l'équation avec second membre : elle correspond au régime forcé imposé par la source.
  - Tant que  $|u_G(t)| \sim |u_P|$ , on est dans le domaine du régime transitoire.
  - Lorsque  $|u_G| \ll |u_P|$ , le régime forcé est établi (ici, régime continu).

Réponse à un échelon de tension

La loi des mailles s'écrit :  $e - u_R - \frac{q}{C} = 0$

Donc pour une réponse échelon l'équation 2 s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{e}{R} \quad (\text{II.4})$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants et avec 2<sup>nd</sup> membre.

♦ **Définition** : L'homogénéité de la relation impose  $\tau = RC$  homogène à un temps : c'est le *temps caractéristique / constante de temps* du circuit RC série.

- Pour  $t \geq 0$ , l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E_0}{R}$$

La solution de (1) est :  $q = q_G + q_P$  (sol. générale de l'éq. Sans 2<sup>nd</sup> membre + sol. Particulière de l'éq. avec second membre).

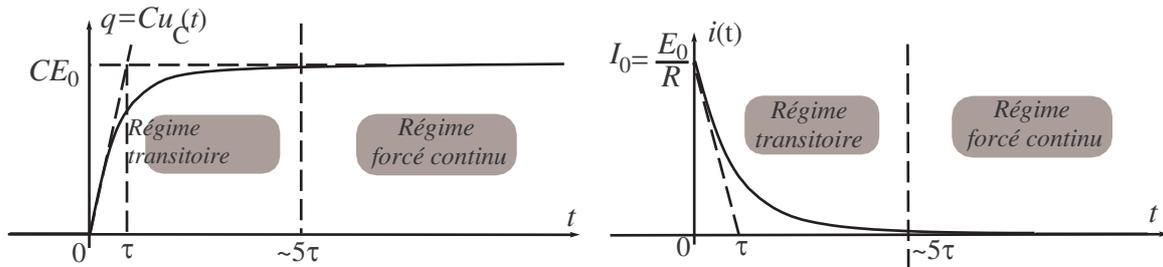
$$\begin{cases} q_G = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} \\ q_P = CE_0 \end{cases} = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \text{Soit : } q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + CE_0 \quad (\text{II.5})$$

• Pour déterminer  $\lambda$ , on suppose (par exemple) que pour  $t < 0$ , le condensateur n'est pas chargé ( $q(t = 0^-) = q_0 = 0$ ).

- De plus, la continuité de la charge aux armatures du condensateur impose :  $q(t = 0^+) = q(t = 0^-)$ .

$$\text{Donc } q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = 0 \\ q(t = 0^+) = \lambda + CE_0 \end{cases} \Rightarrow \text{ Soit : } \lambda = -CE_0$$

$$\text{Ainsi : } q(t) = CE_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{avec } I_0 = \frac{E_0}{R}$$



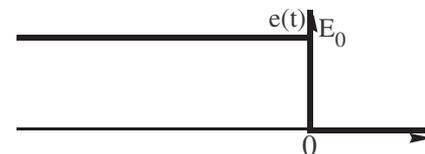
**Propriété :** On remarque que le régime continu est atteint lorsque le condensateur a atteint sa charge maximale sous la tension  $E_0$  ; alors, le courant ne circule plus.

*\* En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert \**

**-Extinction de la source:**

On réinitialise le temps pour simplifier les calculs :

- Il y a décharge du condensateur lorsque on éteint  $e(t)$ :  
 pour  $\begin{cases} t < 0 : & e(t) = E_0 \\ t \geq 0 : & e(t) = 0 \end{cases}$



Pour  $t \geq 0$ , l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \quad (\text{II.4}) \quad \text{De solution : } q(t) = \mu e^{-\frac{t}{RC}} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}$$

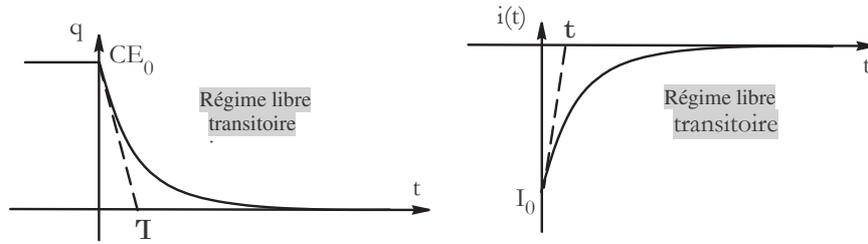
Determination de  $\mu$  :

- Pour  $t < 0$ ,  $q = CE_0$  (car on suppose le condensateur complètement chargé sous la tension  $E_0$ ).

- Par continuité de la charge, nous obtenons :  $q(t = 0^+) = q(t = 0^-)$ ,

$$\text{Soit : } q(t=0^+) = \begin{cases} q(0^-) = CE_0 \\ q(t = 0^+) = \mu \end{cases} \Rightarrow \text{d'où } \mu = CE_0$$

$$\text{Ainsi : } q(t) = CE_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{et} \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{avec } I_0 = \frac{E_0}{R}$$



**Remarque :**  $i < 0$  car la décharge se fait dans le sens opposé au sens positif conventionnel du schéma.

**- Etude énergétique :**

La puissance fournie au circuit par le générateur, de résistance interne négligeable, vaut :

$$\mathcal{P}_f = e(t)i(t) = \left( Ri + \frac{q}{C} \right) i$$

Avec  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ , il vient :  $qi = q \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} q^2 \right)$

$$D'où : \mathcal{P}_f = \underbrace{Ri^2}_{\text{Dissipée par effet Joule dans } R} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right)}_{\text{emmagasinée dans } C \text{ à la date de } t}$$

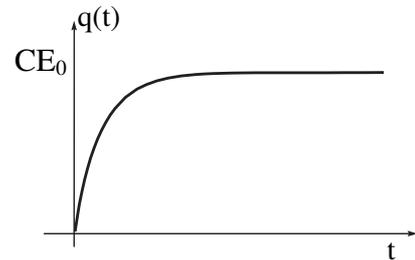
On calcule l'énergie emmagasinée par le condensateur entre  $t = 0$  et  $t = t_0$  avec  $t_0 \gg \tau$ .

Par définition, l'énergie emmagasinée  $\epsilon_C$  entre  $t = 0$  et  $t_0$  est la variation d'énergie électrostatique  $\epsilon_c(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$  du condensateur :

$$\epsilon_c = \epsilon_c(t_0) - \epsilon_c(0) = \frac{1}{2} CE_0 - 0$$

$$\text{Ou encore: } \epsilon_C = |\epsilon_c(t)|_0^{t_0} = \int_0^{t_0} d\epsilon_c(t) = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{reçue par } C} dt$$

$$\epsilon_C = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) dt = \int_0^{t_0} d \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = \left| \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right|_0^{t_0}$$



$$\text{Soit : } \epsilon_c = \frac{1}{2} CE_0 \quad 0 \quad \tau$$

**Propriété :** Cette énergie  $\epsilon_C$  est emmagasinée par le condensateur : elle n'est pas dissipée (Perdue), mais stockée tant que le régime est continu.

**II.3.2.3 Décharge du condensateur :**

Pour simplifier le problème, on réinitialise le temps au début de la décharge ( $t = 0$  est désormais l'instant où on éteint la source qui auparavant avait chargé le condensateur à sa charge maximale  $CE_0$ ).



La loi des mailles donne  $u_R + u_C = 0$ , soit :  $u_R = -u_C = -\frac{q}{C}$

La puissance reçue par la résistance R pendant la décharge vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue par R}(t)} = u_R \cdot i = -\frac{q}{C} \dot{i} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right)$$

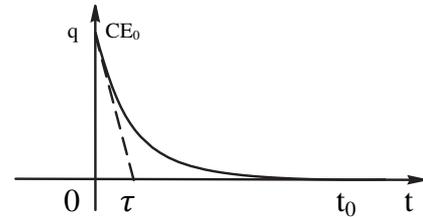
Cette puissance reçue est intégralement dissipée par effet Joule.

• L'énergie dissipée par effet Joule entre les instants  $t = 0$  et  $t_0$  – c'est-à-dire du début à la fin de la décharge, est donc l'énergie reçue par la résistance,  $\epsilon_R$ , entre  $t = 0$  et  $t_0$  avec :

$$\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{\text{reçue par R}(t)} = \frac{d\epsilon_R}{dt} ;$$

$$\epsilon_R = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{Joule}} dt = \int_0^{t_0} -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) dt = \left| -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right|_0^{t_0}$$

Enfinement :  $\epsilon_R = \frac{1}{2} C E_0^2 = \epsilon_C$



**Propriété :** Lors de la décharge du condensateur, toute l'énergie stockée est dissipée dans la résistance par effet Joule.

- Exercice d'application :

Un condensateur de capacité  $C = 20 \mu\text{F}$  est chargé sous une tension  $u = -25 \text{ V}$ . A l'instant  $t = 0$ , on relie le condensateur à un générateur de tension constante  $E = 50 \text{ V}$  en série avec une résistance  $R = 1000 \Omega$ .

Etablir les expressions de  $u$ ,  $q$  et  $i$  en fonction du temps et tracer les courbes correspondantes.

Solution :

Avec les conventions utilisées ;

$$i = C \frac{du}{dt} \quad E = Ri + u = RC \frac{du}{dt} + u$$

$$E = RC \frac{du}{dt} + u \quad \text{C'est une équation différentielle de premier ordre la solution de cette équation}$$

est :  $u = Ae^{\alpha t} + B$  donc la détermination de A, B et  $\alpha$  comme suit :

$$\text{D'où : } E = RC \frac{d(Ae^{\alpha t} + B)}{dt} + (Ae^{\alpha t} + B)$$

$$E = RCA\alpha e^{\alpha t} + Ae^{\alpha t} + B \quad E = B \quad \text{et} \quad RCA\alpha + A = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{RC} \quad \alpha = -\frac{1}{1000 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = -50 \quad \alpha = -50\text{s}^{-1}$$

$$\text{De plus à } t = 0, u = -25\text{V} \quad -25 = Ae^0 + B = A + B$$

$$-25 = A + E = A + 50 \quad A = -75\text{V} \quad \text{et} \quad B = 50\text{V}$$

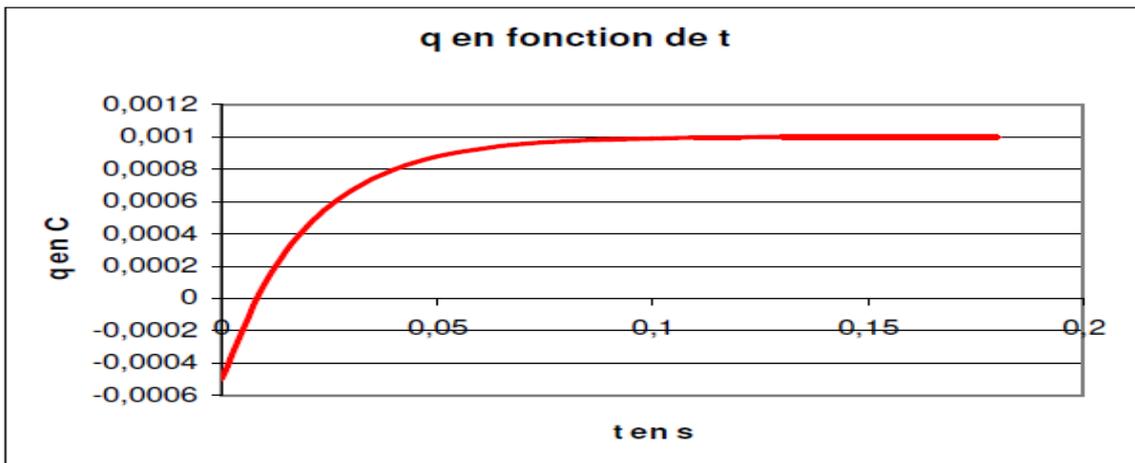
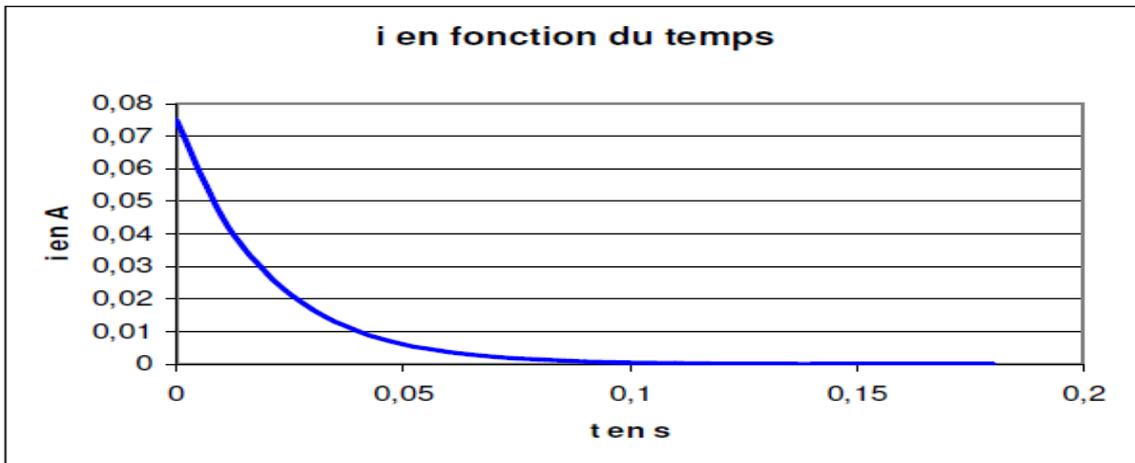
$$\mathbf{u = -75e^{-50t} + 50}$$

$$q = cu = 20 \cdot 10^{-6}(-75e^{-50t} + 50) \Rightarrow \mathbf{q = -1,5 \cdot 10^{-3}e^{-50t} + 10^{-3}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = 1.5 \cdot 10^{-3} \cdot 50 e^{-50t} \Rightarrow i = 75 \cdot 10^{-3} e^{-50t}$$

$$\tau = RC = 0.02s$$

$$5\tau = 0.1s \text{ On trace les courbes pour } 0 \leq t \leq 0.2s$$



**II.3.3 Réponse d'un circuit R, L série à un échelon de tension :**

*- Etude théorique de l'évolution du courant :*

Nous allons étudier la réponse indicielle d'un circuit RL série, puis son régime libre.

$$e(t) = U_R + U_L = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Soit : 
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e(t)}{L}$$



C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants et avec 2nd membre.

♦ **Définition :** L'homogénéité de la relation impose  $\tau = R/L$  homogène à un temps : c'est le *temps caractéristique / constante de temps* du circuit RC série.

- *Etablissement du courant :*

$e(t)$  est un échelon de tension, soit : 
$$\begin{cases} e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ e(t) = E_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

A  $t \geq 0$  l'équation différentielle s'écrit : 
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}$$

La solution de (1) est :  $i = i_G + i_P$  (sol. générale de l'éq. Sans 2<sup>nd</sup> membre + sol. Particulière de l'éq. avec second membre).

La solution générale de (.)  $i_G = Ae^{-\frac{Rt}{L}}$  Avec  $\mu \in \mathbb{R}$   
 et  $i_P = c^{te}$  (puisque le second membre de (.) est constant)

Donc  $i_P$  doit vérifier  $\frac{di_P}{dt} + \frac{R}{L}i_P = \frac{E_0}{L}$  d'où  $i_P = \frac{E_0}{R}$ . Finalement :  $i(t) = \frac{E_0}{R}(1 - Ae^{-\frac{Rt}{L}})$

• Pour déterminer la constante d'intégration  $A$ , on a besoin d'une condition initiale (C.I.), c'est-à-dire la valeur de l'intensité  $i$  à  $t \geq 0$

✚ On note le temps « Juste avant  $t = 0$  » comme suit :  $t = 0^-$ .

✚ On note le temps « Juste après  $t = 0$  » comme suit :  $t = 0^+$ .

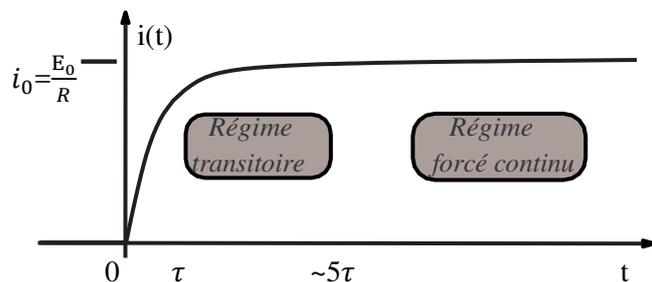
On suppose, par exemple, qu'en  $t = 0^-$  il n'y a aucun courant dans le circuit. La condition initiale s'écrit donc :  $i(0^-) = i_0 = 0$ .

• Or, on sait que le courant traversant une bobine est une fonction continue du temps .

D'où :  $i(0^+) = i(0^-) = i_0 = 0$ , par continuité de l'intensité  $i$ .

On a donc :  $i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t = 0^+) = \frac{E_0}{R} - Ae^{-\frac{R}{L} \cdot 0} \end{cases} \implies A = \frac{E_0}{R}$

Conclusion :  $i(t) = \frac{E_0}{R}(1 - Ae^{-\frac{Rt}{L}})$



Lorsque  $t \longrightarrow \infty$ ,  $i \longrightarrow \frac{E_0}{R} = i_0$   
 le régime transitoire s'efface et laisse place au régime permanent continu.

• Par suite :  $\frac{di}{dt} = \frac{E_0}{L}e^{-\frac{Rt}{L}}$  soit  $(\frac{di}{dt})_{t=0} = \frac{E_0}{L}$

Donc, l'équation de la tangente à la courbe en O (0, 0) est :  $y = \frac{E_0}{L}t$ .

On a  $y = I_0 = \frac{E_0}{R}$  pour  $t = \frac{L}{R} \frac{E_0}{R} = \frac{L}{R} = \tau$ .

**Propriété :** On se rend compte que  $\tau = \frac{L}{R}$  donne un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

Ordre de grandeur :

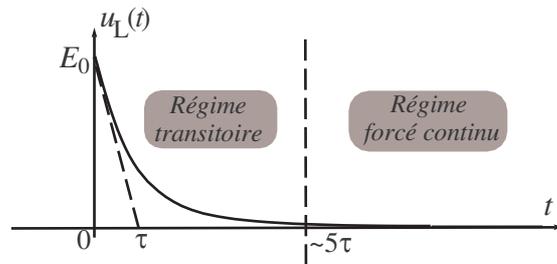
$$\left\{ \begin{array}{l} L \approx 10^{-3} \text{ H} \\ R \approx 10^3 \text{ } \Omega \end{array} \right. \Rightarrow \tau \approx 10^{-6} \text{ s.} \dots \text{C'est très faible : le régime transitoire s'éteint \text{ \textit{rapidement.}}$$

• Représentation de  $u_L$  tension aux bornes de la bobine :  $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E_0}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}$

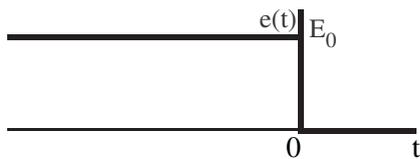
Soit :  $u_L = E_0 e^{-\frac{Rt}{L}} = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  .

Pendant le régime transitoire, la bobine cherche à ‘contrer’ la tension du générateur en imposant une tension de sens opposé (loi de Lenz).

En régime établi (régime permanent continu),  $u_L = 0$ . On retrouve qu'en régime continu la bobine se comporte comme un fil conducteur.

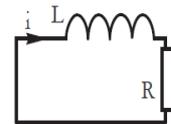


- Extinction de la source (étude du régime libre) :



Pour simplifier les calculs, on réinitialise le temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } t < 0 : e(t) = E_0 \\ \text{Pour } t \geq 0 : e(t) = 0 \end{array} \right.$$



• Le montage se ramène alors à

La loi des mailles s'écrit, pour  $t \geq 0$  :  $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$

C'est une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants et sans 2<sup>nd</sup> membre.

• La solution s'écrit :  $i = B e^{-\frac{Rt}{L}}$  Avec  $B \in \mathbb{R}$

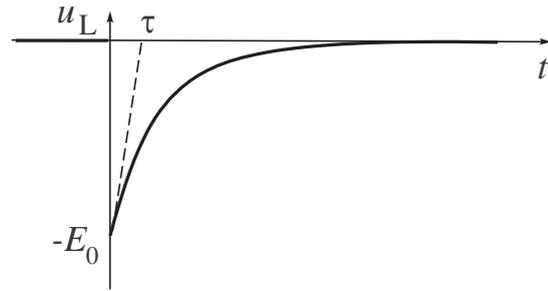
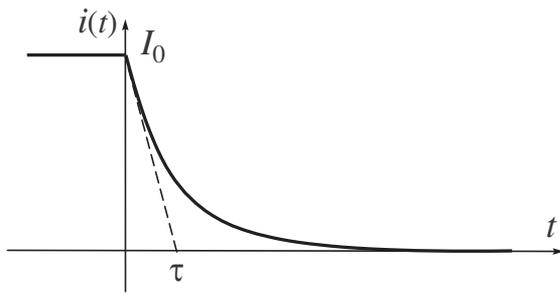
De plus, par continuité de l'intensité traversant la bobine, on a :

$$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t = 0^+) = \frac{E_0}{R} - A e^{-\frac{R}{L}t} \end{cases} \Rightarrow \text{d'où } B = \frac{E_0}{R} \text{ . Finalement } i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

Cl : donc la tension aux bornes de la bobine est :  $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E_0}{R} \left(\frac{R}{L} e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

Soit :  $u_L = -E_0 e^{-\frac{Rt}{L}}$

On se rend compte que le régime libre est un régime transitoire de durée de l'ordre du temps caractéristique du circuit RL série  $\tau = \frac{L}{R}$  : au bout de « quelques »  $\tau$ ,  $i \rightarrow 0$  et  $u_L \rightarrow 0$ .



**- Etude énergétique :**

La puissance instantanée reçue par la bobine :

La puissance fournie par le générateur au reste du circuit vaut :

$$\mathcal{P}_{fournie} = e \cdot i$$

(On suppose la source de tension idéale, donc sans résistance interne.)

D'après la loi des mailles :  $e = Ri + L \frac{di}{dt}$ , d'où

$$\mathcal{P}_f = \underbrace{Ri^2}_{\text{Puissance Dissipée par effet Joule dans R}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\mathcal{P}_L \text{ puissance reçue par la bobine}}$$

Calcul de l'énergie emmagasinée  $\epsilon_L$  par la bobine entre  $t=0$  et  $t_0$

On a, par définition :  $\mathcal{P}_L = \frac{d\epsilon_L}{dt}$

$$\Rightarrow \epsilon_L = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_L dt = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \left| \frac{1}{2} Li^2 \right|_0^{t_0} = \frac{1}{2} Li(t_0)^2 - 0 = \frac{1}{2} Li^2$$

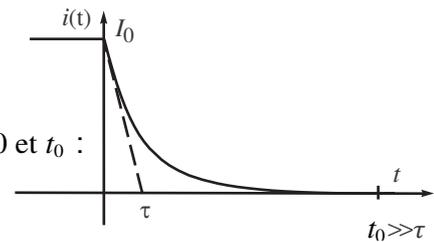
$$\Rightarrow \epsilon_L = \frac{1}{2} Li^2$$

**Propriété :** Cette énergie est stockée dans la bobine tant qu'on est en régime permanent continu.

**- Extinction de la source:**

On réinitialise le temps : ainsi, la date  $t = 0$  correspond à l'extinction de la source, soit :  $i(t = 0^-) = I$ . Cette fois, à  $t = t_0$ , l'intensité est nulle.

- Calcul de l'énergie  $\epsilon_R$  dissipée dans  $R$  par effet Joule entre  $t = 0$  et  $t_0$  :



À tout instant  $t$ , on a la relation :  $\mathcal{P}_j = Ri^2 = \frac{d\epsilon_R}{dt}$

$$\text{Par suite : } \epsilon_R = |\epsilon_R(t)|_0^{t_0} = \int_0^{t_0} \frac{d\epsilon_R(t)}{dt} dt = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{Joule} dt = \int_0^{t_0} Ri^2 dt$$

Or le circuit est équivalent au circuit ci-contre.

$$\text{Donc } Ri = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow Ri^2 = -Li \cdot \frac{di}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

$$\epsilon_R = \int_0^{t_0} -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \left| -\frac{1}{2} Li^2 \right|_0^{t_0} = 0 - \left( -\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

$$\text{CI : } \epsilon_R = \frac{1}{2} Li^2 = \epsilon_L$$



**Propriété :** Toute l'énergie stockée dans la bobine idéale est intégralement restituée et a été (ici) dissipée par effet Joule.

**- Exercice d'application :**

Un circuit RL série avec  $R = 50 \Omega$  et  $L = 10 \text{ H}$  est alimenté par une tension constante  $E = 100 \text{ V}$  à l'instant  $t = 0$  où l'interrupteur est fermé.

1. Etablir les expressions, en fonction du temps de  $i$ , de  $u_R$  et de  $u_L$ .
2. Déterminer la valeur de l'intensité du courant  $i$  à l'instant  $t = 0,5 \text{ s}$  et le temps au bout duquel  $u_R = u_L$ .
3. Tracer les courbes représentatives de  $u_R$  et de  $u_L$  en fonction du temps.

**Solution :**

$$1. \quad E = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow i = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$u_R = Ri = E \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \left( \frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-\frac{R}{L}t}$$

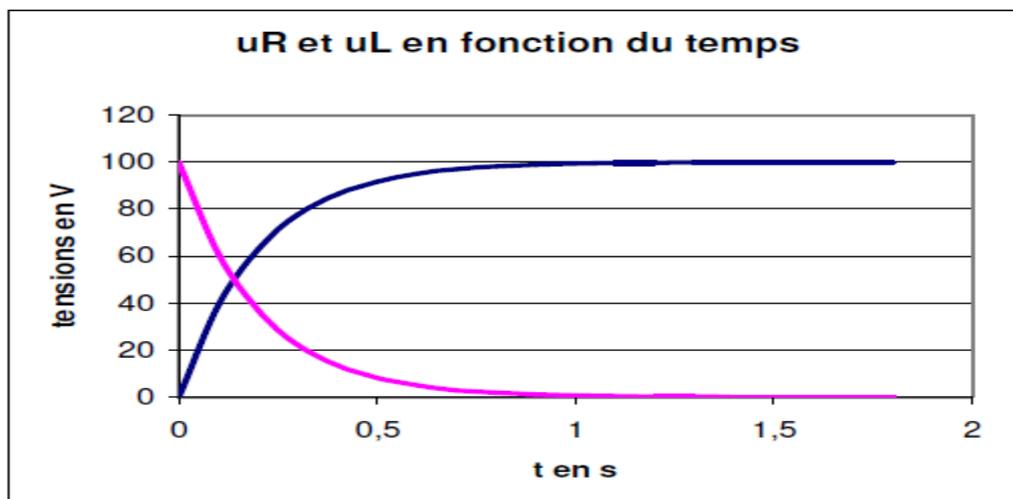
$$2. \quad \text{A.N } i = \frac{100}{50} \left( 1 - e^{-\frac{50}{10} \cdot 0,5} \right) \quad i = 2(1 - e^{-2,5}) = \mathbf{1.84A}$$

$$u_R = u_L = \frac{E}{2} = \mathbf{50V}$$

$$50 = -100e^{-\frac{50}{10}t} \quad e^{-5t} = -0,5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t = 0.138s}$$

$$3. \quad \tau = \frac{L}{R} = 0,2s \Rightarrow 5\tau = 1s$$

Il faut faire varier  $t$  de 0 à plus de 1s pour observer sur les courbes le régime permanent comme indique la figure suivante :



II.3.4 Réponse indicielle d'un circuit RLC Série (réponse à un échelon de tension) :

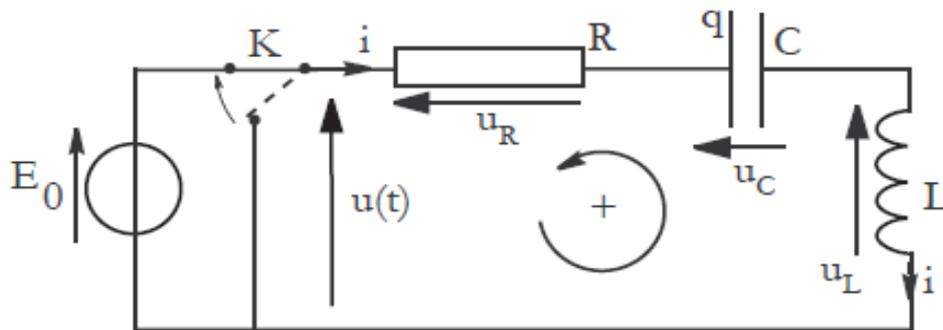
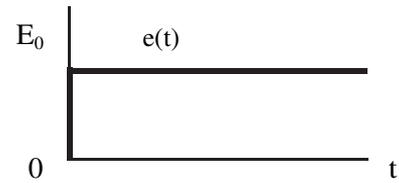
Dans tout ce paragraphe, on suppose le condensateur initialement

déchargé :  $q(t = 0^-) = q(t = 0^+) = q_0 = 0$ .

• On ferme l'interrupteur K à l'instant  $t = 0$ .

la tension  $u(t)$  aux bornes du circuit (RLC) série est un échelon de tension.

$\forall t$ , on applique la loi des mailles :



$$-u(t) + Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = 0$$

avec  $i = \frac{dq}{dt}$  soit :  $L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)$

Ainsi :  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{u(t)}{L} \iff \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{u(t)}{L}$

Le circuit est régi par une équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre à coefficients constants avec 2<sup>nd</sup> membre.

• Pour  $t \geq 0$ , on peut écrire :  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L}$

Donc la solution générale de l'équation :  $q(t) = q_G(t) + q_P(t)$ , avec :

- ✓  $q_G$  : solution générale de l'équation sans 2<sup>nd</sup> membre ; elle correspond au régime libre du circuit (RLC) qui est transitoire ;
- ✓  $q_P$  : solution particulière de l'équation avec 2<sup>nd</sup> membre ; ce second membre traduit la présence d'une source qui impose un régime forcé au circuit (RLC) ; si la f.é.m. est continue, ce régime forcé est permanent continu.

• On cherche  $q_P$  sous la forme d'une fonction constante puisque le 2<sup>nd</sup> membre est constant ; l'équation devient :

$$0 + 0 + \omega_0^2 q_P = \frac{E_0}{L} \Rightarrow q_P = \frac{E_0}{\omega_0^2 L} = CE_0 \text{ Soit : } q_P = CE_0$$

• Trois cas se présentent pour la solution  $q_G$  : ils correspondent aux trois régimes libres transitoires possibles :

- ✚ Régime libre apériodique
- ✚ Régime libre critique
- ✚ régime libre pseudo-périodique

• **Exemple** : cas de régime libre transitoire est pseudo-périodique :  $\Delta < 0$  et  $Q > \frac{1}{2}$ .

Les racines de l'équation caractéristique de l'équation sans 2<sup>nd</sup> membre sont des racines complexes conjuguées, qu'on peut écrire sous la forme  $r_{1/2} = -\frac{t}{\tau} \pm j\omega$  – et donc :

$$q_G(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ Avec : } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Alors , la solution générale de (.) s'écrit :

$$q(t) = q_P + q_G = CE_0 + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow i(t) = \left[ (B\omega - \frac{A}{\tau}) \cos \omega t - (A\omega - \frac{B}{\tau}) \sin \omega t \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Dans les expressions précédentes, A et B sont deux constantes d'intégration fixées par les Conditions Initiales ; choisissons le cas initial suivant :  $\{q(0^-) = q_0 = 0 ; i(0^-) = i_0 = 0\}$ .

Dès lors :

- la conservation de la charge aux bornes du condensateur se traduit par :

$$q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = q_0 = 0 \\ q(t = 0^+) = CE_0 + A \end{cases} \Rightarrow A = -CE_0$$

- la conservation de l'intensité traversant la bobine se traduit par :

$$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t = 0^+) = -\frac{A}{\tau} + B\omega \end{cases} \Rightarrow B = \frac{A}{\tau\omega} = \frac{CE_0}{\tau\omega}$$

Enfinement : 
$$q(t) = CE_0 + \left[ 1 - (\cos \omega t + \frac{1}{\tau\omega} \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

L'expression finale de q(t) permet de retrouver celle de l'intensité dans le circuit :

$$i = \frac{dq}{dt} = -CE_0 + \left[ \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{t}{\tau}\right) (\cos \omega t + (\omega + \frac{1}{\tau^2\omega} \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

Soit : 
$$i(t) = CE_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + (\omega + \frac{1}{\tau^2\omega}) \sin \omega t$$

• Commentaires :

✚ On peut prévoir, avant de faire les calculs, les valeurs des grandeurs, une fois le régime transitoire passé, car le régime est alors continu.

- En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

D'où :  $i = 0$  et donc  $u_R = Ri = 0$  V pour  $t \gg \tau$ .

- En régime continu, la bobine se comporte comme un fil, donc la tension à ses bornes est nulle :

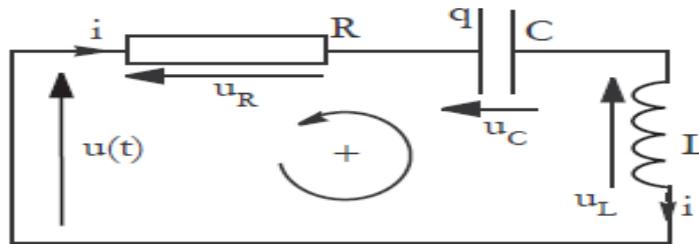
$u_L = 0$  V et on a :  $E_0 = u_R + u_C + u_L = u_C = q/C$

Soit :  $q = CE_0$  pour  $t \gg \tau$ .

On déduit de la remarque précédente que  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}$  est bien l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

- Etude énergétique en régime libre :

$\forall t$ , on applique la loi des mailles :



$$u_R + u_C + u_L = 0 \Leftrightarrow Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

avec  $i = \frac{dq}{dt}$

En multipliant l'équation par  $i$  :

$$Ri^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = -Ri^2$$

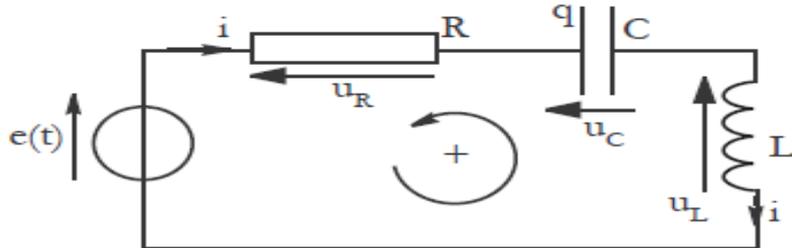
On a vu que :

- $\epsilon_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$  est l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur à l'instant  $t$  ;
- $\epsilon_L(t) = \frac{1}{2} Li^2$  est l'énergie emmagasinée par la bobine à l'instant  $t$  ;

Donc  $\epsilon(t) = \epsilon_C(t) + \epsilon_L(t)$  est l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine à l'instant  $t$ .

**Conclusion :** Lors du régime libre, l'énergie emmagasinée  $\varepsilon(t)$  diminue au cours du temps : elle est dissipée par effet Joule dans la résistance R.  $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -Ri^2 < 0$

- **Circuit RLC série branché sur un générateur :**



• Loi des mailles :  $-e + Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

En multipliant chaque membre de cette équation par l'intensité  $i$ , il apparaît la puissance fournie par le générateur (supposé idéal) au reste du circuit

$$\mathcal{P}_f = -ei + Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

Soit:

$$\mathcal{P}_f = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2\right) = \mathcal{P}_J + \frac{d}{dt}(\varepsilon_C(t) + \varepsilon_L(t)) = \mathcal{P}_J + \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

• Remarque : Nous n'avons pas supposé que la f.é.m. était continue ; a priori elle peut être variable. Mais bien sûr, en régime permanent continu ( $e(t) = E_0$ ), la relation précédente est vérifiée : au bout de quelques,  $i = 0$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_J = 0 \quad \text{et de même} \quad \mathcal{P}_f = 0$$

- et comme  $\varepsilon(t) = \frac{1}{2}CE_0$ , on a également :  $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$

-**Retour sur le facteur de qualité Q et le régime pseudo-périodique :**

A) **Facteur de qualité Q :**

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{Ainsi } Q \searrow \text{ lorsque } R \nearrow$$

• En régime libre, nous avons vu que :  $\frac{d\varepsilon}{dt} = -Ri^2 = -\frac{L\omega_0}{Q} \cdot i^2$

→ Il apparaît que pour des expériences de durées  $\Delta t$  identiques, la perte d'énergie emmagasinée du circuit  $|\Delta\varepsilon| \nearrow$  lorsque  $R \nearrow$ , c'est-à-dire lorsque  $Q \searrow$ .

→ Donc :

- plus R est grand et plus le circuit est amorti, plus il perd rapidement son énergie ;
- plus Q est grand et moins le circuit perd rapidement son énergie.
-

**Remarque :**

Le facteur de qualité du circuit (RLC) est un nombre sans dimension qui permet d'évaluer la capacité du circuit à conserver l'énergie qu'il a emmagasinée.

**a) Pertes relatives d'énergie pour un circuit RLC série en régime libre pseudo-périodique sur une pseudo-période :**

- $\varepsilon(t) = \varepsilon_C(t) + \varepsilon_L(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$
- Perte d'énergie sur une pseudo-période :  $|\Delta\varepsilon| = \varepsilon(t) + \varepsilon(t + T)$

Perte d'énergie relative sur une pseudo-période :  $\frac{|\Delta\varepsilon|}{\varepsilon}$

- À chaque instant t, on a :  $i(t + T) = i(t) \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$  et  $q(t + T) = q(t) \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$

D'où :

$$\varepsilon(t + T) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t+T)}{C} + \frac{1}{2} Li^2(t + T) = \left[ \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} Li^2(t) \right] \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right) = \varepsilon(t) \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right)$$

D'où :

$$\frac{|\Delta\varepsilon|}{\varepsilon(t)} = \frac{\varepsilon(t) + \varepsilon(t + T)}{\varepsilon(t)} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}$$

**Rappel de maths :**  $|X| \ll 1 \rightarrow e^x = 1 + x$

Dans le cas des « grands » facteurs de qualité, on a  $T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \simeq T_0$

Ce qui permet d'écrire :  $\frac{2T}{\tau} \simeq \frac{T_0}{\frac{2Q}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 T_0}{Q} = \frac{2\pi}{Q}$

Donc, pour  $Q \gg 2\pi$  :  $e^{-\frac{2T}{\tau}} \simeq e^{-\frac{2\pi}{Q}} \simeq 1 - \frac{2\pi}{Q} \rightarrow$  D'où  $\frac{|\Delta\varepsilon|}{\varepsilon(t)} \simeq \frac{2\pi}{Q}$

**- Exercice d'application :**

Un dipôle RLC est relié à une source de tension  $E = 100 \text{ V}$  avec  $L = 0,1 \text{ H}$   $C = 50 \mu\text{F}$ . A  $t=0$ , le condensateur est déchargé.

**a-Etude théorique de circuit RLC alimenté par un échelon de tension :**

- ✓ Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant le courant et ses dérivées.
- ✓ Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant la charge et ses dérivées.
- ✓ Déterminez l'équation différentielle du second ordre liant la tension de C et ses dérivées

**b-calcul :**

1. Calculer la valeur de la résistance critique  $R_c$
2.  $R = 5 \Omega$  Etudier le régime transitoire et montrer que  $i$  a pour expression

$$i = e^{-25t}(K_1 \cos 446,5t + K_2 \sin 446,5t) \quad \text{Déterminer les constantes ?}$$

A l'aide d'un tableur-grapheur, tracer la courbe représentative de  $i = f(t)$

2. Déterminer l'expression de  $i=f(t)$  et tracer la courbe correspondante pour  $R = R_c$  et pour  $R = 500 \Omega$ .

**Solution :**

a) -

$$- \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$$- \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L}$$

$$- \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

b) -

$$1. R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad R_c = 2\sqrt{\frac{0,1}{50 \cdot 10^{-6}}} = 89,4 \Omega$$

$$2. \quad \lambda = \frac{R}{2L} = 25 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 447$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 ; \left( i^{**} + \frac{R}{L} i^* + \frac{i}{LC} = 0 \right)$$

L'équation caractéristique est  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

Les solutions de l'équation caractéristique sont  $r_1 = -25 + 44,6 j$  et  $r_2 = -25 - 44,6 j$

$$i = e^{-25t}(K_1 \cos 446,5t + K_2 \sin 446,5t)$$

Détermination des constantes :

$$\text{A } t=0, i=0 \quad 0 = e^{-25 \cdot 0} (K_1 \cos 0 + K_2 \sin 0) = K_1 \quad K_1 = 0$$

$$\text{D'où } i = e^{-25t} (K_2 \sin 446,5t)$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \text{à } t=0, i=0 \quad \text{et } q=0$$

$$100 = 0 + 0,1 \frac{di}{dt} + 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 1000$$

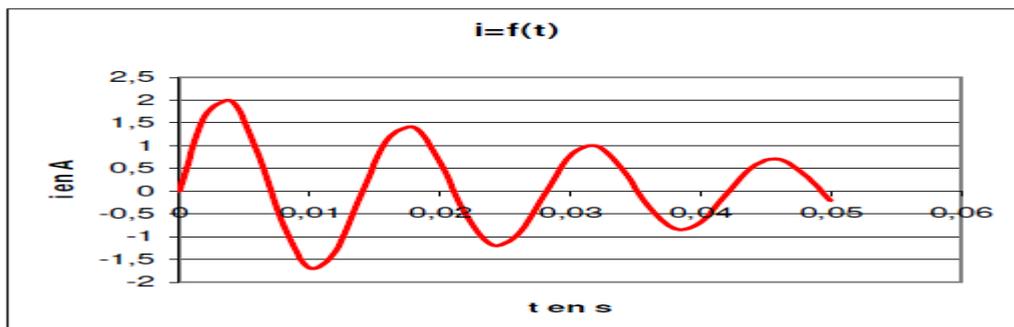
$$\text{Si } i = 2,24 e^{-25t} \sin 446,5t$$

$$\frac{di}{dt} = K_2 (-25 e^{-25t} \cos 446,5t - e^{-25t} (446,5) \sin 446,5t)$$

$$\text{A le temps } t=0 : 1000 = K_2 (-25 e^0 \sin 0 + e^0 (446,5) \cos 0)$$

$$K_2 = \frac{1000}{446,5} = 2,24 \quad \text{D'où}$$

$$i = 2,24 e^{-25t} \sin 446,5t$$



3 .

$$R = R_c$$

$$\alpha = -\lambda = -\frac{R}{2L} \quad \alpha = -\frac{98,4}{0,2} = -447 \text{ s}^{-1}$$

$$i = e^{-447t} (K_1 + K_2 t)$$

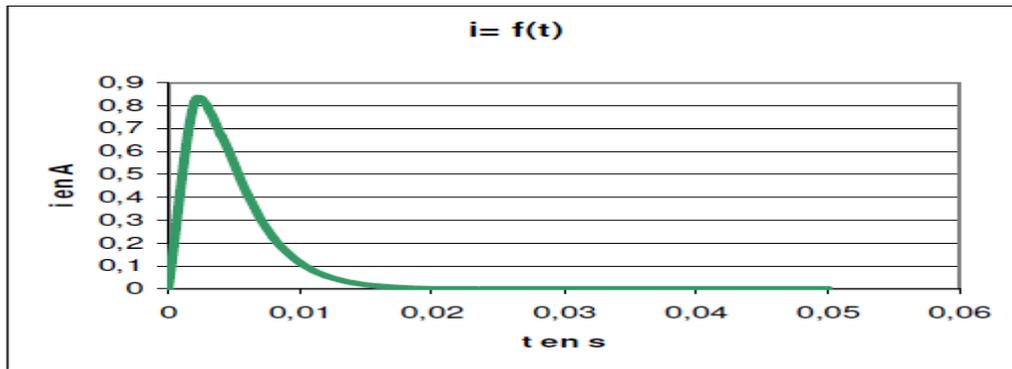
$$\text{A } t=0, i=0 \quad i = e^0 (K_1 + K_2 \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0 \quad \text{d'où } i = K_2 t e^{-447t}$$

$$\frac{di}{dt} = -447 K_2 e^{-447t} t + K_2 e^{-447t}$$

$$\text{A } t=0 \quad \left( \frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 1000$$

$$1000 = -447 K_2 e^0 \cdot 0 + K_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 1000$$

$$i = (1000 e^{-447t}) t$$



4.

$$R=500\Omega$$

$$\lambda = \frac{R}{2L} \quad \lambda = \frac{500}{2 \times 0.1} = 2500 \quad \alpha = -2500$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \beta = \sqrt{2500^2 - 447^2} = 2460$$

$$r_1 = -2500 + 2460 = -40 \quad r_2 = -2500 - 2460 = -4960$$

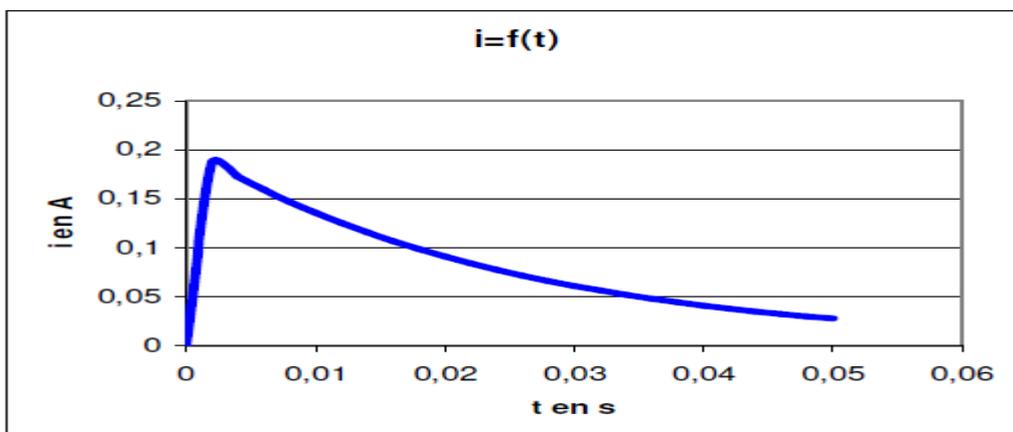
$$i = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}$$

$$\text{A } t=0, \quad i=0 \quad \text{d'où} \quad 0 = k_1 + k_2$$

$$\frac{di}{dt} = k_1 r_1 e^{r_1 t} + k_2 r_2 e^{r_2 t} \quad 1000 = k_1 r_1 e^0 + k_2 r_2 e^0 \quad \text{Car à } t=0, \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = 1000$$

$$\text{On obtient } k_1 = 0.203 \quad \text{et} \quad k_2 = -0.203$$

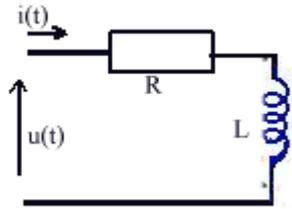
$$i = 0.203 e^{-40t} - 0.203 e^{-4960t}$$



### II.3.5 Application sur l'analyse d'un circuit RL par la méthode de la transformée de Laplace :

On considère la réponse du système correspondant au circuit ci-dessus, soumis à un signal échelon (supposé unitaire)  $U(t)$ . La transformée de Laplace du signal échelon est :  $L[u(t)] = \frac{1}{s}$

Pour  $t > 0$  on a :  $u(t) = E = \text{constante}$ . On cherche le courant  $i(t)$  qui circule dans le circuit de la figure ci-dessous.



1-La loi d'Ohm permet d'écrire l'équation différentielle :

$$u(t) = R.i(t) + L.\frac{di}{dt}$$

2-On applique la transformation de Laplace, dans chacun de ces éléments pris séparément, en se rappelant  $F'(s) = sF(s)$  ; ce qui donne :

$$U(s) = R.I(s) + L.s.I(s)$$

En remplaçant  $U(s)$  par  $E/s$ , l'équation différentielle s'exprime dans l'espace de Laplace par :

$$U(s) = \frac{E}{s} = [R + Ls]I(s)$$

3-On en déduit  $I(s)$  qu'on décompose en termes simples, soit :

$$I(p) = \frac{E}{s} \cdot \frac{1}{R + Ls} = \frac{E/L}{s\left(s + \frac{R}{L}\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + R/L}$$

4-On applique les règles de détermination des coefficients, on obtient :

$$I(p) = \frac{E}{R} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right)$$

La table des transformées nous donne la solution :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right]$$

### II.3.6 Application sur l'analyse d'un circuit RL par la méthode des équations différentielles alimenté par une source alternative:

On considère le circuit ci-après alimenté par une source de tension sinusoïdale :

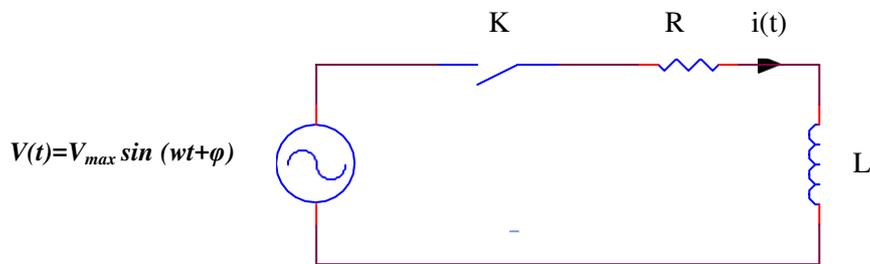


Figure (II.) circuit RL alimenté par une source alternative

On se propose de déterminer l'évolution du courant  $i(t)$  après la fermeture de l'interrupteur sachant que la valeur initiale du courant est nulle.

La loi d'Ohm appliquée au circuit ci-dessus s'écrit :

$$V(t) = Ri(t) + V_L(t) = V_{max} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad V_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$\text{Où : } \left(D + \frac{R}{L}\right) i = \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \varphi)$$

La solution générale est :  $i_G = ce^{-(R/L)t}$  et la solution particulière est la suivante :

$$i_p = e^{-(R/L)t} \int e^{-(R/L)t} \frac{V_{max}}{L} \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

$$i = i_G + i_p = ce^{-(R/L)t} + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1} \omega L/R) \quad (1)$$

Donc à l'instant  $t=0$  le courant est nul ( $i=0$ )

$$\Rightarrow i = 0 = c(1) + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\varphi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

$$\text{On obtient : } c = \frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\varphi - \tan^{-1} \omega L/R)$$

Par le remplacement de  $c$  dans l'équation (1) le courant  $i$  devient :

$$i = e^{-(R/L)t} \left[ \frac{-V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\varphi - \tan^{-1} \omega L/R) \right] + \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \varphi - \tan^{-1} \omega L/R) \quad (2)$$

**Remarque :** on voit dans la fonction de  $i$  un coefficient  $e^{-(R/L)t}$  égal à zéro pour un temps relativement très court mais la valeur entre les parenthèses tout simplement est un constant très compliqué donc sa valeur varie suivant l'angle  $\varphi$  et le temps de fermeture de l'interrupteur K.

On a deux cas :

1. Si :  $(\varphi - \tan^{-1} \omega L/R) = n\pi$  avec  $n = 0,1,2,3, \dots$  donc  $i = 0$  et le courant va à la stabilité directement (régime permanent).
2. Si :  $(\varphi - \tan^{-1} \omega L/R) = (1 + 2n) \pi/2$  donc  $i$  tend vers la valeur maximale possible

Deuxième partie de la fonction (2) est un courant dans l'état permanent et il est suivi par la tension angulaire  $(\tan^{-1} \omega L/R)$

## Chapitre III : Propagation des phénomènes transitoires sur les lignes électriques et les machines tournantes

### III.1 Propagation et modélisation des phénomènes transitoires sur les lignes électriques :

#### III.1.1 Introduction

Les phénomènes transitoires dans les réseaux électriques sont causés par les manœuvres, les défauts et les autres perturbations comme la foudre. Ils impliquent une gamme de fréquence de zéro à quelques MHz. La précision des résultats de simulation obtenus par les analyseurs transitoires de réseaux ou par les calculs informatiques dépend de la représentation des composants du réseau ainsi que des données d'entrée disponibles. Des représentations valables sur toute la gamme de fréquence de 0 (courant continu) à 50 MHz ou plus sont pratiquement impossibles pour tous les composants d'un réseau. C'est pourquoi il faut examiner en détail les caractéristiques physiques d'un élément spécifique d'un réseau qui ont un effet décisif sur la partie du phénomène transitoire présentant un intérêt.

Les principales méthodes de calcul des régimes transitoires dans un réseau électrique sont regroupées en trois grandes familles :

1. Les méthodes basées sur la théorie des ondes mobiles (initialement cette méthode est développée par Bergeron - méthode des caractéristiques)
2. Les méthodes utilisant les transformations de Fourier ou de Laplace (transformation dans le domaine fréquentiel utilisant les théorèmes de convolution)
3. Les méthodes aux différences finies.

Des études de perturbations transitoires sur un système de transmission ont montré que ces changements sont suivis par la naissance d'ondes qui se propagent de part et d'autre du point de défaut. Par exemple, lorsqu'un coup de foudre tombe sur un conducteur de ligne, l'onde de tension induite tend à se diviser en deux ondes se propageant dans des directions opposées.

Quand une onde de surtension atteint un transformateur de puissance, par exemple, elle provoque une répartition des contraintes, qui n'est pas uniforme et peut conduire à la rupture du système d'isolation.

Pour étudier le comportement des lignes de transport d'énergie intégrées dans un réseau, nous allons considérer le modèle d'une ligne à constantes réparties. L'analyse transitoire, comme le comportement en régime permanent, doit être basée sur des équations aux dérivées partielles [09].

### III.1.2 Modélisation du phénomène transitoire

Considérons le modèle à constantes réparties de la ligne présentée à la figure III.1

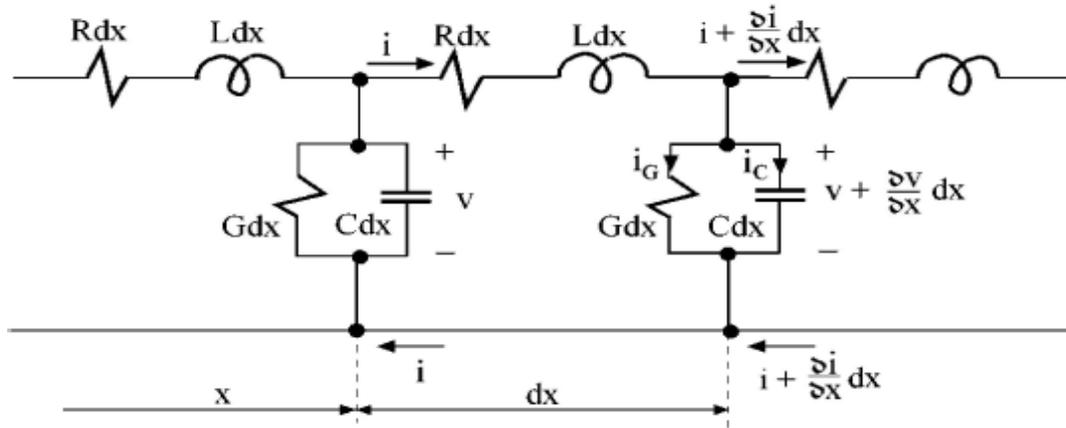


Figure III.1 : Modèle de la ligne à constantes réparties

Avec :  $Rdx$ ,  $Ldx$ ,  $Gdx$  et  $Cdx$  respectivement, la résistance, l'inductance, la conductance et la capacité d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$ .

Soit  $x$  la distance de la source à la section considérée de la ligne ;  $V$  et  $i$  la tension et le courant au début de la section  $dx$  et  $V + (\partial V / \partial x) dx$  et  $i + (\partial i / \partial x) dx$  à la fin de la section  $dx$ .

Notez que la tension et le courant dans une ligne de transmission en transitoire sont des fonctions de deux variables  $x$  et  $t$ . Nous pouvons maintenant écrire deux équations pour cette section par application de deux lois de Kirchhoff :

$$v = \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + Rdx i + Ldx \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{III.1}$$

$$i = \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + Gdx \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + Cdx \frac{\partial}{\partial t} \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \quad \text{III.2}$$

En combinant les termes similaires et en divisant par  $dx$ , on obtient un système d'équation différentielle aux dérivées partielles suivant :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{III.3}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = Gv + C \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{III.4}$$

Ces équations sont dites les équations de la télégraphie dans la physique classique et équations d'ondes dans le cas d'une ligne sans pertes ( $R=G=0$ ).

La solution de ces équations avec les conditions initiales et aux limites connues permet d'obtenir le courant de ligne et de la tension en tout point de la ligne en fonction du temps et de la distance.

L'influence de la résistance  $R$  et de la conductance  $G$  par rapport à  $L$  et  $C$  dans les lignes de transmission est négligeable (signaux à haute fréquence ou en présence de phénomènes transitoires). En outre, comme le temps de propagation des ondes est relativement faible, l'influence des pertes est à peine significative. Donc, pour simplifier l'analyse, la ligne sera supposée sans pertes.

Les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{III.5}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{III.6}$$

A noter que le signe moins dans les équations est due au fait que la tension  $V$  et le courant  $i$  diminuent à mesure que  $x$  augmente (le sens de propagation de  $V$  et  $i$  le long de la ligne).

La dérivée par rapport à  $x$  de l'équation III.5 et par rapport à  $t$  de l'équation III.6 donne :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \quad \text{III.7}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{III.8}$$

En remplaçant l'équation III.7 dans III.8 pour éliminer la variable courante, on obtient l'équation de propagation de la tension :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{III.9}$$

De la même façon, la variable tension peut être éliminée et on obtient l'équation de propagation du courant :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \text{III.10}$$

Les équations III.9 et III.10 sont dites équations d'onde, elles sont identiques pour le courant et la tension. Quand une de ces fonctions est connue, l'autre peut être déterminée en utilisant soit l'équation III.5 ou III.6.

La solution des équations d'onde peut être déterminée de manière intuitive. En faisant attention au fait que les dérivées secondes de la tension  $v$  et du courant  $i$ , par rapport à  $t$  et  $x$ , doivent être directement proportionnelle, la solution peut être toute fonction de variable  $t$  et  $x$  indépendante de la forme :  $w_{1,2} = x \pm ct$  III.11

Une des méthodes les plus adaptées pour solutionner ces équations est la méthode de séparation de variables.

La solution de l'équation III.9 est de la forme :

$$v(x, t) = v_1 + v_2 = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad \text{III.12}$$

Qui satisfait l'équation III.9.

Afin d'assurer cette cohérence et déterminer le sens de la constante  $c$ , nous substituons une des fonctions (équation III.12), par exemple  $f_1$ , dans l'équation III.9. Sa première dérivée par rapport à  $x$  est :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} \quad \text{III.13}$$

Et la seconde dérivée est :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} \quad \text{III.14}$$

La première dérivée de l'équation III.12 par rapport à  $t$  est :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} (-c) \quad \text{III.15}$$

La seconde dérivée est :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} \quad \text{III.16}$$

En remplaçant les équations III.14 et III.16 dans l'équation III.9, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} = LC \cdot c^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} \quad \text{III.17}$$

Or cette égalité est vérifiée si la quantité  $LC \cdot c^2 = 1$ , ou bien  $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (m/s).

Par conséquent, la constante  $c$  a les dimensions de mètres par seconde et représente la vitesse de propagation de l'onde de tension et du courant le long de la ligne. De même, on peut montrer que le deuxième terme ( $f_2$ ) dans l'équation III.12 satisfait à l'équation III.9 avec la même signification de la constante  $c$ .

La fonction  $i$  du courant peut être déterminée en utilisant les équations III.5 et III.13, soit :

$$\frac{\partial f_1}{\partial w_1} = -L \frac{\partial i_1}{\partial t} \quad \text{III.18}$$

Après intégration par rapport à la variable  $t$  :

$$\int \frac{\partial f_1}{\partial w_1} = -L \int \frac{\partial i_1}{\partial t} \quad \text{III.19}$$

Donne :  $[1/(-c)] f_1 = -L i_1$  comme  $\frac{\partial w_1}{\partial t} = -c = \text{constant}$

On obtient :  $i_1 = \frac{1}{cL} f_1(x - ct) = \frac{1}{Z_c} v_1 \quad \text{III.20}$

avec  $Z_c = c \cdot L = \frac{L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

$Z_c$  est l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission sans pertes.

En suivant le même raisonnement on obtient l'expression de  $i_2$  :

$$i_2 = -\frac{1}{cL} f_2(x + ct) = -\frac{1}{Z_c} v_2 \quad \text{III.21}$$

L'expression du courant total est :

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} [f_1(x-ct) - f_2(x+ct)] = i_1 + i_2 \quad \text{III.22}$$

La solution des équations de propagation du courant et de la tension est :

$$v(x, t) = [ f_1(x-ct) + f_1(x+ct) ] = v_1 + v_2 \quad \text{III.23}$$

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} [ f_1(x-ct) - f_1(x+ct) ] = i_1 + i_2 \quad \text{III.24}$$

Ces solutions correspondent à des ondes de tension et de courant se déplaçant à la vitesse  $c$  dans la ligne, pour  $f_1$  dans le sens des  $z$  positifs (onde progressive), pour  $f_2$  dans le sens des  $z$  négatifs (onde régressive).

### III.1.3 Propriétés des ondes de propagation de la tension et du courant dans une ligne de transmission :

Le comportement des fonctions  $v(x,t)$  et  $i(x,t)$  peut être illustré en sélectionnant des points particuliers sur l'onde et suivre sa propagation à des instants différents. Prenons l'argument de  $v_1$  ou  $i_1$  constant, pour le point A,  $v_1=0$ , figure III.2 (a)

$$w_A = x - vt = \text{constants} \quad \text{III.25}$$

Ceci montre que quand  $t$  augmente,  $x$  augmente aussi, donc  $\Delta x = c\Delta t$  et ce point particulier A, a parcouru une distance  $\Delta x$ , comme le montre la figure III.2 (a). Ainsi, la représentation de  $v_1$  en fonction du temps figure III.2 (a) en trait continu, montre que cette onde se déplace dans le sens positif des (+ X) (trait discontinue). Par conséquent, les ondes  $v_1$  et  $i_1$  sont dites des ondes incidentes.

De la même façon, on peut vérifier pour  $v_2$  et  $i_2$  en gardant,

$$w_B = x + vt = \text{constants} \quad \text{III.26}$$

Lorsque  $x$  augmente le temps  $t$  diminue, donc  $\Delta x = -c\Delta t$

Ceci montre pour un point particulier (B) de l'onde  $v_2$  montrée à la figure III.2 (c), semble se déplacer dans le sens négatif des (-X). Ainsi, les ondes  $v_2$  et  $i_2$  sont dites des ondes réfléchies. Dans les deux cas considérés, la constante  $c$  représente la vitesse de propagation de l'onde de tension et du courant.

Dans les lignes de transmission sans pertes ( $R=G=0$ ), les ondes de tension et de courant se propagent sans déformation ni atténuation pour l'onde incidente et l'onde réfléchie figure III.2 (b) et (d).

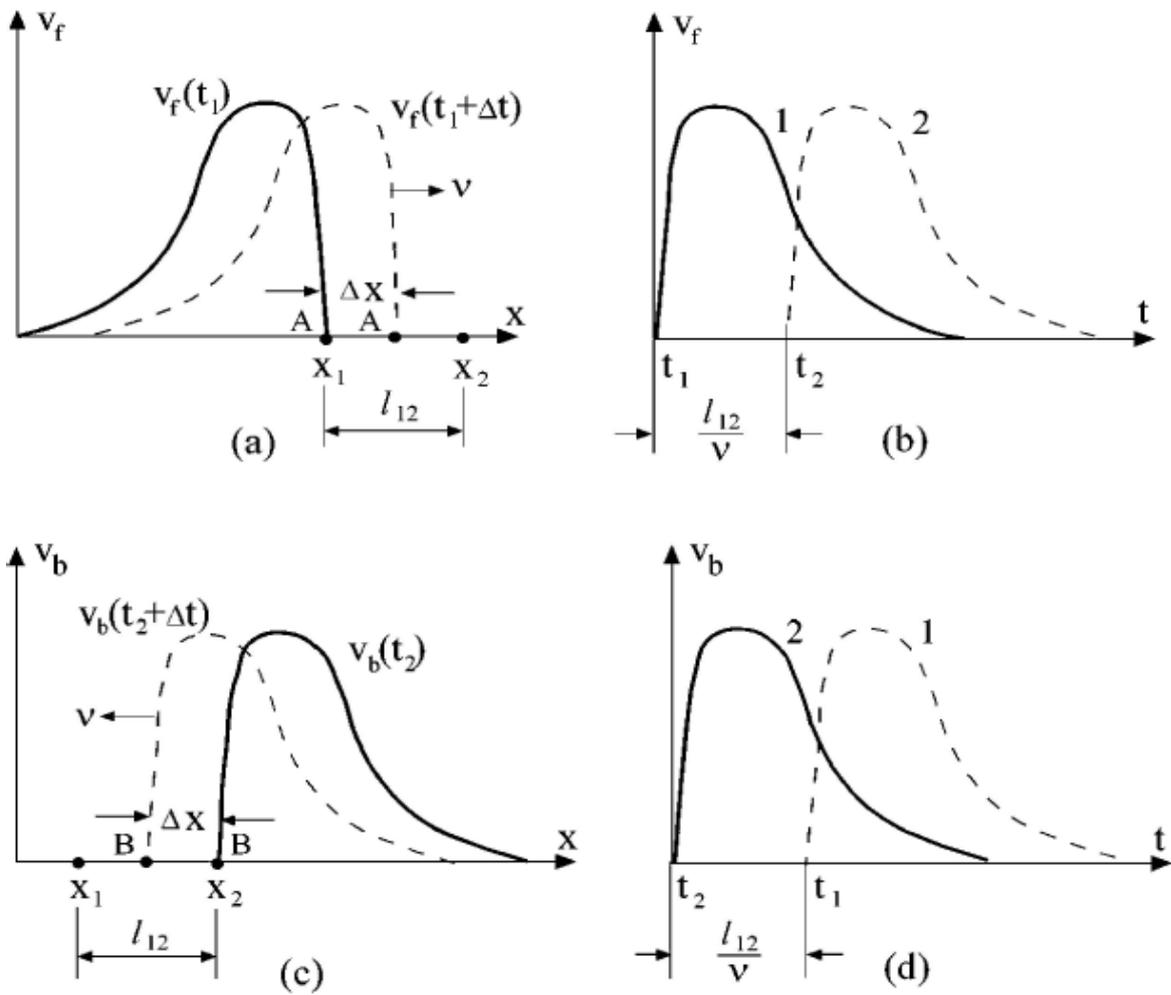


Figure III.2 Onde de tension fonction de la distance de propagation  $x$  et du temps  $t$  :  
 (a) et (b) ondes incidentes, (c) et (d) ondes réfléchies.

En conclusion, il faut mentionner que, en tout point de la ligne y compris les points de discontinuité (extrémité de la ligne, point de connexion de deux lignes), les valeurs instantanées des tensions et courants sur la ligne peuvent s'exprimer par les relations suivantes III.27 et III.28:

$$v = v_1 + v_2 \quad \text{III.27}$$

$$i = i_1 + i_2 \quad \text{III.28}$$

Avec :

$$I_1 = \frac{v_1}{Z_c} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{v_2}{Z_c}$$

### III.1.4 Comportement des ondes de courant et de tension en un point de jonction :

#### III.1.4.1 Ondes incidente, transmise et réfléchi :

Un point de transition est un point de changement de l'impédance caractéristique de la ligne (jonction de deux lignes, jonction d'une ligne aérienne et d'un câble souterrain, un point de court-circuit ou d'ouverture de la ligne). Quand une onde incidente atteint un point de transition, une partie de l'onde est réfléchi et une autre partie est transmise vers l'autre section de la ligne.

Considérons le passage d'une onde mobile d'une ligne d'impédance caractéristique  $Z_1$  vers une ligne d'impédance caractéristique  $Z_2$  (Figure III.3)

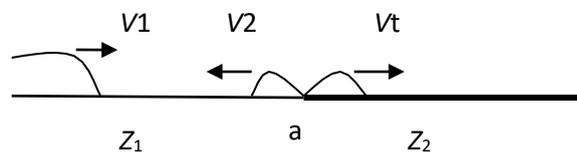


Figure III.3 : Schéma de principe

Au point de transition (a) et compte tenu du principe de continuité du potentiel et du courant de part et d'autre du point (a) on a :

$$v_1 + v_2 = v_t \quad \text{III.28}$$

$$i_1 + i_2 = i_t \quad \text{III.29}$$

Les ondes incidentes  $v_1$  et  $i_1$  sont reliées par la relation :  $\frac{v_1}{i_1} = Z_1$

Les ondes transmises  $v_t$  et  $i_t$  sont reliées par la relation :  $\frac{v_t}{i_t} = Z_2$

Les ondes réfléchies  $v_2$  et  $i_2$  sont reliées par la relation :  $\frac{v_2}{i_2} = -Z_1$

A partir des relations précédentes on obtient les expressions des ondes transmises et réfléchies des courants et tensions :

$$v_2 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} v_1 \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} i_1 = -\frac{v_1}{Z_1}$$

$$v_t = \frac{2z_2}{z_1+z_2} v_1 \quad \text{et} \quad i_t = \frac{2z_1}{z_1+z_2} i_1 = \frac{v_t}{z_2}$$

$$\rho = \frac{z_2-z_1}{z_1+z_2} \quad \text{Est le coefficient de réflexion}$$

$$\alpha = \frac{2z_2}{z_1+z_2} \quad \text{Est le coefficient de transmission}$$

### III.1.4.2 La continuité de la puissance au point de transition :

La puissance du côté de la réflexion de l'onde a pour expression :

$$P_A = (v_1 + v_2)(i_1 + i_2) = \left(\frac{2z_2}{z_1+z_2} v_1\right) \left(\frac{2z_1}{z_1+z_2} i_1\right) \quad \text{III.30}$$

La puissance du coté de la transmission de l'onde a pour expression :

$$P_B = (v_2)(i_2) = \left(\frac{2z_2}{z_1+z_2} v_1\right) \left(\frac{2z_1}{z_1+z_2} i_1\right) \quad \text{III.31}$$

$P_A = P_B$  Ainsi la continuité de la puissance au point de jonction (transition) est vérifiée.

### III.1.4.3 Comportement des ondes de propagation du courant et de la tension à des points particuliers :

- a) Point de transition ouverte (cas d'une ligne ouverte à son extrémité).

Nous avons dans ce cas  $z_2 = \infty$ , la limite de l'expression de l'onde de tension transmise

$v_t = v_1 + v_2$  quand  $z_2$  tend vers l'infinie égale à  $2v_1$ .

De même pour le courant résultant sur la ligne du coté réfléchi,  $i_1 + i_2 = 0$ . L'onde résultante est la superposition de deux ondes de même amplitude et de sens opposé.

Sur la figure III.4 on donne une représentation des ondes de courant et de tension dans le cas de la déconnexion d'une charge d'impédance  $Z_L$  connectée à une source de tension  $V_s$  d'impédance interne  $Z_s$  à travers une ligne d'impédance caractéristique  $Z_c$ .

$V_s$  et  $I_L$  : ondes incidentes,  $V_b$  et  $i_b$  : ondes réfléchies.

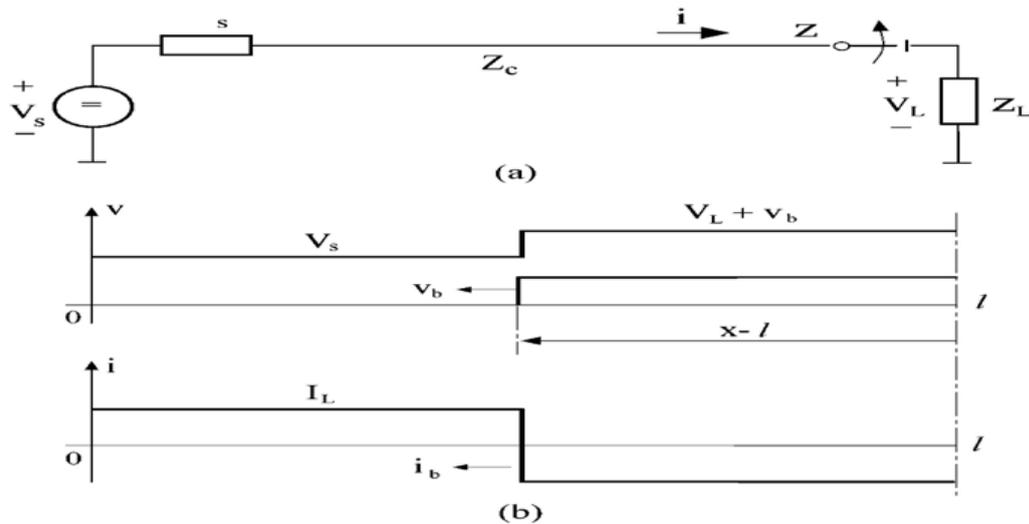


Figure III.4 : Propagation d'ondes dans le cas d'une déconnexion de la charge (a), diagramme des courants et tensions (b).

b) Point de transition en court-circuit (cas d'une ligne à extrémité en court-circuit)

Dans ce cas nous avons  $z_2 = 0$ , et la tension sur la partie réfléchiée de la ligne  $v_t = v_1 + v_2 = 0$ , puisque dans ce cas  $v_2 = -v_1$  ou bien le coefficient de réflexion  $\rho = (-1)$  et  $\alpha = 0$ .

La figure III.5 donne les diagrammes des courants et tension dans le cas d'une ligne à extrémité en court-circuit.

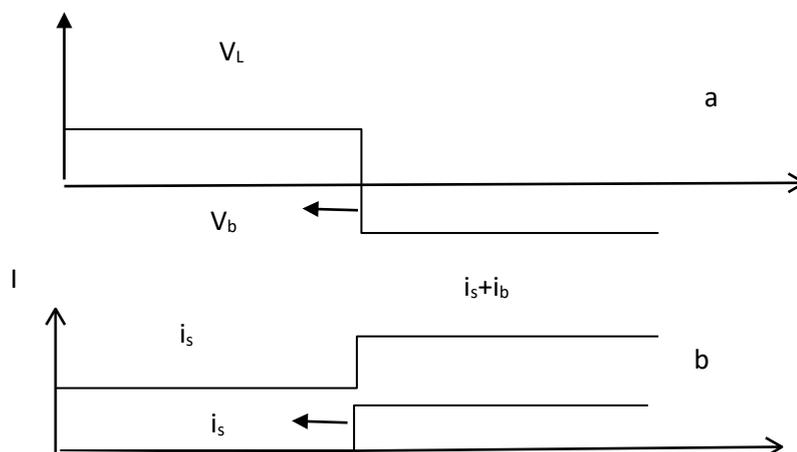


Figure III.5 : Diagrammes des courants et tensions dans le cas d'un court-circuit

Dans le cas d'un court-circuit, au point du défaut, l'onde de tension réfléchiée est de même amplitude que l'onde incidente et de sens opposé, la résultante est une onde nulle qui se

propage du point de défaut vers la source et le courant est une onde qui vaut 2 fois le courant incident.

Il n'y a qu'un seul cas où une tension appliquée à l'entrée de la ligne n'est jamais perturbée par une réflexion parasite : c'est celui où le coefficient de réflexion est nul. Dans ce cas  $Z_1 = Z_2$ . Un cas pratique est celui, par exemple, où un câble BNC (coaxial) est branché en sortie d'un générateur, et le relie à une platine de montage. L'impédance caractéristique d'une ligne coaxiale étant souvent de 50  $\Omega$ , si on veut limiter les réflexions parasites au niveau du branchement sur la platine de montage, réflexions qui pourraient nuire à la « propreté » du signal délivré, il est nécessaire que l'impédance d'entrée de celui-ci soit égale à 50  $\Omega$  (adaptation d'impédance).

**III.1.5 Schéma de Petersen :**

a) Considérons le cas de la jonction de deux lignes, comme le montre la figure III.6.

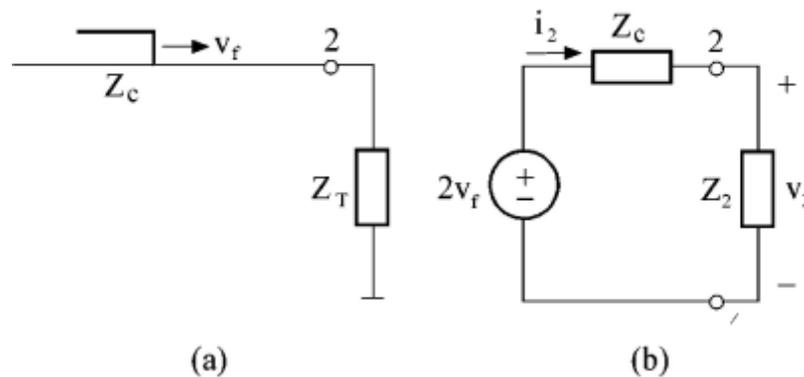


Figure III.6 : Jonction de deux lignes : (a) représentation des lignes, (b) schéma équivalent

Le passage de l'onde incidente  $v_f$  de la ligne d'impédance  $Z_c$  vers la ligne d'impédance  $Z_T$  (figure III.6 (a)) et l'expression de l'onde de tension transmise  $V_t$  est donnée par la relation :

$$v_t = \frac{2z_t}{z_c+z_t} v_f = \alpha v_f \tag{III.32}$$

Où  $\alpha$  est le coefficient de transmission de l'onde de tension.

Cette relation montre que la tension à la réception  $v_t$  peut être obtenue à partir du schéma équivalent de la figure III.6 (b) où les deux lignes sont représentées par leurs impédances connectées en série et le circuit est alimenté par une tension qui vaut deux fois la tension incidente (diviseur de tension).

b) Cas d'une jonction de trois lignes (figure III.7)

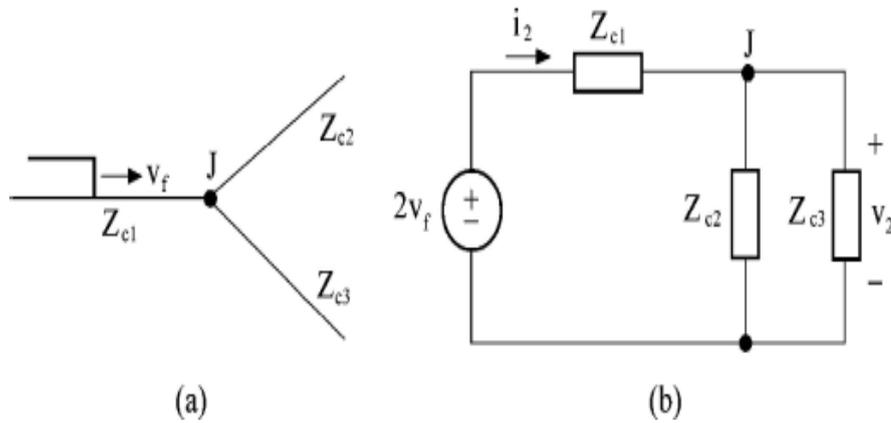


Figure III.7 : Jonction de trois lignes : (a) représentation des lignes, (b) schéma équivalent.

Le concept du circuit équivalent peut être utilisé pour tout type de discontinuité.

Sur la figure III.7 (a) est représenté le cas d'une jonction de trois lignes de transmission, le schéma équivalent est représenté sur la figure III.7 (b), où les deux lignes du coté transmission sont représentées par leurs impédances caractéristiques en parallèle.

L'expression de l'onde de tension transmise est donnée par la relation :

$$v_t = \frac{z_{eq}}{z_{c1} + z_{eq}} 2 v_f \tag{III.32}$$

$$z_{eq} = \frac{z_{c2} z_{c3}}{z_{c2} + z_{c3}} \tag{III.33}$$

Dans le cas d'une jonction à plusieurs lignes :  $z_{c1}, z_{c2}, z_{c2}, \dots, z_{cn}$ .

$$\frac{1}{z_{eq}} = \frac{1}{z_{c2}} + \frac{1}{z_{c3}} + \dots + \frac{1}{z_k} + \frac{1}{z_n} \tag{III.34}$$

$$v_{t2} = v_{t3} = \dots v_{tn} = \frac{z_{eq}}{z_{c1} + z_{eq}} 2 v_f \tag{III.35}$$

III.1.6 Cas d'une ligne fermée sur une résistance R :

La figure III.8 montre l'analyse d'une propagation d'onde dans le cas où la ligne est fermée sur une résistance R de valeur supérieure à  $Z_c$ .

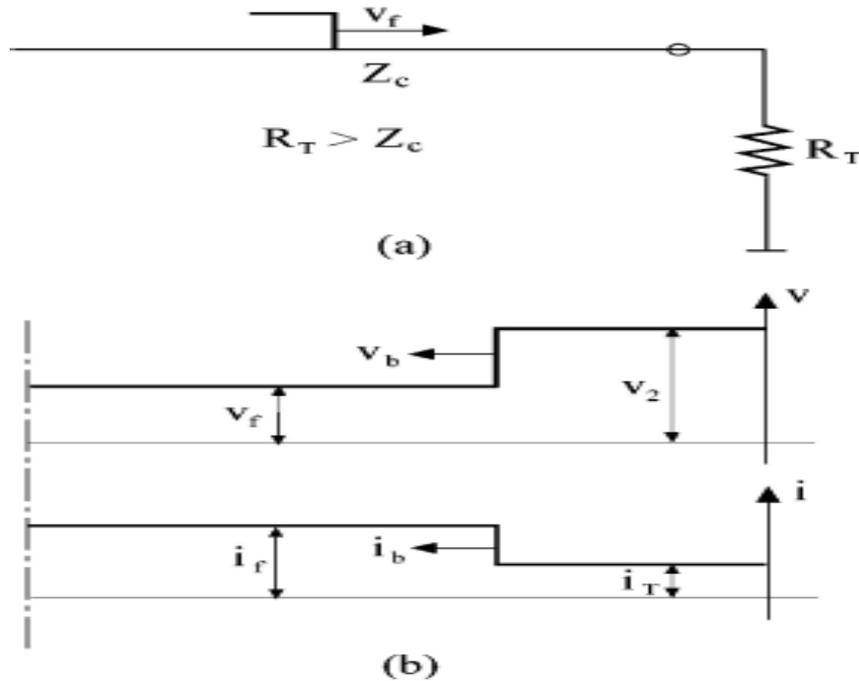


Figure III.8 : Diagramme des tensions et courants d'une ligne fermée sur une résistance  $R_T > z_c$

L'onde réfléchie est déterminée par le coefficient de réflexion, soit :

$$v_b = \rho v_f = \frac{R_T - Z_c}{R_T + Z_c} v_f \tag{III.36}$$

Le coefficient de réflexion  $\rho$  peut être positif ou négatif selon les valeurs relatives de  $R_T$  et  $Z_c$ . ( $\rho=0$ )  $R_T = Z_c$  cas d'une ligne fermée sur son impédance caractéristique).

L'expression du courant réfléchi est :  $i_b = - (v_b / Z_c)$

La tension transmise  $v_t$  et le courant transmis  $i_t$  à la réception sont :

$$v_t = v_b + v_f \text{ et } i_t = i_b + i_f$$

La figure III.8 (b), montre les diagrammes des courants et tension dans le cas d'une ligne fermée sur une résistance  $R_T > z_c$ . Ainsi, on voit que  $v_b$  est positif alors que  $i_b$  est négatif. L'onde résultante sur la ligne de transmission est caractérisée par une augmentation de la

tension et une réduction du courant.

Dans le cas où  $R_T < z_c$ , l'onde résultante à l'extrémité de la ligne est caractérisée par réduction de la tension et une augmentation du courant.

**III.1.7 Capacité en dérivation :**

La figure III.8 montre deux lignes connectées en série et une capacité en parallèle à la jonction des deux lignes.

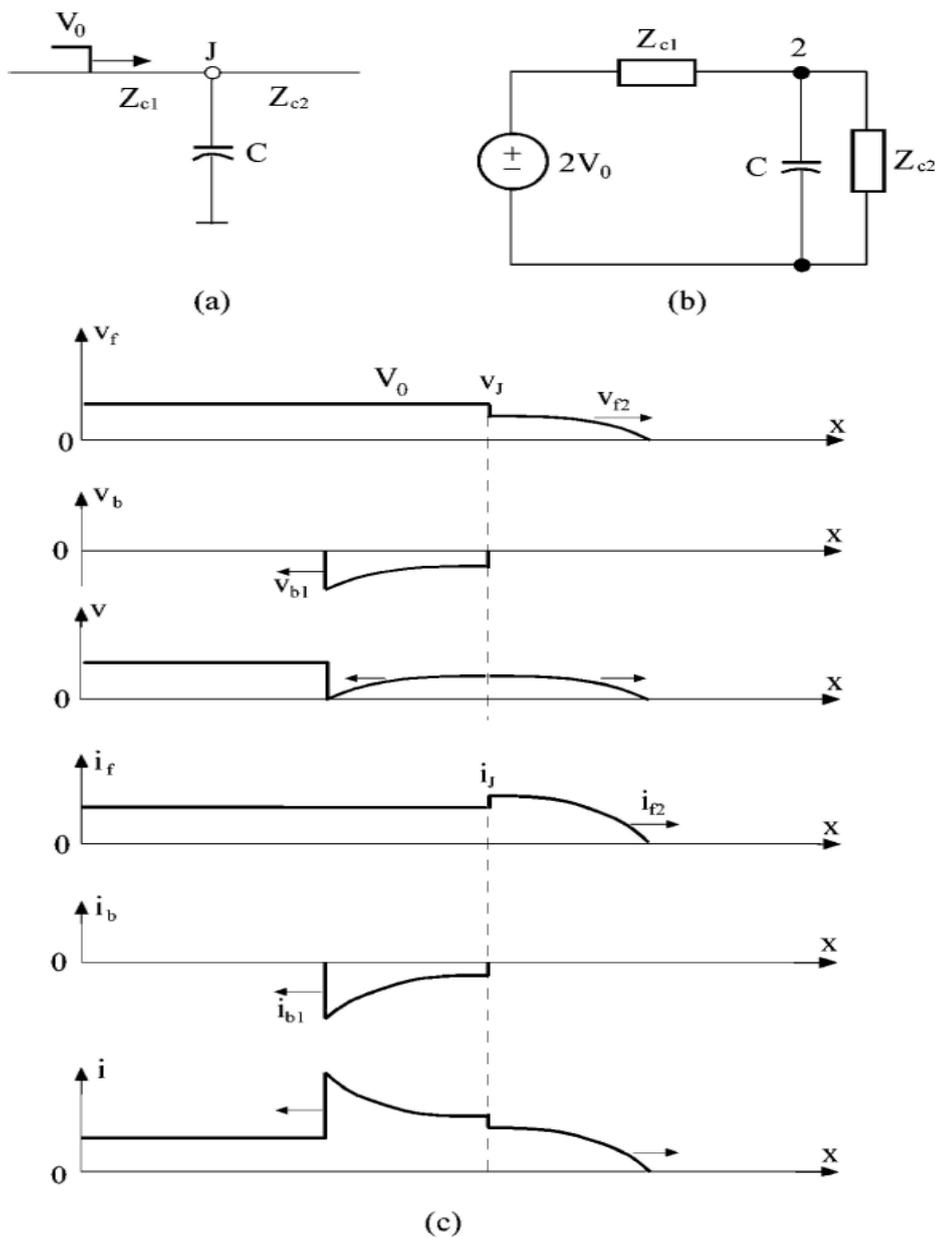


Figure III.8 : Diagrammes des courants et tensions dans le cas d'une capacité en parallèle entre deux lignes.

A partir du schéma équivalent montré à la figure II.8 (a) on peut écrire le système d'équation suivant :

$$2V_0 = z_{c1}i + v_{f2} \quad \text{III.37}$$

$$i = \frac{v_{f2}}{z_{c2}} + \frac{dv_{f2}}{dt} \tau_f \quad \text{III.38}$$

De (1) et (2) on obtient :

$$\frac{dv_{f2}}{dt} = \frac{z_{c1} + z_{c2}}{z_{c1}z_{c2}} v_{f2} = \frac{2V_0}{cz_{c1}}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, la résolution de cette équation avec les conditions initiales : à  $t=0$ ,  $v_{f2}=0$ , donne :

$$v_{f2} = \frac{2z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} V_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{III.39}$$

L'expression de l'onde de tension réfléchiée  $v_b$  est :

Nous avons au point de jonction :  $v_{b1} + V_0 = v_{f2}$

alors  $v_{b1} = v_{f2} - V_0$

$$v_{b1} = \left[ \alpha \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) - V_0 \right] = V_0 (\alpha - 1) - \alpha V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{III.40}$$

Les coefficients  $\rho$  et  $\alpha$  représentent respectivement le coefficient de réflexion et de transmission, les indices 1 et 2 sont liés au milieu de propagation de l'onde.

Ici l'expression de  $v_{f2}$  est la même que l'expression de  $v_c$ .

La figure III.8 (c) montre les diagrammes des tensions et des courants, les expressions de ces diagrammes sont résumées comme suit :

La répartition de la tension sur la ligne de départ est :

$$v_{f2}(x, t) = \frac{2z_{c2}}{z_{c1} + z_{c2}} V_0 \left( 1 - e^{-\frac{(t-x/c)}{\tau}} \right) \quad \text{III.41}$$

L'onde réfléchiée se propageant le long de la ligne est :

$$v_{b1}(x, t) = \rho V_0 - \alpha V_0 e^{-(t-x/c)/\tau} \quad \text{III.42}$$

Les ondes de propagation du courant ont la même forme que celles de la tension et leurs valeurs sont liées à la tension par les impédances caractéristiques des lignes.

III.1.8 Oscillation des ondes mobiles :

Soit une ligne de transmission d'impédance caractéristique  $Z_c$  connectée entre un générateur d'impédance interne  $Z_s$  et une charge d'impédance  $Z_L$ . On suppose que  $Z_c = Z_s = Z_L$ , figure III.9.

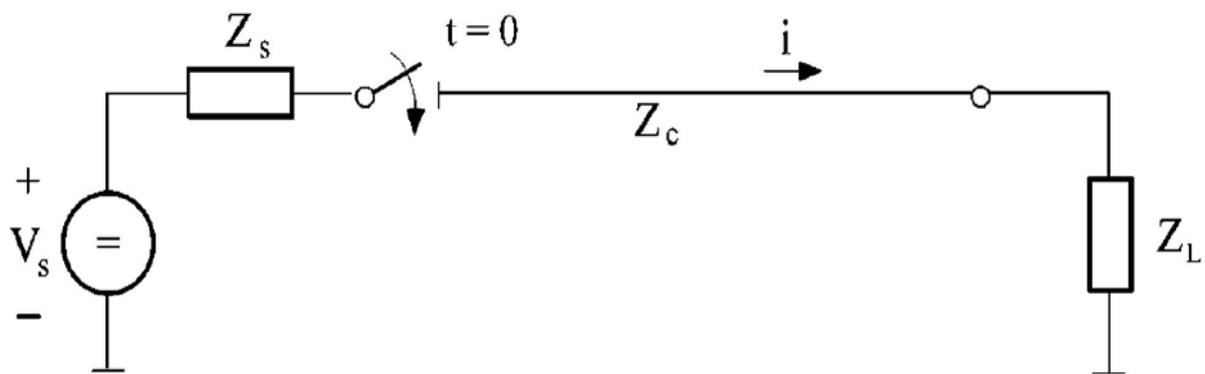


Figure III.9 : Schéma de principe sur les oscillations d'ondes

La première onde mobile transmise à la ligne (un échelon de tension  $U(t)$  sera :

$$v_{f1}(0, t) = \alpha V_s = \frac{z_c}{z_c + z_s} V_0 U(t) \tag{III.43}$$

Où  $U(t)$  est un échelon de tension. La première onde de réflexion apparaît une fois l'onde incidente a atteint le point de réception.

On définit :  $\alpha$  Coefficient de transmission de la source vers la ligne (Obtenu par la relation du diviseur de tension).

$\rho_s$  : Coefficient de réflexion de la source

$\rho_r$  : Coefficient de réflexion de la charge

$$v_{b1}(l, t) = \rho_r v_{f1} = \alpha \rho_r V_0 U(t - t_r) \tag{III.44}$$

Avec  $t_r = l/c$  est le temps de propagation de l'onde depuis  $x=0$  jusqu'à  $x=l$

La seconde onde incidente apparait après que l'onde réfléchi ait atteint le point de connexion avec la source. En fait, il s'agit d'une onde réfléchi par la source avec le coefficient  $\rho_s$ .

$$\text{Elle a pour expression : } v_{f2}(0, t) = \alpha \rho_r \rho_s V_0 U(t - 2t_r) \quad \text{III.45}$$

De la même manière on obtient la seconde onde réfléchi par la charge.

$$v_{b2}(l, t) = \alpha \rho_s \rho_r^2 V_0 U(t - 3t_r) \quad \text{III.46}$$

Pour la K ième onde incidence,  $k > kt_r$

$$v_{f,k}(x, t) = (\rho_s \rho_r)^{k-1} \alpha V_0 U\left(t - 2(k-1)t_r - \frac{x}{c}\right) \quad \text{III.47}$$

$$v_{b,k}(x, t) = (\rho_s \rho_r)^{k-1} \rho_r \alpha V_0 U\left(t - (2k-1)t_r - \frac{x}{c}\right) \quad \text{III.48}$$

Les ondes de courant sont reliées aux ondes de tension par l'impédance caractéristique de la ligne. Soit :

$$i_{f,k} = \frac{v_{f,k}}{z_c} \quad , \quad i_{b,k} = -\frac{v_{b,k}}{z_c}$$

Ainsi, la réponse complète consiste en une série infinie d'ondes de courant et de tension qui se superposent successivement en se propageant de la source vers la charge et de la charge vers la source.

Chacune des ondes incidentes et réfléchies peuvent être traitées comme une progression géométrique décroissante de raison  $\rho_s \rho_r$  et de premier terme  $\alpha V_0$  et  $\alpha \rho_r V_0$  respectivement.

La valeur finale de la tension sur la ligne (quand  $t \longrightarrow \infty$ ) peut être exprimée comme la somme de ces deux progressions.

$$\text{Soit : } v(x, t) = \frac{\alpha V_0}{1 - \rho_s \rho_r} + \frac{\alpha \rho_r V_0}{1 - \rho_s \rho_r} = V_0 \frac{z_T}{z_S + z_T} \quad \text{III.49}$$

Ce ci est l'expression de la tension à la réception en régime permanent.

### III.1.9 Diagramme de BEWLEY

La tension peut être déterminée à un instant  $t$  et à une distance  $x$  donnés graphiquement en utilisant le diagramme de Bewley. Ce diagramme permet de donner une représentation graphique de la propagation d'une onde de tension ou de courant au moment de sa transmission ou sa réflexion à partir de l'extrémité de la ligne, figure III.10.

Sur ce diagramme, la distance entre le point d'émission et le point de réflexion est représentée par une ligne horizontale et le temps est représenté par les deux lignes verticales ( $t_r$  est le temps mis par l'onde pour parcourir la longueur totale de la ligne).

$$x = c \cdot t_r, \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r}}$$

Avec  $c_0$  la vitesse de propagation dans le vide,  $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300 \text{ m}/\mu\text{s}$

Les lignes diagonales en zigzag représentent l'onde pendant ses réflexions entre les deux points de discontinuité. La valeur de chaque onde est notée sur la ligne correspondante. Chaque réflexion est déterminée en multipliant l'onde incidente par le coefficient de réflexion approprié.

La tension en un point de coordonnées  $(x,t)$  le long de la ligne, peut être déterminé en traçant une ligne verticale à partir du point considéré et sommer tous les termes supérieurs au point correspondant à l'intersection de la diagonale et la droite verticale figure III.10.

Pour exemple, la valeur de la tension à  $t = 4.5 t_r$  et  $x = \frac{1}{4} l$  est :

$$v(0.25l, 4.5t) = \alpha V_0 (1 + \rho_r + \rho_s \rho_r + \rho_s \rho_r^2 + \rho_s^2 \rho_r^2) \quad \text{III.50}$$

A partir du diagramme de Bewley, on peut représenter graphiquement les tensions au point  $x = 0$  et  $x = l$  en fonction du temps de propagation de l'onde  $t = 1 t_r$  jusqu'au temps  $n \cdot t_r$  donnant le régime permanent. Ceci en fixant  $x = 0$  et variant  $t = t_r$  jusqu'à  $n \cdot t_r$  et puis  $x = l$  et

$t = t_r$  jusqu'à  $n \cdot t_r$  et on somme la valeur de la tension en chaque point considéré.

$$\rho_s = \frac{z_s - z_c}{z_s + z_c}$$

$$\rho_r = \frac{z_r - z_c}{z_r + z_c}$$

$X = 0$

distance,  $x \rightarrow$

$X = l$

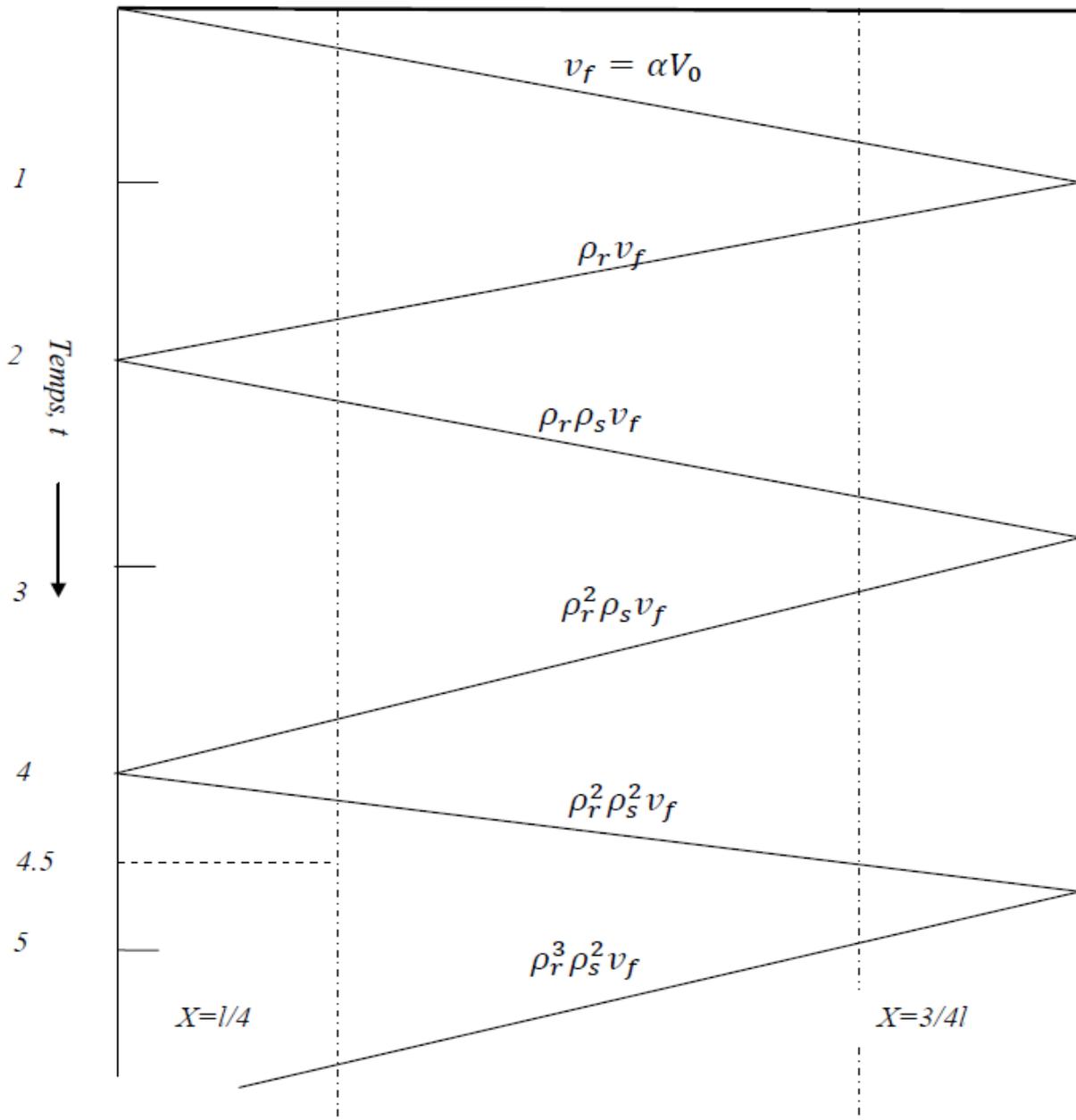


Figure II.10 : Digramme de Bewley

**III.1.10 Principe de protection contre les surtensions par un parafoudre :**

Le parafoudre est un appareil de protection électronique qui se comporte comme une impédance variable en fonction de la tension à ses bornes :

- ❖ En fonctionnement normal (pas de coup de foudre) le parafoudre est vu comme un circuit ouvert par le reste de l’installation (tension nominale du réseau aux bornes du parafoudre (impédance infinie).
- ❖ Au moment du coup de foudre, le parafoudre devient passant (augmentation importante et rapide de la tension ; impédance nulle). Le rôle du parafoudre est alors double :
  - ✚ Écouler la surintensité (sans qu’elle traverse les récepteurs)
  - ✚ Limiter la surtension (afin de ne pas “claquer” les récepteurs).

Les parafoudres à oxydes métalliques sans éclateurs emploient, en tant que partie active, une varistance céramique composée, pour la plus grande partie, d'oxyde de zinc (ZnO). La figure illustre schématiquement la courbe caractéristique courant-tension d'une telle varistance de parafoudre. On a choisi pour les abscisses une échelle logarithmique. Si le courant est multiplié par  $10^7$ , la tension aux bornes de la varistance n'est multipliée que par 2 environ.

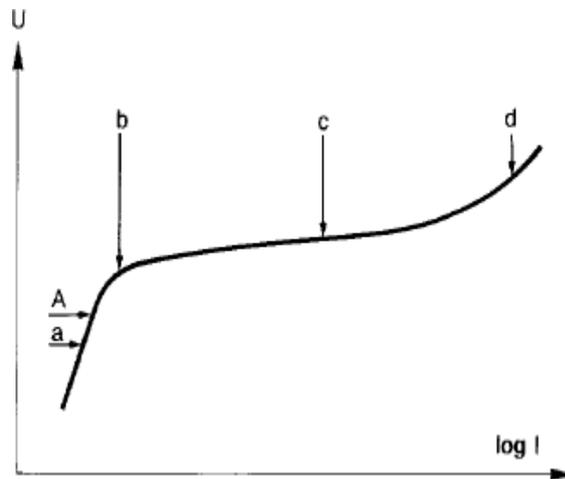


Figure III.11 : Courbe caractéristique courant tension d’une varistance à oxydes métalliques.

- a-** Partie inférieure linéaire
- b-** Coude
- c-** Partie fortement non linéaire
- d-** Partie supérieure linéaire
- A-** Point de fonctionnement (tension appliquée en permanence)

Un parafoudre sans éclateurs est dimensionné de manière que la tension qui peut être appliquée en permanence à ses bornes se trouve, environ, au point A de la courbe caractéristique de la figure III.11. Dans ces conditions, il s'écoule un courant à prédominance capacitive. Si la tension aux bornes augmente à cause d'une surtension, le parafoudre passe dans la plage conductrice. La composante ohmique du courant, jusqu'ici très petite, augmente rapidement pendant que la composante capacitive n'augmente que très peu. A la tension appelée de référence, qui se trouve au-dessus du coude de la courbe, il ne passe plus qu'un courant pratiquement ohmique (a). Ceci s'applique aussi à la partie non linéaire (c) ainsi qu'à la zone (d).

#### **III.1.11 Emplacement du parafoudre :**

Les parafoudres seront toujours placés le plus près possible des installations à protéger, ou aux jonctions lignes aériennes-câbles.

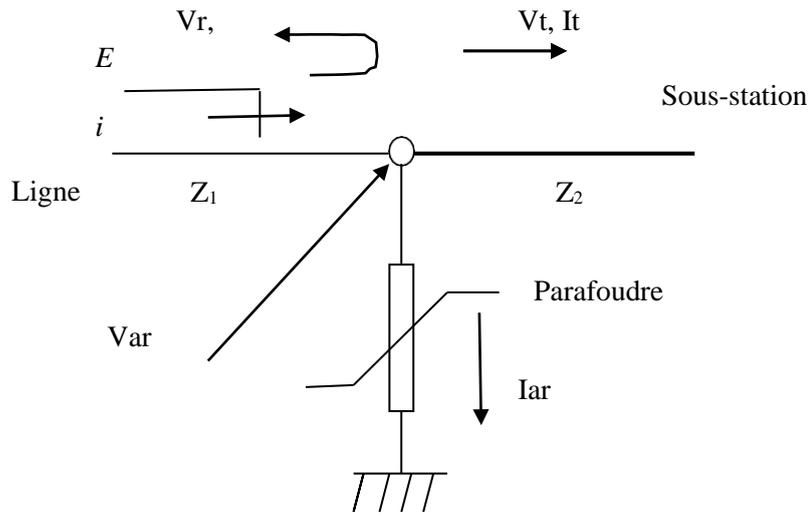
Les parafoudres doivent être placés au voisinage immédiat des alternateurs et des transformateurs. En effet, du fait qu'ils présentent une grande impédance, il y aura réflexion et donc augmentation locale de la tension. La combinaison des ondes peut conduire à des ventres et des nœuds. Un parafoudre placé à quelques dizaines de mètres peut très bien se trouver dans un nœud et ne jamais amorcer.

Dans les grands postes, on aura même intérêt à placer plusieurs parafoudres sur les mêmes barres.

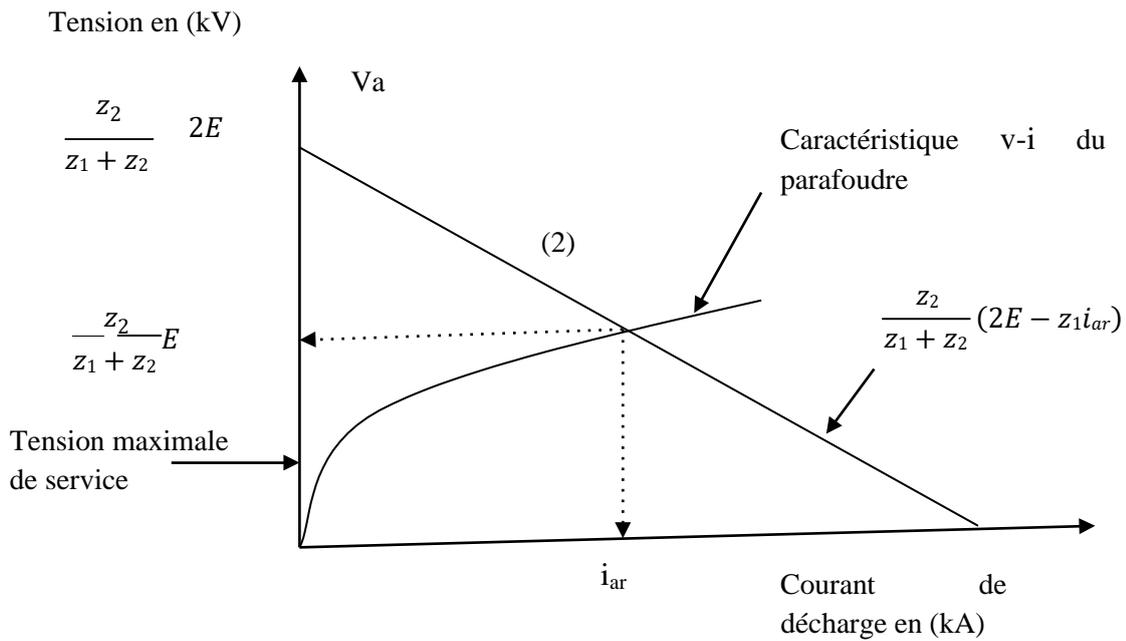
#### **III.1.12 Principe de fonctionnement du parafoudre par les ondes mobiles :**

Les parafoudres sont des dispositifs essentiels pour protéger les postes et les équipements de la station contre les surtensions de foudre. La capacité de protection contre les surtensions détermine les niveaux d'isolation requis du réseau électrique.

Nous examinons d'abord les principes fondamentaux du parafoudre donné à la figure III.12. Dans la figure III.12 (a), le parafoudre est installé au point « a », qui est un point de transition créé par l'impédance du parafoudre.



(a)



(b)

Figure III.12 : Principe de protection des surtensions par un parafoudre

Maintenant, l'onde incidente de surtension  $E$  se propage de  $Z_1$  vers  $Z_2$  en passant par le point « a » et puis vers une sous station (poste). Le comportement des ondes mobiles au point a peut être décrit par les équations suivantes :

$$E + v_r = v_{ar} = v_t$$

$$i - i_r = i_t + i_{ar}$$

Avec :

$E$  : onde de surtension incidente

$V_{ar}$  et  $I_{ar}$  tension et courant du parafoudre au point a

$$E = Z_1 i, \quad v_r = Z_1 i_r, \quad v_t = Z_2 i_t, \quad v_{ar} = Z_{ar} i_{ar}$$

$Z_{ar}$  : Impédance non linéaire du parafoudre

$V_t, I_t$  : ondes de tension et de courant transmises à la sous station

$Z_1$  : impédance caractéristique de la ligne de transmission

$Z_2$  : impédance caractéristique du poste

La relation entre la tension du parafoudre  $V_{ar}$  et le courant du parafoudre  $I_{ar}$  est montrée par la courbe non linéaire de la figure III.12 (b) qui représente la caractéristique (i,v) du parafoudre.

Eliminant  $V_r$  et  $I_r$  dans les équations ci-dessous et après transformation, on obtient :

$$v_{ar} = v_t = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} (2E - Z_1 i_{ar}) \quad \text{III.51}$$

Cette équation est représentée par la droite (2) de la figure III.12 (b). La tension du parafoudre  $V_{ar}$  et le courant  $I_{ar}$  sont donnés par l'intersection de la caractéristique (i,v) et la droite (2).

Sans la présence du parafoudre, la tension au point « a » aura pour valeur  $Z_2 / (Z_1 + Z_2) \cdot 2E$ .

Alors :  $V_{ar}$  aura pour valeur  $E$  pour  $Z_1 = Z_2$ , et au maximum  $2E$  pour  $Z_2 = \infty$  (ca de l'ouverture de la ligne). Toutefois, si un parafoudre avec une caractéristique (i,v) appropriée est installé au point « a », l'onde de surtension  $V_{ar}$  peut être réduite à une valeur inférieure à la tension de l'onde incidente et qui sera compatible avec la tension d'isolement du poste à protéger.

## III.2 Régimes transitoires des machines tournantes :

### III.2.1 Introduction :

L'étude du comportement des machines tournantes en régime transitoire permet de répondre à deux sortes de préoccupations : d'une part, évaluer l'aptitude du matériel à supporter les contraintes résultant de certains régimes sévères et, d'autre part, connaître leurs lois de comportement associées à leurs dispositifs de réglage. Les approximations autorisées pour ces types de problèmes sont plus larges que pour l'étude du comportement en régime permanent. Dans le cadre des hypothèses simplificatrices que l'on est ainsi autorisé à formuler pour l'étude des régimes transitoires, il est alors possible de traduire le comportement des différentes machines tournantes, et notamment des machines à courant continu, synchrones et asynchrones, par un modèle mathématique unique dit de la machine généralisée. Ce résultat est obtenu en appliquant aux équations des machines à champ tournant un changement de variables appelé transformation de Park, qui peut s'interpréter comme la substitution, à un enroulement triphasé, d'un enroulement biphasé associé à un référentiel judicieusement choisi. L'objet de ce cours est de présenter le principe et la mise en œuvre de cette méthode. Cependant, à l'intérieur de cette formulation mathématique unifiée, chaque machine garde ses propriétés spécifiques en raison de ses modalités particulières de raccordement au milieu extérieur ; cette spécificité a donc conduit à adopter une présentation distincte pour les trois catégories de machines (machines à courant continu, machines asynchrones et machines synchrones) [10] [11] [12].

### III.2.2 Intérêt et nécessité de l'étude des régimes transitoires :

La connaissance du comportement des machines électriques en régime transitoire est nécessaire en vue, d'une part, de prévoir les contraintes auxquelles elles sont soumises lors de certains fonctionnements et, d'autre part, de connaître leurs fonctions de transfert en vue de la conception et de l'adaptation des dispositifs de commande et de réglage.

#### III.2.2.1 Contraintes lors de certains fonctionnements :

Le dimensionnement des machines électriques est principalement basé sur les spécifications relatives aux régimes normaux de fonctionnement, concernant en particulier les valeurs dites nominales des tensions et des courants des différents enroulements. Cependant, la machine peut être soumise à des régimes, généralement de courte durée, lors desquels les tensions ou les courants prennent des valeurs supérieures aux valeurs nominales.

Dans le cas des courants, par exemple, on peut citer l'apparition d'un court-circuit, interne à la machine ou affectant le circuit auquel elle est raccordée, ou encore le démarrage de certains moteurs.

Ces régimes entraînent principalement des contraintes mécaniques (efforts électrodynamiques sur les enroulements, notamment dans les têtes de bobines, couple sur l'arbre, etc.) et des contraintes

thermiques Les contraintes mécaniques sont inévitables car elles apparaissent dès les premiers instants de la perturbation. La technologie de construction doit donc en tenir compte. Les contraintes thermiques font intervenir la durée d'application de la perturbation et, dans ce cas, les informations obtenues par l'étude des régimes transitoires servent au réglage des protections.

### **III.2.1.2 Connaissance des fonctions de transfert :**

La connaissance des fonctions de transfert de l'objet réglé est nécessaire à la conception et à l'adaptation des dispositifs de réglage et de commande. Les perturbations à prendre en considération sont de plus faible amplitude que dans le cas précédent. Cette particularité conduit généralement à une simplification de la formulation mathématique. En autorisant une linéarisation des équations. A cet aspect est liée l'étude des problèmes particuliers posés par l'association de machines électriques tournantes et de convertisseurs statiques (redresseurs contrôlés, onduleurs, etc.).

### **III.2.3 Hypothèses simplificatrices :**

La précision requise dans l'étude des régimes transitoires est moindre que dans le cas des régimes permanents, ceux-ci ont en effet un impact direct sur le dimensionnement et conditionnent donc l'ajustement économiquement optimal de la machine a sa fonction. En revanche, les mesures a prendre en vue de se prémunir contre les fonctionnements donnant lieu a des contraintes sont toujours assorties d'une certaine marge de sécurité, et, en outre, en ce qui concerne les fonctions de transfert, il n'est pas nécessaire de les connaître avec une très grande précision, cote dernière étant généralement reporté sur les paramètres des chaines de réglage (notamment, sur le gain). En conséquence, nous adopterons ici. En vue de l'étude des régimes transitoires, les hypothèses simplificatrices suivantes, valables pour une première approximation

#### **III.2.3.1 Absence de saturation :**

On suppose le circuit magnétique non sature, ce qui permet d'établir des relations linéaires entre flux et courants. Une possibilité de prise en compte de la saturation sera cependant exposée a propos des machines synchrones

#### **III.2.3.2 Distribution sinusoïdale :**

Les enroulements disposés sur les armatures des machines tournantes créent des distributions de force magnétomotrice périodiques en fonction de l'angle On suppose que cette loi périodique est purement sinusoïdale, ce qui revient à ne considérer que le premier harmonique des distributions spatiales.

### III.2.3.3 Circuits à constantes localisées :

On suppose que les conducteurs élémentaires des enroulements sont de section suffisamment faible pour que la densité de courant puisse y être considérée comme uniforme. Même lors des régimes transitoires : on suppose, en outre, que le fer du circuit magnétique est parfaitement feuilleté.

#### *Remarque :*

Pour l'étude de régime transitoire des machines tournantes. Il faut d'abord présenter très sommairement les modèles mathématiques simplifiés pour chacune des trois grandes catégories (machines à courant continu, machines asynchrones et machines synchrones et ses modèles sont illustré *prochainement dans une suite de cours*.

Par un exemple d'application dans deux grandes catégories de problèmes :

- Comportement lors de grandes perturbations, principalement en vue de la prédétermination des contraintes :
- Comportement lors de petites perturbations, principalement en vue de problèmes de réglage, ce réglage concernant de plus en plus, à l'heure actuelle, des associations de machines tournantes et de convertisseurs statiques de fréquence.

### Conclusion générale

Cette polycopie constitue un support de cours aux étudiants pour la compréhension et la maîtrise des phénomènes transitoires dans les réseaux électriques et la protection d'un réseau électrique contre les différents défauts électriques (surtensions, surintensités et surcharges). Dans les systèmes électriques une différence nette entre l'état d'équilibre et le comportement transitoire est faite. Cette différence est basée sur le concept que le comportement à l'état stable est normal alors que les transitoires découlent d'un défaut.

L'électricité qui était jusqu'à lors statique devient dynamique et l'étude des courants électriques permet de mettre en évidence le lien entre l'électricité et le magnétisme. Le fonctionnement de la plupart des circuits électroniques (tels que les oscillateurs, condensateurs de commutation, redresseurs, circuits résonnants etc.) est basé sur leur comportement transitoire et donc les transitoires ici peut être considéré comme « souhaitable ». Toutefois, les transitoires dans les systèmes d'alimentation sont considérés comme complètement « indésirables » et devraient être évités. Quand ils se produisent, dans certaines situations très critiques, ils peuvent entraîner des ruptures d'alimentation.

La connaissance des phénomènes à l'origine de ces perturbations permet l'analyse, la modélisation et la mise en place des dispositifs de protection contre les phénomènes transitoires dans les réseaux électriques.

Mais les régimes transitoires des machines tournantes c'est un sujet très intéressant pour toute catégorie

Des ces machines malheureusement dans ce document on n'a pas détaillé comme il faut, prochainement si on a la chance de faire un deuxième cours détailler spécialement pour les phénomènes transitoires sur les machines électriques tournantes.

## Annexe 1

### LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe. Par cette transformation, une équation différentielle linéaire peut être représentée par une équation algébrique. Elle permet aussi de représenter des fonctions particulières (distribution de Heaviside, distribution de Dirac, etc.) de manière très élégante. Ce sont ces possibilités qui rendent la transformation de Laplace intéressante et populaire auprès des ingénieurs. Cette transformation a donné lieu à la technique du calcul opérationnel ou calcul symbolique qui facilite la résolution des équations différentielles linéaires qui représenteront les systèmes que nous allons étudier.

#### 1- TRANSFORMATION DE LAPLACE

##### 1-1-Définition

Soit  $f(t)$  une fonction à valeur réelle ou complexe de la variable réelle  $t$  définie de  $[0, \infty[$  et soit  $s = \alpha + j\beta$ , une variable complexe; l'expression :

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

s'appelle la transformation de Laplace unilatérale.

##### 1-2-Ordre exponentiel

On dira qu'une fonction  $f(t)$  est d'ordre exponentiel à l'infini si et seulement si, il existe un couple de nombres réels  $\alpha$  et  $M$  tel que :

$$|f(t)| = Me^{\alpha t}, \forall t \geq 0$$

##### 1-3-Existence de la Transformation de Laplace

Soit  $f(t)$  une fonction continue par morceau sur l'intervalle fermé  $[0, a]$  (pour tout  $a > 0$ ) et ayant un ordre exponentiel à l'infini tel que  $|f(t)| = Me^{\alpha t}$ ; alors, la transformation de Laplace  $L(f)$  existe et est définie pour  $s \succ \alpha$ .

##### 1-4-Unicité de la Transformation de Laplace

Soient  $f(t)$ , et  $g(t)$ , deux fonctions continues par morceaux avec un ordre exponentiel à l'infini. Supposons que:

$$L(f(t)) = L(g(t))$$

Alors  $f(t)=g(t)$  pour  $t \in [0, D]$ , pour tout  $D > 0$ , sauf peut être en un nombre fini de points.

##### Exemple 1:

Si  $f(t)=1$ , alors :  $L(f(t)) = L(1) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt = \frac{1}{s}$ .

dans cet exemple, l'intégrale converge si et seulement si la partie réelle de  $s > 0$

**Exemple 2 :**

Si  $f(t)=e^{at}$  alors :  $L(f(t))=L(e^{at})=\int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{1}{s-a}$  ,

Il y'a convergence si  $Re(s-a) > 0$  ou  $Re(s) > Re(a)$ .

**Transformée Bilatérale :**

On définit aussi une transformation de Laplace sur le domaine R des nombres réels:

$$L(f(t))=F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Cette transformation n'est pas beaucoup utilisée dans le domaine de l'engineering car on considère les signaux qui respectent la causalité et donc qui existent à partir d'un instant  $t_0$ .

**1-5. Transformation de Laplace Inverse**

On peut revenir de la transformée de Laplace à la fonction du temps  $f(t)$  par la transformation inverse suivante:

$$f(t)=F^{-1}(s)=\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{st} F(s) ds$$

Dans cette expression,  $x$  est un nombre réel quelconque, et  $x \geq a$  pour  $A_1$  et  $a \leq x \leq b$  pour  $A_2$ .

**2-PROPRIETES :**

**a)-Addition**

La transformée de Laplace d'une somme de fonctions  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  est égale à la somme de leurs Transformées de Laplace.

$$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2)$$

**b)- Multiplication par une constante**

$$L(cf) = c \cdot L(f)$$

**c)- Linéarité**

Les propriétés d'addition et de multiplication par une constante lorsqu'elles sont combinées conduisent au fait que la transformée de Laplace est une transformation linéaire :

$$L\left(\sum_{k=1}^n c_k \cdot f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot L[f_k(t)]$$

**Exemple :** Déterminer la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)=\cos\omega t$ . Celle-ci est obtenue en utilisant l'expression exponentielle.

$$f(t) = \cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

En appliquant la transformée de Laplace et la propriété de linéarité, on a :

$$L(\cos \omega t) = F(s) = L\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2}L(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2}L(e^{-j\omega t}) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

**d)- Dérivées :**

La dérivée première est obtenue par :  $L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0) = sF(s) - f(0)$

La dérivée seconde :  $L(f''(t)) = s^2L(f(t)) - s \cdot f(0) - f'(0) = s^2 \cdot F(s) + s \cdot f(0) - f'(0)$

La dérivée troisième :  $L(f'''(t)) = s^3L(f(t)) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)$

Généralisation aux dérivées d'ordre n :

Supposons que  $f(t)$ , et ses dérivés  $f^k(t)$ , pour  $k=1,2,\dots,n$  sont continues par morceaux et ont un ordre exponentiel à l'infini. Alors on a :

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n L(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Si on considère les valeurs initiales toutes nulles, on :

$$L(f^{(n)}(t)) = s^n L(f) = s^n \cdot F(s)$$

**e)- Théorème de la valeur initiale**

On peut déterminer la valeur de la fonction  $f(t)$  à l'origine si on connaît la limite à l'infini de sa transformée de Laplace.

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

**f)- Théorème de la valeur finale**

On peut déterminer la valeur de la fonction  $f(t)$  à l'infini si on connaît la limite pour  $s \rightarrow 0$  de sa transformée de Laplace.

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

**g) – retard ou délai ou règle de translation en t**

si  $L(f) = F(s)$  alors  $L(f(t-T)) = e^{-sT}F(s)$ .  $e^{-sT}$  est appelé facteur de retard.

**h)-règle de translation complexe en s**

$$L(e^{-at} f(t)) = F(s + a)$$

Exemple :  $L(e^{-at} \cdot \cos \omega t) = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$

**i)-produit de deux fonctions**

$$L[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(w)F_2(w)dw$$

#### 4-TABLEAU DE QUELQUES TRANSFORMEES DE LAPLACE

Le tableau suivant donne les transformées de Laplace de quelques fonctions.

$f(p)$	$f(t) \quad 0 \leq t$
1	$u(t)$ imputation unité à $t=0$
$\frac{1}{p}$	1 ou $\mu(t)$ échelle ou unité à $t=0$
$\frac{1}{p^2}$	$t \cdot \mu(t)$
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$
$\frac{1}{p} e^{-at}$	$\mu(t-a)$
$\frac{1}{p} (1 - e^{-at})$	$\mu(t) - \mu(t-a)$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-at}$
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$

## Références bibliographiques

---

- [01] M. Grappe, Stabilité et sauvegarde des réseaux électriques, Edition HERMES, 2003.
- [02] Séguier., Electrotechnique industrielle, technique et documentation, 1984.
- [03] Yoshihide Hase, Power systems engineering, British Library cataloguing in publication data, USA.
- [04] Leonard L. Grigsby, Electric power generation, Transmission, and Distribution, University of California, DAVIS, 2006.
- [05] Schneider Electric, Guide de la protection contre les surtensions, Edition 2014.
- [06] Hager, La protection du matériel électrique et électronique contre les effets indirects de la foudre, Guide Technique Parafoudre, ZD234D-99.
- [07] Jean Mahseredjian, Alain Xemard & Bahram Khodabakhchian, Régimes transitoires dans les réseaux électriques, Technique de l'Ingénieur, 2007.
- [08] Hoang Le-huy, Circuits électriques, les presses de l'université de Laval, CANADA ,2004.
- [09] A. L. Shenkman, Transient analysis of electric power circuits handbook: Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] Philippe Barret ,Régimes transitoires des machines électriques tournantes, Technique de l'Ingénieur, 2007.
- [11] Philippe Barret, Régimes transitoires des machines tournantes éclectiques, Eyrolles 1982.
- [12] NOTELET F., Etude globale des régimes transitoires et du couple du moteur asynchrone triphasé. Revue E de la Société Royale Belge des électriciens N° 7, 1976. p 163-176.