République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année univ.: 2021/2022

Flot de la courbure de Gauss et généralisation des applications biharmoniques

Thèse présenté pour obtenir le diplôme de

Doctorat 3ème cycle

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Reguig Yasmina[1]

Soutenu le 30 Octobre 2022 devant le jury composé de

Benziadi Fatima. MCA	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Ouakkas Seddik. Prof	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Regbaoui Rachid. MC.HDR	Université de Brest - France	Co-encadreur
Bekkara Samir. MCA	Université USTOMB- Oran	Examinateur
Mohamed Cherif Ahmed. Prof	Université de Mascara	Examinateur
Ali Fardoun. MC.HDR	Université de Brest - France	Invité

1. e-mail : Z.elyassamin@yahoo.fr

— «*Remerciements*» —

Tout d'abord, je remercie le Dieu, mon créateur de mon avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.

Mes remerciements vont tout d'abord à mes directeurs de thèse,Pr. S.Ouakkas et Pr.R. Regbaoui qui m'ont dirigé tout au long de ce travail. leurs disponibilité, leurs réactivité, leurs enthousiasme et ses conseils judicieux sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail.

Je remercie les membres de mon jury de thèse pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour l'avoir enrichi de toutes leurs remarques.

Je remercie mes trés chères parents d'être toujours la pour moi, quoi qu'il arrive et sans condition.

Je remercie également ma famille en particulier mon frère et mes sœurs ainsi que pour leurs présences, leur soutien et le bol d'air qui m'ont procur ? surtout pendant les périodes difficiles que j'ai traversé dans mon travail.

Il convient aussi de remercier tous ceux qui ont participé de prés comme de loin à cet avènement.

Finalement, je tiens à exprimer mes remerciements à tous mes amis intimes, mes collègues de l'université de Saïda et tous mes enseignants de mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

ملخص

بالنظر إلى سطح ريماني متراص و دالة منتظمة على هذا السطح (تسمى الدالة المحددة في التكملة)، تتمثل مشكلة الانحناءِ الغاوسي المحدد في إيجاد قياس متري ريماني مطابق للقياس المتري الأولي بحيث يكون انحناؤه الغاوسي هو الدالة المحددة. ترقى المشكلة إلى حل معادلة تفاضلية جزئية ذات الشكل البيضاوي.

الغرض من هذه الأطّروحة هو دراسة معادلة التطور المرتبطة بهذه المعادلة ، وهو تدفق التّدرج المرتبط بدالة من نوع الانحناء الغاوسي. تستند نتائجنا إلى نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية المكافئة لإظهار الوجود المحلي للتدفق. ثم سنستخدم طرق تحليل أكثر تعقيدًا لإنشاء تقديرات مسبقة للحلول.

تم تخصيص جزء ثان من هذه الأطروحة لتعميم فكرة التطبيقات ثنائية التوافقية.

الكلمات المفتاحية: الانحناء الغاوسي، معادلة التطور، التطبيقات المطابقة ، التطبيقات ثنائية التوافقية.

Résumé

Etant donnée une surface riemannienne compacte et une fonction régulière sur cette surface (appelée fonction prescrite dans la suite), le problème de la courbure de Gauss prescrite consiste à trouver une métrique conforme à la métrique initiale dont la courbure de Gauss est la fonction donnée. Le problème revient à résoudre une équation aux dérivées partielles elliptique.

Le but de cette thèse est d'étudier l'équation d'évolution naturellement associée à cette dernière , Il s'agit du flot de gradient associé à une fonctionnelle du type courbure de Gauss. Nos résultats sont basés sur la théorie des équations aux dérivées partielles paraboliques pour montrer l'existence locale du flot. Ensuite On utilisera des méthodes plus sophistiquées d'analyse par blow-up pour établir des estimations a priori sur les solutions.

Une deuxième partie de cette thèse est consacrée à la généralisation de la notion des applications biharmoniques.

Abstract

Given a compact Riemannian surface and a regular function on this surface (called the prescribed function in the sequel), the problem of the prescribed Gaussian curvature consists in finding a metric conformal to the initial metric whose Gaussian curvature is the given function. The problem amounts to solving an elliptic partial differential equation.

The purpose of this thesis is to study the evolution equation naturally associated with the latter, It is the gradient flow associated with a functional of the Gaussian curvature type. Our results are based on the theory of parabolic partial differential equations to show the local existence of the flow. Then we will use more sophisticated blow-up analysis methods to establish a priori estimates of the solutions.

A second part of this thesis is devoted to the generalization of the notion of biharmonic maps.

Key words : Gauss curvature, evolution equation, conformal map, biharmonic map.

♦ Introduction ♦

Etant donnée une surface riemannienne compacte (M, g_0), et une fonction régulière f sur cette surface (appelée fonction prescrite dans la suite. Le problème de la courbure de Gauss prescrite consiste à trouver une métrique conforme à la métrique initiale dont la courbure de Gauss est la fonction donnée f. Ce problème revient à résoudre une équation aux dérivées partielles avec une non-linéarité exponentielle définie comme suit

$$-\Delta_{g_0}u + k_0 = fe^{2u}, \quad u \in C^\infty(M). \tag{1}$$

La résolution de ce problème dépend de la géométrie de la surface ainsi que de la fonction prescrite. le signe de k_0 détermine la topologie de M.

• Si $k_0 > 0$, alors M est topologiquement équivalente à la sphère $\mathbb{S}^2$. Dans ce cas, l'équation 1 est connu sous le nom de problème de Niremberg. Bien que le problème n'est pas complètement résolu, un progrès fondamental a été fait par de nombreux mathématiciens. Voir [6], [7], [13], [14], [17] pour plus de détails sur le sujet.

• Le cas où $k_0 = 0$, le problème de courbure Gaussienne prescrite est complètement résolu dans [3], [13].

Dans cette thèse, nous sommes intéressés par le cas où $k_0 < 0$, ce qui correspond aux surfaces de caractéristique d'Euler négative. Grâce au théorème d'uniformisation ([8]), on peut supposer que k_0 est constante et en normalisant le volume de M, nous pouvons supposer que

$$\mathrm{Vol}(M) = 1.$$

Ainsi nous avons

$$K_0 = k_0 = 2\pi\chi(M).$$

Si on multiplie l'équation 1 par e^{-2u} et on intègre sur M, on obtient facilement la condition nécessaire

$$\int_M f d\mu_0 < 0. \tag{2}$$

Ce qui implique notamment que

$$\min_M f < 0. \tag{3}$$

Pour le cas ou la fonction prescrite f est négative, Kazdan et Warner [13] ont prouvé l'existence d'une solution de 1 par utilisation de la méthode de sur-solution.

Pour les changements de signe de f, ils ont obtenu une solution quand f est proche d'une fonction négative. Plus tard, Aubin [1] et Bismuth [4] ont trouvé des conditions sur f avec des constantes en fonction du support de f^+ et f^- mais pas explicitement. Ces conditions disent que la partie positive de f doit être très petite par rapport à la partie négative de f.

Dans un travail récent, Borer-Galimberti-Struwe [9] ont montré l'existence d'une famille de solutions dites "explosives" de l'équation lorsque la courbure initiale est négative, ce qui rend l'exploration de cette équation très intéressante dans ce cas.

Le but de cette thèse est d'étudier l'équation d'évolution naturellement associée à 1 Il s'agit du flot de gradient associé à une fonctionnelle du type courbure de Gauss suivante

$$E_f(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 \, d\mu_0 + k_0 \int_M u \, d\mu_0 - \frac{1}{2}\int_M f e^{2u} \, d\mu_{g_0}.$$

Ce problème d'évolution peut-être considéré comme une généralisation du flot de Ricci sur les surfaces introduit par Hamilton. L'étude de l'existence globale d'une solution ainsi que l'étude de son comportement asymptotique en temps infini seront les points centraux de ce travail. Les outils utilisés vont des bases de calcul de variations classique à des techniques sophistiquées d'analyse géométriques plus récentes, comme l'analyse par blow-up et phénomène des " bulles ".

Les techniques utilisées s'appuient sur la théorie des équations aux dérivées partielles paraboliques pour montrer l'existence locale. Il faudra également une maîtrise des outils de base du calcul des variations pour aborder le problème car il s'agit du flot de gradient négatif d'une fonctionnelle (courbure de Gauss). Ensuite on utilisera des méthodes plus sophistiquées d'analyse par blow-up pour établir des estimations a priori sur les solutions.

Cette Partie est composée d'une introduction et de trois chapitres .

Le premier chapitre est consacré à quelques définitions, des lemmes préliminaires, des notions d'analyse fonctionnelle et de géométrie riemannienne, et deux théorèmes fondamentaux (théorème d'uniformisation et de Gauss-Bonnet).

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques résultats d'existence locale et globale du flot.

Le troisième chapitre est consacré sur l'étude du comportement asymptotique du flot à l'infini.

Une deuxième partie de cette thèse contient un seul chapitre qui a pour but d'étudier la tri-harmonicité d'une application conforme entre deux variétés riemanniennes.

Les applications harmoniques sont l'un des problèmes variationnels géométriques les plus étudiés en mathématiques. Outre leur importance dans l'analyse et la géométrie, ils apparaissent également dans la littérature physique, par exemple en tant qu'un modèle non linéaire dans la théorie quantique des champs.

Afin de définir les applications harmoniques, nous considérons deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) et ϕ une application entre eux. On peut définir la fonctionnelle énergie par

$$E(\phi) = \int_M |d\phi|^2 d\mu_g,$$

ses points critiques sont caractérisés par l'annulation du champ de tension qui est donné par

$$0 = \tau(\phi) := tr_g \nabla d\phi, \quad \tau(\phi) \in \Gamma(T^{-1}N). \tag{4}$$

Les solutions de 4 sont appelées applications harmoniques.

Une généralisation des applications harmoniques qui reçoit une attention croissante est donnée par la théorie des applications biharmoniques. Ce sont les points critiques de la fonctionnelle bi-énergie

$$E_2(\phi) = \int_M |\tau(\phi)|^2 d\mu_g,$$

et se caractérisent par la disparition du champ de bitension

$$0 = \tau_2(\phi) := -\Delta\tau(\phi) - tr_g R^N(d\phi(.), \tau(\phi))d\phi(.). \tag{5}$$

où Δ est désigne le Laplacien sur le fibré vectoriel $\Gamma(T^{-1}N)$ et R^N représente le tenseur de courbure sur les tragets de N.

l'équation 5 est une équation aux dérivées partielles elliptiques semi-linéaire du quatrième ordre ce qui rend son analyse plus compliquée par rapport au cas des applications harmoniques. Il est évident que toute application harmonique est aussi biharmonique, par contre une application biharmonique peut être non harmonique auquel cas elle est dite biharmonique propre.

Une généralisation systématique des applications harmoniques et biharmoniques est donnée par les applications dites poly-harmoniques. Dans cette partie nous nous concentrons sur les applications conformes harmoniques en dimenson 3.

Première partie

Flot de la courbure de Gauss

◀ Notations & conventions ▶

Le but de cette partie est d'étudier le problème de courbure gaussienne classique prescrit, en considérant que :

- $M = (M, g_0)$ une surface Riemannienne compacte orientée de genre $\gamma(M) > 1$ et K_{g_0} la courbure de gauss associée à la métrique g_0.
- f une fonction de classe C^∞ sur M.
- $d\mu_{g_0}$ est la forme volume de la métrique g_0.

Remarque. Les notations mentionnées dans le tableau ci-dessous sont unifiés tout au long de cette partie.

Notations du 1^{er} chapitre	
TM	L'espace tangent de M.
$\Gamma(TM)$	Le fibré tangent de M.
$\mathbb{S}^2$	La sphère bidimensionnelle.
$\mathbb{B}^2$	Le disque euclidien.
X, Y, ξ	Des champs de vecteurs de $\Gamma(TM)$.
$End(M)$	est un fibré défini comme le produit $\Gamma(T^*M) \otimes \Gamma(TM)$ où $\Gamma(T^*M)$ est le fibré cotangent du M.
Notations du $2^{\text{ème}}$ chapitre	
T	Un réel positif
C_T	Des constantes positifs qui dépend de T, M et v_0.
k_0	La courbure de Gauss associée à l métrique g_0 est de signe négatif.
Notations du $3^{\text{ème}}$ chapitre	
$Vol(M)$	Le volume de M
$d(x, y)$	La distance riemannienne entre x et y sur M.

CHAPITRE 1

RAPPELS & DÉFINITIONS

Ce chapitre a pour but de rappeller quelques notions élémentaires de la théorie des surfaces riemanniennes qu'on aura besoin tout au long de ce travail.

1.1 Quelques éléments de géométrie riemannienne

1.1.1 Définitions et premières propriétés

Définitions 1.1.1
Soit $(\varphi_i : U_i \subseteq M \to U'_i \subseteq \mathbb{R}^k)_{i\in I}$ *un atlas de* M*. On appelle fibré véctoriel réel de rang* k *et de base* M *la donnée d'un triplet* (E, M, π) *où*
• E *est une variété* C^∞
• π *est une surjection de* E *dans* M*, vérifie la condition de trivialisation locale suivante : pour tout ouvert* $U \in M$ *il existe un difféomorphisme* $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U'_i \times \mathbb{R}^k$ *tels que*
• *Les changements de cartes* $\phi_i\phi_j^{-1}$ *soient* C^∞*,* $\mathbb{R}$ *linéaire en la seconde variable*
• $\forall i,\ pr_1 \circ \phi_i = \varphi_i \circ \pi.$
⋆ *Une surface riemannienne est une variété différentielle* M *de dimension 2.*
⋆ *Une métrique sur* M *est une section* g *du fibré* $\Gamma(TM)$ *telle que pour tout point* p *de* M *,*g_p *soit définie positive. Ce qui fait de chaque espace tangent de* M *un espace euclidien.*
⋆ *La forme volume associée à une métrique* g *sur une surface* M *munie d'une orientation*

ω est l'unique 2-forme différentielle μ telle que pour tout $p \in M$ et pour toute base orthonormée directe (X, Y) de T_pM on ait l'égalité $\mu(X, Y) = 1$.

$\star$ *Une structure presque complexe sur une surface M est un champ d'endomorphismes J.* ***Autrement dit*** *: Une structure presque complexe sur une surface M est une section globale du fibré vectoriel $End(TM)$), vérifiant :*

$$\forall x \in M, J_x^2 = -Id_{T_xM}.$$

$\star$ *Une connexion sur TM est un opérateur*

$$\nabla : \begin{cases} \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM) \\ \qquad (X, \xi) \mapsto \nabla_x \xi. \end{cases}$$

tel que

- ∇ *est C^∞ linéaire en X et $\mathbb{R}$-linéaire en ξ.*
- $\nabla_X f\xi = X(f)\xi + f \cdot \nabla_X \xi$ *(règle de Leibniz).*

1.1.2 Connexion de Levi-Civita

Notons $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$. Soient :

$$Der(M) = \{\delta \in End_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) | \forall f, g, \delta(f, g) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(g)\}.$$

Et

$$\begin{cases} \Gamma(TM) \to Der(M) \\ \qquad X \mapsto (\delta_X : f \to X(f)) \end{cases}$$

un isomorphisme.

On définit alors le crochet de Lie $[X, Y]$ de X et de Y par la relation

$$\delta_{[X,Y]} = \delta_X \circ \delta_Y - \delta_Y \circ \delta_X.$$

Propriété 1.1.1 *Pour toute surface riemannienne M il existe une unique connexion ∇ sur TM vérifiant*

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y \in \Gamma(TM)$.
- ∇ *est compatible avec la métrique i.e. pour tout* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, *on a*

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y,Z) + X(g(Z,Y))\} \\ &= g(Z, [X, Y]). \end{aligned}$$

Une telle connexion est appellée connexion de Levi-Civita.

Remarque 1.1.1 *La deuxième condition est simplement une généralisation de la formule de dérivation du produit scalaire de deux champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^2$, *où* ∇ *remplace la dérivation usuelle des champs de vecteurs.*
Pour la démonstration de cette propriété on aura besoin de la formule de Kozul suivante :

$$\begin{aligned} 2 \cdot g(\nabla_X Y, Z) &= X\big(g(Y,Z)\big) + Y\big(g(X,Z)\big) - Z\big(g(X,Y)\big) \\ &\quad + g\big((Z, [X,Y]\big) + g\big((Y, [Z,X]\big) - g\big((X, [Y,Z]\big). \end{aligned}$$

On vérifie qu'une telle connexion vérifie les conditions requises.

1.2 Théorie des surfaces riemanniennes

Dans cette section, on se base sur l'énoncés des deux théorèmes (**Gauss-Bonnet, l'uniformisation de Poincaré-Koebe**) pour accéder à décrire notre problème de déformation d'une métrique sur une surface riemannienne.

1.2.1 Courbure gaussienne

En géométrie différentielle, la courbure gaussienne ou courbure de Gauss k d'une surface en un point est le produit des courbures principales k_1 et k_2 en un point donné. On peut définir une telle notion aisément dans le cas d'une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, car localement une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ est isométrique au graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dans ce cas la courdure gaussienne est définie comme le déterminant de la matrice hessienne d'une telle fonction au point donné. On rappelle maintenant le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 ***(Théorème de Gauss Bonnet)***
On note par $d\mu_{g_0}$ la forme volume de la métrique g_0 et $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler[1] *de la surface M. Alors l'égalité suivante est vraie :*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M k_0 d\mu_{g_0} = \chi(M).$$

Le théorème affirme simultanément que l'intégrale ne dépend pas de la métrique riemannienne choisie.

1.2.2 Conséquences d'un changement conforme de métrique sur la courbure de Gauss

On commence par quelques résultats fondamentales :

Définition 1.2.1 *Sur une surface riemannienne compacte sans bord M, on dit qu'une métrique g est conforme à g_0 s'il existe une fonction $u \in C^\infty(M)$ vérifie la relation suivante :*

$$g = e^{2u} g_0.$$

Théorème 1.2.2 ***(Théorème d'uniformisation :Poincaré-Koebe)***
Toute surface riemannienne simplement connexe est conforme à $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{B}^2$ ou $\mathbb{S}^2$.

Remarque 1.2.1 *Ce théorème affirme qu'à équivalence conforme prés (c'est-à-dire quitte a multiplier la métrique g_0 par une fonction positive).*

Proposition 1.2.1 *Soit g une métrique conforme à g_0 au sens de la définition 1.2.1 et $K_{g_0} = k_0$ sa courbure de Gauss. Du théorème d'uniformisation la courbure K_g est donnée par l'équation suivante :*

$$K_g = e^{-2u}(k_0 - \Delta_{g_0} u), \tag{1.1}$$

où Δ_{g_0} est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à g_0.

Pour la démonstration de cette proposition, on note le lemme suivants :

1. $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler de M égale à $2(1-\gamma(M))$ si la surface M est orientable.

Lemme 1.2.1 *Soit p un point de M, alors $\Delta\, f = -(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2})f$.*

Preuve : On note ξ un champ de vecteurs et G sa matrice dans la base mobile $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$, telle que : $G = (g_{ij})_{i,j\in\{1,2\}} = Mat_{\{\partial_{x_1},\partial_{x_2}\}} g$ et g^{ij} les coeffecients de G^{-1}.
Alors, on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \xi(f) = g(grad\, f, \xi) &= (grad\, f)^t \cdot G \cdot \xi \\ (\xi_1 \partial_{x_1} + \xi_2 \partial_{x_2}) f &= (grad\, f)^t \cdot G \cdot \xi \\ (\partial_{x_1} f)\xi_1 + (\partial_{x_2} f)\xi_2 &= (grad\, f)^t \cdot G \cdot \xi \\ (\partial_{x_1} f \quad \partial_{x_2} f) \cdot \xi &= (grad\, f)^t \cdot G \cdot \xi. \end{aligned}$$

Alors

$$grad\, f = \sum_{i,j} g^{ij} (\partial_{x_i} f) \cdot \partial_{x_j}.$$

Si on calcule la trace de l'endomorphisme $(\nabla grad\, f)_p$ de T_pM selon la base $(\partial_{x_1}, \partial_{x_1})$, on trouve :

$$tr(\nabla grad\, f)_p = \sum_i g^{i,i} (\partial^2_{x_i} f).$$

Au point $p \in M$, on sait que $G = I_2$, ce qui nous donne

$$tr(\nabla grad\, f)_p = \sum_i (\partial^2_{x_i} f). \qquad \blacksquare$$

Preuve de la proposition

Soit X, Y, Z des champs de vecteurs arbitraires sur M. On sait que la connexion de Levi-Civita vérifie cette relation :

$$\begin{aligned} 2g_0(\nabla_X Y, Z) &= X(g_0(Y,Z)) + Y(g_0(X,Z)) - Z(g_0(Y,Z)) + g_0([X,Y],Z) \\ &\quad + g_0([Z,X],Y) + g_0([Z,Y],X). \end{aligned}$$

Maintenant, on veut exprimer la différence $\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$, où $\widetilde{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita défini pour la métrique g vérifie la formule suivante :

$$\begin{aligned} 2g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(Y,Z)) + g([X,Y],Z) \\ &\quad + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X). \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que :

$$\begin{aligned} 2g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) - 2e^{2u} g(\nabla_X Y, Z) &= X((e^{2u}))g(Y,Z) + Y((e^{2u}))g(X,Z) - Z((e^{2u}))g(X,Y) \\ &= 2e^{2u}\Big(X(f)g(Y,Z) + Y(f)g(X,Z) - Z(f)g(X,Y)\Big). \end{aligned}$$

Ce qui est valable $\forall Z$, on a alors

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X,Y)(grad\, f).$$

Soit $p \in M$ et $(\partial_{x_1}, \partial_{x_1})$ le repère mobile géodésique défini précédemment (par rapport la métrique g).

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} = \nabla_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} - 2(\partial_{x_2} f)\partial_{x_2} + (grad\, f)$$

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_{x_1}} \partial_{x_2} = \nabla_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} - (\partial_{x_1} f)\partial_{x_2} - (\partial_{x_2} f)\partial_{x_1}.$$

On sait que $\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0 \;\; \forall i, j$. Par conséquent,

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} = -2(\partial_{x_2} f)\partial_{x_2} + (grad\, f)$$

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_{x_1}} \partial_{x_2} = -(\partial_{x_1} f)\partial_{x_2} - (\partial_{x_2} f)\partial_{x_1}.$$

D'aprés ces relations, un calcul donne :

$$g(\widetilde{R}_{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}} \partial_{x_2}, \partial_{x_1}) - g(R_{\partial_{x_1}, \partial_{x_2}} \partial_{x_2}, \partial_{x_1}) = \partial^2_{x_1} f + \partial^2_{x_2} f.$$

$$e^{2u} K_g - k_0 = -\Delta_{g_0} f.$$

Ceci reste valable en tout point $p \in M$, par conséquent,

$$K_g = e^{-2u}(k_0 - \Delta_{g_0} u). \qquad \blacksquare$$

Le problème de la courbure de Gauss prescrite consiste à trouver une métrique g conforme à g_0 de courbure de Gauss égale f, ce qui est équivalent à la résolution de l'équation déffirentielle elliptique suivante :

$$(-\Delta_{g_0} u + k_0) = f e^{2u}. \tag{1.2}$$

1.3 Quelques notions d'analyse fonctionnelle

Dans cette section, on considère que (M, g_0) est une variété riemannienne compacte de dimension n, en rappellant les définitions et quelques propriétés des espaces de Hölder et de Sobolev, ainsi quelques résultats classiques sur les EDP elliptiques et paraboliques du second ordre.

1.3.1 Espaces de Hölder

Définition 1.3.1 *Pour $\alpha \in (0,1)$, on appelle espace de Hölder $C^\alpha(M)$ d'ordre α l'ensemble des fonctions u qui vérifient*

$$\sup_{x \neq y \in M} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha} < +\infty,$$

avec $d(x,y)$ est la distance riemannienne entre x et y sur M. On définit sur $C^\alpha(M)$ la norme suivante

$$\|u\|_{C^\alpha(M)} = \|u\|_{C^0(M)} + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha} < +\infty.$$

Alors $C^\alpha(M)$ muni de cette norme est un espace de Banach.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $C^{m+\alpha}(M)$ par

$$C^{m+\alpha}(M) = \{u \in C^m(M) : \nabla^m u \in C^\alpha(M)\}.$$

$C^{m+\alpha}(M)$ muni de la norme suivante

$$\|u\|_{C^{m+\alpha}(M)} = \|u\|_{C^m(M)} + \sup_{x \neq y \in M} \frac{|\nabla^m u(x) - \nabla^m u(y)|}{d(x,y)^\alpha}$$

est un espace de Banach.

1.3.2 Espaces de Hölder paraboliques

Définition 1.3.2 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y_1 = (x_1, t_1)$, $y_2 = (x_2, t_2)$ deux points de $\in M \times I$. On appelle espace de Hölder parabolique $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times I)$ l'ensemble suivant*

$$C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times I) = \{u \in C^0(M \times I) : \sup_{y_1 \neq y_2 \in M \times I} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{d(x_1, x_2) - |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}} < +\infty\}$$

$C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times I)$ muni de la norme

$$\|u\|_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times I)} = \|u\|_{C^0(M \times I)} + \sup_{y_1 \neq y_2 \in M \times I} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{d(x_1, x_2) - |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}} < +\infty$$

est un espace de Banach.

Pour $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(M \times I)$ par

$$C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(M \times I) = \{u \in C^{2m,m} : \partial_t^j \nabla^i u \in C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(M \times I), \forall i, j \ \text{avec} \ 0 < i + 2j \leq 2m\}$$

Cet espace muni de la norme

$$\|u\|_{C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}(M \times I)} = \sum_{i+2j \leq 2m} \|\partial_t^j \nabla^i\|$$

est un espace de Banach.

Remarque 1.3.1 *Pour tout $I > 0$ et $\alpha \in (0, 1)$, on a*

$$C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T)) = C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0, T]).$$

1.3.3 Espaces de Sobolev sur une surface

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes des équations au dérivées partielles. Ils doivent leur nom au mathématicien Russe **Sergueï Lvovitch Sobolev**.

Définition 1.3.3 *Soient $p \geq 1$ et T des nombres réels et $\alpha \in (0,1)$, k un entier naturel. Sur une surface riemannienne orientable M de forme de volume $d\mu_{g_0}$, Le $k-$ème espace de Sobolev de M noté $H_k^p(M)$ est le complété de $C^k(M)$ pour la norme suivante :*

$$\|u\|^p_{H_k^p(M)} = \sum_{i=0}^{k} \|\nabla^i u\|^p_{L^2}.$$

Si $p = 2$ on peut noter $H_k^2(M) = H^k(M)$.

Remarque 1.3.2 *Si $\upsilon \in H^2(M)$ alors*

$$\|\upsilon\|^2 = \int_M |\Delta \upsilon|^2 d\mu_{g_0} + \int_M |\nabla \upsilon|^2 d\mu_{g_0} + \int_M \upsilon^2 d\mu_{g_0}$$

est équivalente à la norme $\|.\|_{H^2(M)}$.

1.3.4 Injections de Sobolev

I. Injection continue.

Supposons que (M, g_0) est de dimension n. Soit k, l, p et q des réels, alors

1. Si $k > l \geq 0$, $q > p \geq 1$ et $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n}$, alors H_k^p est inclus dans H_l^q est cette inclusion est continue.
2. Si $r \in \mathbb{N}$ et $\frac{k-r}{n} > \frac{1}{p}$ alors l'inclusion H_k^p dans $C^r(M)$ est continue.
3. Si $\frac{k-r-\alpha}{n} \geq \frac{1}{p}$, alors l'inclusion H_k^p dans $C^{r+\alpha}$ est continue avec $\alpha \in (0,1)$.

II. Injection compacte.

Soit p, q deux réels et k un entier naturel tels que $1 \geq \frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$, alors on a

1. $H_k^p(M) \subset L^q(M)$ est cette inclusion est compacte.
2. Soit $\alpha \in [0,1]$. Si $k - \alpha > \frac{n}{p}$, alors l'inclusion de $H_k^p(M)$ dans $C^\alpha(M)$ est compacte

1.4 Opérateurs elliptiques et paraboliques

Définition 1.4.1 *Soit k un entier positif. Sur une variété riemannienne M, un opérateur défini par*

$$L(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq 2k} a^\alpha(x) D_\alpha(x),$$

est dit elliptique si pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n \neq 0, \;\; x \in M$.

$$(-1)^k \sum_{|\alpha|=2k} a^\alpha(x) \xi_\alpha > 0.$$

Si de plus L est d'ordre 2, et il existe λ et $\Lambda > 0$ tels que pour toute carte locale $(U, x_1, ..., x_n)$ de M, on ait

$$\Lambda |\xi|^2 \geq \sum_{i,j}^{n} (x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

l'opérateur L est uniformément elliptique.

Remarque 1.4.1 *En général une équation aux dérivées partielles du second degré sur M peut s'écrire sous la forme*

$$\Phi(u) = 0,$$

où dans une carte locale $(U, x_1, ..., x_n)$ de M, l'application Φ prend la forme

$$\Phi(u) = \varphi(x, u, Du, ..., D^\alpha u),$$

où $Du = (\partial_1 u, ..., \partial_n u) \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application C^∞ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$.

Définition 1.4.2 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et k un entier positif. Un opérateur défini par*

$$L(x, t, D)u = \frac{\partial}{\partial t} u - \sum_{|\alpha| \leq 2k} a^\alpha(x, t) D_\alpha u$$

est parabolique sur $M \times I$ si pour tout $x \in M$, $t \in I$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(-1)^{k+1} \sum_{|\alpha|=2k} a^{\alpha}(x,t)\xi_{\alpha} > 0.$$

De plus, s'il existe une constante θ telle que pour tout $x \in M$, $t \in I$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(-1)^{k+1} \sum_{|\alpha|=2k} a^{\alpha}(x,t)\xi_{\alpha} > \theta|\xi|^{2k},$$

alors l'opérateur L est uniforméménť parabolique.

Théorème 1.4.1 ***(Théorème d'existence locale)***
Soit Φ un opérateur élliptique. Alors pour tout $u_0 \in C^{\infty}(M)$, il existe un T^* et une unique solution $u \in C^{\infty}(M \times [0, T^*))$ du problème

$$\begin{cases} \partial t_u = \Phi(u) \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

1.5 Théorèmes de régularité parabolique et élliptique

Les deux théorèmes suivants sont trés utiles pour établir des bornes sur les solutions des équations étudiées.

Théorème 1.5.1 ***(Théorème de régularité élliptique)***
Soient L un opérateur uniformément élliptique d'ordre 2 défini par 1.4.1, $\alpha \in (0,1)$ et $f \in C^{\alpha}(M)$. On suppose que

1. *$u \in C^{2+\alpha}(M)$ soit une solution de l'équation $Lu = f$ sur M.*
2. *Les coefficients de L vérifient :*

$$\|a_{ij}\|_{C^{\alpha}(M)} + \|b_k\|_{C^{\alpha}(M)} + \|c\|_{C^{\alpha}(M)} \leq \theta.$$

Alors il existe une constante C, telle que

$$\|u\|_{u \in C^{2+\alpha}(M)} \leq C(\|f\|_{C^{\alpha}(M)} + \|u\|_{C^0(M)})$$

Théorème 1.5.2 ***(Théorème de régularité parabolique)***
Soient L un opérateur uniformément élliptique d'ordre 2 défini par 1.4.1, $\alpha \in (0,1)$ et $f \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T])$. On suppose que

1. $u \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T])$ *soit une solution de l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t u - L(u) = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

2. *Les coefficients de L vérifient :*

$$\|a_{ij}\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} + \|b_k\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} + \|c\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq \theta$$

3. $u_0 \in C^{(2+\alpha)(M)}$

Alors il existe une constante C qui depend de θ, λ et Λ sont comme dans ? ?, telle que

$$\|u\|_{C^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}}(M \times [0,T]) \leq \|u_0\|_{C^{(2+\alpha)(M)}} + \|u\|_{C^0(M\times[0,T]} + \|f\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])}$$

1.6 Principe du maximum

Pour les équations paraboliques on ale théorème suivant

Théorème 1.6.1 ***(Principe du maximum pour l'équation de la chaleur)***
SoientM une variété compacte, T un réel strictement positif, $g(t)$ une famille de métriques riemanniennes sur M, de classe C^2, et $u : M \times [0,T] \to \mathbb{R}$ une famille de fonctions de classe C^2. On suppose qu'en tout point de $M \times [0,T]$, on a

$$\partial_t u - \Delta_{g(t)} u \geq 0.$$

Alors pour tout $(x,t) \in M \times \times [0,T]$, on a

$$u(x,t) \geq \min_{x\in M} u_0(x,0).$$

1.7 Fonction de Green

Proposition 1.7.1 *Sur une variété riemannienne sans bord, on définit la fonction de Green du laplacien existe dans le sens suivant :*
Pour toute fonction $u \in C^2(M)$, *on a*

$$u(x) - \overline{u} = \int_M G(x,y)\Delta u(y)dV(y),$$

où$G \in C^\infty(M \times M \setminus diag(M \times M))$, *définie par*

$$G(x,y) = H(x,y) + K(x,y),$$

où K *est une fonction dans* $C^\infty(M \times M)$ *et*

$$H(x,y) = \frac{1}{2\pi} f(r) \log \frac{1}{r},$$

avec r *est la distance géodésique de* x *à* y *et* $f(r) = 1$ *sur un voisinage de* $r = 0$ *et* $f(r) = 0$ *pour* $r \geq i(M)$. *où* $i(M)$ *désigne le rayon d'injectivité de* M.

1.8 Sur l'existence des solutions de l'équation de facteur conforme

Étant donné une solution de 1.2, lors de l'intégration et l'application du théorème de Gauss Bonnet, on obtient immédiatement l'égalité suivante :

$$\int_M f d\mu_g = \int_M k_0 d\mu_{g_0} = k_0 = 2\pi\chi(M),$$

où $d\mu_g = e^{2u} d\mu_{g_0}$ est la forme volume de la métrique $g = e^{2u} g_0$.

• Si $\chi(M) = 0$, l'équation 1.2 admet une solution seulement pour $f = 0$ ou f change de signe.

• De plus, quand $\chi(M) \leq 0$, on multiplie l'équation 1.2 par la fonction e^{-2u} et par intégration par partie, on trouve :

$$\int_M f d\mu_{g_0} = \int_M (-\Delta_{g_0} u + k_0) e^{-2u} d\mu_{g_0} = \int_M (-2|\nabla u|^2_{g_0} + k_0) e^{-2u} d\mu_{g_0}. \tag{1.3}$$

1.8.1 Étude de la fonctionnelle E_f

Nous allons nous concentrer sur le cas où M a un genre > 1, est quand $\chi(M) < 0$ (et donc $k_0 < 0$). Dans ce cas, les solutions de 1.2 peuvent être caractérisés comme des points critiques de la fonctionnelle

$$E_f(u) = \frac{1}{2}\int_M (|\nabla u|^2_{g_0} + 2k_0 u - fe^{2u})d\mu_{g_0}, \;\; u \in H^1(M). \tag{1.4}$$

convexité et coercivité

Ici on remarque que la fonctionnelle E_f est strictement convexe et coercive sur $H^1(M)$ quand $f \leq 0$ et n'est pas identiquement nulle. Par conséquant, pour cette f la fonctionnelle E_f admet un unique point critique $u_f \in W^1(M)$ qui est un strict minimum absolu de E_f.

Théorème 1.8.1 *Supposons que $f < 0$, Alors E_f est coercive sur $H^1(M)$ i.e Si $E_f \leq \lambda$ alors $\|u\|_{H^1(M)} \leq C_\lambda$.*

Démonstration. On veut montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $u \in H^1(M)$, il existe $C_\lambda \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $u \in H^1(M)$ telle que si

$$E_f(u) \leq \lambda, \;\; alors \;\; \|u\|_{H^1(M)} \leq C_\lambda.$$

Notons $\alpha = -\max\limits_M f$. Comme $f < 0$ et M est compacte, alors $-\alpha < 0$. On en déduit donc que

$$E_f(u) \geq \frac{1}{2}\Big(\int_M |\nabla u|^2 d\mu_{g_0} + 2\int_M K_{g_0} u d\mu_{g_0} + \alpha \int_M e^{2u} d\mu_{g_0}\Big). \tag{1.5}$$

D'aprés l'inégalité de Jensen, on a

$$\exp\Big(\frac{1}{|M|}\int_M 2u d\mu_{g_0}\Big) \leq \frac{1}{|M|}\int_M e^{2u} d\mu_{g_0}.$$

Il suit donc de 1.5

$$E_f(u) \geq \frac{1}{2}\Big[\int_M |\nabla u|^2 d\mu_{g_0} + 2\int_M K_{g_0} u d\mu_{g_0} + \alpha |M| \exp\Big(\frac{2}{|M|}\int_M u d\mu_{g_0}\Big)\Big] \tag{1.6}$$

On peut écrire

$$2\int_M K_{g_0} u d\mu_{g_0} \quad = \quad 2\int_M K_{g_0}(u-\overline{u})d\mu_{g_0} + 2k_0 \int_M u d\mu_{g_0}$$

D'aprés l'inégalité de Young, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$2\int_M K_{g_0} u d\mu_{g_0} \quad \geq \quad -\varepsilon \int_M |u-\overline{u}|^2 d\mu_{g_0} + 2k_0 \int_M u d\mu_{g_0} - \varepsilon^{-1}|M| \|K_{g_0}\|^2_{L^\infty(M)}.$$

On utilise l'inégalité de Poincaré en choisissant $\varepsilon = \frac{\lambda_1}{2}$, on trouve

$$\begin{aligned} E_f(u) \quad \geq \quad & \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 d\mu_{g_0} + 2k_0 \int_M u d\mu_{g_0} \\ & + \alpha |M| \exp\Big(\frac{2}{|M|}\int_M u d\mu_{g_0}\Big) - \frac{2}{\lambda_1}|M| \|K_{g_0}\|_{L^\infty(M)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Considérons la fonction φ défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = 2k_0 t + \alpha |M| \exp\Big(\frac{2}{|M|}t\Big).$$

Si $E_f(u) \leq \lambda$, alors

$$2k_0 \int_M u d\mu_{g_0} + \alpha |M| \exp\Big(\frac{2}{|M|}\int_M u d\mu_{g_0}\Big) \leq \lambda + \frac{2}{\lambda_1}|M| \|K_{g_0}\|_{L^\infty(M)} \tag{1.8}$$

Comme $\underset{t\to\pm\infty}{lim} \varphi(t) = +\infty$, alors il existe une constante C_0 telle que

$$\varphi(t) \leq C_1 \Rightarrow |t| \leq C_0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Grâce à 1.7

$$\int_M |\nabla u|^2 d\mu_{g_0} \leq 4C_0 + 2C_1. \tag{1.9}$$

Ainsi, d'aprés l'inégalité de Poincaré, on a

$$\int_M u^2 d\mu_{g_0} \leq \frac{1}{\lambda_1}\int_M |\nabla u|^2 d\mu_{g_0} + \frac{1}{|M|}\Big(\int_M u d\mu_{g_0}\Big)^2$$

Ce qui donne

$$\|u\|_{H^1(M)} \leq 4C_0 + 2C_1 + \frac{4C_0 + 2C_1}{\lambda_1} + \frac{C_0^2}{|M|}. \qquad \blacksquare$$

Notre premier résultat montre la non-dégénérescence de tout minimiseur relatif de E_f pour arbitraire f.

Proposition 1.8.1 *Supposons que $f < 0$, alors E_f est strictement convexe au sens où*

$$d^2E_f(u)(\varphi,\varphi) = 2\int_M |\nabla\varphi|^2 d\mu_{g_0} - 4\int_M fe^{2u} f\varphi^2\varphi^2 d\mu_{g_0} \geq C_u\|\varphi\|_{H^1(M)},$$

pour tous $u, \varphi \in H^1(M)$, où $C_u > 0$ est une constante qui dépend seulement de u.

Démonstration. Pour tous $u, \varphi \in H^1(M)$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}E(u+t\varphi) &= \frac{d^2}{dt^2}\int_M (|\nabla u + t\nabla\varphi|^2 + 2K_{g_0}(u+t\varphi) - fe^{2u+2t\varphi})d\mu_{g_0} \\ &= 2\int_M |\nabla\varphi|^2 d\mu_{g_0} - 4\int_M fe^{2u+2t\varphi}d\mu_{g_0}. \end{aligned}$$

Si $t = 0$, on aura

$$\begin{aligned} d^2E_f(u)(\varphi,\varphi) &= \frac{d^2}{dt^2}E(u+t\varphi)\Big|_{t=0} \\ &= 2\int_M |\nabla\varphi|^2 d\mu_{g_0} - 4\int_M fe^{2u}\varphi^2 d\mu_{g_0} \\ &\geq 2\int_M |\nabla\varphi|^2 d\mu_{g_0} + 4\alpha\int_M e^{2u}\varphi^2 d\mu_{g_0}. \end{aligned}$$

On veut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ qui dépend de u mais de φ telle que

$$2\int_M |\nabla\varphi|^2 d\mu_{g_0} + 4\alpha\int_M e^{2u}\varphi^2 d\mu_{g_0} \geq C\|\varphi\|_{H^1(M)}.$$

Par absurde, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $\varphi_n \in H^1(M)$ telle que

$$2\int_M |\nabla\varphi_n|^2 d\mu_{g_0} + 4\alpha\int_M e^{2u}\varphi_n^2 d\mu_{g_0} < \frac{1}{n}\|\varphi_n\|_{H^1(M)}. \tag{1.10}$$

Posons

$$\upsilon_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|_{H^1(M)}}\varphi_n.$$

En divisant l'inégalité 1.10 par $\|\varphi_n kk\|_{H^1(M)}$, on obtient

$$2\int_M \|\nabla\upsilon_n\|^2 d\mu_{g_0} + 4\alpha\int_M e^{2u}\upsilon_n^2 d\mu_{g_0} < \frac{1}{n}.$$

Ce qu'il suit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M |\nabla\upsilon_n|^2 d\mu_{g_0} = 0 \;\; et \;\; \lim_{n\to+\infty}\int_M e^{2u}\upsilon_n^2 d\mu_{g_0} = 0.$$

Comme $\|\upsilon_n\|_{H^1(M)} = 1$, on en déduit que υ_n converge vers une fonction constante $\upsilon = \pm 1$ dans $H^1(M)$.
Cela donnerait

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M e^{2u}\upsilon_n^2 d\mu_{g_0} = \pm\int_M e^{2u} d\mu_{g_0} \neq 0.$$

On arrive à une contradiction ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M e^{2u} d\mu_{g_0}. \qquad \blacksquare$$

1.9 Annexes

Proposition 1.9.1 *Soit* $u : M \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction lisse telle que pour certaines constantes* $0 < \alpha < 1$ *et* $L \geq 0$,

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\partial_t u(.,t)\|_{L^2(M)} + \sup_{t\in[0,T]}\|u(.,t)\|_{C^\alpha(M)} \leq L. \tag{1.11}$$

Alors il existe une constante C ne dépendant que de M stelle que

$$\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq CL. \tag{1.12}$$

Preuve. Soit $x \in M$ et $t_1, t_2 \in [0,T]$ tels que $0 \leq t_2 - t_1 \leq 1$. Alors On a pour tout $y \in M$,

$$|u(x,t_1) - u(x,t_2)| \leq |u(x,t_1) - u(y,t_1)| + |u(y,t_1) - u(y,t_2)| + |u(y,t_2) - u(x,t_2)|$$

intégrant sur $B := B(x, \sqrt{|t_1 - t_2|})$ par rapport à y on obtient

$$\begin{aligned} |u(x,t_1) - u(x,t_2)| &\leq \frac{1}{\mathrm{Vol}(B)} \int_B |u(x,t_1) - u(y,t_1)| d\mu_0(y) \\ &+ \frac{1}{\mathrm{Vol}(B)} \int_B |u(y,t_1) - u(y,t_2)| d\mu_0(y) \\ &+ \frac{1}{\mathrm{Vol}(B)} \int_B |u(y,t_2) - u(x,t_2)| d\mu_0(y). \end{aligned} \tag{1.13}$$

D'autre part, par hypothèse on a de 1.11 pour tout $y \in B$,

$$\begin{aligned} |u(x,t_1) - u(y,t_1)| &\leq Ld(x,y)^\alpha \leq L|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} \\ |u(x,t_2) - u(y,t_2| &\leq Ld(x,y)^\alpha \leq L|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \tag{1.14}$$

et

$$\begin{aligned} \int_B |u(y,t_1) - u(y,t_2)| d\mu_0(y) &\leq \int_{t_1}^{t_2} \int_B |\partial_t u(y,t)| d\mu_0(y) dt \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathrm{Vol}(B)} \left(\int_B |\partial_t u(y,t)|^2 d\mu_0(y) \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq L|t_1 - t_2| \sqrt{\mathrm{Vol}(B)}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ainsi en combinant 1.13, 1.14, 1.15 en utilisant le fait que $\mathrm{Vol}(B) \leq C|t_1 - t_2|$, en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} |u(x,t_1) - u(x,t_2)| & \leq 2L|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} + CL|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \\ & \leq (C+2)L|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \tag{1.16}$$

puisque $0 < \alpha < 1$ and $|t_1 - t_2| \leq 1$. Le résultat recherché 1.12 découle de 1.11 et 1.16.

Proposition 1.9.2 *Soit (M, g_0) une surface riemannienne compacte et soit $A \subset M$ tel que Vol$(A) > 0$. Alors il existe une constante $C_A > 0$ Alors il existe une constante Vol(A) and M telle que pour tout $u \in H^1(M)$ nous avons*

$$C_A \|u\|^2_{H^1(M)} \leq \int_M |\nabla u|^2 d\mu_0 + \left(\int_A u d\mu_0 \right)^2$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $\mathrm{Vol}(M) = 1$, alors par l'inégalité de Poincaré on a

$$\int_M u^2 d\mu_0 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_M |\nabla u|^2 d\mu_0 + \left(\int_M u d\mu_0 \right)^2, \tag{1.17}$$

où λ_1 est la première valeur propre non nulle du Laplacien de (M, g_0). D'autre part, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

Si on note $\delta = \mathrm{Vol}(A)$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient alors

$$\left(\int_M u d\mu_0 \right)^2 \leq (1+\varepsilon)(1-\delta) \int_{M \setminus A} u^2 d\mu_0 + (1+\varepsilon^{-1}) \left(\int_A u d\mu_0 \right)^2. \tag{1.18}$$

l découle donc de 1.17 et 1.18 en choisissant $\varepsilon = \delta$,

$$\delta^2 \int_M u^2 d\mu_0 \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_M |\nabla u|^2 d\mu_0 + (1+\delta^{-1}) \left(\int_A u d\mu_0 \right)^2.$$

La preuve du Lemme est complète.

CHAPITRE 2

EXISTENCE DU FLOT

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence globale du flot. En continuant d'utiliser les notations et les définitions du premier chapitre. Tout d'abord on démontre l'existence locale d'une solution du flot 2.1 et la décroissance de la fonctionnelle énergie le long de ce flot. Dans la suite, on établira quelques estimations sur la solution locale $u(t)$ pour démontrer l'existence globale du flot sur $[0, +\infty)$.

2.1 Existence locale du flot

Proposition 2.1.1 *Soit $\alpha \in (0,1)$, alors pour tout $\upsilon_0 \in C^{2+\alpha}(M)$ il existe $T > 0$ et $\upsilon \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T])$ telle que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} e^{2\upsilon} = \Delta \upsilon - k_0 + f e^{2\upsilon}, \\ \\ \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

<u>**Démonstration.**</u> Soit $T_1 > 0$ un réel quelconque fixé et considérons l'opérateur

$$\widetilde{L} : C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T_1]) \longrightarrow C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T_1]) \times C^{2+\alpha}(M)$$

$$w(x,t) \longmapsto \widetilde{L}w(x,t) = \Big(Lw(x,t), w(x,0)\Big).$$

Où

$$Lw = \frac{\partial}{\partial t}w - \Delta w e^{-2w} + k_0 e^{-2w} - f.$$

Par le théorème d'existence locale, il existe une unique fonction $w_1 \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T_1]$ qui est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}w_1 = \Delta w_1 e^{-2v_0} - k_0 e^{-2v_0} + f, \\ \\ w_1(x,0) = v_0(x). \end{cases}$$

Considérons la différentielle de l'opérateur $\widetilde{L}$ au point h

$$d\widetilde{L}(w_1)(h) = \Big(dLw_1(h), w(x,0)\Big),$$

Où

$$\begin{aligned} dLw_1(h) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(L(w_1 + sh)\Big)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}h + 2h\Delta w_1 e^{-2w_1} - \Delta h e^{-2w_1} - 2hk_0 e^{-2w_1}. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Nous remarquons que $dL(w_1)(w)$ est un operateur parabolique linéaire et que l'operateur $d\widetilde{L}(w_1)$ est bijectif continue. D'aprés le théorème d'inversion locale, il existe deux voisinages U_{w_1} de w_1 et $U_{\widetilde{L}(w_1)}$ de $\widetilde{L}(w_1) = (Lw_1, v_0)$ tels que $\widetilde{L} : U_{w_1} \to U_{\widetilde{L}(w_1)}$ est un difféomorphisme.

De plus, pour tout $T \leq T_1$, l'application $\widetilde{L}$ est encore un difféomorphisme si on considère U_{w_1} comme un voisinage de w_1 dans $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T]))$ et $U_{\widetilde{L}(w_1)}$ comme un voisinage de $\widetilde{L}(w_1)$ dans $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T]) \times C^{2+\alpha}(M)$.

Maintenant, pour montrer l'existence d'une solution locale de 2.1, on va montrer qu'il existe T assez petit tel que $(0, v_0) \in U_{\widetilde{L}(w_1)}$.

Par choix de

$$w_1 : L(w_1) = (e^{-2v_0} - e^{-2w_1})(\Delta w_1 - k_0) + f.$$

On a

$$\|L(w_1)\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq \|e^{-2\upsilon_0}-e^{-2w_1}\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])}\|\Delta w_1-k_0\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])}+\|f\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])}.$$

Comme $w_1 \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])$ et vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}w_1 = e^{-2\upsilon_0}\Delta w_1 - e^{-2\upsilon_0}k_0 + f,$$

alors

$$\|\Delta w_1 - k_0\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq C.$$

D'autre part, on peut écrire

$$\frac{1}{\int_M e^{2\upsilon_0}d\mu_{g_0}} - \frac{1}{\int_M e^{2w_1}d\mu_{g_0}} = \frac{\int_M e^{2w_1}d\mu_{g_0} - \int_M e^{2\upsilon_0}d\mu_{g_0}}{\int_M e^{2\upsilon_0}d\mu_{g_0}\int_M e^{2w_1}d\mu_{g_0}},$$

tel que

$$\int_M e^{2\upsilon_0}d\mu_{g_0} - \int_M e^{2w_1}d\mu_{g_0} = \int_0^1\int_M e^{2(s\upsilon_0+(1-s)w_1)}(\upsilon_0 - w_1)d\mu_{g_0}ds$$

et

$$e^{2\upsilon_0} - e^{2w_1} = \int_0^1 e^{2(-s\upsilon_0-(1-s)w_1)}(w_1-\upsilon_0)ds.$$

Comme $w_1 \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])$ et $\upsilon_0 \in C^{2+\alpha}(M)$, on a

$$\|e^{-2\upsilon_0} - e^{-2w_1}\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq C\|w_1 - \upsilon_0\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])}$$

et $\|f\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq C$, on obtient

$$\|L(w_1)\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq C\|w_1 - \upsilon_0\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])}.$$

Comme $w_1(x,0) = \upsilon_0(x)$ pour tout $x \in M$, si T et assez petit alors $\|w_1-\upsilon_0\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T]}$ est trés petit. En choisissant T suffisament petit $(0,\upsilon_0) \in U_{\widetilde{L}(w_1)}$. Ce qui achève la preuve. ■

2.2 Décroissance de la fonctionnelle E_f le long du flot

Proposition 2.2.1 *Soit υ une solution de 2.1, alors*

$$\frac{d}{dt}E_f\Big(\upsilon(t)\Big) \leq 0, \quad \forall t \in [0,T]$$

Démonstration. On a

$$E_f(\upsilon) = \frac{1}{2}\int_M \Big(\mid \nabla \upsilon \mid^2 + 2k_0 - fe^{2\upsilon}\Big) d\mu_{g_0}, \quad \upsilon \in H^1(M).$$

Dérivons $E_f\Big(\upsilon(t)\Big)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}E_f\Big(\upsilon(t)\Big) &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M \Big(\mid \nabla \upsilon(t) \mid^2 \Big) d\mu_{g_0} + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M 2k_0\upsilon(t) d\mu_{g_0} \\
&\quad -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M fe^{2\upsilon(t)} d\mu_{g_0} \\
&= \frac{1}{2}\int_M 2\frac{\partial}{\partial t}\nabla\upsilon(t)\cdot\nabla\upsilon(t) d\mu_{g_0} + \int_M k_0 \frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t} d\mu_{g_0} \\
&\quad -\int_M f\frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t} e^{2\upsilon(t)} d\mu_{g_0} \\
&= \int_M \nabla\upsilon(t)\cdot\nabla\Big(\frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t}\Big) d\mu_{g_0} + \int_M k_0 \frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t} d\mu_{g_0} \\
&\quad -\int_M f\frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t} e^{2\upsilon(t)} d\mu_{g_0}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

On intègre par partie, on aura

$$\int_M \nabla\upsilon(t)\nabla\Big(\frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t}\Big) d\mu_{g_0} = -\int_M \Delta\upsilon(t)\frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t} d\mu_{g_0} \qquad (2.4)$$

Remplaçons $\boxed{2.4}$ dans $\boxed{2.3}$, on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial t}E_f\Big(\upsilon(t)\Big) = \int_M \frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t}\Big(- \Delta\upsilon(t) + k_0 - fe^{2\upsilon(t)}\Big) d\mu_{g_0}.$$

Comme υ est solution de 2.1, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{2\upsilon} = \Delta\upsilon - k_0 + fe^{2\upsilon}.$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t}E_f\Big(\upsilon(t)\Big) = -2\int_M \Big(\frac{\partial\upsilon(t)}{\partial t}\Big)^2 e^{2\upsilon(t)}d\mu_{g_0} \leq 0. \qquad \blacksquare$$

2.3 Existence globale du flot

Nous étudions l'existence globale du flot, c'est -à-dire s'il existe des solutions $\upsilon \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,+\infty))$ de 2.1. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 *Si M une surface riemannienne compacte sans bord alors il existe une solution globale $\upsilon \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,+\infty))$ de 2.1, pour tout $\upsilon_0 \in C^{2+\alpha}(M)$, $0 < \alpha < 1$ et tout $k_0 \in \mathbb{R}$.*

Nous allons maintenant montrer l'existence globale de la solution υ de l'equation2.1. Soit $\upsilon \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])$ la solution locale de l'équation 2.1 donnée par la proposition 2.1.1.
Notons

$$J = \Big\{\overline{T} > 0 : \upsilon \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,\overline{T}])\Big\}.$$

Posons $T = supJ$.
• Si $T = +\infty$, alors $\upsilon \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,+\infty[)$.
• Si $T < +\infty$, alors $\upsilon \in \mathcal{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,T))$ et on va montrer qu'il existe une constante $C_T > 0$ qui dépend de T, M et de υ_0 telle que pour tout $t \in [0,T)$, $\|\upsilon(t)\|_{H^2(M)} \leq C_T$. On va faire la démonstration en quelques étapes.

Proposition 2.3.1 *Il existe une constante C_T telle que*

$$\upsilon(x,t) \leq C_T,\ \forall x \in M, \forall t \in [0,T)$$

Afin de démontrer la proposition 2.3.1 on va énoncer le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 ***(Gronwall)***
Soient f, g et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$y(t) \leq \varphi(t) + F(t) \tag{2.5}$$

avec $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$, *Alors pour tout* $t \in [a, b]$, *on a*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\Big(\int_s^t \psi(u)du\Big)ds \tag{2.6}$$

Preuve du lemme.
On prend l'inégalité 2.5 du lemme en multipliant les deux membres par $\psi(t)$, on aura

$$F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t). \tag{2.7}$$

Posons

$$G(t) = F(t) \exp\Big(-\int_a^t \psi(s)ds\Big)$$

Ce qui permet d'écrire l'inégalité 2.7 comme suit

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t) \exp\Big(-\int_a^t \psi(s)ds\Big).$$

Par intégration, on obtient

$$G(t) \leq \int_a^t \psi(s) \exp\Big(-\int_a^s \psi(u)du\Big)ds. \tag{2.8}$$

D'aprés l'hypothèse 2.5, on remarque que

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t) \exp\Big(\int_a^t \psi(s)ds\Big) \tag{2.9}$$

En utilisant l'inégalité 2.8, on obtient

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\Big(\int_s^t \psi(u)du\Big)ds. \qquad \blacksquare$$

Corollaire 2.3.1 *Soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\exists \alpha > 0,\ \ \exists \beta > 0, \forall t \in [a,b],\ \ \|y'(t)\| \leq \beta + \alpha\|y(t)\| \tag{2.10}$$

Alors

$$\forall t \in [a,b],\ \ \|y(t)\| \leq \|y(a)\|e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\Big(e^{\alpha(t-a)} - 1\Big).$$

Preuve.

Pour tout $t \in [a,b]$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \|y(a)\| + \|y(t) - y(a)\| \\ &\leq \|y(a)\| + \int_a^t \|y'(s)\|ds \end{aligned}$$

De l'inégalité 2.10 de l'hypothèse, on trouve

$$\|y(a)\| + \int_a^t \|y'(t)\| \leq \|y(a)\| + \beta(t-a) + \int_a^t \|y'(s)\|ds. \tag{2.11}$$

Il s'agit du lemme de Gronwall en intégrant par parties, d'où le résultat voulu. $\blacksquare$

Remarque 2.3.1 *Si on a*

$$\exists \alpha > 0,\ \ \exists \beta > 0, \forall t \in [a,b],\ \ \|y'(t)\| \geq \beta + \alpha\|y(t)\|. \tag{2.12}$$

Alors,

$$\forall t \in [a,b],\ \ \|y(t)\| \geq \|y(a)\|e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\Big(1 - e^{\alpha(t-a)}\Big).$$

Preuve

$$\begin{aligned} \|y'(t)\| &\geq \beta + \alpha\|y(t)\| \\ \|y'(t)\| - \alpha\|y(t)\| &\geq \beta \end{aligned} \tag{2.13}$$

Multiplions les deux membres de l'inégalité 2.21 par $e^{-\alpha t}$ et intégrons entre a et t, on trouve

$$\int_a^t \Big(\|y'(s)\|e^{-\alpha s}\Big)' ds \geq \|y(a)\|e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\Big(e^{\alpha(t-a)} - 1\Big) \tag{2.14}$$

Maintenant multiplions 2.14 par la fonction $e^{-\alpha t}$, d'où le résultat. ■

Preuve de la proposition 2.3.1

Notons $\upsilon_{max}(t) = \max\limits_{x\in M} \upsilon(x,t) = \upsilon(x_1,t)$ où $x_1 \in M$. D'aprés le principe du maximum, on a $\Delta\upsilon(x_1) \leq 0$ et comme υ est solution de 2.1, on obtient

$$\partial_t e^{2\upsilon_{max}(t)} \leq -k_0 + f(x_1)e^{2\upsilon(x_1,t)} \tag{2.15}$$

Or f est une fontion continue sur M, il existe une constante C_2 telle que $f(x_1) \leq C_2$, ce qui rend l'inégalité 2.15 équivalente à

$$\partial_t e^{2\upsilon_{max}(t)} \leq -k_0 + C_2 e^{2\upsilon(x_1,t)} \tag{2.16}$$

Posons maintenant $y(t) = e^{2\upsilon(t)}$, on obtient

$$y'(t) \leq -k_0 + C_2 y(t).$$

On applique le corollaire 2.3.1, on arrive à

$$y(t) \leq y(0)e^{C_2 t} + \frac{k_0}{C_2}\Big[1 - e^{C_2 t}\Big]. \tag{2.17}$$

- Si $f \geq 0$, le résultat de la proposition 2.3.1 est immédiatement vérifi.
- Supposons maintenant que $f < 0$ sur M, il suit que

$$f(x) \leq \max_{x\in M} f(x) < 0, \quad \forall x \in M.$$

Ceci implique

$$f(x_1) < C_2 < 0.$$

Or $k_0 < 0$, alors 2.17 est équivlente à

$$y(t) \leq y(0)e^{C_2 t} + \frac{k_0}{C_2}. \tag{2.18}$$

Ceci est valable $\forall t \in [0, T)$, alors

$$e^{2\upsilon_{\max}} \quad \leq \quad e^{2\upsilon_0} e^{C_2 T} + \frac{k_0}{C_2}.$$

En posant

$$C_T = \frac{1}{2} \ln \left(e^{2\upsilon_0 + C_2 T} \right) + \ln \left(\frac{k_0}{C_2} \right). \qquad \blacksquare$$

Proposition 2.3.2 *Il existe une constante C telle que*

$$\upsilon(x, t) \geq C, \ \forall t \in [0, T).$$

Démonstration. Notons $\upsilon_{\min}(t) = \min\limits_{x \in M} \upsilon(x, t) = \upsilon(x_2, t)$, où $x_2 \in M$. D'aprés le principe du maximum et minimum, on a $\Delta \upsilon(x_2) \geq 0$ et comme υ est solution de 2.1, on obtient

$$\partial_t e^{2\upsilon_{\min}(t)} \geq -k_0 + f(x_2) e^{2\upsilon(x_2, t)}. \tag{2.19}$$

Comme f est une fonction continue sur M il existe une contante C_1 telle que $f(x_2) \geq C_1$. Alors l'inégalité 2.19 devienne

$$\partial_t e^{2\upsilon_{\min}(t)} \geq -k_0 + C_1 e^{2\upsilon(x_2, t)}. \tag{2.20}$$

Posons maintenant $y(t) = e^{2\upsilon(t)}$ et en remplaçant dans 2.20, on aura

$$\begin{aligned} y'(t) \quad &\geq \quad -k_0 + C_1 y(t) \\ y'(t) - C_1 y(t) \quad &\geq \quad -k_0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

D'aprés la remarque 2.3.1, on aura

$$y(t) \geq \frac{k_0}{C_1}\left[1 - e^{C_1 t}\right] + y(0)e^{C_1 t}. \tag{2.22}$$

Notons

$$g(z) = a + (b-a)z.$$

avec

$$a = \frac{k_0}{C_1}, \quad b = y(0), \quad z = e^{C_1 t}.$$

Alors 2.22 s'écrit aussi

$$y(t) \geq g(z).$$

• Si $C_1 < 0$ alors $a > 0$ et $0 < z \leq 1$ Par identification avec 2.22, on trouve

$$\begin{aligned} g(z) &\geq \min(g(0), g(1)) \\ &\geq \min(a, b). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Ce qu'il veut dire

$$y(t) \geq \min\left(y(0), \frac{k_0}{C_1}\right).$$

• Si $C_1 > 0$ alors $z \geq 1$, ce qui implique que g sera croissante et de plus $y(t) \geq y(0)$.
On déduit qu'il existe une constante δ dépendante de M et de C_T telle que

$$|v(x,t)| \leq \delta, \ \ \forall (x,t) \in (M \times [0,t]) \tag{2.24}$$

Proposition 2.3.3 *Il existe une contante C_T vérifie*

$$\|v\|_{H^1(M)} = \int_M |\nabla u|^2 d\mu_{g_0} + \int_M v^2 d\mu_{g_0} \leq C_T. \tag{2.25}$$

Preuve.

a) On prend le premier terme de l'inégalité 2.25. D'aprés la proposition**??**, on a pour tout $\upsilon \in H^1(M)$.

$$\begin{aligned} E_f(\upsilon) &\leq E_f(\upsilon_0) \\ E_f(\upsilon) &\leq \frac{1}{2}\int_M (|\nabla \upsilon_0|^2 + k_0\upsilon_0 - fe^{2\upsilon_0})d\mu_{g_0}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Comme f est continue sur M, il existe une constante $C_0 > 0$ vérifie

$$f(x) \leq C_0, \quad x \in M.$$

Alors 2.26 est équivalente à

b) Soit υ une solution locale de 2.1, alors

$$\Delta\upsilon = \partial_t e^{2\upsilon} - k_0 + fe^{2\upsilon}. \tag{2.27}$$

On prend le deuxième terme de l'inégalité 2.25, on obtient

$$\begin{aligned} \int_M \Delta\upsilon^2 d\mu_{g_0} &\leq \int_M |\partial_t \upsilon|^2 e^{4\upsilon} d\mu_{g_0} \\ &\leq \int_M |\partial_t \upsilon|^2 e^{2\upsilon} d\mu_{g_0} \cdot C \end{aligned} \tag{2.28}$$

Posons

$$\omega = \frac{\partial\upsilon}{\partial t} e^{\frac{\upsilon}{2}},$$

Alors l'équation 2.1 donne

$$.\omega e^{\frac{\upsilon}{2}} = \Delta\upsilon - k_0 + fe^{2\upsilon}. \tag{2.29}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_M (\Delta\upsilon)^2 d\mu_{g_0} &= \int_M \Delta\upsilon\Delta\frac{\partial\upsilon}{\partial t} d\mu_{g_0} \\ &= \int_M (\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}} + k_0 - fe^{2\upsilon})\Delta(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0} \\ &= \int_M \omega e^{-\frac{\upsilon}{2}}\Delta(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0} - \int_M fe^{2\upsilon}\Delta(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

En intégrant par parties les termes de droite de l'équation 2.30, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_M (\Delta \upsilon)^2 d\mu_{g_0} &= -\int_M \nabla(\omega e^{\frac{-\upsilon}{2}})\nabla(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0} - \int_M -\nabla(fe^{2\upsilon})\nabla(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0} \\
&= -\int_M (e^{\frac{\upsilon}{2}}\nabla\omega + \frac{\omega}{2}e^{\frac{\upsilon}{2}}\nabla\upsilon)(e^{-\frac{\upsilon}{2}}\nabla\omega - \frac{\omega}{2}e^{-\frac{\upsilon}{2}}\nabla\upsilon)d\mu_{g_0} \\
&\quad + \int_M (e^{2\upsilon}\nabla f + f\nabla e^{2\upsilon})\nabla(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0} \\
&= -\int_M (\nabla\omega)^2 d\mu_{g_0} + \frac{1}{4}\int_M \omega^2(\nabla\upsilon)^2 d\mu_{g_0} \\
&\quad +2\int_M f\nabla\upsilon e^{2\upsilon}\nabla(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0} + \int_M \nabla f e^{2\upsilon}\nabla(\omega e^{-\frac{\upsilon}{2}})d\mu_{g_0}. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Or $w = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}e^{\frac{\upsilon}{2}}$, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_M (\Delta \upsilon)^2 d\mu_{g_0} &\leq \int_M (\nabla w)^2 d\mu_{g_0} + \frac{1}{4}\int_M w^2(\nabla\upsilon)^2 d\mu_{g_0} + C\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\|_{L^1(M)} \\
&\quad +C\Big(\int_M e^{\frac{\upsilon}{2}}(|\nabla w||\nabla\upsilon| + |\nabla\upsilon|^2|w|d\mu_{g_0}\Big). \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Maintenant, on s'intéresse au termes positifs de droite de l'inégalité 2.32, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on aura

$$\begin{aligned}
\int_M w^2(\nabla\upsilon)^2 d\mu_{g_0} &\leq \Big(\int_M w^4 d\mu_{g_0}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_M |\nabla\upsilon|^4 d\mu_{g_0}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|w\|^2_{L^4(M)}\|\nabla\upsilon\|^2_{L^4(M)}.
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, $\forall\varphi \in H^1(M)$,on a l'inégalité suivante

$$\|\varphi\|^2_{L^4(M)} \leq \|\varphi\|^2_{L^2(M)}\|\varphi\|^2_{H^1(M)},$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
\int_M w^2(\nabla\upsilon)^2 d\mu_{g_0} &\leq \|w\|_{L^2(M)}\|w\|_{H^1(M)}\|\upsilon\|_{H^1(M)}\|\nabla\upsilon\|_{L^2(M)}\|\nabla\upsilon\|_{H^1(M)} \\
&\leq \|w\|_{L^2(M)}\|w\|_{H^1(M)}\|\upsilon\|_{H^1(M)}\|\nabla\upsilon\|_{H^1(M)}.
\end{aligned}$$

Comme $\|\upsilon\|_{H^1(M)} \leq C_T$, et $\|\nabla\upsilon\|_{H^1(M)} \leq C\|\nabla\upsilon\|$, on arrive à

$$\int_M w^2(\nabla\upsilon)^2 d\mu_{g_0} \leq C_T\|w\|_{L^2(M)}\|w\|_{H^1(M)}\|\upsilon\|. \tag{2.33}$$

De manière anallogue à l'inégalité 2.33, on trouve

$$\int_M e^{p\upsilon}\upsilon d\mu_{g_0} \leq C_T, \ \ \forall p \geq 1,$$

On arrive à

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla\upsilon|^2|w|e^{\frac{\upsilon}{2}}d\mu_{g_0} &\leq \Big(\int_M |\nabla\upsilon|^4\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_M w^4\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\int_M e^{2\upsilon}\Big)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq C_T\|\nabla\upsilon\|^2_{L^4(M)}\|w\|_{L^4(M)} \\
&\leq C_T\|\upsilon\|\|\upsilon\|_{L^2(M)}\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(M)}\|w\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(M)} \\
&\leq C_T\|\upsilon\|\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(M)}\|w\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(M)}. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\int_M |\nabla w||\nabla\upsilon|e^{\frac{\upsilon}{2}}d\mu_{g_0} &\leq \Big(\int_M |\nabla w|^2 d\mu_{g_0}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_M |\nabla\upsilon|^4 d\mu_{g_0}\Big)^{\frac{1}{4}}\Big(\int_M e^{2\upsilon}d\mu_{g_0}\Big)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq C_T\|w\|_{H^1(M)}\|\upsilon\|^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0, T)$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|w(s)\|^2_{L^2(M)}ds &= \int_0^t\int_M w^2(s)d\mu_{g_0}ds \\
&= \int_0^t\int_M \Big(\frac{\partial\upsilon(s)}{\partial s}\Big)^2 e^{2\upsilon(s)}d\mu_{g_0}ds \\
&= -\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}E(\upsilon(s))ds = E_f(\upsilon_0) - E_f(\upsilon(t)) \\
&\leq C_T. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on a

$$\int_M \Big|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\Big| d\mu_{g_0} \leq \left(\int_M \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right)^2 e^{2\upsilon} d\mu_{g_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M e^{-2\upsilon} d\mu_{g_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.37}$$

En utilisant que $\int_M e^{p\upsilon} \leq C_T$ avec $p = -1$, on aura

$$\int_M e^{-2\upsilon} \leq C_T,$$

grâce à l'inégalité 2.37, on obtient

$$\int_M \Big|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\Big| d\mu_{g_0} \leq \left(\int_M \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right)^2 e^{2\upsilon} d\mu_{g_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.38}$$

Maintenant, remplaçons 2.33, 2.36, 2.34, 2.38 dans 2.32, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_M (\Delta \upsilon)^2 d\mu_{g_0} &\leq -\int_M |\nabla w|^2 d\mu_{g_0} + C_T \|w\|^2_{L^2(M)} \\ &\quad + C_T\Big(\|w\|_{H^1(M)}\|w\|_{L^2(M)}\|\upsilon\| + \|w\|_{H^1(M)}\|w\|_{L^2(M)}\|\upsilon\|^{\frac{1}{2}}\Big).\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}\|w\|_{H^1(M)}\|w\|_{L^2(M)}\|\upsilon\| &\leq \varepsilon\|w\|^2_{H^1(M)} + \varepsilon^{-1}\|w\|^2_{L^2(M)}\|\upsilon\|^2 \\ &\leq \varepsilon\int_M |\nabla w|^2 d\mu_{g_0} + \varepsilon\|w\|^2_{L^2(M)} + \varepsilon^{-1}\|w\|^2_{L^2(M)}\|\upsilon\|^2.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|w\|_{H^1(M)}\|w\|_{L^2(M)}\|\upsilon\|^{\frac{1}{2}} &\leq \varepsilon\|w\|^2_{H^1(M)} + \varepsilon^{-1}\|w\|^2_{L^2(M)}\|\upsilon\| \\ &\leq \varepsilon\int_M |\nabla w|^2 d\mu_{g_0} + \varepsilon\|w\|^2_{L^2(M)} + \varepsilon^{-1}\|w\|^2_{L^2(M)}\|\upsilon\|^2.\end{aligned}$$

On choisit ε assez petit,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_M (\Delta \upsilon)^2\right) d\mu_{g_0} + 1 \leq C_T\left(\int_M (\Delta \upsilon)^2\right) d\mu_{g_0} + 1\left(\|w(t)\|^2_{L^2(M)}\right).$$

On intègre par rapport à t en utilisant 2.36

$$\int_0^t \|w(s)\|^2_{L^2(M)} ds \leq C_T,$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_M (\Delta \upsilon(t))^2 d\mu_{g_0} + 1 &\leq \int_M (\Delta \upsilon_0)^2 d\mu_{g_0} + e^{C_T \int_0^t \|w(s)\|^2_{L^2(M)} ds + C_T t} \\
&\leq \int_M (\Delta \upsilon_0)^2 d\mu_{g_0} + e^{C_T} \\
&\leq C_T, \ \ \forall t \in [0, T).
\end{aligned}$$

■

On a démontré que $\|\upsilon(t)\|_{H^2(M)} \leq C_T$ et grâce au injections de Sobolev, il existe une constante C_T telle que, pour tout $t \in [0, T)$ on a

$$\|\upsilon(t)\|_{C^\alpha(M)} \leq C_T.$$

Proposition 2.3.4 *Pour tout $x_1, x_2 \in M$ et $t_1, t_2 \in [0, T)$ tel que $0 < t_2 - t_1 < 1$, il existe une constante C_T telle que*

$$|\upsilon(x_1, t_1) - \upsilon(x_2, t_2)| \leq C_T(|t_1 - t_2|^{\frac{\alpha}{2}} + |x_1 - x_2|^\alpha).$$

Démonstration. On a $\|\upsilon(t)\|_{H^2(M)} \leq C_T, \ \forall t \in [0, T)$ et $\|\upsilon(t)\|_{C^\alpha(M)} \leq C_T$, alors

$$|\upsilon(x, t) - \upsilon(y, t)| \leq C_T |x - y|^\alpha \tag{2.39}$$

Il suit que

$$\left|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right|^2 \leq C_T |\Delta \upsilon|^2 + C_T.$$

Intégrons sur M, on trouve

$$\int_M \left|\frac{\partial \upsilon(t)}{\partial t}\right|^2 d\mu_{g_0} \leq C_T \|\upsilon(t)\|^2_{H^2(M)} + C_T. \tag{2.40}$$

On peut écrire

$$
\begin{aligned}
|\upsilon(x,t_1)-\upsilon(x,t_2)| &= \frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(x,t_1)-\upsilon(x,t_2)|d\mu_{g_0}\\
&\leq \frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(x,t_1)-\upsilon(y,t_1)|d\mu_{g_0}\\
&\quad+\frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(y,t_1)-\upsilon(y,t_2)|d\mu_{g_0}\\
&\quad+\frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(y,t_2)-\upsilon(x,t_2)|d\mu_{g_0}. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

On prend le second terme de droite de 2.41, en utilisant l'inégalité de Hölder et 2.40, on aura

$$
\begin{aligned}
&\frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(y,t_1)-\upsilon(y,t_2)|d\mu(y)\\
&\leq C\sup_{t_2\geq\tau\geq t_1}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}1\cdot\left|\frac{\partial\upsilon}{\partial s}\right|(y,\tau)d\mu(y)\\
&\leq \sup_{t_2\geq\tau\geq t_1}\left(\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}\left|\frac{\partial\upsilon(t)}{\partial s}\right|^2(y,\tau)d\mu(y)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C_T\sqrt{t_2-t_1} \qquad (2.42)
\end{aligned}
$$

Supposons que

$$x=r^\alpha\cos\alpha\theta,\quad y=r^\alpha\sin\alpha\theta$$

Maintenant, on prend le premier terme de droite de l'inégalité 2.41 en utilisant 2.39
On aura

$$\begin{aligned}
&\frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(x,t_1)-\upsilon(y,t_2)|d\mu(y)\\
&\leq \frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(x,t_1)-\upsilon(y,t_2)|d\mu(y)\\
&\leq \frac{C_T}{t_2-t_1}\int_0^{\sqrt{t_2-1}} r^{1+\alpha}dr\\
&\leq \frac{C_T}{t_2-t_1}(t_2-t_1)^{1+\frac{\alpha}{2}}\\
&\leq C_T(t_2-t_1)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

On déduit

$$\frac{C}{C2\pi(t_2-t_1)}\int_{B\sqrt{t_2-t_1}(x)}|\upsilon(x,t_1)-\upsilon(y,t_1)|d\mu(y)\leq C_T(t_2-t_1)^{\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2.44)$$

On remarque que pour tout $0 < t_2 - t_1 < 1$, on a

$$\sqrt{t_2-t_1}\leq (t_2-t_1)^{\frac{\alpha}{2}},$$

on remplaçe 2.42, 2.43, 2.44 dans 2.41, on trouve

$$|\upsilon(x,t_1)-\upsilon(x,t_2)|\leq C_T(t_2-t_1)^{\frac{\alpha}{2}}. \qquad (2.45)$$

De 2.39, 2.45 on arrive au résultat voulu. ■

Remarque 2.3.2 *D'aprés la proposition 2.3.4, on déduit qu'il existe une constante C_T vérifie*

$$\|e^{\upsilon}\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M,[0,T))}\leq C_T.$$

On sait que υ satisfait l'équation

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = e^{-2\upsilon}\Delta\upsilon - k_0e^{-2\upsilon}+f,$$

alors il existe une constante C_T qui depend de $\|\upsilon_0\|_{C^{2+\alpha}(M)}$, telle que

$$\|\upsilon\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}[M\times[0,T))} \leq C_T, \ \ \forall t \in [0,T).$$

Maintenant, on va démontrer le théorème 2.3.1.

Proposition 2.3.5 *Pour tout $\upsilon_0 \in C^{2+\alpha}(M)$, il existe une solution globale $\upsilon \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M,[0,+\infty))$ de 2.1.*

Démonstration. De la proposition 2.3.4 et la remarque 2.3.2, on a

$$\|\upsilon\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T))} \leq C_T.$$

Comme

$$C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T)) = C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T]).$$

Il suit que

$$\|\upsilon\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T])} \leq C_T.$$

Ce qui contredit avec la définition de T. ■

Maintenant, on va démontrer la continuité de la solution du flot par rapport à la donnée initiale

Proposition 2.3.6 *Si $u_0, \ \upsilon_0 \in C^{2+\alpha}(M)$, alors il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant de $\|u_0\|_{C^{2+\alpha}(M)}, \ \|\upsilon_0\|_{C^{2+\alpha}(M)}$ et de T qui vérifie*

$$\|u(t)-\upsilon(t)\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T))} \leq C_0\|u_0-\upsilon_0\|_{C^{2+\alpha}(M)}, \ \ \forall t \in [0,T),$$

avec $u, \ \upsilon$ sont des solutions de 2.1 et

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \\ \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x) \end{cases} \qquad \forall x \in M,$$

Remarque 2.3.3 *Le résultat obtenu de la proposition 2.3.6 est l'unicité du flot, i.e si*

$$\upsilon_0(x) = u_0(x), \ \ \forall x \in M,$$

alors

$$\upsilon(x,t) = u(x,t), \ \ \forall x \in Met \ \ \forall t \geq 0.$$

<u>Démonstration</u>
Posons $F = u - \upsilon$, avec

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2}(e^{-2u} + e^{-2\upsilon})\Delta F + \Big(\frac{1}{2}(\Delta u + \Delta \upsilon) - k_0\Big)(e^{-2u} + e^{-2\upsilon}) + f.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a(x,t)\Delta F + b(x,t)F + f,$$

où

$$a(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-2u} + e^{-2\upsilon}), \;\; b(x,t) = -\Big(\frac{1}{2}(\Delta u + \Delta \upsilon) - k_0\Big)\int_0^1 e^{2(-su-(1-s)\upsilon)}ds$$

et d'aprés la remarque 2.3.4, il existe deux constantes C dépendant de $\|\upsilon_0\|_{C^{2+\alpha(M)}}$ et de T vérifiant

$$\|a\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T))} \leq C.$$

$$\|b\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,T))} \leq C.$$

$$|f| \leq C, \;\; \forall \in M.$$

CHAPITRE 3

ETUDE DU COMPORTEMENT ASSYMPTOTIQUE DU FLOT

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une approche par écoulement au problème de courbure gaussienne prescrite sur des surfaces riemanniennes compactes avec une caractéristique d'Euler négative. Nous identifions une nouvelle condition explicite sur la fonction prescrite f qui garantit la convergence du flot vers une métrique conforme dont la courbure gaussienne est f. Faire exploser l'écoulement à l'infini est également étudié, En continuant d'utiliser les définitions des deux premiers chapitres.

Rappelons que l'équation (1.2) est le gradient négatif du flot associé à la fonctionnelle :

$$E_f(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u|^2 \, d\mu_0 + k_0 \int_M u \, d\mu_0 - \frac{1}{2}\int_M f e^{2u} \, d\mu_0. \tag{3.1}$$

L'étude du comportement asymptotique du flot lorsque $t \longrightarrow +\infty$ nécessite des hypothèses supplémentaires sur la fonction f. une condition nécessaire sur f pour la résolution de l'équation 1.2 est que f doit être négative quelque part sur M. En effet, si $f \geq 0$ sur M, alors en utilisant le principe du maximum que l'on obtient

$$\min_M e^{2u(.,t)} \geq \min_M e^{2u_0} + |k_0| t \longrightarrow +\infty \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Ce qui montre que le flot explose à l'infini. Pour énoncer une hypothèse supplémentaire sur f on pose $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$ de sorte que $f = f^+ - f^-$. Alors notre hypothèse sur f sera

$$\frac{1}{\|f\|_{L^\infty(M)}} \int_M f^+ d\mu_0 \leq C_M \left(\frac{1}{\|f\|_{L^\infty(M)}} \int_M f^- d\mu_0 \right)^\theta, \tag{3.2}$$

où C_M est une constante positive dépendant uniquement de M et

$$\theta = \frac{\pi\big(1 - 2\chi(M)\big) + 1}{\pi - 1}.$$

Puisque la résolution de (1.2) est invariante par dilatations positives de f, alors en normalisant f tel que $\|f\|_{L^\infty(M)} = 1$, la condition (3.2) prend la forme équivalente plus simple :

$$\int_M f^+ d\mu_0 \leq C_M \left(\int_M f^- d\mu_0 \right)^\theta. \tag{3.3}$$

Notre résultat pricipal est le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *Soit M une surface riemannienne compacte de cratéristique d'Euler $\chi(M) < 0$. Pour toute $f \in C^\infty(M)$ il existe vérifie l'hypothèse (3.2), il existe une fonction $\overline{u} \in C^\infty(M)$, tel que pour toute donnée initiale $u_0 \leq \overline{u}$, la solution de l'éuation 2.1 converge dans $C^\infty(M)$ quand $t \to +\infty$ vers une fonction u_∞ satisfaisante l'équation de courbure gaussienne prescrite*

$$-\Delta u_\infty + k_0 = f e^{2u_\infty}.$$

Comme une conséquance direct de ce théorème, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.1 *Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ satisfait l'hpothèse (3.2), il existe une métrique conforme g dont courbure Gussienne est f.*

On remaque que l'hypothèse (3.2) est invariante sous les dilatations positives de f, mais ce n'est pas le cas sous l'action du groupe des difféomorphismes de M. C'est un fait très important puisqu'il implique que, à un difféomorphisme près, l'hypothèse (3.2) est satisfaite par toute fonction f négative quelque part sur M. On obtient le deuxième corollaire suivant :

Corollaire 3.1.2 *[13] Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que $\min_M f < 0$, il existe un difféomorphisme φ de M et une métrique conforme g dont la courbure gaussienne est $f \circ \varphi$.*

Le théorème suivant donne une étude complète de la convergence du flot quand $f < 0$,

Théorème 3.1.2 *Supposons que $\not\equiv 0 f \leq 0$, alors pour toute donnée initiale $u_0 \in C^\infty(M)$. La solution de l'équation 2.1 converges dans $C^\infty(M)$ quand $t \to +\infty$ vers une fonction u_∞ satisfaisant l'équation de courbure de Gauss :*

$$-\Delta u_\infty + k_0 = f e^{2u_\infty}.$$

Comme nous le verrons dans le théorème 3.1.3 ci-dessous, si le flot explose à l'infinité, alors l'explosion se produit sur le support de f^+, on considère

$$M_{f^+} = \{x \in M : \ f > 0\} \quad et \quad M_{f^-} = \{x \in M : \ f < 0\}$$

Théorème 3.1.3 *Soit $K \subset M_{f^-}$ un ensemble compacte. Alors pour toute fonction $\not\equiv 0 f \in C^\infty(M)$, il existe une constante C_K positive sachant que la solution u de l'équation de la chaleur 2.1 satisfait*

$$\|u\|_{L^\infty(K\times[0,+\infty))} \leq C_K.$$

De plus, si pour une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in M} u(x,t_n) = +\infty,$$

alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sup_{x\in M_f^+} u(x,t_n) = +\infty. \qquad (3.4)$$

3.2 Comportement du flot à l'infini

Dans cette section nous étudions le comportement asymptotique du flot $u(.,t)$ donné par le théorème 2.3.1 lorsque $t \longrightarrow +\infty$. On démontre d'abord la proposition suivante qui donne une sur-solution de l'équation (1.2) lorsque la condition 3.2 est satisfaite.

Proposition 3.2.1 *Supposons que f est une fonction lisse satisfaisant la condition 3.2. Alors il existe une fonction U tel que $U^* \in C^2(M)$*

$$-\Delta U^* + k_0 - fe^{2U*} \geq 0. \tag{3.5}$$

Preuve.
En normalisant f si nécessaire, on peut supposer que $\|f\|_{L^\infty(M)} = 1$, donc la condition 3.2 devient

$$\int_M f^+ d\mu_0 \leq C_M \left(\int_M f^- d\mu_0 \right)^\theta . \tag{3.6}$$

On distingue deux cas : $f^+ \not\equiv 0$ et $f^+ \equiv 0$.

Premier cas : $f^+ \not\equiv 0$.

Nous fixons

$$h = k_0 + \frac{1-k_0}{\|f^-\|_{L^1(M)}} f^- - \frac{1}{\|f^+\|_{L^1(M)}} f^+ \tag{3.7}$$

et notez ici que nous avons

$$\int_M h \; d\mu g_0 = 0,$$

puisqu'on suppose que $d\mu g_0 = 1$.

Cela permet donc de considérer φ une solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta\varphi = h. \tag{3.8}$$

Puis on expose notre sur-solution $\overline{u}$ en posant

$$U^* = \varphi + \lambda,$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante à choisir ultérieurement.

Nous donnerons d'abord des bornes supérieures et inférieures sur la solution φ de l'équation de poisson 3.8.

Si on choisit φ tel que

$$\int_M \varphi d\mu_0 = 0,$$

alors on a

$$\varphi(x) = \int_M G(x,y)h(y)d\mu_0(y), \tag{3.9}$$

où G est la fonction de Green de (M, g_0). On rappelle la formule asymptotique suivante pour G :

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\log d(x,y) + H(x,y), \tag{3.10}$$

où d est la fonction de distance sur M et $H \in C^0(M \times M)$.

Dans ce qui suit, C désigne une constante positive dépendant uniquement de M et sa valeur peut changer de ligne en ligne. Puisque $\log d(x,y) \leq C$ sur $M \times M$ et $\left|\int_M \log d(x,y)d\mu_0(y)\right| \leq C$ et $k_0 < 0$, alors on a de 3.7, (3.9) et (3.10) :

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{2\pi\|f^+\|_{L^1(M)}}\int_M f^+(y)\log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y) + C. \tag{3.11}$$

De la même façon on a la borne inférieure,

$$\varphi(x) \geq -\frac{1-k_0}{2\pi\|f^-\|_{L^1(M)}}\int_M f^-(y)\log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y) - C. \tag{3.12}$$

Borner l'intégrale, $\int_M f^+(y)\log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y)$, où $0 < R < 1$ une constante à choisir plus tard. Alors on a, puisque $\|f\|_{L^\infty(M)} = 1$,

$$\int_M f^+(y)\log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y) \le \int_{B(x,R)} \log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y) - (\log R)\int_M f^+ d\mu_0. \qquad (3.13)$$

Un calcul direct donne

$$\int_{B(x,R)} \log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y) \le -CR^2\log R + CR^2.$$

On peut supposer que $C > 1$. Donc si on choisit R tel que $CR^2 = \|f^+\|_{L^1(M)}$, alors il résulte de 3.13 que

$$\frac{1}{2\pi\|f^+\|_{L^1(M)}}\int_M f^+(y)\log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y) \le -\frac{1}{2\pi}\log\|f^+\|_{L^1(M)} + C. \qquad (3.14)$$

De la même manière nous avons

$$\frac{1}{2\pi\|f^-\|_{L^1(M)}}\int_M f^-(y)\log\frac{1}{d(x,y)}d\mu_0(y) \ge -\frac{1}{2\pi}\log\|f^-\|_{L^1(M)} + C. \qquad (3.15)$$

Ainsi si nous combinons 3.11, 3.12, 3.14 et 3.15 nous obtenons

$$\frac{1-k_0}{2\pi}\log\|f^-\|_{L^1(M)} - C \le \varphi(x) \le -\frac{1}{2\pi}\log\|f^+\|_{L^1(M)} + C.$$

Ce qui est équivalent à

$$C^{-1}\|f^-\|_{L^1(M)}^{\frac{1-k_0}{\pi}} \le e^{2\varphi(x)} \le \frac{C}{\|f^+\|_{L^1(M)}^{\frac{1}{\pi}}}. \qquad (3.16)$$

Maintenant, si on pose $U_* = \varphi + \lambda$, on a de 3.7 et 3.8

$$-\Delta U^* + k_0 - fe^{2U^*} = \left(e^{2\varphi+2\lambda} - \frac{1-k_0}{\|f^-\|_{L^1(M)}}\right)f^- - \left(e^{2\varphi+2\lambda} - \frac{1}{\|f^+\|_{L^1(M)}}\right)f^+. \quad (3.17)$$

Si on choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{2\lambda} = C^{-1} \|f^+\|_{L^1(M)}^{\frac{1}{\pi}-1},$$

où C est la constante de 3.16, alors en utilisant 3.16, on a

$$\left(e^{2\varphi+2\lambda} - \frac{1}{\|f^+\|_{L^1(M)}} \right) f^+ \leq 0.$$

Ce qui donne en utilisant 3.17

$$-\Delta U^* + k_0 - f e^{U^*} \geq \left(C \|f^-\|_{L^1(M)}^{\frac{1-k_0}{\pi}} \|f^+\|_{L^1(M)}^{\frac{1}{\pi}-1} - \frac{1-k_0}{\|f^-\|_{L^1(M)}} \right) f^-. \tag{3.18}$$

Par notre choix de λ il découle de 3.18 que

$$-\Delta U^* + k_0 - f e^{U^*} \geq \left(e^{2\varphi+2\lambda} - \frac{1-k_0}{\|f^-\|_{L^1(M)}} \right) f^-. \tag{3.19}$$

il est clair que la positivité du second membre de 3.19 est équivalente à la condition 3.3, (on rappelons ici que $k_0 = 2\pi\chi(M)$). Ceci prouve la proposition 3.2.1 dans le cas $f^+ \not\equiv 0$.
Deuxième Cas : $f^+ \equiv 0$. Nous fixons

$$h = k_0 - \frac{k_0}{\|f^-\|_{L^1(M)}} f^-, \tag{3.20}$$

de sorte que

$$\int_M h \, d\mu_0 = 0$$

puisqu'on suppose que $\mathrm{Vol}(M) = 1$.

On considère alors φ la solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta\varphi = h. \tag{3.21}$$

tel que

$$\int_M h d\mu_0 = 0.$$

Comme dans le premier cas ($f^+ \not\equiv 0$), en utilisant la formule asymptotique 3.11 de la La fonction de Green nous avons

$$\varphi \geq \frac{1-k_0}{2\pi} \log \|f^-\|_{L^1(M)} - C.$$

Ce qui est équivalent à

$$e^{2\varphi(x)} \geq C^{-1} \|f^-\|_{L^1(M)}^{\frac{1-k_0}{\pi}}. \tag{3.22}$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{2\lambda} = C \|f^-\|_{L^1(M)}^{\frac{1-k_0}{\pi}},$$

où C est la constante dans 3.22, et posons $U^* = \varphi + \lambda$. Alors en utilisant 3.20, 3.21 and 3.22, il est facile de voir que U^* satisfait

$$-\Delta U^* + k_0 - f e^{2U^*} \geq 0.$$

Ceci permet d'obtenir la preuve de la proposition 3.2.1.

La proposition 3.2.1 nous permet de prouver la borne supérieure uniforme suivante sur le flot.

Proposition 3.2.2 *Soit $u_0 \in C^\infty(M)$ tel que $u_0 \leq U^*$ où U^* est donnée par la proposition 3.2.1. Alors la solution u de (2.1) satisfait pour tout $(x,t) \in M \times [0, +\infty)$*

$$u(x,t) \leq U^*(x). \tag{3.23}$$

Soit $v = U^* - u$. Comme u satisfait (2.1) et U^* satisfait (3.5), alors on a

$$\partial_t \left(e^{2U^*} - e^{2u}\right) \geq \Delta v + f\left(e^{2U^*} - e^{2u}\right). \tag{3.24}$$

D'autre part, on a

$$e^{2U^*} - e^{2u} = av,$$

où $a \in C^2(M \times [0, T^*))$ est donnée par

$$a(x,t) = N \int_0^1 e^{sU^*(x,t)+(1-s)u(x,t)} ds,$$

il découle donc de (3.24)

$$\partial_t(av) \geq \Delta v + fae^v \tag{3.25}$$

Depuis $v(x,0) = U^*(x) - u_0(x) \geq 0$ et $a > 0$, puis on applique le principe du maximum à (3.25), on obtient $v(x,t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, c'est

$$u(x,t) \leq U^*(x).$$

Proposition 3.2.2 est prouvée.

Nous pouvons maintenant prouver des C^α-estimations uniformes de sur la solution.

Proposition 3.2.3 *Soit $u_0 \in C^\infty(M)$ tel que $u_0 \leq U^*$ où U^* est donnée par la Proposition 3.2.1. Alors la solution u de (2.1) satisfait pour certains $\alpha \in (0,1)$*

$$\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,+\infty))} \leq C,$$

où C est une constante positive depend seulement de u_0, f et M.

Preuve. Dans cette démonstration, C est une constante positive depend seulement de u_0, f et M, dont les valeurs peuvent changer d'une ligne à l'autre. Par les propositions 2.3.1 et 2.3.2 la solution u est uniformément bornée par le bas par une constante ne dépendant que de u_0, f et M. Puisque $u_0 \leq U^*$, Alors par la proposition 3.2.2 nous avons que u est uniformément bornée comme ci-dessus par $\|U^*\|_{L^\infty(M)}$. Donc on a

$$\|u\|_{L^\infty(M\times[0,+\infty))} \leq C. \tag{3.26}$$

Ce qui implique que

$$\inf_{t\in[0,+\infty)} E_f(u(t,.)) \geq -C.$$

Il résulte que

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|\partial_t u(.,t)\|_{L^2(M)} \leq C. \tag{3.27}$$

Si on applique le théorème de régularité elliptique L^2 sur l'equation 2.1 en utilisant 3.26 et 3.27 on a

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|u(.,t)\|_{H^2(M)} \leq C,$$

ce qui donne en utilisant le théorème de plongement de Sobolev

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|u(.,t)\|_{C^\alpha(M)} \leq C, \tag{3.28}$$

pour une constante $0 < \alpha < 1$. Il résulte de la proposition A.1 avec 3.27 et 3.28 que

$$\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,+\infty))} \leq C.$$

La preuve de la proposition3.2.3 est alors complète.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.1.1.

Preuve du Théorème 3.1.1

Soit u la solution de (2.1) donnée par le théorème 2.3.1. Par la proposition 3.2.2, on a u est uniformément bornée sur $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M \times [0,+\infty))$. On applique alors le théorème de régularité classique pour obtenir la borne uniforme C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{t\geq 0} \|u(.,t)\|_{C^k(M)} \leq C_k, \tag{3.29}$$

pour certains constantes C_k. D'autre part, en utilisant 2.2.1 on a

$$\int_0^{+\infty} \int_M e^{2u} |\partial_t u|^2 d\mu_0 dt \leq C. \tag{3.30}$$

Il résulte de (3.30) qu'il existe une suite $t_n \longrightarrow +\infty$ telle que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_M e^{2u(.,t_n)} |\partial_t u(.,t_n)|^2 d\mu_0 = 0. \tag{3.31}$$

En passant à une sous-suite si nécessaire, on a par 3.29, puisque M est compacte, que $u(.,t_n)$ converges dans $C^k(M)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, à une fonction $u_\infty \in C^\infty(M)$. Maintenant, si nous remplaçons t par t_n dans l'équation 2.1 et passons à la limite où $n \to +\infty$, nous obtenons en utilisant 3.31,

$$-\Delta u_\infty + k_0 = f e^{2u_\infty}.$$

D'après le résultat général de Simon [15] sur les équations d'évolution, u_∞ est la limite unique de $u(.,t)$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Ceci permet d'obtenir la preuve du théorème3.1.1.

Preuve du Corollaire 3.1.1. Il suffit de considérer la limite u_∞ du flot donnée par le théorème 3.1.1 en prenant tout $u_0 \in C^\infty(M)$ tel que $u_0 \leq U^*$.

Preuve du Corollaire 3.1.2. En normalisant f si nécessaire, on peut supposer sans perte de généralité que $\|f\|_{L^\infty(M)} = 1$. Puisque $\min_M f < 0$, alors il existent $x_0 \in M$ et $r > 0$ tels que $f < 0$ sur $B := \overline{B(x_0, r)}$. Soit

$$\delta = C_M \left(\min_B f^-\right)^\theta > 0,$$

où C_M et θ sont les constantes comme dans 3.2, et soit

$$\Omega = M \setminus B.$$

Soit φ un difféomorphisme de M tel que $\mathrm{Vol}\left(\varphi^{-1}(\Omega)\right) < \delta$. Alors il est facile de vérifier que la fonction $f \circ \varphi$ satisfait la condition 3.2, et alors il suffit d'appliquer le corollaire 3.1.1.

Pour démontrer le théorème 3.1.2 on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Soit u lasolution de 2.1, défini sur un intervalle maximal* $[0, T^*)$, *alors on a*

$$\sup_{t\in[0,T^*)} \int_M e^{2u(.,t)} |\partial_t u(.,t)|^2 d\mu_0 \leq \frac{1}{4} \int_M (K_{g(0)} - f)^2 d\mu_0 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^\infty(M)} \left(\mathcal{E}(u_0) - \mathcal{E}(u(.,t))\right), \tag{3.32}$$

Preuve du lemme 3.2.1. On considère la métrique conforme $g = e^{2u} g_0$ et K_g sa courbure Gaussienne. Alors un simple calcul donne

$$\frac{d}{dt} \int_M (K_g - f)^2 d\mu_g = - \int_M |\nabla_g (K_g - f)|^2 d\mu_g + \int_M f (K_g - f)^2 d\mu_g,$$

où $d\mu_g$ est la forme volume de (M, g) et ∇_g est le gradient par rapport à g, Il s'ensuit alors

$$\frac{d}{dt} \int_M (K_g - f)^2 d\mu_g \leq \|f\|_{L^\infty(M)} \int_M (K_g - f)^2 d\mu_g,$$

Ce quiimplique par intégration sur $[0, t]$ que

$$\int_M (K_{g(t)} - f)^2 d\mu_{g(t)} \leq \int_M (K_{g(0)} - f)^2 d\mu_0 + \|f\|_{L^\infty(M)} \int_0^t \int_M (K_{g(\tau)} - f)^2 d\mu_{g(\tau)} d\tau. \tag{3.33}$$

D'autre part on observe que $K_g - f = -2\partial_t u$. De 3.33 on obtient

$$\int_M (K_{g(t)} - f)^2 d\mu_{g(t)} \leq \int_M (K_{g(0)} - f)^2 d\mu_0 + 2\|f\|_{L^\infty(M)} \left(\mathcal{E}(u_0) - \mathcal{E}(u(.t))\right)$$

et en utilisant à nouveau que $K_g - f = -2\partial_t u$, on aura

$$\int_M e^{2u(.,t)} |\partial_t u(.,t)|^2 d\mu_0 \leq \frac{1}{4} \int_M (K_{g(0)} - f)^2 d\mu_0 + \frac{1}{2} \|f\|_{L^\infty(M)} \left(\mathcal{E}(u_0) - \mathcal{E}(u(.t))\right)$$

D'où le résultat souhaité.

Preuve du théorème 3.1.2. Dans ce qui suit, C désigne une constante positive dépendant uniquement de u_0, f et M.

Puisque $f \not\equiv 0$, il existe $x_0 \in M$ et $r > 0$ tel que $f < 0$ sur $B(x_0, r)$. Si on pose $A = B(x_0, r)$ et appliquons l'inégalité de Poincaré modifiée de la proposition 1.9.2 en annexe, alors nous avons

$$C\|u\|^2_{H^1(M)} \leq \int_M |\nabla u|^2 d\mu_0 + \left(\int_A u d\mu_0\right)^2. \tag{3.34}$$

D'autre part, nous savons par la propostion 2.2.1 que la fonctionnelle E_f est décroissante le long de u, donc nous avons pour tout $t \geq 0$:

$$E_f(u(.,t)) \leq E_f(u_0),$$

ce qui implique, car $f \leq 0$,

$$\int_M |\nabla u|^2 d\mu_0 + 2k_0 \int_M u d\mu_0 + m \int_A e^{2u} d\mu_0 \leq 2E_f(u_0) \tag{3.35}$$

où $m = \min\limits_A f^- > 0$.

Par le théorème 2.3.1, u est bornée inférieurement par une constante ne dépendant que de u_0, f et M. Ceci implique que $u^2 \leq e^{2u} + C$, et par intégration sur A et application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\int_A u d\mu_0\right)^2 \leq \mathrm{Vol}(A) \int_A e^{2u} d\mu_0 + C \tag{3.36}$$

En combinant 3.34, 3.35 et 3.36 on obtient

$$\|u\|^2_{H^1(M)} \leq 2C|k_0| \int_M |u| d\mu_0 + C. \tag{3.37}$$

On a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$2C|k_0| \int_M |u| d\mu_0 \leq \varepsilon \int_M u^2 d\mu_0 + C\varepsilon^{-1}$$

donc en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il résulte de 3.37 que

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(M)} \leq C. \tag{3.38}$$

En utilisant l'inégalité de Moser-Trudinger, il résulte de 3.38 que pour tout $p \in [1, +\infty)$

$$\int_M e^{pu} d\mu_0 \leq C_p, \tag{3.39}$$

où C_p est une constante positive depend uniquement de u_0, f, p et M. En particulier on obtient la borne inférieure de la fonctionnelle E_f le long du flot :

$$\inf_{t\in[0,+\infty)} E_f(u(.,t) \geq -C. \tag{3.40}$$

Maintenant par le Lemme 3.2.1 et 3.40 nous avons que

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \int_M e^{2u(.,t)}|\partial_t u(.,t)|^2 d\mu_0 \leq C. \tag{3.41}$$

nous avons que 3.39 et 3.41 permettent d'appliquer le théorème de régularité élliptique sur L^2 à l'équation 2.1, on obtient donc

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|u(.,t\|_{H^2(M)} \leq C \tag{3.42}$$

et en utilisant le théorème de plongement de Sobolev on obtient pour certains $\alpha \in (0,1)$:

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \|u(.,t\|_{C^\alpha(M)} \leq C. \tag{3.43}$$

Il découle de la proposition 1.9.1 avec (3.41 et 3.43 que

$$\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(M\times[0,+\infty))} \leq C.$$

Maintenant, il reste à prouver C^k-borne (sur la solution indépendante de t) et passe à la limite quand t tend vers l'infini. Le reste de la preuve est exactement le même que dans la preuve du théorème 3.1.1, nous l'omettons donc.

Preuve du Theorem 3.1.3. Soit $K \subset M_f^-$ un ensemble compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(M_f^-)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ de K. Dans le reste de la preuve , C désigne une constante positive depend uniquement de u_0, f et M. Quand C depends également de K, on écrit C_K. on veut prouver que la fonction $v := \varphi^2 e^{2u}$ est bornée sur $M \times [0, +\infty)$. Fixons $T > 0$ et soit $(x_0, t_0) \in M \times [0, T]$ such that $v(x_0, t_0) = \max\limits_{M \times [0,T]} v(x, t)$. Si $t_0 = 0$, alors on a

$$\max_{K \times [0,T]} e^{2u(x,t)} \leq \max_{M \times [0,T]} (\varphi^2 e^{2u}) \leq \max_M (\varphi^2 e^{2u_0}) \leq C.$$

Maintenant on suppose que $t_0 > 0$. Alors on a $\partial_t v(x_0, t_0) \geq 0$, $\nabla v(x_0, t_0) = 0$ et $\Delta v(x_0, t_0) \leq 0$. Notons ici que $\varphi(x_0) > 0$ puisque $v(x_0, t_0) = \max\limits_{M \times [0,T]} v(x, t) > 0$. D'autre part, puisque

$$\nabla v = 2\varphi e^{2u} (\nabla \varphi + \varphi \nabla u)$$

et

$$\Delta v = 2e^{2u} (\varphi^2 \Delta u + \varphi \Delta \varphi + 4\varphi \nabla u \cdot \nabla \varphi + 4\varphi^2 |\nabla u|^2 + |\nabla \varphi|^2),$$

On obtient à (x_0, t_0)

$$\nabla \varphi = -2\varphi \nabla u$$

et

$$\varphi^2 \Delta u \leq -\varphi \Delta \varphi. \tag{3.44}$$

Si on multiplie l'équation 2.1 par $\varphi^2(x_0, t_0)$ et remplace 3.44 dans l'équation résultante nous aurons (x_0, t_0),

$$2\varphi^2 e^{2u} \partial_t u \leq -\varphi \Delta \varphi - k_0 \varphi^2 + f \varphi^2 e^{2u}.$$

et puisque $\partial_t(x_0, t_0) \geq 0$, il suit que

$$-f(x_0)\varphi(x_0)^2 e^{2u(x_0,t_0)} \leq -\varphi \Delta \varphi - k_0 \varphi^2 \leq C_K. \tag{3.45}$$

Rappelons que $\varphi(x_0)^2 e^{2u(x_0,t_0)} = \max\limits_{M\times[0,T]} v(x,t)$, et puisque $\varphi = 1$ on K, on en déduit de 3.45 que

$$-f(x_0) \max_{K\times[0,T]} e^{2u} \leq C_K.$$

Ce qui donne, comme $x_0 \in M_f^-$,

$$\max_{K\times[0,T]} e^{2u} \leq \frac{C_K}{\min_{x\in S_\varphi} f^-(x)},$$

où $S_\varphi \subset M_f^-$ est le support de φ. Ceci prouve la première partie du théorème 3.1.3.

Maintenant, démontrons 3.4. Supposons que pour une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on ait

$$\mathop{lim}_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in M} u(x,t_n) = +\infty \tag{3.46}$$

et montrons que $\mathop{lim}\limits_{n\longrightarrow\infty} \sup\limits_{x\in M_f^+} u(x,t_n) = +\infty$. Observons d'abord que d'après le théorème 3.1.2, on a

$$\max_M f > 0. \tag{3.47}$$

Supposons par contradiction que pour une sous- suite, que l'on note encore $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ait

$$\sup_{x\in M_f^+} u(x,t_n) \leq C, \tag{3.48}$$

pour une somme constante $C > 0$ indépendante de n.

D'après 3.47 il existe $x_0 \in M$ et $r > 0$ tel que $B(x_0,r) \subset M_f^+$. Posons $A = B(x_0,r)$ et appliquon de l'inégalité de Poincaré modifiée de la proposition1.9.2 en annexe. Ensuite nous avons

$$C\|u(.,t_n)\|^2_{H^1(M)} \leq \int_M |\nabla u(.,t_n)|^2 d\mu_0 + \left(\int_A u(.,t_n) d\mu_0\right)^2.$$

En utilisant 3.48, on trouve

$$\|u(.,t_n)\|^2_{H^1(M)} \leq C \int_M |\nabla u(.,t_n)|^2 d\mu_0 + C. \tag{3.49}$$

D'autre part, on sait que du théorème 3.1.1 que la fonctionnelle E_f est décroissante le long de u, donc on a

$$E_f(u(.,t_n)) \leq E_f(u_0).$$

Ce qui implique en utilisant 3.48

$$\int_M |\nabla u(.,t_n)|^2 d\mu_0 + 2k_0 \int_M u(.,t_n) d\mu_0 \leq C. \tag{3.50}$$

En combinant 3.49 et 3.50, on obtient

$$\|u(.,t_n)\|^2_{H^1(M)} \leq 2C|k_0| \int_M |u(.,t_n)| d\mu_0 + C. \tag{3.51}$$

On a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$2C|k_0| \int_M u(.,t_n) d\mu_0 \leq \varepsilon \int_M u^2(.,t_n) d\mu_0 + C\varepsilon^{-1}$$

donc en choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il résulte de 3.51 que

$$\frac{1}{2}\|u(.,t_n)\|^2_{H^1(M)} \leq C. \tag{3.52}$$

En utilisant l'inégalité de Moser-Trudinger, il résulte de 3.52 que pour tout $p \in [1, +\infty)$

$$\int_M e^{pu} d\mu_0 \leq C_p, \tag{3.53}$$

où C_p est une constante positive dépendant uniquement de u_0, f, p et M. En particulier on obtient le minorant sur la fonctionnelle E_f :

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} E_f(u(.,t_n)) \geq -C. \tag{3.54}$$

Maintenant par Lemme 3.2.1 et 3.54 on aura

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_M e^{2u(.,t_n)} |\partial_t u(.,t)|^2 d\mu_0 \leq C. \tag{3.55}$$

Les bornes 3.53 et 3.55 permettent d'appliquer la théorie de la régularité elliptique à l'équation 2.1. permettent d'appliquer la théorie de la régularité elliptique à l'équation

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u(.,t_n)\|_{H^2(M)} \leq C \tag{3.56}$$

et en utilisant le théorème de plongement de Sobolev, on obtient pour tout $\alpha \in (0,1)$:

$$\sup_{t \in [0,+\infty)} \|u(.,t)\|_{L^\infty(M)} \leq C \tag{3.57}$$

Cela donne une contradiction avec 3.46. La preuve du théorème est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Aubin, *Sur le problème de la courbure scalaire prescrite*, Bull. Sci. Math. **118** (1994), 465-474.

[2] P. Baird, A. Fardoun, R.Regbaoui, *The evolution of the scalar curvature of a surface to a prescribed function*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. **(5)** 3 (2004), 17-38.

[3] M-S. Berger, *Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds* , J. Differential Geometry **5** (1971, 325- 332.

[4] S. Bismuth, *Prescribed scalar curvature on a C^∞ compact Riemannian manifold of dimension two*, Bull. Sci. Math. **124** (2000), 239-248.

[5] F. Borer, L.Galimberti, M.Struwe, *Large conformal metrics of prescribed Guass curvature on surfaces of higher genus*, Comm. Math. Helv. **90** (2015), 407-428.

[6] K. C. Chang, Q. J. Liu, *A Morse-theoretic approach to the prescribed Gaussian curvature problem* , Variational methods in nonlinear analysis, 55-62, Gordon and Breach, Basel, 1995.

[7] S.Y. A. Chang, P.C. Yang, *Prescribing Gaussian curvature on* $\mathbb{S}^2$, Acta. Math. **159** (1987), 215-259.

[8] X. Chen, P. Lu, G. Tian, *A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow* , Proc. Amer. Math. Soc. **134**, (2006), 3391-3393.

[9] M. Del Pino, C. Román , *Large conformal metrics with prescribed sign-changing Gauss curvature*, Calc. Var. **54** (2015), 763-789.

[10] B. Chow, *The Yamabe flow on locally conformally flat manifolds with positive Ricci curvature*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1003-1014.

[11] R. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Mathematics and General Relativity, Contemporary Math. **187**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1988), 237-262.

[12] P. T. Ho *Prescribed curvature flow on surfaces* , Indiana Univ. Math. J. **60** (2011), 1517-1541.

[13] J. Kazdan, F. Warner, *Curvature functions for compact 2-manifolds*, Ann. of Math. **99** (1974), 14-47.

[14] J. Moser, *On a nonlinear problem in differential geometry*, Proc. Sympos. Dynamical Systems (Univ. Bahia, Salvador, Brazil, 1971), Academic Press, New York, 1973, 273-280.

[15] L. Simon, *Asymptotics for a class of non-linear evolution equations with applications to geometric problems,*, Ann. of Math. **118** (1983), 525-571.

[16] M. Struwe, *Curvature flows on surfaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sc. **5(1)** (2002), 247-274.

[17] M. Struwe, *A flow approach to Nirenberg's problem*, Duke Math. J. **128** (2005), 19-64.

Deuxième partie

Généralisation des applications biharmoniques

CHAPITRE 4

APLICATIONS TRI-HARMONIQUES CONFORMES

Dans cette partie, nous prouvons qu'une application conforme $\Phi : (\mathbb{R}^n, g_0) \to (N^n, h)$, avec $(n \geq 3)$ est triharmonique si et seulement si le gradient de sa dilatation est solution d'une équation différentielle elliptique d'ordre 4 et nous construisons quelques exemples des applications tri-harmoniques non biharmoniques. Dans ce cas, on calcule également la trace du tenseur énergie impulsion associé aux applications triharmoniques.

4.1 Rappels et définitions

Les applications harmoniques et biharmoniques, les applications polyharmoniques sont définies dans ce qui suit.
Notation :$M = (M, g)$ et $N = (N, h)$ sont deux variétés riemanniennes de dimension m, n respectivement.

Définitions 4.1.1 *Soit $\Phi : M \to N$ une application de classe C^∞.*
$*$ ϕ est dite harmonique si et seulement si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie suivante

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi|^2 d\mu_g,$$

où $|d\phi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de ϕ. Autrement dit ϕ est harmonique si l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite

$$\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi = 0.$$

où $\tau(\phi)$ est le champs de tension de l'application ϕ.
$*$ *ϕ est dite biharmonique si et seulement si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie suivante*

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 d\mu_g.$$

Autrement dit ϕ est dite biharmonique si et seulement si l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g(\nabla^{\phi})^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi)d\phi = 0,$$

où R^N et la courbure riemannienne sur N et (∇^{ϕ}) est la connexion dans le fibré pull-back $\phi^{-1}(TN)$.

Définition 4.1.1 *Les applications poly-harmoniques sont connues comme les points critiques des fonctionnelles énergétiques suivantes, pour définir ce type des applications on distingue deux cas (ordre pair et ordre impair). Soit $\Phi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe C^∞, dans le cas pair on pose*

$$E_{2s}(\phi) = \int_M \left|\Delta^{s-1} \tau(\phi)\right|^2 dv_g, \tag{4.1}$$

et pour le cas impair on a

$$E_{2s+1}(\phi) = \int_M \left|\nabla \Delta^{s-1} \tau(\phi)\right|^2 dv_g. \tag{4.2}$$

où $s = 1, 2, ...$ est un nombre naturel. La première variation de (4.1) et (4.2) est développée dans [10]. ses points critiques sont appelés applications (d'ordre k) ou applications k-harmoniques. Deux cas peuvent être rencontrés :

1. *Si $k = 2s, s = 1, 2, ...,$ les points critiques de (4.1) sont donnés par*

$$\begin{aligned}\tau_{2s}(\phi) &= \Delta^{2s-1}\tau(\phi) - R^N\left(\Delta^{2s-2}\tau(\phi), d\phi(e_i)\right) d\phi(e_i) \\ &+ \sum_{l=1}^{s-1} R^N\left(\Delta^{s-l-1}\tau(\phi), \nabla_{e_i}\Delta^{s+l-2}\tau(\phi)\right) d\phi(e_i) \\ &- \sum_{l=1}^{s-1} R^N\left(\nabla_{e_i}\Delta^{s-l-1}\tau(\phi), \Delta^{s+l-2}\tau(\phi)\right) d\phi(e_i) = 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

2. *Si $k = 2s + 1, s = 0, 1, 2, ...,$ les points critiques de (4.2)*

$$\begin{aligned}\tau_{2s+1}(\phi) &= \Delta^{2s}\tau(\phi) - R^N\left(\Delta^{2s-1}\tau(\phi), d\phi(e_i)\right) d\phi(e_i) \\ &+ \sum_{l=1}^{s-1} R^N\left(\nabla_{e_i}\Delta^{s+l-1}\tau(\phi), \Delta^{s-l-1}\tau(\phi)\right) d\phi(e_i) \\ &- \sum_{l=1}^{s-1} R^N\left(\Delta^{s+l-1}\tau(\phi), \nabla_{e_i}\Delta^{s-l-1}\tau(\phi)\right) d\phi(e_i) \\ &- R^N\left(\nabla_{e_i}\Delta^{s-1}\tau(\phi), \Delta^{s-1}\tau(\phi)\right) d\phi(e_i) = 0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

où $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ est une base orthonormée sur M,

$$\Delta\tau(\phi) = -Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2\tau(\phi) = -\left(\nabla^{\phi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{e_i}\tau(\phi) - \nabla^{\phi}_{\nabla_{e_i}e_i}\tau(\phi)\right)$$

et

$$\Delta^k\tau(\phi) = \Delta\left(\Delta^{k-1}\tau(\phi)\right), \quad \Delta^{-1} = 0.$$

(on somme sur des indices répétés).

Suivant la notion de Jiang (voir[6]) nous définissons le tenseur énergie impulsion associé aux fonctionnelles énergétiques 4.1) et (4.2) en faisant varier les fonctionnelles par rapport à la métrique sur le domaine (voir [3]).

4.1.1 Tenseur énergie impulsion

Soit $\phi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une fonction de classe C^∞ sur M.

Définition 4.1.2 *Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ deux champs de vecteurs, on a*

1. *Le tenseur énergie impulsion pour les applications polyharmoniques d'ordre pair est défini par*

$$
\begin{aligned}
S_{2s}(\phi)(X,Y) = {} & \left(\frac{1}{2}\left|\Delta^{s-1}\tau(\phi)\right|^2 - h\left(\Delta^{2s-2}\tau(\phi), \tau(\phi)\right) - Tr_g h\left(\nabla\Delta^{2s-2}\tau(\phi), d\phi\right)\right) \\
& g(X,Y) \\
& + \left(\sum_{l=1}^{s-1}\left\{Tr_g h\left(\nabla\Delta^{s-l-1}\tau(\phi), \nabla\Delta^{s+l-2}\tau(\phi)\right) - h\left(\Delta^{s-l}\tau(\phi), \Delta^{s+l-2}\tau(\phi)\right)\right\}\right) \\
& g(X,Y) \\
& - \sum_{l=1}^{s-1}\left\{h\left(\nabla_X\Delta^{s-l-1}\tau(\phi), \nabla_Y\Delta^{s+l-2}\tau(\phi)\right) + h\left(\nabla_Y\Delta^{s-l-1}\tau(\phi), \nabla_X\Delta^{s+l-2}\tau(\phi)\right)\right\} \\
& + h\left(\nabla_X\Delta^{2s-2}\tau(\phi), d\phi(Y)\right) + h\left(\nabla_Y\Delta^{2s-2}\tau(\phi), d\phi(X)\right).
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

2. *Le tenseur énergie impulsion pour les applications poly-harmoniques d'ordre impair est défini par*

$$
\begin{aligned}
S_{2s+1}(\phi)(X,Y) = &\left(\frac{1}{2}\left|\Delta^{s-1}\tau(\phi)\right|^2 - h\left(\Delta^{2s-1}\tau(\phi),\tau(\phi)\right) - Tr_g h\left(\nabla\Delta^{2s-1}\tau(\phi),d\phi\right)\right) \\
&g(X,Y) \\
&+\left(\sum_{l=1}^{s-1}\left\{Tr_g h\left(\nabla\Delta^{s-l-1}\tau(\phi),\nabla\Delta^{s+l-1}\tau(\phi)\right) - h\left(\Delta^{s-l}\tau(\phi),\Delta^{s+l-1}\tau(\phi)\right)\right\}\right) \\
&g(X,Y) \\
&-\sum_{l=1}^{s-1}\left\{h\left(\nabla_X\Delta^{s-l-1}\tau(\phi),\nabla_Y\Delta^{s+l-1}\tau(\phi)\right) + h\left(\nabla_Y\Delta^{s-l-1}\tau(\phi),\nabla_X\Delta^{s+l-1}\tau(\phi)\right)\right\} \\
&+h\left(\nabla_X\Delta^{2s-1}\tau(\phi),d\phi(Y)\right) + h\left(\nabla_Y\Delta^{2s-1}\tau(\phi),d\phi(X)\right) \\
&-h\left(\nabla_X\Delta^{s-1}\tau(\phi),\nabla_Y\Delta^{s-1}\tau(\phi)\right).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Notons que dans les deux cas, le tenseur énergie impulsion vérifie la loi de conservation suivante :

$$divS_k(\phi) = -h(\tau_k(\phi),d\phi), \quad k = 1,2,3,....$$

L'harmonicité et la biharmonicité de l'application conforme ont été étudiées par plusieurs auteurs, voir [2], [7] et [12] pour plus de détails. Rappelons qu'une application $\phi : (M^n,g) \to (N^n,h)$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \to \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $X,Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$h(d\phi(X),d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X,Y).$$

La fonction λ est appelée la dilatation de l'application ϕ.

Le champ de tension pour une application conforme $\phi : (M^n,g) \to (N^n,h)$ de dilatation λ est donné par (voir [1]) :

$$\tau(\phi) = (2-n)\,d\phi(grad\ln\lambda).$$

Dans [12], les auteurs ont calculé le champ bi-tension et le tenseur de bi-énergie impulsion pour une application conforme, où ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 4.1.1 *([12]) Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$une application conforme de dilatation λ. Le champ bi-tension et le tenseur bi-énergie impulsion de ϕ sont donnés par ϕ*

$$\tau_2(\phi) = (n-2)\, d\phi(H),$$

où

$$\begin{aligned} H = grad\Delta \ln\lambda - \frac{n-6}{2} grad\left(|grad \ln\lambda|^2\right) - 2(\Delta\ln\lambda)\, grad \ln\lambda \\ - (n-2)\,|grad\ln\lambda|^2\, grad\ln\lambda + 2Ricci^M(grad\ln\lambda) \end{aligned}$$

et

$$S_2(\phi) = (2-n)\,\lambda^2 \left\{ \left(\Delta\ln\lambda + \frac{n-2}{2}|grad\ln\lambda|^2 \right) g - 2\nabla d\ln\lambda \right\}.$$

Dans cette partie, nous nous intéressons aux applications tri-harmoniques, qui sont les solutions de l'équation suivante

$$\tau_3(\phi) = \Delta^2\tau(\phi) - Tr_g R^N(\Delta\tau(\phi), d\phi)\, d\phi - Tr_g R^N(\nabla\tau(\phi), \tau(\phi))\, d\phi = 0. \tag{4.7}$$

Pour les applications tri-harmoniques, le tenseur énergie impulsion du troisième ordre est donné par

$$\begin{aligned} S_3(\phi)(X,Y) = \left(\frac{1}{2}|\tau(\phi)|^2 - h(\Delta\tau(\phi), \tau(\phi)) - Tr_g h(\nabla\Delta\tau(\phi), d\phi) \right) g(X,Y) \\ + h(\nabla_X\Delta\tau(\phi), d\phi(Y)) + h(\nabla_Y\Delta\tau(\phi), d\phi(X)) - h(\nabla_X\tau(\phi), \nabla_Y\tau(\phi)). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dans un premier résultat, nous avons calculé l'expression de $\tau_3(\phi)$ où $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ est une application conforme de dilatation λ.

Ce résultat nous a permis de donner une condition nécessaire et suffisante pour la triharmonicité de l'application conforme ϕ et de construire quelques exemples. Nous concluons notre travail en calculant la trace du tenseur énergie impulsion pour toute application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ de dilatation λ, en conséquence, nous présentons quelques cas particuliers.

4.2 Applications tri-harmoniques conformes

Comme propriétés des applications conformes, nous avons les résultats suivants :

Proposition 4.2.1 *([1]) Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$une application conforme de dilatation λ, Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a*

$$\nabla_Y d\phi(X) = X(\ln\lambda)\, d\phi(Y) + Y(\ln\lambda)\, d\phi(X) - g(X,Y)\, d\phi(grad \ln\lambda) + d\phi(\nabla_Y X). \quad (4.9)$$

En particulier, pour tout $f \in C^\infty(M)$, on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_Y d\phi(gradf) &= d\ln\lambda(gradf)\, d\phi(Y) + Y(\ln\lambda)\, d\phi(gradf) \\ &\quad - Y(f)\, d\phi(grad\ln\lambda) + d\phi(\nabla_Y gradf), \end{aligned} \quad (4.10)$$

et si $f = \ln\lambda$, l'équation (4.10) devient

$$\nabla_Y d\phi(grad\ln\lambda) = |grad\ln\lambda|^2\, d\phi(Y) + d\phi(\nabla_Y grad\ln\lambda). \quad (4.11)$$

Les équations (4.10) et (4.11) nous amènent à la remarque suivante :

Remarque 4.2.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ, Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a*

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\phi(gradf), d\phi(Y)) &= \lambda^2 d\ln\lambda(gradf)\, g(X,Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y) \\ &\quad + \lambda^2 X(\ln\lambda)\, Y(f) - \lambda^2 X(f)\, Y(\ln\lambda) \end{aligned} \quad (4.12)$$

et

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\phi(grad\ln\lambda), d\phi(Y)) &= h(\nabla_Y d\phi(grad\ln\lambda), d\phi(X)) \\ &= \lambda^2 |grad\ln\lambda|^2\, g(X,Y) + \lambda^2 g(\nabla_X grad\ln\lambda, Y). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour étudier la triharmonicité d'une application conforme, nous avons besoin du théorème suivant :

Théorème 4.2.1 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$une application conforme de dilatation λ, alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a*

$$\begin{aligned} Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(X) &= d\phi\left(Tr_g\nabla^2 X\right) + (2-n) X(\ln\lambda) d\phi(grad\ln\lambda) + (\Delta\ln\lambda) d\phi(X) \\ &+ 2d\phi(grad(X(\ln\lambda))) - 2(divX) d\phi(grad\ln\lambda) \\ &+ 2d\phi(\nabla_{grad\ln\lambda}X) - 2d\phi(\nabla_X grad\ln\lambda), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 f d\phi(X) &= f d\phi\left(Tr_g\nabla^2 X\right) + (2-n) f X(\ln\lambda) d\phi(grad\ln\lambda) + f(\Delta\ln\lambda) d\phi(X) \\ &+ (\Delta f) d\phi(X) + 2f d\phi(grad(X(\ln\lambda))) - 2f(divX) d\phi(grad\ln\lambda) \\ &+ 2f d\phi(\nabla_{grad\ln\lambda}X) - 2f d\phi(\nabla_X grad\ln\lambda) + 2X(\ln\lambda) d\phi(gradf) \\ &+ 2d\ln\lambda(gradf) d\phi(X) - 2X(f) d\phi(grad\ln\lambda) + 2d\phi(\nabla_{gradf}X). \end{aligned} \tag{4.15}$$

et

$$\begin{aligned} Ric^N(d\phi(X), d\phi(Y)) d\phi(Z) &= (n-2) X(\ln\lambda) Y(\ln\lambda) d\phi(Z) \\ &- (n-2)|grad\ln\lambda|^2 g(X,Y) d\phi(Z) \\ &- (n-2) g(\nabla_X grad\ln\lambda, Y) d\phi(Z) \\ &- (\Delta\ln\lambda) g(X,Y) d\phi(Z) \\ &+ Ric^M(X,Y) d\phi(Z). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Preuve.
Par définition, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a

$$Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(X) = \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} d\phi(X) - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i} d\phi(X). \tag{4.17}$$

Par (4.9), on obtient

$$\nabla_{e_i} d\phi(X) = X(\ln\lambda) d\phi(e_i) + e_i(\ln\lambda) d\phi(X) - g(X, e_i) d\phi(grad\ln\lambda) + d\phi(\nabla_{e_i}X),$$

ensuite

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} d\phi(X) &= \nabla_{e_i}X(\ln\lambda) d\phi(e_i) + \nabla_{e_i}e_i(\ln\lambda) d\phi(X) \\ &- \nabla_{e_i} g(X, e_i) d\phi(grad\ln\lambda) + \nabla_{e_i} d\phi(\nabla_{e_i}X). \end{aligned}$$

La forme explicite de la dernière équation est rapportée ci- dessous terme à terme, on a

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} X(\ln\lambda)\, d\phi(e_i) &= X(\ln\lambda)\,\nabla_{e_i} d\phi(e_i) + e_i\left(X(\ln\lambda)\right) d\phi(e_i)\\
&= X(\ln\lambda)\,\nabla_{e_i} d\phi(e_i) + e_i\left(g\left(X, grad\ln\lambda\right)\right) d\phi(e_i)\\
&= X(\ln\lambda)\,\nabla_{e_i} d\phi(e_i) + g\left(\nabla_{e_i} grad\ln\lambda, X\right) d\phi(e_i)\\
&+ g\left(grad\ln\lambda, \nabla_{e_i} X\right) d\phi(e_i)\\
&= X(\ln\lambda)\,\nabla_{e_i} d\phi(e_i) + d\phi\left(\nabla_X grad\ln\lambda\right)\\
&+ g\left(grad\ln\lambda, \nabla_{e_i} X\right) d\phi(e_i)\\
&= X(\ln\lambda)\,\nabla_{e_i} d\phi(e_i) + d\phi\left(grad\left(X(\ln\lambda)\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} e_i(\ln\lambda)\, d\phi(X) &= e_i(\ln\lambda)\,\nabla_{e_i} d\phi(X) + e_i\left(e_i(\ln\lambda)\right) d\phi(X)\\
&= \nabla_{grad\ln\lambda} d\phi(X) + e_i\left(e_i(\ln\lambda)\right) d\phi(X)\\
&= \left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi(X) + d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda} X\right) + e_i\left(e_i(\ln\lambda)\right) d\phi(X),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} g(X, e_i)\, d\phi(grad\ln\lambda) &= \nabla_X d\phi(grad\ln\lambda) + e_i\left(g(X, e_i)\right) d\phi(grad\ln\lambda)\\
&= \left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi(X) + d\phi\left(\nabla_X grad\ln\lambda\right)\\
&+ g\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right) d\phi(grad\ln\lambda) + g\left(X, \nabla_{e_i} e_i\right) d\phi(grad\ln\lambda)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} d\phi\left(\nabla_{e_i} X\right) &= g\left(grad\ln\lambda, \nabla_{e_i} X\right) d\phi(e_i) + d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda} X\right)\\
&- g\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right) d\phi(grad\ln\lambda) + d\phi\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} X\right)\\
&= d\phi\left(grad\left(X(\ln\lambda)\right)\right) - d\phi\left(\nabla_X grad\ln\lambda\right) + d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda} X\right)\\
&- g\left(\nabla_{e_i} X, e_i\right) d\phi(grad\ln\lambda) + d\phi\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} X\right),
\end{aligned}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} d\phi(X) &= d\phi\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} X\right) + X(\ln\lambda)\,\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) + 2d\phi\left(grad\left(X(\ln\lambda)\right)\right)\\
&+ 2d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda} X\right) - 2d\phi\left(\nabla_X grad\ln\lambda\right) + e_i\left(e_i(\ln\lambda)\right) d\phi(X) \qquad (4.18)\\
&- 2\left(divX\right) d\phi(grad\ln\lambda) - g\left(X, \nabla_{e_i} e_i\right) d\phi(grad\ln\lambda).
\end{aligned}$$

Enfin, il est clair que

$$\begin{aligned}\nabla_{\nabla_{e_i}e_i} d\phi\left(X\right) &= X\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(\nabla_{e_i}e_i\right)+\left(\nabla_{e_i}e_i\right)\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(X\right)\\ &\quad - g\left(X,\nabla_{e_i}e_i\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+d\phi\left(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}X\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

En remplaçant (4.18) et (4.19) dans (4.17), on trouve que

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\left(X\right) &= d\phi\left(Tr_g\nabla^2X\right)+\left(2-n\right)X\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(X\right)\\ &\quad + 2d\phi\left(grad\left(X\left(\ln\lambda\right)\right)\right)-2\left(divX\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\ &\quad + 2d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}X\right)-2d\phi\left(\nabla_X grad\ln\lambda\right).\end{aligned}$$

Pour le terme $Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 fd\phi\left(X\right)$, un calcul simple nous donne

$$Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 fd\phi\left(X\right) = fTr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\left(X\right)+2\nabla^{\phi}_{gradf}d\phi\left(X\right)+\left(\Delta f\right)d\phi\left(X\right).$$

En utilisant l'équation (4.14) et le fait que

$$\nabla^{\phi}_{gradf}d\phi\left(X\right) = X\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(gradf\right)+d\ln\lambda\left(gradf\right)d\phi\left(X\right)-X\left(f\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+d\phi\left(\nabla_{gradf}X\right),$$

nous concluons que

$$\begin{aligned}Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 fd\phi\left(X\right) &= fd\phi\left(Tr_g\nabla^2X\right)+\left(2-n\right)fX\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+f\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(X\right)\\ &\quad + \left(\Delta f\right)d\phi\left(X\right)+2fd\phi\left(grad\left(X\left(\ln\lambda\right)\right)\right)-2f\left(divX\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\ &\quad + 2fd\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}X\right)-2fd\phi\left(\nabla_X grad\ln\lambda\right)+2X\left(\ln\lambda\right)d\phi\left(gradf\right)\\ &\quad + 2d\ln\lambda\left(gradf\right)d\phi\left(X\right)-2X\left(f\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)+2d\phi\left(\nabla_{gradf}X\right).\end{aligned}$$

Enfin, la preuve de l'équation (4.16) est basée sur le résultat suivant (voir [1])

$$\begin{aligned}Ric^N\left(d\phi\left(X\right),d\phi\left(Y\right)\right) &= \left(n-2\right)X\left(\ln\lambda\right)Y\left(\ln\lambda\right)-\left(n-2\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2 g\left(X,Y\right)-\left(\Delta\ln\lambda\right)g\left(X,Y\right)\\ &\quad - \left(n-2\right)g\left(\nabla_X grad\ln\lambda,Y\right)+Ric^M\left(X,Y\right).\end{aligned}$$

Théorème 4.2.2 *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$une application conforme de dilatation λ, le champ de tri-tension de ϕ est donné*

$$\tau_3(\phi) = -(n-2)\, d\phi(H(\lambda)),$$

où

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= grad\left(\Delta^2 \ln\lambda\right) + 2grad\left(\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) - (\Delta\ln\lambda)\, grad\Delta\ln\lambda \\ &- 2(n-1)\,|grad\ln\lambda|^2\, grad\Delta\ln\lambda - 2(\Delta\ln\lambda)\, grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) \\ &- 6(n-2)\,|grad\ln\lambda|^2\, grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) - 3\left(\Delta^2\ln\lambda\right) grad\ln\lambda \\ &+ 2(n-2)(\Delta\ln\lambda)\,|grad\ln\lambda|^2\, grad\ln\lambda + (n-2)^2\,|grad\ln\lambda|^4\, grad\ln\lambda \\ &+ 2(\Delta\ln\lambda)^2\, grad\ln\lambda - (n+2)\left(\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) grad\ln\lambda \\ &- n\nabla_{grad\Delta\ln\lambda}\, grad\ln\lambda - \frac{(n-2)(n+6)}{2}\nabla_{grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)}\, grad\ln\lambda \\ &+ 4\nabla_{grad\ln\lambda}\, grad\Delta\ln\lambda + 8\nabla_{grad\ln\lambda}\, grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right) \end{aligned}$$

Preuve. Nous allons prouver ce théorème en trois étapes. Par définition, nous avons

$$\tau_3(\phi) = \Delta^2\tau(\phi) - Tr_g R^N(\Delta\tau(\phi), d\phi)\, d\phi - Tr_g R^N(\nabla\tau(\phi), \tau(\phi))\, d\phi. \tag{4.20}$$

Étape 1 : Dans la première étape, nous examinerons le premier terme de l'équation (4.20). Depuis

$$\begin{aligned} \Delta\tau(\phi) &= -Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2\tau(\phi) = (n-2)\, Tr_g\left(\nabla^\phi\right)^2 d\phi(grad\ln\lambda) \\ &= (n-2)\, d\phi(grad\Delta\ln\lambda) + 2(n-2)\, d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) \\ &- (n-2)(\Delta\ln\lambda)\, d\phi(grad\ln\lambda) - (n-2)^2\,|grad\ln\lambda|^2\, d\phi(grad\ln\lambda), \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned} \Delta^2\tau(\phi) &= \Delta(\Delta\tau(\phi)) \\ &= (n-2)\,\Delta(d\phi(grad\Delta\ln\lambda)) + 2(n-2)\,\Delta\left(d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)\right) \\ &- (n-2)\,\Delta((\Delta\ln\lambda)\, d\phi(grad\ln\lambda)) - (n-2)^2\,\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\, d\phi(grad\ln\lambda)\right). \end{aligned}$$

Pour les deux termes $\Delta\left(d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)\right)$ et $\Delta\left(d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)\right)$ et en utilisant l'équation (4.14), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta\left(d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)\right) &= -Tr_{g}\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)\\
&= -d\phi\left(grad\Delta^{2}\ln\lambda\right)+\left(n-2\right)d\ln\lambda\left(grad\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&-\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)+2\left(\Delta^{2}\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&-4d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\Delta\ln\lambda\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta\left(d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)\right) &= -Tr_{g}\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)\\
&= -d\phi\left(grad\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)\\
&\quad+\left(n-2\right)d\ln\lambda\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&\quad-\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)\\
&\quad+2\left(\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&\quad-4d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Pour le terme $\Delta\left(\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right) &= -Tr_{g}\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&= -\left(\Delta\ln\lambda\right)Tr_{g}\left(\nabla^{\phi}\right)^{2}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)-\left(\Delta^{2}\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&-2\nabla^{\phi}_{grad\Delta\ln\lambda}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&= -\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)-2\left|grad\ln\lambda\right|^{2}d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right)\\
&-2\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)+\left(\Delta\ln\lambda\right)^{2}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&-\left(\Delta^{2}\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&+\left(n-2\right)\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^{2}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\\
&-2d\phi\left(\nabla_{grad\Delta\ln\lambda}grad\ln\lambda\right).
\end{aligned}$$

Enfin, pour le terme $\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\,(grad\ln\lambda)\right)$, un rendement de calcul similaire

$$\begin{aligned}
\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\,(grad\ln\lambda)\right) &= -Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\,(grad\ln\lambda)\\
&= -\,|grad\ln\lambda|^2\,Tr_g\left(\nabla^{\phi}\right)^2 d\phi\,(grad\ln\lambda)\\
&-\left(\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)d\phi\,(grad\ln\lambda)\\
&-2\nabla^{\phi}_{grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)}d\phi\,(grad\ln\lambda)\\
&= -\,|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\,(grad\Delta\ln\lambda)\\
&-4\,|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)\\
&+(\Delta\ln\lambda)\,|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\,(grad\ln\lambda)\\
&+(n-2)\,|grad\ln\lambda|^4\,d\phi\,(grad\ln\lambda)\\
&-\left(\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)d\phi\,(grad\ln\lambda)\\
&-2d\phi\left(\nabla_{grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)}grad\ln\lambda\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que le résultat final de cette première étape est donné par l'équation suivante

$$\begin{aligned}
\Delta^2\tau(\phi) = &-(n-2)\,d\phi\left(grad\Delta^2\ln\lambda\right) + n(n-2)\,|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\,(grad\Delta\ln\lambda) \\
&-2(n-2)\,d\phi\left(grad\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) \\
&+4(n-2)^2\,|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) \\
&+3(n-2)\left(\Delta^2\ln\lambda\right)d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
&-(n-2)\,(\Delta\ln\lambda)^2\,d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
&+(n-2)(n+2)\left(\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
&-2(n-2)^2\,(\Delta\ln\lambda)\,|grad\ln\lambda|^2\,d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
&-(n-2)^3\,|grad\ln\lambda|^4\,d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
&+(n-2)^2\,d\ln\lambda\,(grad\Delta\ln\lambda)\,d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
&+2(n-2)^2\,d\ln\lambda\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)d\phi\,(grad\ln\lambda) \\
&-4(n-2)\,d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\Delta\ln\lambda\right) \\
&-8(n-2)\,d\phi\left(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) \\
&+2(n-2)\,d\phi\left(\nabla_{grad\Delta\ln\lambda}grad\ln\lambda\right) \\
&+2(n-2)^2\,d\phi\left(\nabla_{grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)}grad\ln\lambda\right).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Étape 2 : Dans cette étape, nous allons simplifier le terme $Tr_gR^N\left(\Delta\tau(\phi), d\phi\right)d\phi$. En utilisant l'expression de $\Delta\tau(\phi)$, nous avons

$$\begin{aligned}
Tr_gR^N\left(\Delta\tau(\phi), d\phi\right)d\phi = &\,(n-2)\,Tr_gR^N\left(d\phi\,(grad\Delta\ln\lambda), d\phi\right)d\phi \\
&+2(n-2)\,Tr_gR^N\left(d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right), d\phi\right)d\phi \\
&-(n-2)\,(\Delta\ln\lambda)\,Tr_gR^N\left(d\phi\,(grad\ln\lambda), d\phi\right)d\phi \\
&-(n-2)^2\,|grad\ln\lambda|^2\,Tr_gR^N\left(d\phi\,(grad\ln\lambda), d\phi\right)d\phi.
\end{aligned}$$

De l'équation (4.16), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right), d\phi\right)d\phi = &-\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right) - \\
&(n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right) \\
&+(n-2)\,d\ln\lambda\left(grad\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right) - \\
&(n-2)\,d\phi\left(\nabla_{grad\Delta\ln\lambda}grad\ln\lambda\right),
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
&Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right), d\phi\right)d\phi \\
&\quad= -\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) - (n-2)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) \\
&\quad+(n-2)\,d\ln\lambda\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right) \\
&\quad-(n-2)\,d\phi\left(\nabla_{grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)}grad\ln\lambda\right)
\end{aligned}
$$

et de plus

$$
Tr_g R^N\left(d\phi\left(grad\ln\lambda\right), d\phi\right)d\phi = -\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right) - \frac{(n-2)}{2}d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right).
$$

Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
Tr_g R^N\left(\Delta\tau\left(\phi\right), d\phi\right) d\phi = &-\left(n-2\right)\left(\Delta\ln\lambda\right) d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right) - \\
&\left(n-2\right)^2\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\Delta\ln\lambda\right) \\
&+\frac{\left(n-2\right)\left(n-6\right)}{2}\left(\Delta\ln\lambda\right) d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) \\
&+\frac{\left(n-2\right)^2\left(n-6\right)}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) \\
&+\left(n-2\right)^2 d\ln\lambda\left(grad\Delta\ln\lambda\right) d\phi\left(grad\ln\lambda\right) \\
&+2\left(n-2\right)^2 d\ln\lambda\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) d\phi\left(grad\ln\lambda\right) \\
&+\left(n-2\right)^2\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right) \\
&+\left(n-2\right)\left(\Delta\ln\lambda\right)^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right) \\
&-\left(n-2\right)^2 d\phi\left(\nabla_{grad\Delta\ln\lambda} grad\ln\lambda\right) \\
&-2\left(n-2\right)^2 d\phi\left(\nabla_{grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)} grad\ln\lambda\right)
\end{aligned}
$$

Etape 3 : Pour compléter la preuve, nous allons développer le terme $Tr_g R^N\left(\nabla\tau\left(\phi\right), \tau\left(\phi\right)\right) d\phi$, on a

$$
\begin{aligned}
Tr_g R^N\left(\nabla\tau\left(\phi\right), \tau\left(\phi\right)\right) d\phi &= R^N\left(\nabla_{e_i}\tau\left(\phi\right), \tau\left(\phi\right)\right) d\phi\left(e_i\right) \\
&= \left(n-2\right)^2 R^N\left(\nabla_{e_i} d\phi\left(grad\ln\lambda\right), d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right) d\phi\left(e_i\right).
\end{aligned}
$$

Utilisant le fait que

$$
\nabla_{e_i} d\phi\left(grad\ln\lambda\right) = \left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(e_i\right) + d\phi\left(\nabla_{e_i} grad\ln\lambda\right),
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
Tr_g R^N\left(\nabla\tau\left(\phi\right), \tau\left(\phi\right)\right) d\phi = &\left(n-2\right)^2\left|grad\ln\lambda\right|^2 R^N\left(d\phi\left(e_i\right), d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right) d\phi\left(e_i\right) \\
&+\left(n-2\right)^2 R^N\left(d\phi\left(\nabla_{e_i} grad\ln\lambda\right), d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right) d\phi\left(e_i\right).
\end{aligned}
$$

L'équation (4.16) nous amène à

$$R^N\left(d\phi\left(e_i\right), d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right)d\phi\left(e_i\right) = -\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right) - \frac{(n-2)}{2}d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned} R^N\left(d\phi\left(\nabla_{e_i}grad\ln\lambda\right), d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right)d\phi\left(e_i\right) &= -\frac{(n-2)}{2}d\phi\left(\nabla_{grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)}grad\ln\lambda\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right), \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned} Tr_g R^N\left(\nabla\tau\left(\phi\right), \tau\left(\phi\right)\right)d\phi = &-\frac{(n-2)^2}{2}\left(\Delta\ln\lambda\right)d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) \\ &- \frac{(n-2)^3}{2}\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) \\ &- (n-2)^2\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right) \\ &- \frac{(n-2)^3}{2}d\phi\left(\nabla_{grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)}grad\ln\lambda\right). \end{aligned}$$

Les résultats des trois étapes et l'équation ((4.20)) nous permettent de conclure que

$$\tau_3\left(\phi\right) = -\left(n-2\right)d\phi\left(H\left(\lambda\right)\right),$$

où

$$\begin{aligned} H\left(\lambda\right) = &\; grad\left(\Delta^2\ln\lambda\right) + 2grad\left(\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right) - \left(\Delta\ln\lambda\right)grad\Delta\ln\lambda \\ &- 2\left(n-1\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2 grad\Delta\ln\lambda - 2\left(\Delta\ln\lambda\right)grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right) \\ &- 6\left(n-2\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2 grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right) - 3\left(\Delta^2\ln\lambda\right)grad\ln\lambda \\ &+ 2\left(n-2\right)\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2 grad\ln\lambda + (n-2)^2\left|grad\ln\lambda\right|^4 grad\ln\lambda \\ &+ 2\left(\Delta\ln\lambda\right)^2 grad\ln\lambda - \left(n+2\right)\left(\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)grad\ln\lambda \\ &- n\nabla_{grad\Delta\ln\lambda}grad\ln\lambda - \frac{(n-2)(n+6)}{2}\nabla_{grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)}grad\ln\lambda \\ &+ 4\nabla_{grad\ln\lambda}grad\Delta\ln\lambda + 8\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right) \end{aligned}$$

Une condition nécessaire et suffisante de la triharmonicité d'une application conforme est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.3 *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ, ϕ est tri-harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned}
&grad\left(\Delta^2 \ln \lambda\right) + 2grad\left(\Delta\left(|grad \ln \lambda|^2\right)\right) - (\Delta \ln \lambda)\, grad\Delta \ln \lambda \\
&- 2(n-1)\,|grad \ln \lambda|^2\, grad\Delta \ln \lambda - 2(\Delta \ln \lambda)\, grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) \\
&- 6(n-2)\,|grad \ln \lambda|^2\, grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) - 3\left(\Delta^2 \ln \lambda\right) grad \ln \lambda \\
&+ 2(n-2)(\Delta \ln \lambda)\,|grad \ln \lambda|^2\, grad \ln \lambda \\
&+ (n-2)^2\,|grad \ln \lambda|^4\, grad \ln \lambda + 2(\Delta \ln \lambda)^2\, grad \ln \lambda \\
&- (n+2)\left(\Delta\left(|grad \ln \lambda|^2\right)\right) grad \ln \lambda + 4\nabla_{grad \ln \lambda} grad\Delta \ln \lambda - n\nabla_{grad\Delta \ln \lambda} grad \ln \lambda \\
&+ 8\nabla_{grad \ln \lambda} grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right) - \frac{(n-2)(n+6)}{2}\nabla_{grad\left(|grad \ln \lambda|^2\right)} grad \ln \lambda = 0.
\end{aligned}$$

En particulier, nous prouvons que la tri-harmonicité de l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ où la dilatation λ est radiale $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ and $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ est équivalente à une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre. Plus précisément, nous avons

Corollaire 4.2.1 *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$ $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ quand on suppose que $\ln \lambda$ est radial $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x|$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Alors ϕ est tri-harmonique si et seulement si $\beta = \alpha'$ vérifie l'équation différentielle ordi-*

naire suivante :

$$\begin{aligned}
&\beta^{(4)}+\frac{2\left(n-1\right)}{r}\beta^{(3)}+5\beta\beta^{(3)}+\frac{\left(n-1\right)\left(n-5\right)}{r^{2}}\beta''-\left(n-11\right)\beta'\beta''+\frac{\left(n-1\right)}{r}\beta\beta''\\
&-\left(4n-14\right)\beta^{2}\beta''-\frac{3\left(n-1\right)\left(n-3\right)}{r^{3}}\beta'-\frac{\left(n-3\right)\left(n-1\right)}{r}\left(\beta'\right)^{2}-10\left(n-2\right)\beta^{3}\beta'\\
&-\frac{2\left(n-1\right)\left(2n+1\right)}{r}\beta^{2}\beta'-\frac{\left(3n+1\right)\left(n-1\right)}{r^{2}}\beta\beta'-\left(n^{2}+6n-22\right)\beta\left(\beta'\right)^{2}\\
&+\frac{3\left(n-1\right)\left(n-3\right)}{r^{4}}\beta+\frac{\left(n-1\right)\left(4n-2\right)}{r^{3}}\beta^{2}+\frac{4\left(n-1\right)^{2}}{r^{2}}\beta^{3}+\frac{2\left(n-2\right)\left(n-1\right)}{r}\beta^{4}\\
&+\left(n-2\right)^{2}\beta^{5}=0.
\end{aligned}\tag{4.22}$$

Preuve du Corollaire 4.2.1. Soit $\phi:(\mathbb{R}^{n},g)\rightarrow(N^{n},h)$, $(n\geq 3)$ une application conforme de dilatation λ quand on suppose que $\ln\lambda$ est radiale. D'après le corollaire 4.2.2, ϕ est triharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}
&grad\left(\Delta^{2}\ln\lambda\right)+2grad\left(\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)-\left(\Delta\ln\lambda\right)grad\Delta\ln\lambda\\
&-2\left(n-1\right)\left|grad\ln\lambda\right|^{2}grad\Delta\ln\lambda-2\left(\Delta\ln\lambda\right)grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\\
&-6\left(n-2\right)\left|grad\ln\lambda\right|^{2}grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)-3\left(\Delta^{2}\ln\lambda\right)grad\ln\lambda\\
&+2\left(n-2\right)\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^{2}grad\ln\lambda+\left(n-2\right)^{2}\left|grad\ln\lambda\right|^{4}grad\ln\lambda\\
&+2\left(\Delta\ln\lambda\right)^{2}grad\ln\lambda\\
&-\left(n+2\right)\left(\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)\right)grad\ln\lambda\\
&+4\nabla_{grad\ln\lambda}grad\Delta\ln\lambda-n\nabla_{grad\Delta\ln\lambda}grad\ln\lambda\\
&+8\nabla_{grad\ln\lambda}grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)-\frac{\left(n-2\right)\left(n+6\right)}{2}\nabla_{grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^{2}\right)}grad\ln\lambda=0.
\end{aligned}$$

Un calcul rigoureux nous donne

$$grad\alpha = \alpha' \frac{\partial}{\partial r}, \quad |grad\alpha|^2 = (\alpha')^2, \quad grad\left(|grad\alpha|^2\right) = 2\alpha'\alpha'' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta\alpha = \alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha', \quad grad\Delta\alpha = \left(\alpha^{(3)} + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta^2\alpha = \alpha^{(4)} + \frac{2(n-1)}{r}\alpha^{(3)} + \frac{(n-1)(n-3)}{r^2}\alpha'' - \frac{(n-1)(n-3)}{r^3}\alpha',$$

$$\begin{aligned} grad\Delta^2\alpha &= \left(\alpha^{(5)} + \frac{2(n-1)}{r}\alpha^{(4)} + \frac{(n-1)(n-5)}{r^2}\alpha^{(3)}\right) \\ &\quad - \left(\frac{3(n-1)(n-3)}{r^3}\alpha'' + \frac{3(n-1)(n-3)}{r^4}\alpha'\right)\frac{\partial}{\partial r}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} grad\left(\Delta\left(|grad\alpha|^2\right)\right) &= \left(2\alpha'\alpha^{(4)} + 6\alpha''\alpha^{(3)} + \frac{2(n-1)}{r}\alpha'\alpha^{(3)}\right) \\ &\quad \left(+\frac{2(n-1)}{r}(\alpha'')^2 - \frac{2(n-1)}{r^2}\alpha'\alpha''\right)\frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Ainsi, ϕ est triharmonique si et seulement si la fonction α satisfait l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} &\alpha^{(5)} + \frac{2(n-1)}{r}\alpha^{(4)} + 5\alpha'\alpha^{(4)} + \frac{(n-1)(n-5)}{r^2}\alpha^{(3)} - (n-11)\alpha''\alpha^{(3)} + \frac{(n-1)}{r}\alpha'\alpha^{(3)} \\ &- (4n-14)(\alpha')^2\alpha^{(3)} - \frac{3(n-1)(n-3)}{r^3}\alpha'' - \frac{(n-3)(n-1)}{r}(\alpha'')^2 - 10(n-2)(\alpha')^3\alpha'' \\ &- \frac{2(n-1)(2n+1)}{r}(\alpha')^2\alpha'' - \frac{(3n+1)(n-1)}{r^2}\alpha'\alpha'' - \left(n^2+6n-22\right)\alpha'(\alpha'')^2 \\ &+ \frac{3(n-1)(n-3)}{r^4}\alpha' + \frac{(n-1)(4n-2)}{r^3}(\alpha')^2 + \frac{4(n-1)^2}{r^2}(\alpha')^3 + \frac{2(n-2)(n-1)}{r}(\alpha')^4 \\ &+ (n-2)^2(\alpha')^5 = 0. \end{aligned}$$

Soit $\beta = \alpha'$, la dernière équation est équivalente à l'équation différentielle du quatrième ordre

$$\beta^{(4)} + \frac{2(n-1)}{r}\beta^{(3)} + 5\beta\beta^{(3)} + \frac{(n-1)(n-5)}{r^2}\beta'' - (n-11)\beta'\beta'' + \frac{(n-1)}{r}\beta\beta''$$
$$-(4n-14)\beta^2\beta'' - \frac{3(n-1)(n-3)}{r^3}\beta' - \frac{(n-3)(n-1)}{r}(\beta')^2 - 10(n-2)\beta^3\beta'$$
$$-\frac{2(n-1)(2n+1)}{r}\beta^2\beta' - \frac{(3n+1)(n-1)}{r^2}\beta\beta' - \left(n^2+6n-22\right)\beta(\beta')^2$$
$$+\frac{3(n-1)(n-3)}{r^4}\beta + \frac{(n-1)(4n-2)}{r^3}\beta^2 + \frac{4(n-1)^2}{r^2}\beta^3 + \frac{2(n-2)(n-1)}{r}\beta^4$$
$$+(n-2)^2\beta^5 = 0.$$

Comme conséquence du corollaire 4.2.1, nous allons présenter quelques remarques qui nous donnent une solution particulière de l'équation (4.22) qui nous permet de construire des applications triharmoniques.

Remarque 4.2.2 *Recherche de solutions particulières de type* $\beta = \dfrac{a}{r}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$. *Par (4.22), on déduit que* $\phi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ *est triharmonique si et seulement si a est une solution de l'équation algébrique*

$$(n-2)^2 a^4 + 2(n-2)(n+4)a^3 + \left(7n^2-24n+52\right)a^2 + \left(6n^2-56\right)a + 8(n-2)(n-4) = 0.$$

Cette équation admet des solutions réelles si et seulement si $n \in \{3,4,5,6\}$.

1. *Si* $n = 3$, *on trouve* $a = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$, $a = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$, $a = \frac{-9+\sqrt{97}}{2}$ *et* $a = \frac{-9-\sqrt{97}}{2}$. *Notons que pour tout* $a = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ *ou* $a = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$ *toute application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, g) \to (N^3, h)$ *de dilatation* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}}}$ *ou* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}}$ $(C > 0)$ *est biharmonique et triharmonique. Pour* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{9-\sqrt{97}}{2}}}$ *or* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{9+\sqrt{97}}{2}}}$, *l'application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, g) \to (N^3, h)$ *de dilatation* $\lambda = Cr^{\frac{-9+\sqrt{97}}{2}}$ *ou* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{9+\sqrt{97}}{2}}}$ *est tri-harmonique non-biharmonique.*

2. *Si* $n = 4$, *les solutions sont* $a = -5$, $a = -2$ *et* $a = -1$. *For* $a = -2$ *et* $a = -1$, *l'application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^4 \backslash \{0\}, g) \to (N^4, h)$ *de dilatation* $\lambda = \frac{C}{r^2}$ *ou* $\lambda = \frac{C}{r}$ $(C > 0)$ *est biharmonique et triharmonique. Pour* $a = -5$, *l'application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^4 \backslash \{0\}, g) \to (N^4, h)$ *de dilatation* $\lambda = \frac{C}{r^5}$ *is triharmonique non-biharmonique.*
3. *Si* $n = 5$, *On trouve* $a = \frac{-11+\sqrt{73}}{6}$ *et* $a = \frac{-11-\sqrt{73}}{6}$ *alors* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{11-\sqrt{73}}{6}}}$ *ou* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{11+\sqrt{73}}{6}}}$ $(C > 0)$, *il en résulte que pour toute application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^5 \backslash \{0\}, g) \to (N^5, h)$ *de dilatation* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{11+\sqrt{73}}{6}}}$ *ou* $\lambda = \frac{C}{r^{\frac{11-\sqrt{73}}{6}}}$ *est tri-harmonique non-biharmonique.*
4. *Le cas où* $n = 6$ *nous donne* $a = -2$ *et* $a = -1$, *so* $\lambda = \frac{C}{r^2}$ *et* $\lambda = \frac{C}{r}$ $(C > 0)$. *Alors, dans ce cas toute application conforme* $\phi : (\mathbb{R}^6 \backslash \{0\}, g) \to (N^6, h)$ *de dilatation* $\lambda = \frac{C}{r^2}$ *où* $\lambda = \frac{C}{r}$ *est tri-harmonique non-biharmonique.*

Exemple 4.2.1 *À partir de la remarque 4.2.2, nous donnerons deux exemples*

1. *Pour* $a = -2$, *on peut citer l'exemple de l'inversion* $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *definie par* $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$, *est une application conforme de dilatation* $\lambda = \frac{1}{r^2}$. *on en déduit que l'inversion est*
   - *harmonique si et seulement si* $n = 2$.
   - *tri-harmonique, biharmonique et non-harmonique si et seulement si* $n = 4$.
   - *tri-harmonique non-biharmonique si et seulement si* $n = 6$.
2. *Le cas* $a = -1$ *donne la dilatation* $\lambda = \frac{1}{r}$, *dans ce cas on considère l'application conforme* $\phi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$, *donné en coordonnées polaires par* $\phi(r, \theta) = (\ln r, \theta)$, *pour* $r > 0$, $\theta \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. *Cette application est*
   - *harmonique si et seulement si* $n = 2$.
   - *tri-harmonique, biharmonique et non-harmonique si et seulement si* $n = 4$.
   - *tri-harmonique non-biharmonique si et seulement si* $n = 6$.

On considère $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ, pour calculer la trace du tenseur énergie- impulsion $S_3(\phi)$, nous avons besoin de quelques lemmes. Dans le premier lemme, on considère une variété riemannienne $((M^n, g)$ et on donne une relation entre $\Delta |gradf|^2$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

Lemme 4.2.1 *Soit $((M^n, g)$ une variété riemannienne, pour toute fonction $f \in C^{\infty}(M)$, on a*

$$\Delta |gradf|^2 = 2df\,(grad\Delta f) + 2\,|\nabla gradf|^2 + 2df\,(Ricci\,(gradf))\,. \tag{4.23}$$

Preuve du lemme 4.23. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée sur M, par définition on a

$$\Delta |gradf|^2 = e_i\left(e_i\left(|gradf|^2\right)\right) - (\nabla_{e_i}e_i)\left(|gradf|^2\right).$$

Puis

$$\begin{aligned}
\Delta |gradf|^2 &= e_i\,(e_i\,(g\,(gradf, gradf))) - (\nabla_{e_i}e_i)\,(g\,(gradf, gradf)) \\
&= 2e_i\,(g\,(\nabla_{e_i}gradf, gradf)) - 2\left(g\left(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}gradf, gradf\right)\right) \\
&= 2g\,(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}gradf, gradf) + 2g\,(\nabla_{e_i}gradf, \nabla_{e_i}gradf) \\
&- 2\left(g\left(\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}gradf, gradf\right)\right) \\
&= 2g\left(Tr_g\nabla^2 gradf, gradf\right) + 2\,|\nabla gradf|^2\,,
\end{aligned}$$

qui nous donne

$$\Delta |gradf|^2 = 2df\,(grad\Delta f) + 2\,|\nabla gradf|^2 + 2df\,(Ricci\,(gradf))\,.$$

Lemme 4.2.2 *Soit $\phi : (M^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ, on obtient*

$$\begin{aligned}
|\nabla\tau\,(\phi)|^2 &= n\,(n-2)^2\,\lambda^2\,|grad\ln\lambda|^4 + 2\,(n-2)^2\,\lambda^2\,(\Delta\ln\lambda)\,|grad\ln\lambda|^2 \\
&+ \frac{(n-2)^2}{2}\lambda^2\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right) - (n-2)^2\,\lambda^2 d\ln\lambda\,(grad\Delta\ln\lambda) \\
&- (n-2)^2\,\lambda^2 d\ln\lambda\,(Ricci\,(grad\ln\lambda))
\end{aligned} \tag{4.24}$$

et

$$\begin{aligned}\langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle &= (n-2)(n-1)\lambda^2 d\ln\lambda\,(grad\Delta\ln\lambda)\\&+(n-2)(n+2)\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)\\&-2(n-2)(n-1)\lambda^2(\Delta\ln\lambda)|grad\ln\lambda|^2+2(n-2)\lambda^2\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\\&+(n-2)\lambda^2\left(\Delta^2\ln\lambda\right)-(n-2)\lambda^2(\Delta\ln\lambda)^2-n(n-2)^2\lambda^2|grad\ln\lambda|^4\\&+n(n-2)\lambda^2 d\ln\lambda\,(Ricci\,(grad\ln\lambda))+(n-2)\lambda^2 div\,(Ricci\,(grad\ln\lambda)).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Preuve du lemme. Pour le terme $|\nabla\tau(\phi)|^2$, on a

$$|\nabla\tau(\phi)|^2 = h(\nabla_{e_i}\tau(\phi), \nabla_{e_i}\tau(\phi)) = (n-2)^2 h(\nabla_{e_i}d\phi(grad\ln\lambda), \nabla_{e_i}d\phi(grad\ln\lambda)).$$

Utilisant le fait que

$$\nabla_{e_i}d\phi(grad\ln\lambda) = |grad\ln\lambda|^2 d\phi(e_i) + d\phi(\nabla_{e_i}grad\ln\lambda),$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}|\nabla\tau(\phi)|^2 &= (n-2)^2 h\left(|grad\ln\lambda|^2 d\phi(e_i), |grad\ln\lambda|^2 d\phi(e_i)\right)\\&+2(n-2)^2 h\left(|grad\ln\lambda|^2 d\phi(e_i), d\phi(\nabla_{e_i}grad\ln\lambda)\right)\\&+(n-2)^2 h(d\phi(\nabla_{e_i}grad\ln\lambda), d\phi(\nabla_{e_i}grad\ln\lambda))\\&= n(n-2)^2\lambda^2|grad\ln\lambda|^4+(n-2)^2\lambda^2|\nabla grad\ln\lambda|^2\\&+2(n-2)^2\lambda^2(\Delta\ln\lambda)|grad\ln\lambda|^2.\end{aligned}$$

D'après le lemme 4.2.1, on a

$$|\nabla grad\ln\lambda|^2 = \frac{1}{2}\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right) - d\ln\lambda\,(grad\Delta\ln\lambda) - d\ln\lambda\,(Ricci\,(grad\ln\lambda)),$$

il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
|\nabla\tau(\phi)|^2 &= n(n-2)^2\lambda^2|grad\ln\lambda|^4 + 2(n-2)^2\lambda^2(\Delta\ln\lambda)|grad\ln\lambda|^2 \\
&+ \frac{(n-2)^2}{2}\lambda^2\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right) - (n-2)^2\lambda^2 d\ln\lambda(grad\Delta\ln\lambda) \\
&- (n-2)^2\lambda^2 d\ln\lambda(Ricci(grad\ln\lambda)).
\end{aligned}
$$

Regardons maintenant le terme $\langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle$, nous avons

$$
\langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle = h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}\Delta\tau(\phi)).
$$

D'après le théorème 4.2.1, on obtient

$$
\begin{aligned}
\Delta\tau(\phi) &= (n-2)d\phi(grad\Delta\ln\lambda) + 2(n-2)d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) \\
&- (n-2)(\Delta\ln\lambda)d\phi(grad\ln\lambda) \\
&- (n-2)^2|grad\ln\lambda|^2 d\phi(grad\ln\lambda) + (n-2)d\phi(Ricci(grad\ln\lambda)),
\end{aligned}
$$

ensuite

$$
\begin{aligned}
\langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle &= (n-2)h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}d\phi(grad\Delta\ln\lambda)) \\
&+ 2(n-2)h\left(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)\right) \\
&- (n-2)h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}(\Delta\ln\lambda)d\phi(grad\ln\lambda)) - \\
&(n-2)^2 h\left(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}|grad\ln\lambda|^2 d\phi(grad\ln\lambda)\right) \\
&+ (n-2)h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}d\phi(Ricci(grad\ln\lambda))).
\end{aligned}
$$

Le développement de chaque terme de cette dernière équation donne

$$
h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}d\phi(grad\Delta\ln\lambda)) = n\lambda^2 d\ln\lambda(grad\Delta\ln\lambda) + \lambda^2\left(\Delta^2\ln\lambda\right),
$$

$$
h\left(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)\right) = n\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) + \lambda^2\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right),
$$

$$
\begin{aligned}
h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}(\Delta\ln\lambda)d\phi(grad\ln\lambda)) &= (\Delta\ln\lambda)h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}d\phi(grad\ln\lambda)) \\
&+ h(d\phi(e_i), e_i(\Delta\ln\lambda)d\phi(grad\ln\lambda)) \\
&= n\lambda^2(\Delta\ln\lambda)|grad\ln\lambda|^2 + \lambda^2(\Delta\ln\lambda)^2 \\
&+ \lambda^2 d\ln\lambda(grad\Delta\ln\lambda),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
h\left(d\phi\left(e_i\right),\nabla_{e_i}\left|grad\ln\lambda\right|^2 d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right) &= \left|grad\ln\lambda\right|^2 h\left(d\phi\left(e_i\right),\nabla_{e_i}d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right)\\
&+h\left(d\phi\left(e_i\right),e_i\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)d\phi\left(grad\ln\lambda\right)\right)\\
&= n\lambda^2\left|grad\ln\lambda\right|^4+\lambda^2\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2\\
&+\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h\left(d\phi\left(e_i\right),\nabla_{e_i}d\phi\left(Ricci\left(grad\ln\lambda\right)\right)\right) &= n\lambda^2 d\ln\lambda\left(Ricci\left(grad\ln\lambda\right)\right)\\
&\quad+\lambda^2\left(div\left(Ricci\left(grad\ln\lambda\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned}
\left\langle d\phi,\nabla\Delta\tau\left(\phi\right)\right\rangle &= \left(n-2\right)\left(n-1\right)\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\Delta\ln\lambda\right)\\
&+\left(n-2\right)\left(n+2\right)\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)\\
&-2\left(n-2\right)\left(n-1\right)\lambda^2\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2+2\left(n-2\right)\lambda^2\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\\
&+\left(n-2\right)\lambda^2\left(\Delta^2\ln\lambda\right)-\left(n-2\right)\lambda^2\left(\Delta\ln\lambda\right)^2-n\left(n-2\right)^2\lambda^2\left|grad\ln\lambda\right|^4\\
&+n\left(n-2\right)\lambda^2 d\ln\lambda\left(Ricci\left(grad\ln\lambda\right)\right)+\left(n-2\right)\lambda^2 div\left(Ricci\left(grad\ln\lambda\right)\right).
\end{aligned}$$

Théorème 4.2.4 *Soit $\phi:(\mathbb{R}^n,g)\to(N^n,h)$, ($n\geq 3$) une application conforme de dilatation λ, alors*

$$\begin{aligned}
Tr_g S_3\left(\phi\right) &= -\frac{\left(n-2\right)^2\left(n-4\right)}{2}\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\Delta\ln\lambda\right)\\
&+\left(n-2\right)^3\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\right)\\
&-\left(n-2\right)^2\lambda^2\left(\Delta^2\ln\lambda\right)+\frac{\left(n-2\right)^2\left(n-10\right)}{4}\lambda^2\Delta\left(\left|grad\ln\lambda\right|^2\right)\\
&+\left(n-2\right)^2\lambda^2\left(\Delta\ln\lambda\right)^2+2\left(n-2\right)^3\lambda^2\left(\Delta\ln\lambda\right)\left|grad\ln\lambda\right|^2\\
&+\frac{n\left(n-2\right)^3}{2}\lambda^2\left|grad\ln\lambda\right|^4.
\end{aligned}$$

Preuve du théorème 4.2.4. Par définition, pour tout champs de vecteurs X, Y on a

$$S_3(\phi)(X,Y) = \left(\frac{1}{2}|\nabla\tau(\phi)|^2 - h(\tau(\phi), \Delta\tau(\phi)) - \langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle\right) g(X,Y)$$
$$+ h(d\phi(X), \nabla_Y\Delta\tau(\phi)) + h(d\phi(Y), \nabla_X\Delta\tau(\phi)) - h(\nabla_X\tau(\phi), \nabla_Y\tau(\phi)),$$

ensuite

$$Tr_g S_3(\phi) = n\left(\frac{1}{2}|\nabla\tau(\phi)|^2 - h(\tau(\phi), \Delta\tau(\phi)) - \langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle\right)$$
$$+ 2Tr_h h(d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)) - |\nabla\tau(\phi)|^2,$$

qui nous donne

$$Tr_g S_3(\phi) = \frac{n-2}{2}|\nabla\tau(\phi)|^2 - nh(\tau(\phi), \Delta\tau(\phi)) - (n-2)\langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle. \qquad (4.26)$$

Les termes $|\nabla\tau(\phi)|^2$ et $\langle d\phi, \nabla\Delta\tau(\phi)\rangle$ sont calculés dans le Lemme 4.2.2, pour le terme $h(\tau(\phi), \Delta\tau(\phi))$, on a

$$\tau(\phi) = (2-n)\, d\phi(grad \ln\lambda)$$

et

$$\Delta\tau(\phi) = (n-2)\, d\phi(grad\Delta\ln\lambda) + 2(n-2)\, d\phi\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)$$
$$-(n-2)(\Delta\ln\lambda)\, d\phi(grad\ln\lambda) - (n-2)^2|grad\ln\lambda|^2\, d\phi(grad\ln\lambda)$$

il s'ensuit que

$$h(\tau(\phi), \Delta\tau(\phi)) = -(n-2)^2\lambda^2 d\ln\lambda\,(grad\Delta\ln\lambda) - 2(n-2)^2\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right)$$
$$+ (n-2)^2\lambda^2(\Delta\ln\lambda)|grad\ln\lambda|^2 + (n-2)^3\lambda^2|grad\ln\lambda|^4. \qquad (4.27)$$

Par les équations (4.24), (4.25) et (4.27), on en déduit que

$$\begin{aligned}
Tr_g S_3(\phi) = & -\frac{(n-2)^2(n-4)}{2}\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\Delta\ln\lambda\right) \\
& + (n-2)^3\lambda^2 d\ln\lambda\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) \\
& - (n-2)^2\lambda^2\left(\Delta^2\ln\lambda\right) + \frac{(n-2)^2(n-10)}{4}\lambda^2\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right) \\
& + (n-2)^2\lambda^2(\Delta\ln\lambda)^2 + 2(n-2)^3\lambda^2(\Delta\ln\lambda)|grad\ln\lambda|^2 \\
& + \frac{n(n-2)^3}{2}\lambda^2|grad\ln\lambda|^4.
\end{aligned}$$

Corollaire 4.2.2 *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \to (N^n, h)$, $(n \geq 3)$ une application conforme de dilatation λ, alors $Tr_g S_3(\phi) = 0$ si et seulement si*

$$\begin{aligned}
& \Delta^2\ln\lambda - \frac{(n-10)}{4}\Delta\left(|grad\ln\lambda|^2\right) - 2(n-2)(\Delta\ln\lambda)|grad\ln\lambda|^2 \\
& -(\Delta\ln\lambda)^2 - \frac{n(n-2)}{2}|grad\ln\lambda|^4 + \frac{(n-4)}{2}d\ln\lambda\left(grad\Delta\ln\lambda\right) \\
& -(n-2)d\ln\lambda\left(grad\left(|grad\ln\lambda|^2\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

De plus, si on suppose que $\ln\lambda$ *est radiale* ($\ln\lambda = \alpha(r), r = |x|$ *et* $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)*, on en déduit que $Tr_g S_3(\phi) = 0$ si et seulement si $\beta = \alpha'$ satisfait l'équation différentielle ordinaire suivante :*

$$\begin{aligned}
& \beta^{(3)} + \frac{2(n-1)}{r}\beta^{(2)} + 3\beta\beta^{(2)} + \frac{(n-1)(n-3)}{r^2}\beta' + \frac{(n-1)}{r}\beta\beta' \\
& - \frac{(n-8)}{2}(\beta')^2 - 4(n-2)\beta^2\beta' - \frac{(n-1)(n-3)}{r^3}\beta \\
& - \frac{3(n-2)(n-1)}{2r^2}\beta^2 - \frac{2(n-1)(n-2)}{r}\beta^3 - \frac{n(n-2)}{2}\beta^4 = 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Remarque 4.2.3 *Cherchons des solutions particulières de l'équation (4.28) qui s'écrivent sous la forme* $\beta = \frac{a}{r}$ *(*$a \in \mathbb{R}^*$*), on trouve l'équation algébrique suivante*

$$a^3n^2 - 2a^3n + 4a^2n^2 - 20a^2n + 24a^2 + 3an^2 - 6an - 16a + 4n^2 - 24n + 32 = 0.$$

Exemple 4.2.2 *À partir de la remarque 4.2.3, nous donnerons deux exemples*

1. *Pour* $a = -2$*, on peut citer l'exemple de l'inversion* $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *définie par* $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ *c'est une application conforme de dilatation* $\lambda = \frac{1}{r^2}$*. Nous concluons que* $Tr_g S_3(\phi) = 0$ *si et seulement si* $n = 10$*.*
2. *Le cas* $a = -1$ *donne la dilatation* $\lambda = \frac{1}{r}$*, dans ce cas on considère l'application conforme* $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$*, donné en coordonnées polaires par* $\phi(r\theta) = (\ln r, \theta)$*, pour* $r > 0, \theta \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$*, en déduisons que* $Tr_g S_3(\phi) = 0$ *si et seulement si* $n = 3$ *ou* $n = 6$*.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Baird ans J.C. Wood *Harmonic morphisms between Riemannain manifolds*, Oxford Sciences Publications (2003).

[2] P. Baird, A. Fardoun and S. Ouakkas *Conformal and semi-conformal biharmonic maps*. Ann. Glob. Anal. Geom. 34 (2008), 403Ű414.

[3] V. Branding, *The stress-energy tensor for polyharmonic maps*. Nonlinear Anal. 190 (2020), 111616, 17 pp.

[4] V. Branding, *A structure theorem for polyharmonic maps between Riemannian manifolds*. arXiv : 1901.08445.

[5] P. Goldstein, P. Strzelecki and A. Zatorska-Goldstein, *On polyharmonic maps into spheres in the critical dimension*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 26(4) (2009), 1387Ű1405.

[6] G. Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), 389-402.

[7] E. Loubeau and Y.-L. Ou, *Biharmonic maps and morphisms from conformal mappings*. Tohoku. Math. J. 62 (2010), 55Ű73.

[8] S. Maeta, *Construction of triharmonic maps*. Houst. J. Math. 41(2) (2015), 433-444.

[9] S. Maeta,*k-Harmonic maps into a Riemannian manifold with constant sectional curvature* . Proc. Am. Math. Soc. 140 (2012), 1835Ű1847.

[10] S. Maeta, *The second variational formula of the k-energy and k-harmonic curves*. Osaka J. Math. 49 (2012), 1035Ű1063.

[11] N. Nakauchi and H. Urakawa. *Polyharmonic maps into the Euclidean space*. Note Mat. 38 (2018), 89Ű100.

[12] S. Ouakkas and D. Djebbouri, *Conformal Maps, Biharmonic Maps, and the Warped Product*. Mathematics, 4, 15 (2016) ; doi : 10.3390/math 4010015.

[13] S. B. Wang, *Some results on stability of* 3*-harmonic mappings*. Chin. Ann. Math. Ser. A 12 (1991), 459Ű467.

[14] S. B. Wang,*The first variation formula For k-harmonic mapping*. J. Nanchang Univ. 13 (1) (1989).