الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة سعيدة د. مولاي الطاهر

كلية العلوم

دروس و مسائل محلولة

الاهتزازات و الأمواج

المؤلفون:

خلفاوي فريحة
بودية كلتومة
مسكين محمد

لطلبة قسمي الفيزياء و الكيمياء

البريد الالكتروني: friha.khelfaoui@gmail.com

السنة الجامعية : 2024- 2025

تمـهيـــــد

هذه المطبوعة صُممت لدعم تدريس وحدة التعليم [الاهتزازات والأمواج: دروس وتمارين محلولة] المقدمة لطلبة السنة الثانية ليسانس تخصص فيزياء وكيمياء في جامعة سعيدة الدكتور مولاي الطاهر. وهي موجهة لطلاب السنة الثانية ليسانس وكذلك للمدرسين والباحثين الذين يرغبون في تعميق معرفتهم في هذا المجال. تهدف هذه الوحدة التعليمية إلى تمكين الطلاب من فهم المبادئ الأساسية للظواهر المتعلقة بالاهتزازات والأمواج، واستيعاب النظريات والتطبيقات المختلفة لهذه الظواهر في مجالات الفيزياء والكيمياء، مع إتاحة الفرصة لتطبيق المفاهيم من خلال حل التمارين.

تتكون هذه المطبوعة من دروس وأعمال موجهة، حيث تتناول المفاهيم النظرية المتعلقة بالاهتزازات والأمواج، وتقدم تمارين محلولة لتعميق الفهم وتطبيق النظريات. تهدف هذه المطبوعة إلى مساعدة الطلاب في تطوير قدراتهم التحليلية وتعزيز فهمهم للعلاقات الفيزيائية والكيميائية الأساسية التي تحكم هذه الظواهر.

يجب على الطلاب الذين يتابعون هذه الوحدة التعليمية أن يكون لديهم معرفة أساسية بالفيزياء والكيمياء لفهم المفاهيم المطروحة بشكل أفضل. في نهاية هذه الوحدة، سيتمكن الطلاب من حل المشكلات المتعلقة بالاهتزازات والأمواج، وفهم التطبيقات العملية لهذه الظواهر في مجالات مختلفة من العلوم والصناعة.

تم إعداد هذه المطبوعة بمساعدة بودية كلتومة، ومسكين محمد، الذين أود أن أشكرهما على مساهمتهما القيمة.

أتمنى لكم قراءة ممتعة ونجاحاً باهراً في هذه الوحدة التعليمية.

.فريحة خلفاوي، بودية كلتومة، ومسكين محمد

الفصل الأول: عموميات.....5
1-1مقدمـــة.....5
1.2.1 كمية دورية.....8
1.2.1. دالة جيبية.....8
3.2.1. تمثيل الكمية الدورية بدالة مركبة:.....9
3.2.1. متسلسلات فوريه:..... 10
الفصل الثاني: أنظمة خطية ذات درجة حرية واحدة..... 12
1.2 الاهتزازات الحرة..... 12
1.1.2 تعريف المُذبذب الحر..... 12
2.1.2 تعريف المُذبذب التوافقي..... 12
3.1.2 معادلة الحركة..... 13
4.1.2 طاقة الهزاز التوافقي (E)..... 15
6.1.2 شروط التوازن والتذبذب..... 19
2.2.هزاز متخامد بدرجة حرية واحدة..... 19
1.2.2. تعريف الهزاز المتخامد..... 19
2.2.2. معادلة لاغرانج..... 20
3.2.2. معادلة الحركة..... 20
3.2. تذبذبات متخامدة قسريا..... 24
1.3.2. تعريف المتذبذب المتخامد القسري..... 24
2.3.2. معادلة لاغرانج..... 24
2.3.2. معادلة الحركة..... 25
الفصل الثالث: أنظمة خطية متعددة الدرجات..... 31
1.3. مقدمة..... 31
2.3 أنواع الاقتران..... 31
2-3 أنظمة خطية ذات درجتي من الحرية - حالة حرة –..... 33
1.2.3 معادلة الحركة..... 33
2.2.3. أنماط التذبذبات..... 35
نظام متخامد قسري ذو درجتي حرية 3.3..... 36
4.3 التذبذبات القسرية لنظام غير متخامد ذو درجتي حرية..... 37
5.3. تعميم على الأنظمة ذات n درجات حرية..... 38
الفصل الرابع: الموجات الميكانكية -عموميات –.....
1.4 تصنيف الموجات..... 41
2.4 الحل العام لمعادلة الموجة التقدمية العامة:..... 43

1.2.4 الحل العام لمعادلة الموجة: 43
3.4 سرعة الطور وسرعة المجموعة: 44
4.4 جبهة الموجة 45
1.4.4أمثلة على الموجات المستوية والكروية 46
5.4انعكاس وانتقال الموجات 48
الفصل الخامس: موجات عرضية على حبل 50
1.5. مقدمة 50
3.5. الممانعة المميزة 52
4.5. الموجات المستقرة 53
1.4.5.الحل المستقر لمعادلة دالمبرت 53
3.4.5 الانعكاس والانتقال 54
4.4.5.أنواع الشروط الحدية للحبل المهتز 54
5.5الجزء التجريبي 60
1.5.5 التجربة العامة 60
2.5.5.الطاقة المخزنة في حبل مهتز 61
3.5.5.الطاقة الحركية 61
4.5.5.الطاقة الكامنة 62
الفصل السادس: الموجات الطولية في الموائع 63
1.6. مقدمة 63
2.6 الأمواج المستوية في أنبوب أسطواني 63
1.2.6 معادلة الأمواج في الغاز 63
2.2.6 الموجات المستوية في أنابيب اسطوانية 65
3.6 تأثير دوبلير Doppler: 75
1.3.6 تعريف 75
الفصل السابع: الموجات المرنة في المواد الصلبة 77
2.7 تعريف وخصائص المواد الصلبة المرنة 77
3.7 معادلة الموجة في قضيب صلب 78
4.7 حل معادلة دالمبيرت 80
1.4.7 قضيب لانهائي 80
2.4.7 الممانعة الميكانيكية 81
3.4.7 الجانب الطاقي 81

الفصل الأول

الحركة الدورية

1-1.مقدمة

الحركة الدورية:هي حركة تتكرر بانتظام، بحيث يعود الجسم المتحرك إلى نفس الموقع ونفس الحالة الفيزيائية بعد فترة زمنية محددة تسمى الدور

أمثلة ملموسة على الحركة الدورية:

- **عودة السيارة إلى المنزل** :كل يوم بعد العمل، تعود بسيارتك إلى نفس المكان، مما يمثل حركة دورية.
- **تناول العشاء** :مساءً، تجلس على مائدة الطعام لتناول وجبة العشاء بشكل منتظم، مما يعكس روتينًا دوريًا.
- **أرجوحة الحديقة** :راقب حركة الأرجوحة في حديقة منزلك أو في حديقة عامة. تتحرك الأرجوحة ذهابًا وإيابًا، عائدةً إلى موقعها الأصلي في فترات زمنية ثابتة.
- **دوران الأرض حول الشمس** :تعد حركة الأرض حول الشمس حركةً دورية، حيث تعود الأرض إلى نفس الموقع بعد عام واحد، مما يسبب تعاقب الفصول الأربعة.
- **دوران القمر حول الأرض** :يدور القمر حول الأرض في مسار محدد، عائدًا إلى نفس الموقع بعد حوالي 28 يومًا.

أمثلة أخرى على الحركة الدورية:

- **حركة الجزيئات في السوائل** :تهتز جزيئات السوائل حول مواقع توازنها في حركة دورية مستمرة، وتزداد قوة هذه الحركة مع ارتفاع درجة الحرارة.
- **الموجات الكهرومغناطيسية** :تنتشر الموجات الكهرومغناطيسية، مثل ضوء الشمس وموجات الرادار والراديو، عبر الفراغ من خلال اهتزاز مجالاتها الكهرومغناطيسية بشكل دوري.
- **التيار الكهربائي المتردد** :يتغير اتجاه وشدة التيار الكهربائي المتردد بشكل دوري مع الزمن، مما يجعله مثالاً على الحركة الدورية.

- **الجهد الكهربائي** :يتغير الجهد الكهربائي في بعض الدوائر الكهربائية بشكل دوري مع الزمن.
- **الشحنة الكهربائية** :في بعض الدوائر الكهربائية، تتغير قيمة الشحنة الكهربائية بشكل دوري مع الزمن

ميزة هامة:

في العديد من الأنظمة الميكانيكية، تتناسب القوة المؤثرة على جسم ما بشكلٍ طرديٍ مع إزاحته عن موقعه الأصلي.

تُعدّ الحركة الدورية ظاهرةً شائعةً في الطبيعة، ولها العديد من التطبيقات في مختلف مجالات العلوم والهندسة.

2-1. تحويل فوريه

يُعدّ تحويل فورييه أداةً أساسيةً في العديد من المجالات العلمية والهندسية.فهو يُمكّننا من فهم وتحليل الإشارات المعقدة، ولذلك له تطبيقات واسعة في كثير من المجالاتٍ مثل معالجة الصوت والصور، والاتصالات، والطب، وغيرها الكثير.

تحويل فورييه (بالإنجليزيةFourier Transform) هو تقنية رياضية تستخدم لتحويل دالّة رياضية بمتغير حقيقي وذات قيم مركّبة إلى دالّة أخرى من نفس الطراز. وكثيرًا ما يطلق على هذه الدالة الجديدة اسم التمثيل في نطاق تّردّد الدالة الأصلية. والأمر شبيه بتدوين التآلف الموسيقي للنغمات التي يتكون منها ذلك التآلف .عمليًا، فإنّ التحويل يقوم بتحليل الدالّة الأصل إلى مركّباتها من الدوال التوافقية المركّبة. إنّ تحويل فورييه ما هو إلاّ إحدى الأدوات الرياضية المتوفّرة ضمن مجال تحليل فورييه . في تحويل فورييه الأصلي، فإنّ الدالة الأصليّة و الدالة الناتجة مستمرّتان وغير محدودتين. قد يستخدم المصطلح تحويل فورييه إمّا للإشارة إلى العملية الرياضيّة نفسها، أو للإشارة إلى الدالة الناتجة عن التحويل (فمثلاً، تكون الدالة F هي تحويل فورييه للدالة f)

كيف يعمل؟

يُعدّ تحويل فورييه أداة رياضية أساسية لتحليل الإشارات، حيث يقوم بتحويل تمثيل الإشارة من المجال الزمني إلى المجال الترددي.يمكن تشبيهه بعدسة تكشف عن المكونات الترددية التي تشكل الإشارة، تمامًا كما يحلل الموشور الضوء الأبيض إلى مكوناته من ترددات مختلفة .يمكن تطبيق تحويل فورييه على

الإشارات الصوتية و الكهربائية لتحليل النغمات المختلفة و لتحليل ترددات التيار الكهربائي لفهم خصائصها او تشخيص الاعطال.

ما هي فوائده؟

- **تحليل الإشارات الدورية:**يمكن استخدام تحويل فوريه لتحليل الإشارات الدورية، مثل موجات الصوت أو الإشارات الكهربائية، وكشف عن المكونات الترددية التي تشكلها .هذا يساعد على فهم سلوك هذه الإشارات وتحديد خصائصها بشكل دقيق.
- **تصفية الإشارات:**يتيح تحويل فوريه إزالة الترددات غير المرغوب فيها من الإشارة، مثل الضوضاء والتداخلات، مما يحسن جودة الإشارة الناتجة.
- **معالجة الصور:**في مجال معالجة الصور، يستخدم تحويل فوريه لتحليل الصور وتحسينها .يمكن استخدامه للكشف عن الأنماط والترددات المكانية في الصورة، مما يسمح بتطبيق عمليات مثل التصفية.
- **حل المعادلات التفاضلية:**تحويل فوريه هو أداة قوية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، خاصة تلك التي تصف الظواهر الفيزيائية .فهو يحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة جبرية أسهل حلاً في المجال الترددي.

أمثلة على تطبيقاته:

- **معالجة الصوت:**إزالة الضوضاء من التسجيلات الصوتية، وتحسين جودة الصوت في الهواتف المحمولة.
- **معالجة الصور:**تحسين وضوح الصور، وإزالة الضوضاء، وضغط الصور.
- **الاتصالات:**نقل البيانات بشكلٍ أكثر كفاءة وفعالية.
- **الطب:**تشخيص الأمراض باستخدام التصوير بالرنين المغناطيسي (MRI) والموجات فوق الصوتية.

أنواع تحويل فوريه:

- **تحويل فوريه المستمر:(CFT)** يستخدم لتحليل الإشارات المستمرة، مثل الموجات الصوتية والإشارات الكهربائية المتناوبة، ويقدم وصفًا دقيقًا للمحتوى الترددي للإشارة في المجال الترددي المستمر.

- **تحويل فورييه المنفصل:(DFT)** يستخدم لتحليل الإشارات الرقمية، ويحول إشارة رقمية من المجال الزمني إلى المجال الترددي، مما يجعله أداة أساسية في معالجة الإشارات الرقمية.
- **تحويل فورييه السريع:(FFT)** هي خوارزمية فعالة للغاية لحسابDFT ، وتستخدم على نطاق واسع في التطبيقات التي تتطلب حساب DFT بسرعة.

1.2.1 كمية دورية

تعرف الدالة$x(t)$ *بأنها دالة* دورية اذا وجد عدد موجبT بحيث:

$$x(t+T) = x(t); \quad \forall t \tag{1-1}$$

حيثTهو أصغر قيمة موجبة للزمن الذي تتكرر فيه قيمة الدالة، ويسمى هذا الزمن بالدوالدالة أو الفترة . بعبارة أخرى، الدالة الدورية هي دالة تتكرر قيمتها بعد فترات زمنية متساوية .على سبيل المثال، دالتا الجيب وجيب التمام هما دالتان دوريتان

1.2.1. دالة جيبية

تعتبر الدوال الجيبية من أهم الدوال في الفيزياء والهندسة، وذلك لأنها تصف العديد من الظواهر الطبيعية والهندسية المتكررة .بشكل عام، يمكن تمثيل كمية فيزيائية تتغير بشكل دوري بدالة جيبية أو جيب تمامية.

يمكن تمثيل دالة جيبية بالشكل التالي:

$$x(t) = a\ sin(\omega t + \varphi) \tag{1-2}$$

حيث:

- $\boldsymbol{x(t)}$: قيمة الكمية الفيزيائية المتغيرة بدلالة الزمن.t
- $\boldsymbol{a}$: السعة، وهي أقصى قيمة مطلقة للكمية المتغيرة.
- $\boldsymbol{\omega}$: النبض، ويقاس بالراديان/ثانية .وهو مرتبط بالزمن الدوري T للعلاقة:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1-3}$$

- φالطور الأولي، وهو يحدد نقطة البداية للدالة الجيبية على المحور الزمني.

أمثلة على الكميات الجيبية:

- **في الميكانيك:**
  - **الحركة التوافقية البسيطة:** حركة كتلة مرتبطة بنابض مثالي.
  - **حركة النواس البسيط:** حركة جسم معلق بخيط خفيف.
- **في الكهرباء:**
  - **الجهد المتردد:** الجهد الكهربائي الذي يتغير بشكل دوري.
  - **التيار المتردد:** التيار الكهربائي الذي يتغير بشكل دوري.

ملاحظة:

دالتا الجيب والجيب التمام متكافئتان، ويمكن تحويل إحداهما إلى الأخرى بتغيير الطور الأولي بمقدار $\pi/2$. أي:

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi) = a\cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) \qquad (1\text{-}4)$$

تستخدم الدوال الجيبية في العديد من المجالات، مثل:

- **الهندسة:** تحليل الدوائر الكهربائية، تصميم الأنظمة الميكانيكية.
- **الفيزياء:** وصف الحركات الموجية، الظواهر الكهرومغناطيسية، وغيرها.
- **معالجة الإشارات:** تحليل وتحويل الإشارات الصوتية والمرئية.

ملاحظة: يمكن تمثيل الدوال الجيبية بيانياً كموجة جيبية، حيث تمثل السعة سعة الموجة، والطول الموجي مرتبط بادور، والطور الأولي يحدد نقطة بداية الموجة.

3.2.1. تمثيل الكمية الدورية بدالة مركبة:

يمكن تمثيل أي كمية فيزيائية تتغير بشكل دوري، مثل الجهد المتردد أو التيار المتردد، بدالة جيبية أو جيب تمامية .وبدلاً من استخدام الدوال المثلثية مباشرة، يمكننا استخدام الأعداد المركبة لتبسيط الحسابات.

يمكن تمثيل أي كمية فيزيائية متغيرة دورياً، $x(t) = \sin(\omega t + \varphi)$، بالشكل المركب التالي:

$$\bar{X}(t) = a\cos(\omega t + \varphi) + j\ a\sin(\omega t + \varphi), \quad \text{علما أن} \quad j^2 = -1 \qquad (1\text{-}5)$$

يستعمل لتبسيط حسابات الكميات الجيبية باستخدام صيغة أويلر:

$$e^{j\theta} = \cos\ (\theta) + j\ \sin(\theta) \qquad (1\text{-}6)$$

3.2.1. متسلسلات فورييه:

تعتبر متسلسلات فورييه أداة قوية لتحليل الإشارات الدورية .فهي تسمح بتفكيك أي إشارة دورية إلى مجموع من الدوال الجيبية والجيب التمامية، ولكل منها تردد وسعة وطور محددين .هذا التفكيك يسمح بدراسة خصائص الإشارة بشكل مفصل، وتطبيق العديد من العمليات عليها مثل الترشيح والتضمين.

يمكن تمثيل أي دالة دورية $f(t)$ ذات الدور T على شكل متسلسلة فورييه بالشكل التالي:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n sins(n\omega t) \qquad (1\text{-}7)$$

حيث:

- a_0: المعامل الثابت، ويمثل متوسط قيمة الدالة $f(t)$ خلال الدورة.
- b_n و a_n: معاملات فورييه، وهي ثوابت تحدد سعة كل مكون جيبي أو جيبي تمامي في المتسلسلة.
- ω: التردد الزاوي الأساسي، وهو يساوي $2\pi/T$.
- n: عدد صحيح موجب يمثل ترتيب التوافقية.

يمكن حساب معاملات فورييه باستخدام التكاملات التالية:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt,\ \ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos(n\omega t)dt\,, b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin(n\omega t)dt$$

تسمى الدوال الجيبية والجيب التمامية التي تشكل متسلسلة فورييه بالتوافقيات .التردد الزاوي لكل توافقية هو مضاعف صحيح للتردد الزاوي الأساسي .التوافقيات ذات الترددات المنخفضة تمثل المكونات الأساسية للإشارة، بينما التوافقيات ذات الترددات العالية تمثل التفاصيل الدقيقة.

يسمى التردد الزاوي (ω) ترددًا زاويًا أساسيًا

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (1\text{-}8)$$

تُسمى الترددات الزاوية ($n\omega$) التي هي مضاعفات للتردد الزاوي الأساسي (ω) بالتوافقيات

التمثيل المركب لمتسلسلات فوريه:

يمكن كتابة متسلسلة فوريه بشكل أكثر إيجازًا باستخدام التمثيل المركب:

$$f(t) = \sum C_n e^{jn\omega t} \qquad (1\text{-}9)$$

حيث C_n هي معاملات فوريه المركبة، وهي مرتبطة بـ a_n و b_n.

أهمية متسلسلات فوريه:

- **تحليل الإشارات:** تستخدم متسلسلات فوريه لتحليل الإشارات الدورية في مجالات مثل معالجة الإشارات، الاتصالات، والتحكم.
- **حل المعادلات التفاضلية:** تستخدم متسلسلات فوريه لحل العديد من المعادلات التفاضلية الجزئية.
- **ضغط البيانات:** يمكن استخدام متسلسلات فوريه لضغط الإشارات عن طريق الاحتفاظ فقط بأول عدد من التوافقيات.

فريحة خلفاوي

الفصل الثاني

أنظمة خطية ذات درجة حرية واحدة

1.2 الاهتزازات الحرة

1.1.2 تعريف المُذبذب الحر

المُذبذب الحرهو نظام ميكانيكي أو فيزيائي قادر على التذبذب حول موضع اتزان مستقر عند إخراجه من هذا الموضع وإعطائه طاقة أولية، وذلك بفعل القوى الداخلية للنظام دون الحاجة إلى أي قوة خارجية مستمرة.

2.1.2 تعريف المُذبذب التوافقي

المُذبذب التوافقيهو نظام ميكانيكي يتحرك حركة اهتزازية حول موضع اتزان مستقر، بحيث تكون القوة المؤثرة عليه تتناسب طرديًا مع الإزاحة عن موضع الاتزان ومعاكسة في الاتجاه .من الأمثلة على المذبذبات التوافقية :البندول البسيط (للحركات الصغيرة)، كتلة مرتبطة بنابض مثالي، ذبذبات جزيئات المادة حول موضع اتزانها، ودائرة RLCالرنانة.

$$F = -c \times x \qquad (2\text{-}1)$$

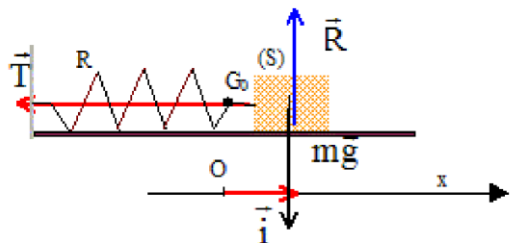
حيث: c ثابت موجب، و x هو الإزاحة عن موضع الاتزان.

مثال: نظام نابض-كتلة (تجربة)

قمنا بإزاحة الكتلة المُعلقة بالنابض قليلاً عن موضع سكونها (موضع التوازن) ثم أطلقناها دون منحها أي سرعة ابتدائية(**الشكل 1.2**). لاحظنا أن الكتلة بدأت تهتز حركة ذهابًا وإيابًا حول موضع توازنها.

التفسير:عند إزاحة الكتلة عن موضع توازنها، ينشأ في النابض قوة تُسمى **قوة استعادة** .هذه القوة تعمل دائمًا في اتجاه عكس اتجاه الإزاحة، أي أنها تسعى لإعادة الكتلة إلى موضع توازنها .في حالة النابض، تكون قوة الاستعادة ناتجة عن **تغير طول النابض** عن طوله الطبيعي، وهي تتناسب طرديًا مع مقدار هذا التغير.**الشكل 1.2** يوضح هذا النظام بشكل مبسط، حيث تمثل الكتلة الجسم المهتز، والنابض يمثل القوة الاستعادية

$$T = -k \times x. \quad (2\text{-}2)$$



شكل 1.2: نظام كتلة-نابض أفقي.

3.1.2 معادلة الحركة

يمكن وصف حركة الهزاز التوافقي البسيط، مثل كتلة مرتبطة بنابض أو دائرةRLC ، بمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2\text{-}3)$$

حيث:

- q هي الاحداثيات المعممة، قد تمثل الإزاحة عن موضع التوازن، في الميكانيك $(x, y, z, \theta,)$، وفي الكهرباء $q(i, u, Q, \dots)$.
- ω *النبض* (راديان/ثانية)، وهو يمثل عدد الدورات الكاملة التي يقوم بها الهزاز في الثانية الواحدة.
- q''الاشتقاق الثاني للإزاحة بالنسبة للزمن، وهو يمثل التسارع.

حل المعادلة (2-3) هي من الشكل:

$$\begin{cases} q(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ q(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases} \quad (2\text{-}4)$$

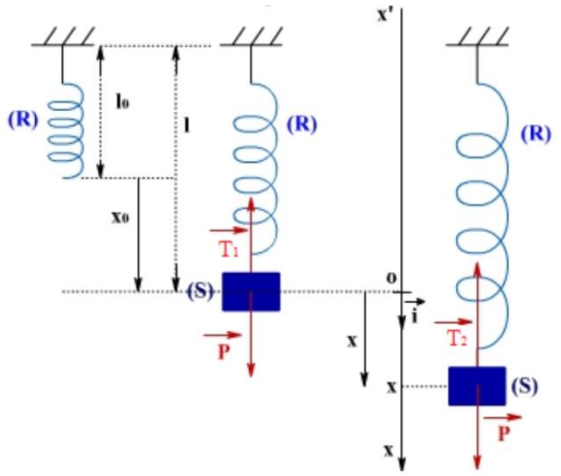
$$\phi = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

مع A:السعة (بالوحدة المناسبة حسب السياق، مثل متر، فولت، إلخ)، وهي أقصى قيمة للازاحة،φ و ϕالطورين الابتدائيين (بالمقاييس الزاوية، عادة بالراديان) ، $\boldsymbol{\omega}$ *النبض* (بـ راديان/ثانية) و $\boldsymbol{t}$الزمن (بالثانية)

مثال: جملة الكتلة-النابض الشاقولية

لنعتبر كتلة نقطية ذات كتلة (m) معلقة بنابض مثالي ذي ثابت مرونة (k) في مجال جاذبية الأرض كما هو موضح في الشكل (2-2). نفترض أن النابض عديم الكتلة وأن الحركة تتم في خط مستقيم رأسي دون احتكاك.

عند الزمن $t = 0$ ، نزيح الكتلةعن موضع توازنها بمقدار x ثم نطلقها دون سرعة ابتدائية. تبدأ الكتلة بالاهتزاز حول موضع التوازن حركة توافقية بسيطة.



الشكل:2-2 : نظام شاقولي نابض-كتلة

بتطبيق مبدأ نيوتن، الذي ينص على أن محصلة القوى المؤثرة على جسم ما تساوي حاصل ضرب كتلة الجسم في تسارعه .أي:

أ- حالة التوازن:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \overrightarrow{T_1} = \vec{0} \Longrightarrow P - T_1 = 0$$

$$m\,g - k\,x_0 = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

ب- حالة الحركة:

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a} \Longrightarrow \vec{P} + \overrightarrow{T_2} = m\,\vec{a} \Longrightarrow P - T_2 = m\,a$$

$$m\,g - k(x_0 + x) = m\,a \Longrightarrow \underbrace{m\,g - k\,x_0}_{0} - k\,x = m\,\ddot{x}$$

$$-k\,x = m\,\ddot{x} \Longrightarrow m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

اذن، معادلة الحركة:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\, x = 0 \qquad (2\text{-}6)$$

بالمطابقة مع المعادلة (2-3)، نستنتج:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2\text{-}7)$$

يمكن استنتاج معادلة حركة الهزاز التوافقي البسيط باستخدام مبدأ انحفاظ الطاقة، الذي ينص على أن الطاقة الكلية لنظام معزول تبقى ثابتة بمرور الزمن .في نظام الكتلة-النابض، تتكون الطاقة الكلية من طاقة الكامنة المرونية للنابض، الطاقة الكامنة الثقالية (اذا كان وضعه شاقولي)، وطاقة الحركة للكتلة.

4.1.2 طاقة الهزاز التوافقي (E)

طاقة الهزاز التوافقي هي مجموع الطاقة الحركية (T) والطاقة الكامنة (U)

$$E = T + U \qquad (2\text{-}8)$$

-الطاقةالحركية (T)

الطاقةالحركية لجسم كتلته m وله سرعة $(\dot{q})$ (وبالتالي مرتبطة بالحركة):

- انسحابية: $q = (v, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ $\qquad T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \qquad (2\text{-}9)$
- دورانية: $\qquad T = \frac{1}{2} I_\Delta\, \dot{\theta}^2 \qquad (2\text{-}10)$

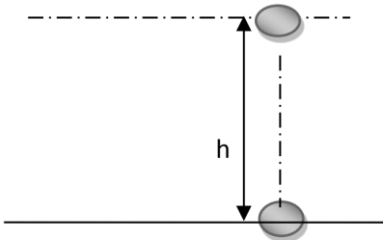
حيث I_Δ هو عزم العطالة، و $\dot{\theta}$ سرعة زاوية.

الطاقةالكامنة (U)

يوجد العديد من الأشكال للطاقة الكامنة .

الطاقةالكامنة لقوة الجاذبية :توجد كتلة (m) في مجال جاذبية ثابت (g) ، وعبارة طاقة الجاذبية الكامنة هي:

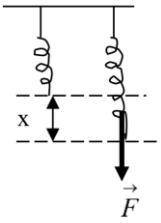
$$U_p = m\, g\, h \qquad (2\text{-}11)$$



➢ الطاقة الكامنة المرنة

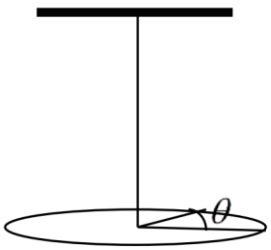
لنابض ثابت مرونته k، وازاحة x ، طاقة كامنة :

$$U_k = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2\text{-}12)$$



أما نابض الالتواء مع ثابت الصلابة (k) وازاحة زاوية (θ) ، طاقته الكامنة:

$$U_k = \frac{1}{2}k\theta^2 \qquad (2\text{-}13)$$



- **انحفاظ الطاقة الكلية**

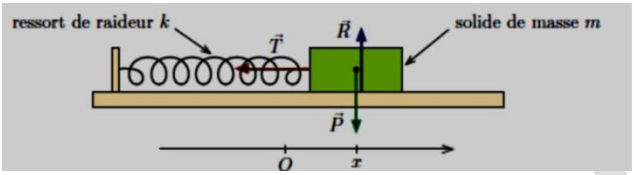
الطاقةلا تفنى ولا تستحدث من العدم، بل تنتقل من جملة إلى أخرى وتتحول من شكل إلى آخر. لذلك إذا كانت الطاقة الإجمالية (الحركية والكامنة)للجملة، سوف تكون ثابتة أثناء حركتها فنستنتج أن:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad (2\text{-}14)$$

من هذه المعادلة (معادلة انحفاظ اطاقة) نستنتج معادلة الحركة.

مثال

لنفترض أن الكتلة mمتصلة بنهاية نابض أفقي عديم الكتلة ذو صلابة k.تتحرك هذه الكتلة دون احتكاك على المستوى الأفقي. عند $t=0$، نزيح الكتلة عن موضع توازنها بمقدارx بدون سرعة ابتدائية.



الشكل:2-3 المذبذب الميكانيكي: جملة نابض-كتلة أفقية

- **الطاقة الكلية**

$$E = T + U \tag{2-15}$$

- **الطاقة الحركية**

$$T = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 \tag{2-16}$$

- **الطاقة الكامنة**

$$U = \underbrace{U_p}_{0} + U_k = \frac{1}{2} k\, x^2 \tag{2-17}$$

$$E = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\, x^2 \tag{2-18}$$

$$\text{الجملة محفوظة} \Longrightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Longrightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2} m\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k\, x^2\right)}{dt}$$

$$m\, \ddot{x} + k\, x = 0 \tag{2-19}$$

المعادلة التفاضلية للحركة :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\, x = 0 \tag{2-20}$$

5.1.2 معادلة لاغرانج (Lagrange Equation)

تسمح لنا معادلة لاغرانج بايجاد معادلة حركة االجمل الميكانيكية.يتم وصفها بالمعادلة التالية:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \tag{2-21}$$

حيث L لاغرانج الجملة وهي دالة بدلالة الاحداثيات والسرع المعممة.

$$L = T - U \quad (2\text{-}22)$$

T هي الطاقة الحركية للجملة.

U هي الطاقة الكامنة للجملة.

q_i و $\dot{q}_i$ الاحداثيات و السرع المعممة.

F_i القوة المعممة المرتبطة بالاحداثية المعممة q_i.

بالنسبة لجملة محفوظة ذات درجة حرية واحدة ، المعادلة (2-21):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2\text{-}23)$$

مثال

أماالنظام السابق (شكل 2-3)فنستخدم طريقة لاغرانج لكتابة معادلة الحركة واستنتاج التردد الزاوي الطبيعي

لاغرانج الجملة:

$$L = T - U \quad (2\text{-}24)$$

طاقته الحركية :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2\text{-}25)$$

وطاقته الكامنة:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \quad (2\text{-}26)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (2\text{-}27)$$

بعد الاشتقاقات، نستنتج من معادلة لاغرانج للجملة:

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad (2\text{-}28)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (2\text{-}29)$$

اذن هي من الشكل:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \qquad (2\text{-}30)$$

فنبض الحركة هو: $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2\text{-}31)$$

6.1.2 شروط التوازن والتذبذب

وفقا للمفاهيم السابقة، يتم تعريف القوة على أنها مشتقة الطاقة الكامنة:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q} \qquad (2\text{-}32)$$

الجملة المدروسة في حالة توازن، $F = 0$ ، اذن شرط التوازن:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = 0 \qquad (2\text{-}33)$$

شرط التذبذب:

يكون التوازن مستقر، اذا كان ثابت التذبذب التوافقي أكبر من الصفر:

$$C = -\frac{\partial F}{\partial q} > 0 \qquad (2\text{-}34)$$

اذن شرط التذبذب هو:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right]_{q=0} > 0 \qquad (2\text{-}35)$$

2.2.هزاز متخامد بدرجة حرية واحدة

1.2.2. تعريف الهزاز المتخامد

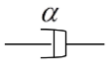
عندما نأخذ قوة الاحتكاك اللزج بعين الاعتبار عند دراسة حركة الهزاز ، نجد أن معادلة الحركة تصبح معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية .حل هذه المعادلة يؤدي إلى الحصول على دالة زمنية تصف إزاحة الهزاز هذه الدالة ستكون عبارة عن دالة أسية متناقصة، مما يعني أن سعة اهتزازات الهزاز ستتناقص بمرور الزمن حتى تصل إلى الصفر .اذن الهزاز المعرض للاحتكاك اللزج هو هزاز متخامد

ويكون الاحتكاك اللزج على الشكل:

$$f = -\alpha v \quad (2\text{-}36)$$

حيث α معامل الاحتكاك، و v سرعة الجسم.

يتم تمثيله بواسطة ممتص الصدمات:



2.2.2. معادلة لاغرانج

وبإدخال المخمد، تصبح معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\alpha\, \dot{q} \quad (2\text{-}37)$$

اذا أدخلنا دالة التبديد:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\, \dot{q}^2 \Longrightarrow \begin{cases} D = \frac{1}{2}\alpha\, \dot{q}^2\,, \quad \dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\,) & \text{انسحاب} \\ D = \frac{1}{2}\alpha\, \dot{v}^2 = \frac{1}{2}\alpha\left(I\dot{\theta}\right)^2 & \text{دوران} \end{cases} \quad (2\text{-}38)$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha\, \dot{q} \quad (2\text{-}39)$$

اذن معادلة لاغرانج تصبح:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad (2\text{-}40)$$

3.2.2. معادلة الحركة

معادلة الحركة من الشكل:

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2\text{-}41)$$

حيث λ معامل التخامد.

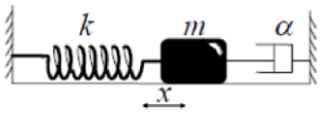
عامل الجودة يعرف بالعلاقة:

$$\phi = \frac{\omega_0}{2\lambda} \quad (2\text{-}42)$$

مثال

لتكن الكتلة (M) مثبتة على نابض أفقي ثابت صلابته k ومخمد بمعامل احتكاك α .

أوجد معادلةالحركة



الشكل:2-4 نظام متخامد أفقي [الكتلة، النابض]

- لاغراجيان: $L = T - U$ (2- 43)
- الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ (2-44)
- الطاقة الكامنة $U = \frac{1}{2} kx^2$ (2-45)

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (2\text{-}46)$$

- معادلة التبديد: $D = \frac{1}{2} \alpha\dot{x}^2$ (2-47)

باستعمال معادلة لاغرانج (2-40) ، نتحصل:

$$m\ddot{x} + k\,x = -\alpha\,\dot{x} \quad (2\text{-}48)$$

بمطابقة هذه المعادلة بمعادلة الحركة (2-41)، نتحصل على:

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \text{ و } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.3.2.2. حل معادلة الحركة

نفرض أن حل المعادلة (2-41) من الشكل:

$$q(t) = A\,e^{rt} \Longrightarrow \dot{q}(t) = A\,re^{rt} \Longrightarrow \ddot{q}(t) = A\,r^2e^{rt} \quad (2\text{-}49)$$

ثم نقوم بتعويض هذه العبارات في (2-41)، فنحصل:

$$A\,r^2e^{rt} + 2\,\lambda\;A\,re^{rt} + {\omega_0}^2 A\,e^{rt} = 0$$

$$(r^2 + 2\,\lambda\,r + {\omega_0}^2)A\,e^{rt} = 0 \Longrightarrow r^2 + 2\,\lambda\,r + {\omega_0}^2 = 0 \quad (2\text{-}50)$$

اذن لمعادلة الحركة ثلاث حلول حسب إشارة محدد Δ' للمعادلة (2-46)

$$\Delta' = b^2 - ac = \lambda^2 - \omega_0^2$$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$، الحركة غير دورية $\phi < 0.5$

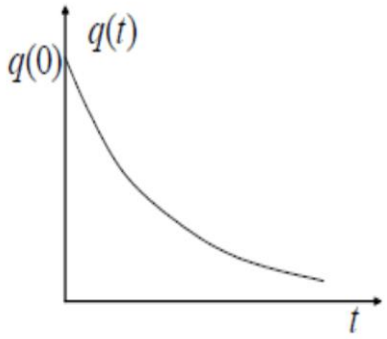
نلاحظ تخامداً قوياً، فبمجرد ازاحة النظام عن وضع توازنه، فإنه يعود إلى وضع التوازن دون حدوث أي اهتزاز، لذا فإن التخامد المطبق قوي جداً. وسيكون حل لمعادلتنا السابقة كما يلي:

$$q(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t}$$

بحيث: $r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ و $r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

اذن:

$$q(t) = A_1\, e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2\, e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \qquad (2\text{-}51)$$



- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$، حالة الحركة الحرجة ($\phi = 0.5$) في نظام ما وتوضح:

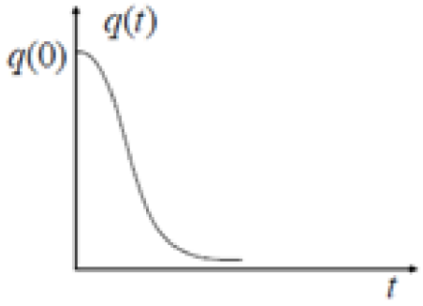
النظام يسمى حرج لأنه يتوافق مع تخامد حرج حيث يتم التحول من نظام به اهتزازات بدورية زائفة نحو نظام لا توجد فيه اهتزازات..

معادلات هذه الحركة كما يلي:

$$q(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, t\, e^{r_2 t}$$

$$r_1 = r_2 = r = -\lambda$$

(2-52) $$q(t) = (A_1 + A_2\, t)e^{-\lambda t}$$

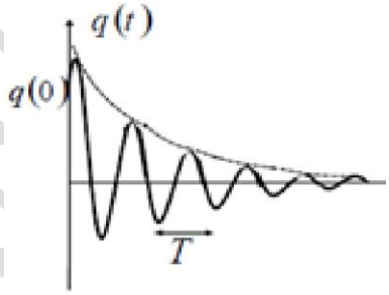


- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$، حركة دورية زائفة

حيث تتناقص السعة بمرور الوقت بسبب الاحتكاك.

$$r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ و } r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

(2-53) $$q(t) = A_1 e^{-\left(\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t}$$



بحساب بسيط يمكن كتابة الحل بالشكل المكافئ:

(2-54) $$q(t) = A\, e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$$

التردد الزاوي الزائف: $$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

الدور الزائف: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

2.3.2.2. *التناقص اللوغارثمي*

نعرف التناقص اللوغارثمي δ بـ: $\delta = ln\left(\frac{q(t_n)}{q(t_n+T)}\right)$ (2-55)

حيث $q(t_n)$ و $q(t_n + T)$ تمثل معايير الاهتزازات في اللحظات t_n و $t_n + T$ ، عمومًا، تتوافق هاتان اللحظتان مع نقطتين حديتين متعاقبتين من نفس الاشارة. تقيس هذه الكمية الانخفاض في السعات.

$$\delta = \lambda T \quad (2\text{-}56)$$

3.2. تذبذبات متخامدة قسريا

1.3.2. تعريف المتذبذب المتخامد القسري

عندما نتحدث عن **التذبذبات المضعفة القسرية**، فإننا نشير إلى حركة جسم ما يتأرجح ذهابًا وإيابًا حول موضع اتزان، ولكن هذه الحركة تتأثر بعاملين رئيسيين:

- **الاخماد :**وهي عملية فقدان الطاقة بمرور الوقت بسبب عوامل مثل الاحتكاك، مما يؤدي إلى تناقص سعة التذبذبات تدريجيًا.
- **القوة القسرية :**وهي قوة خارجية تؤثر على الجسم بشكل دوري، مما يحافظ على استمرار التذبذبات.

التذبذبات المتخامدة قسريا هي ظاهرة شائعة في العديد من النظم الفيزيائية، من حركة النواس إلى اهتزازات الدوائر الكهربائية.

2.3.2. معادلة لاغرانج

هناك شكلان لمعادلة لاغرانج حسب نمط الحركة:

انسحابية : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F(t)$ *(2-57)*

دورانية: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \mu(t)$ *(2-58)*

حيث $F(t)$ قوة الاثارة و $\mu(t)$ عزم قوة الاثارة.

2.3.2. معادلة الحركة

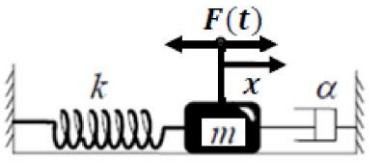
معادلة الحركة للجمل المتخامدة قسريا من الشكل:

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F(t)}{a}, \qquad \text{a ثابت} \tag{2-59}$$

مثال

بتطبيق قوة خارجية جيبية في النظام الموصوف في القسم 3.2.2**:**

$$F(t) = f_0 \cos(\Omega t) \tag{2-60}$$



الشكل 2-5: نظام متخامد قسريا (كتلة، نابض) أفقي

- لاغراجيان: $L = T - U$ (2-61)
- الطاقة الحركية $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (2-62)
- الطاقة الكامنة $U = \frac{1}{2}kx^2$ (2-63)

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \tag{2-64}$$

- دالة التبديد: $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$ (2-65)

باستعمال معادلة لاغرانج (2-57) ، نتحصل:

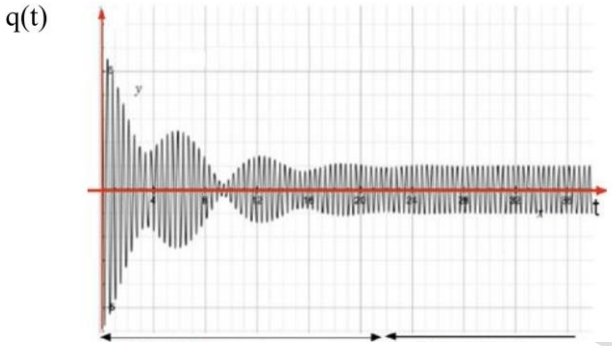
$$m\ddot{x} + k\,x = -\alpha\,\dot{x} + f_0 \cos(\Omega t) \tag{2-66}$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{f_0 \cos(\Omega t)}{m} \tag{2- 67}$$

اذن: التردد الزاوي للحركة $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ، و معامل الاخماد $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ (2- 68)

1.3.2.2 حل معادلة الحركة

وفقًا للشكل (2-5)، الذي يعرض تسجيل حركة متذبذب متخامد قسريا، نلاحظ نظامين: الأول قصير يُسمى عابر، والثاني طويل يُسمى دائم. لذا، اذن حل معادلة الحركة هو مجموع حدين.



نظام دائم نظام عابر

الشكل 2-6: تسجيل حركة متذبذب مضعف قسري

الأول هو الحل الخاص، $x_p(t)$ الذي له نفس شكل عبارة الطرف الثاني:

$$x_p(t) = A\ \cos(\Omega t + \varphi) \tag{2-69}$$

و الثاني هو حل للمعادلة المتجانسة المرفقة، $x_h(t)$ المدروسة سابقا، في(1.3.2.2). اذن:

$$x(t) = \begin{cases} A\ \cos(\Omega t + \varphi) + A_1\ e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2\ e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}, & \lambda > \omega_0 \\ A\ \cos(\Omega t + \varphi) + (A_1 + A_2\ t)e^{-\lambda t}, & \lambda = \omega_0 \\ A\ \cos(\Omega t + \varphi) + A_1 e^{-\left(\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t} + A_2 e^{-\left(\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t}, & \lambda < \omega_0 \end{cases} \tag{2-70}$$

لاحظ أن الحدود الأولى التي تتوافق مع حلول المعادلة المتجانسة (حد ثاني معدوم) تتناقص بشكل أسيا مع مرور الوقت. هذه الحلول تؤول بسرعة نحو الصفر، تمثل الأنظمة العابرة. من أجل زمن طويل كفاية، يمكن تقريب الحل الى الحل الخاص. نقول أن نظام الجملة المدروسة دائم:

$$x(t) = A\ \cos(\Omega t + \varphi) \tag{2-71}$$

يمكن حساب A و φ باستعمال التمثيل المركب للحل الأخير.

$$\bar{x}(t) = A\ e^{j(\Omega t + \varphi)} \tag{2-72}$$

(2-73) $$\bar{F}(t) = f_0 e^{j\Omega t}$$

(2-74) $$\dot{\bar{x}}(t) = jA\Omega\, e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

(2-75) $$\ddot{\bar{x}}(t) = -A\Omega^2\, e^{j(\Omega t+\varphi)}$$

(2-76) $$-A\Omega^2\, e^{j(\Omega t+\varphi)} + \frac{\alpha}{m}\, jA\Omega\, e^{j(\Omega t+\varphi)} + \frac{k}{m}\, A\, e^{j(\Omega t+\varphi)} = \frac{f_0 e^{j\Omega t}}{m}$$

(2-77) $$(-\Omega^2 + \frac{\alpha}{m}\, j\Omega + \frac{k}{m})\, A\, e^{j(\Omega t+\varphi)} = \frac{f_0 e^{j\Omega t}}{m}$$

(2-78) $$(-\Omega^2 + 2\lambda\, j\Omega + \omega_0^2)\, A\, e^{j(\Omega t+\varphi)} = Be^{j\Omega t} \quad ;\ B = \frac{f_0}{m}$$

(2-79) $$((-\Omega^2 + \omega_0^2) + 2\lambda\,\Omega\, j)\, A = Be^{-j\varphi} \quad ;\ B = \frac{f_0}{m}$$

اذن سعة الحركة:

(2-79) $$A = \frac{f_0}{m\sqrt{(-\Omega^2+\omega_0^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$$

فرق الطور بين φ يُعطى بواسطة:

(2-80) $$tg(\varphi) = \frac{-2\lambda\,\Omega}{-\Omega^2+\omega_0^2}$$

2.3.3.2 *الرنين:*

التردد الزاوي للإثارة Ω الذي تصل عنده السعة A إلى أقصى حد لها يُسمى تردد الرنين (للسعة) Ω_R تكون A في أقصاها عندما تكون $\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0$.

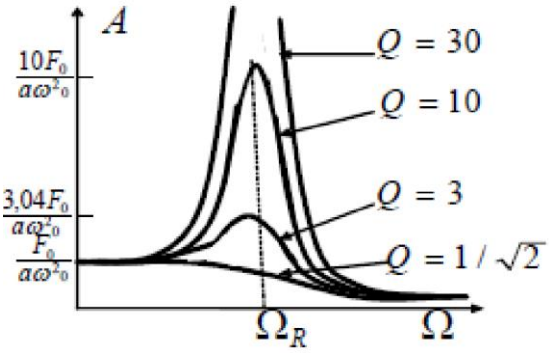
(2-81) $$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\Omega}_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

(2-82) $$A_{max} = \frac{f_0}{m\sqrt{4\lambda^2\omega_0^2-4\lambda^4}}$$

علما أن عامل الجودة هو $\phi = \frac{\omega_0}{2\lambda}$:

(2-81) $$\Omega_R = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2\phi^2}}$$

شرط الرنين $\phi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، معامل الجودة يجب أن يكون أكبر من $\frac{1}{\sqrt{2}}$، معناه معامل الاخماد صغير



الشكل 2-7: تطور السعة بدلالة التردد الزاوي

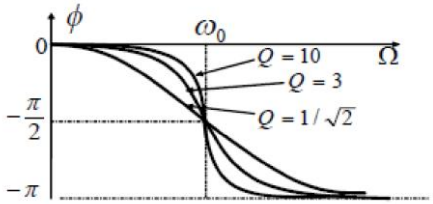
2. 3.3.3 رنين الطور

لما $\Omega_R = \omega_0$

$\lim_{\Omega \to 0} tg(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0,$ بنفس الطور $q(t)$ و $F(t)$

$\lim_{\Omega \to \Omega_R} tg(\varphi) = -\infty \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2},$ متعامدين بطورين $q(t)$ و $F(t)$

$\lim_{\Omega \to \infty} tg(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = -\pi,$ بطورين متعاكسين $q(t)$ و $F(t)$



الشكل 2-8: تطور الطور بدلالة التردد الزاوي

4.3.3.2 تعريف عرض الشريط الترددي:

عرض الشريط الترددي (BW) النافذ ،لنظام ما ، هو مجال الترددات التي يمكن للنظام نقلها أو معالجتها دون تشويه كبير . يُقاس عرض الشريط الترددي بوحدات الهيرتز (Hz) أو بالثواني.(s) . عرض الشريط يُعرَّف على أنه مجموعة الترددات الزاوية التي تكون عندها السعة:

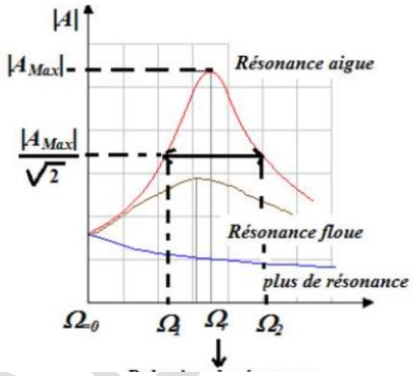
$$A > \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$$

نُعَرّف عرض الشريط الترددي ($\Delta\omega$) بأنه الفرق بين الترددين الأقصى والأدنى للنظام، أي:

$$\Delta\,\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$$

حيث: Ω_2 هو التردد الأقصى للنظام (بوحدة راديان في الثانية) و Ω_1 هو التردد الأدنى للنظام (بوحدة راديان في الثانية)، التي تحقق العلاقة:

$$A(\Omega_2) = A(\Omega_1) = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$$



تردد زاوي للرنين

الشكل 2-9: تطور السعة بدلالة التردد الزاوي

5.3.3.2. تماثل كهروميكانيكي: مقارنة بين الدوائر الكهربائية والنظم الميكانيكية

يمكننا إجراء تماثل بين النظام الميكانيكي (الانسحاب والدوران) والنظام الكهربائيRLC ، كما هو موضح في الجدول التالي:

الدوائر الكهربائية: تماثل القوة-الجهد	الجمل الميكانكية	
	الانسحاب	الدوران
الشحنة q	الانتقال x	الزاوية θ
التيار $\dot{q}$	السرعة $\dot{x}$	السرعة الزاوية $\dot{\theta}$
المحاثة L	الكتلة m	عزم العطالة J
$1/C$	ثابت الصلابة k	ثابت الالتواء k_t

معامل الاحتكاك		*المقاومة*
β	α	R
الطاقة الحركية		
$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$	$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	$T = \frac{1}{2}Li^2$
الطاقة الكامنة		
$U = \frac{1}{2}c\theta^2$	$U = \frac{1}{2}kx^2$	$U = \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$
دالة التبدد		
$D = \frac{1}{2}\beta\dot{\theta}^2$	$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$	$D = \frac{1}{2}Ri^2$
لاغرجيان: $L = T - U$		
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t)$		
القوة المعممة		
العزم المطبق M(t)	القوة المطبقة F(t)	الجهد المطبق E(t)

وريدة خلفاوي

الفصل الثالث

أنظمة خطية متعددة درجات الحرية

1.3. أنظمة خطية متعددة درجات الحرية

لوصف حركة الأنظمة المعقدة التي تمتلك عدة أجزاء متحركة، نحتاج إلى مجموعة من المعادلات الرياضية .يمكننا الحصول على هذه المعادلات باستخدام ميكانيكا لاغرانج التي تمثل أداة قوية في الفيزياء و تستخدم لوصف حركة الأنظمة . بدلاً من التركيز على القوى المؤثرة على الأجسام، تركز ميكانيكا لاغرانج على الطاقة. **اللاغرانج** هي دالة تمثل الفرق بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنظام .وباستخدام معادلات **أويلر-لاغرانج**، يمكننا اشتقاق معادلات الحركة التي تصف كيف يتغير النظام بمرور الوقت. استخدام لاغرانج يوفر وصفًا شاملاً لحركة النظام، حتى في الحالات المعقدة .كما أنه يسمح لنا بحل مسائل الحركة بطريقة منظمة وفعالة. و باختصار، استخدام ميكانيكا لاغرانج يمكننامن تحليل سلوك الأنظمة المعقدة بدقة، وتحديد العوامل التي تؤثر على حركتها.

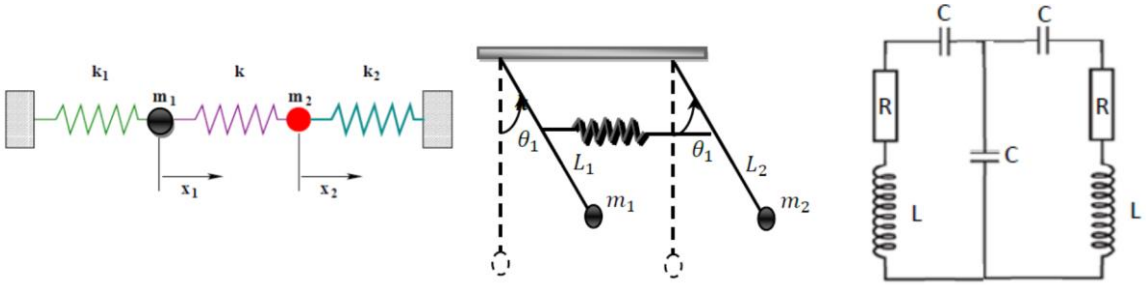
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + F_1(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + F_2(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} + F_n(t) \end{cases} \quad (3\text{-}1)$$

2.3 أنواع الاقتران

يمكن تصنيف أنواع الاقتران في الأنظمة الميكانيكية والكهربائية إلى الأنواع التالية:

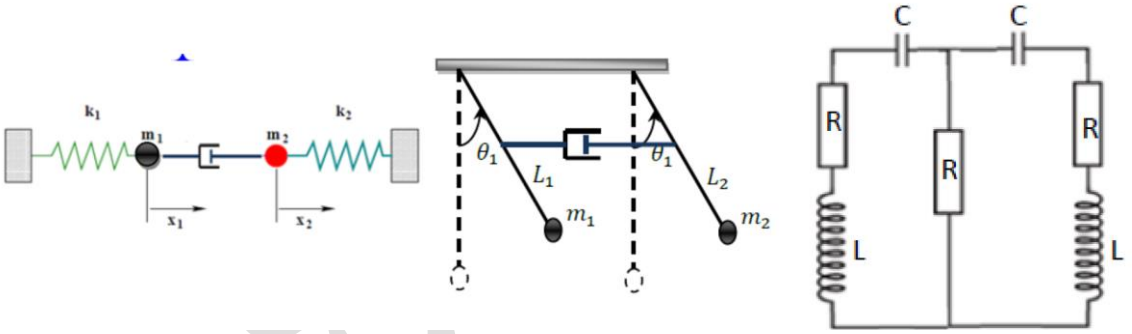
- **الاقتران المرن:**
  - **في الأنظمة الميكانيكية :**يحدث الاقتران المرن عندما تتصل أجسام ببعضها البعض عبر عناصر مرنة مثل الزنبركات .هذا النوع من الاقتران يخزن الطاقة الكامنة ويساهم في حدوث تذبذبات.

- **في الأنظمة الكهربائية :**يعادل الاقتران المرن وجود سعة في الدائرة الكهربائية .السعة تخزن الطاقة الكهربائية في مجال كهربائي.



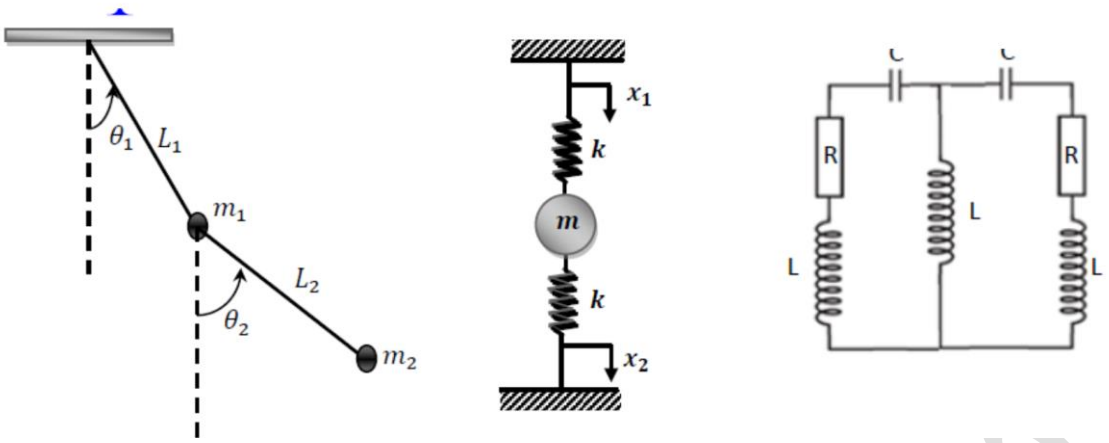
الشكل 3-1: اقتران الأنظمة المرنة وما يعادلها كهربائياً

- **الاقتران التخميدي:**
  - **في الأنظمة الميكانيكية :**يحدث الاقتران التخميدي عندما تتولد قوة مقاومة للحركة تتناسب مع السرعة .هذه القوة تعمل على تبديد الطاقة الميكانيكية.
  - **في الأنظمة الكهربائية :**يعادل الاقتران التخميدي وجود مقاومة في الدائرة الكهربائية . المقاومة تسبب تبديدًا للطاقة الكهربائية على شكل حرارة.



الشكل 3-2: اقتران الأنظمة اللزجة وما يعادلها كهربائياً.

- **الاقتران القصور الذاتي:**
  - **في الأنظمة الميكانيكية :**يرتبط الاقتران القصور الذاتي بكتلة الأجسام .الأجسام ذات الكتلة الكبيرة تميل إلى مقاومة التغيرات في سرعتها.
  - **في الأنظمة الكهربائية :**يعادل الاقتران القصور الذاتي وجود حث ذاتي في الدائرة الكهربائية .الحث الذاتي يخزن الطاقة المغناطيسية في مجال مغناطيسي.



الشكل 3-3: اقتران الأنظمة القصورية وما يعادلها كهربائياً

2-3 أنظمة خطية ذات درجتي من الحرية ـ حالة حرة –

عندما نتحدث عن **أنظمة خطية ذات درجتي من الحرية**، فإننا نشير إلى أنظمة فيزيائية تتطلب تحديد قيمتين مستقلتين (إحداثيتين) لوصف حالتها بشكل كامل في أي لحظة زمنية .هذه الأنظمة تتبع قوانين الحركة الخطية، مما يعني أن القوى المؤثرة تتناسب طرديًا مع الإزاحات.

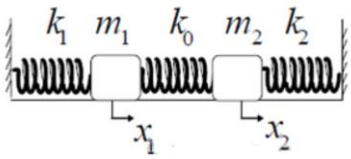
الحالة الحرة تعني أن النظام ليس تحت تأثير أي قوى خارجية غير محافظة (مثل الاحتكاك أو القوى الدافعة).

نظام ذو **درجتين من الحرية** يحتوي على إحداثياتين عامين، معادلتين تفاضليتين، و ترددين زاويين ذاتيين(ω_1 ، ω_2).

1.2.3 معادلة الحركة

مثال

النظام المقدم في **الشكل 3-4** يمثل نموذجًا كلاسيكيًا لنظام ميكانيكي ذي درجتين من الحرية .يتكون من:



الشكل 3-4: حركة تذبذبية لنظام مقترن بدرجتي حرية .

- **كتلتين :** m_1 و m_2
- **ثلاثة نوابض:** k_1, k_0 ، و k_2
- **إحداثيتان:** x_1 و x_2 تمثلان إزاحة كل كتلة عن موضع اتزانها.

النابض الأوسط (k_0) هو ما يربط بين الكتلتين، وهو المسؤول عن الاقتران بينهما.

لصياغة معادلات الحركة لهذا النظام، سنتبع الخطوات التالية:

- **حساب الطاقة الحركية (T)**

بما أن الحركة مقتصرة على الاتجاه الأفقي، فإن الطاقة الحركية للنظام تساوي مجموع الطاقة الحركية للكتلتين:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \qquad (3\text{-}2)$$

- **حساب الطاقة الكامنة (U)**

الطاقة الكامنة المخزنة في النوابض تساوي:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \qquad (3\text{-}3)$$

- **صياغة الدالة اللاغرانجية(L) :**

$$L = T - U \qquad (3\text{-}4)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 \qquad (3\text{-}5)$$

- **معادلات لاغرانج:**

بتطبيق معادلات أويلر-لاغرانج على الدالة اللاغرانج، نحصل على نظام من معادلتين تفاضليتين من الدرجة الثانية المقترنتين:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 - k_0x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_0)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}5)$$

لحل جملة المعادلتين التفاضليتين، نستعمل التمثيل المركب للحلين، من الشكل:

$$\bar{X}_1(t) = A_1 e^{j\omega t}, \quad \bar{X}_2(t) = A_2 e^{j\omega t} \tag{3-6}$$

نقوم بالاشتقاق، و نعوض في جملة المعادلتين، فنحصل على:

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \left(\frac{k_1+k_0}{m_1}\right)\right) A_1 - \frac{k_0}{m_1} A_2 = 0 \\ -\frac{k_0}{m_2} A_1 + \left(-\omega^2 + \left(\frac{k_2+k_0}{m_2}\right)\right) A_2 = 0 \end{cases} \tag{3-7}$$

تقبل هذه المعادلات حلولًا إذا كان المحدد يساوي صفرًا.

$$\begin{vmatrix} \left(-\omega^2 + \left(\frac{k_1+k_0}{m_1}\right)\right) & -\frac{k_0}{m_1} \\ -\frac{k_0}{m_2} & \left(-\omega^2 + \left(\frac{k_2+k_0}{m_2}\right)\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{3-8}$$

هذه المعادلة لها حلين حقيقيين ω_1 و ω_2 موجبين.

2.2.3. أنماط التذبذبات

تعريف نمط التذبذب:

نمط التذبذب هو الحالة التي تقوم فيها العناصر الديناميكية للنظام بإجراء تذبذب متناسق بنفس التردد الذي يتوافق مع أحد ترددات الذاتية.

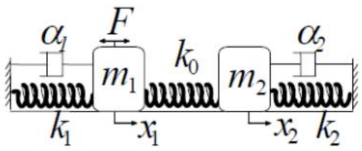
الحلان الحقيقيان والموجبان ω_1 و ω_2 لهذه المعادلة يُطلق عليهما الترددات الذاتية. الأصغر يُسمى الأساسي، والأكبر يُسمى التوافقي.

النمط الذاتي الأول ω_1 ، تكون القيمة $\frac{A_1(1)}{A_2(1)} > 0$ ، الجسمان يهتزان بنفس الطور. اذن الحلان من الشكل:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1(1)\cos(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) = A_2(1)\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \tag{3-9}$$

النمط الذاتي الثاني ω_2 ، تكون القيمة $\frac{A_1(2)}{A_2(2)} < 0$ ، الجسمان متعاكسين في الطور .

3.3 نظام متخامد قسري ذو درجتي حرية



الشكل 3-5: حركة تذبذبية لنظام مخمَّد وقسري مقترن بدرجتي حرية.

مثال:

باستخدام معادلة لاغرانج، استنتج معادلات الحركة للنظام الموضح في الشكل 3-5 الذي يتكون من كتلتين m_1 وm_2 مرتبطتين بثلاثة نوابض ذات ثوابت صلابة k_1 و k_2 و k_0 وتنزلق على سطح أفقي. تتعرض الكتلتان لقوتين احتكاك تمثلان بوجود مخمدان ذات معاملات اخماد متساوية (α) وقوة خارجية مرتبطة بالزمن.

- **لاغراجيانذ**

$$L = T - U \qquad (3\text{-}10)$$

- **الطاقة الحركية و الطاقة الكامنة**

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \qquad (3\text{-}11)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \qquad (3\text{-}12)$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_0(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}k_2x_2^2 \qquad (3\text{-}13)$$

- **دالة التبديد و قوة الاثارة**

$$D = \frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\dot{x}_2^2 \quad \text{و} \quad F(t) = F_0\cos(\Omega t) \qquad (3\text{-}14)$$

- **معادلات لاغرانج**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + F_1(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 + \alpha\dot{x}_1 - k_0x_2 = F_0cos(\Omega t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_0)x_2 + \alpha\dot{x}_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases} \quad (3\text{-}15)$$

4.3 التذبذبات القسرية لنظام غير متخامد ذو درجتي حرية

نعتبر نظامنا الميكانيكي المتماثل الموصوف في الشكل 5-3 $(k1 = k2 = k)$ و $(m1 = m2 = m)$ حيث نطبق قوة خارجية جيبية على النظام الفرعي الأول الذي يعبر كما يلي:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_0)x_1 - k_0x_2 = F_0cos(\Omega t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_0)x_2 - k_0x_1 = 0$$

لأن: $D = 0$ و $F \neq 0$

في النظام الدائم، الحل من الشكل:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1\cos(\omega t + \varphi_1) \equiv A_1e^{j\omega t} \\ x_2(t) = a_2\cos(\omega t + \varphi_2) \equiv A_2\,e^{j\omega t} \end{cases}$$

لدينا: $F(t) = F_0cos(\Omega t)$، بالاشتقاق و التعويض، نتحصل على جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 + \left(\frac{k_1+k_0}{m_1}\right)\right)A_1 - \frac{k_0}{m_1}A_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ -\frac{k_0}{m_2}A_1 + \left(-\omega^2 + \left(\frac{k_2+k_0}{m_2}\right)\right)A_2 = 0 \end{cases} \quad (3\text{-}16)$$

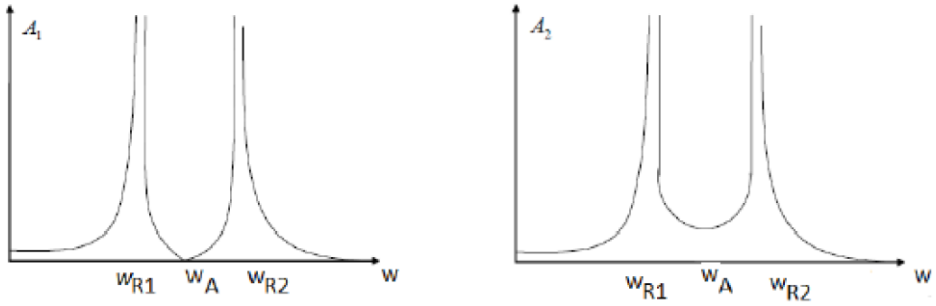
في حالة: $m_1 = m_2 = m$ و $k_0 = k_1 = k_2 = k$، ونفرض: $\frac{k}{m} = {\omega_0}^2$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + 2{\omega_0}^2)A_1 - {\omega_0}^2A_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ -{\omega_0}^2A_1 + (-\omega^2 + 2{\omega_0}^2)A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{F_0}{m}\frac{|2{\omega_0}^2 - \omega^2|}{\left|(2{\omega_0}^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4\right|} \\ A_2 = \frac{F_0}{m}\frac{{\omega_0}^2}{\left|(2{\omega_0}^2 - \omega^2)^2 - \omega_0^4\right|} \end{cases} \quad (3\text{-}17)$$

تكون $A_1 = A_2 = \infty$ ، لما $\omega = \omega_0 = \omega_{R1}$ ، يسمى التردد الزاوي الأول للرنين،

أو $\omega = \sqrt{3}\omega_0 = \omega_{R2}$، التردد الزاوي الثاني للرنين.

$A_1 = 0$ لما $\omega = \sqrt{2}\omega_0 = \omega_A$ ، التردد الزاوي المضاد للرنين.



الشكل 3-6: تطور السعة بدلالة التردد.

5.3. تعميم على الأنظمة ذات n درجات حرية

الطاقة الحركية المعممة

نظام ذو n درجات حرية يمتلك n من المتغيرات: x_1 ، x_2 ، x_3 ... x_n

الطاقة الحركية المعممة

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \cdots \ldots \ldots + \frac{1}{2}m_n\dot{x}_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i^2 \qquad (3\text{-}18)$$

$$T = \frac{1}{2}\langle\dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \text{ ، حيث } \mathcal{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & m_n \end{pmatrix} \text{ ،و } |\dot{x}\rangle = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}19)$$

$$\langle x| = (\dot{x}_1 \ldots \dot{x}_n)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \cdots \ldots \ldots + \frac{1}{2}k_nx_n^2 = \sum_{i=1}^{n} k_ix_i^2 \qquad (3\text{-}20)$$

$$U = \frac{1}{2}\langle x|\mathcal{U}|x\rangle \text{ ، حيث } \mathcal{U} = \begin{pmatrix} k_1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & k_n \end{pmatrix} \text{ ،و } |\dot{x}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}21)$$

$$\langle x| = (x_1 \ldots x_n)$$

اذن، لاغراجيان، دالة لاغرانج، تكتب على الشكل:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle - \frac{1}{2}\langle x|\mathcal{U}|x\rangle \quad (3\text{-}22)$$

معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (3\text{-}23)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\langle x|\mathcal{U}|x\rangle \end{cases} \quad (3\text{-}24)$$

و لدينا: $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\langle \dot{x}|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle = 2\langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle$ و $\frac{\partial}{\partial x_i}\langle x|\mathcal{U}|x\rangle = 2\langle I_i|\mathcal{U}|x\rangle$ مع I_i شعاع الوحدة

$$\langle I_1| = (1,0,0,\dots\dots,0);\ \langle I_2| = (0,1,0,\dots\dots,0);\ \langle I_3| = (0,0,1,\dots\dots,0);\ \dots$$

و منه: $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle$ و $\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\langle I_i|\mathcal{U}|x\rangle$ ،بالتعويض في معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}(\langle I_i|\mathcal{T}|\dot{x}\rangle) + \langle I_i|\mathcal{U}|x\rangle = 0 \quad (3\text{-}25)$$

$$(\langle I_i|\mathcal{T}|\ddot{x}\rangle) + \langle I_i|\mathcal{U}|x\rangle = 0 \quad (3\text{-}26)$$

$$\mathcal{T}|\ddot{x}\rangle + \mathcal{U}|x\rangle = 0 \quad (3\text{-}27)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|x\rangle + \mathcal{T}^{-1}\mathcal{U}\Big|x\rangle = 0 \quad (3\text{-}28)$$

$\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{U}$ المؤثر المرتبط بلاغراجيان الجملة المدروسة، $\mathcal{T}^{-1}$ مقلوب المصفوفة $\mathcal{T}$

حل المعادلة $\frac{d^2}{dt^2}|x\rangle + \mathcal{L}|x\rangle = 0$، يمكن أن يكون من الشكل: $Ce^{j\omega t}$

$$-\omega^2|x\rangle + \mathcal{L}|x\rangle = 0 \Longrightarrow (\mathcal{L} - \omega^2)|x\rangle = 0 \quad (3\text{-}29)$$

لحل هذه المعادلة، يجب حل معادلة القيم الذاتية:

$$Det(\mathcal{L} - \omega^2 I) = 0 \quad (3\text{-}30)$$

نحل هذه المعادلة فنجد مجموعة الحلول ω_i، ومن أجل كل قيمة ذاتية، نحل المعادلة الذاتية لهذه القيمة:

$$(\mathcal{L} - {\omega_i}^2)|V_i\rangle = 0 \qquad (3\text{-}31)$$

اذن الحلول هي:

$$|x\rangle = \sum_i A_i |V_i\rangle e^{j(\omega_i t + \varphi_i)} \qquad (3\text{-}32)$$

وريدة خلفاوي

الفصل الرابع

الموجات الميكانكية ـعموميات ـ

1.4 تصنيف الموجات

الموجة هي ظاهرة اهتزازية تنتشر. يمكن تصنيفها إلى عائلتين: الموجات الميكانيكية و الموجات الكهرومغناطيسية .هذه الموجات لها طريقتان رئيسيتان للانتشار.

أ- الموجات الميكانيكية (المرنة)

- الموجة الصوتية (الصوت)
- الموجة الزلزالية
- الموجة على سطح سائل
- الموجة في حبل

ب- الموجات الكهرومغناطيسية

- الموجة الضوئية (الضوء)
- موجة الراديو

أنواع انتشار الموجات في الأنظمة الميكانيكية:

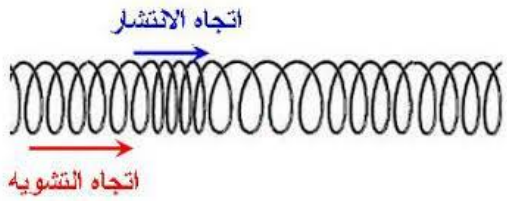
أ- **الوضع الطولي (الموجات الطولية):**

- **تعريف:**

تُعرف الموجات الطولية (الموجاتL) بأنها نوع من الموجات التي تتميز بأن اهتزاز الجسيمات في الوسط يتوازي مع اتجاه انتشار الموجة.

- **خصائص الموجات الطولية:**
- **اهتزاز الجسيمات :**تهتز الجسيمات في اتجاه انتشار الموجة.

- **انتشار التشوهات :**تنتشر التشوهات (التمدد والانكماش) في اتجاه انتشار الموجة.
- **أمثلة :**انتشار موجات الصوت في الهواء، انتشار الموجات الزلزالية في الأرض، انتشار موجات التمدد في قضيب معدني.



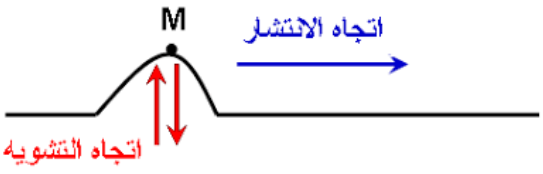
الشكل 4-1: انتشار التشوه في النابض

الموضع العرضي (الموجات العرضية):

- **تعريف:**

تُعرف الموجات العرضية (الموجات T) بأنها نوع من الموجات التي تتميز بأن اهتزاز الجسيمات في الوسط يكون عموديًا على اتجاه انتشار الموجة.

- **خصائص الموجات العرضية:**
- **اهتزاز الجسيمات :**تهتز الجسيمات عموديًا على اتجاه انتشار الموجة.
- **انتشار التشوهات :**تنتشر التشوهات (التمدد والانكماش) عموديًا على اتجاه انتشار الموجة.
- **أمثلة :**انتشار موجات الجاذبية على سطح الماء، انتشار موجات القص في قضيب معدني، انتشار موجات الكهرومغناطيسية (مثل الضوء).



الشكل 4-2: الانتشار في حبل

2.4 الحل العام لمعادلة الموجة التقدمية العامة:

الظواهر الاهتزازية:

في الفصول السابقة، ركزنا على الظواهر أو الكميات الفيزيائية التي تعتمد على متغير واحد فقط، وهو الوقت (t). سنقوم الآن بدراسة سلسلة من الظواهر التي توصف بدالة تعتمد على كل من الوقت (t) ومتغير مكاني، x على سبيل المثال. يتم التحكم في هذه الظواهر بمعادلة مشتقة جزئية تسمى معادلة دالمبيرت أو معادلة الموجة أو معادلة الانتشار أحادية البعد من الشكل:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

حيث:

- u: دالة تمثل كمية فيزيائية (مثل الضغط أو الإزاحة)
- V : سرعة انتشار الموجة
- t : الزمن
- x : المتغير المكاني

معنى معادلة الموجة:

تُشير معادلة الموجة إلى أن التغير الثاني في دالة u $(\partial^2 u)$ بالنسبة للزمن (∂t^2) يتناسب عكسًا مع التغير الثاني في دالة u $(\partial^2 u)$ بالنسبة للمتغير المكاني (∂x^2) . بعبارة أخرى، تُحدد سرعة انتشار الموجة (V) العلاقة بين التغيرات في دالة u عبر الزمن والمكان.

1.2.4 الحل العام لمعادلة الموجة:

يُمكن حل معادلة الموجة من خلال فصل المتغيرات، مما يُنتج الحل العام التالي:

$$u(x,t) = F(x - Vt) + G(x + Vt) \qquad (4\text{-}2)$$

حيث:

- F و G دالتان تعسفيتان

تفسير الحل العام:

يُشير الحل العام إلى أن دالة الموجة $u(x, t)$ يمكن تمثيلها كمجموع دالتين تعسفيتين، Fو G ، تمثل دالة Fالموجات التي تنتشر في اتجاه موجب$(V > 0)$ x ، بينما تمثل دالة G الموجات التي تنتشر في اتجاه سالب$(V < 0)$ x .

أمثلة على حلول معادلة الموجة:

- **موجة جيبية:** $u(x, t) = A\ sin(\omega x - kt)$
- **موجة مربعة:** $u(x, t) = H(x - ct)$
- **موجة مثلثية :** $u(x, t) = (x - ct) / L$

تطبيقات معادلة الموجة:

تُستخدم معادلة الموجة لوصف انتشار العديد من الظواهر الفيزيائية، بما في ذلك:

- **موجات الصوت :**انتشار موجات الضغط في الهواء أو السوائل.
- **موجات الضوء :**انتشار موجات الكهرومغناطيسية.
- **موجات الزلازل :**انتشار الاهتزازات في الأرض.
- **موجات الماء :**انتشار الاضطرابات على سطح الماء.

3.4 سرعة الطور وسرعة المجموعة:

سرعة الطور: تُعرف سرعة الطور (V_p) بأنها سرعة انتشار قمة أو حوض الموجة. قد تعتمد سرعة الطور على التردد إذا كان الوسط منتشرًا. ليس لسرعة الطور معنى فيزيائي دقيق، لأن الموجة المستوية هي مجرد تمثيل رياضي مفيد لحزمة الموجة التي تمثل إشارة فيزيائية حقيقية.

سرعة المجموعة: تُعرف سرعة المجموعة (V_g) بأنها سرعة انتشار حزمة الموجة بأكملها. تمثل سرعة المجموعة حركة حزمة الموجات بأكملها، أو ما يمكن اعتباره نوعًا من المتوسط لسرعة مجموعة الموجات المستوية التي تحدد الإشارة.

الفرق بين سرعة الطور وسرعة المجموعة:

خاصية	سرعة المجموعة(V_g)	سرعة الطور(V_p)
تعريف	سرعة انتشار حزمة الموجة بأكملها	سرعة انتشار قمة أو حوض الموجة
الاعتماد على التردد	لا تعتمد على التردد	قد تعتمد على التردد (وسط منتشر)
التفسير الفيزيائي	حقيقي (حركة حزمة الموجة)	محدود (تمثيل رياضي)

يمكن اشتقاق سرعة الطور (Vp) لموجة بشكل بسيط باستخدام الهندسة.

الخطوات:

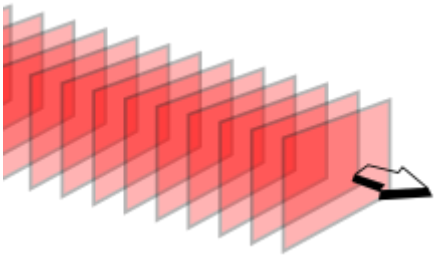
1. **تحديد الفترة :(τ)** تمثل الفترة زمنًا محددًا تتكرر فيه الموجة.
2. **تحديد الطول الموجي :(λ)** يمثل الطول الموجي المسافة بين قمتين متتاليتين للموجة.
3. **تحليل حركة قمة الموجة :**خلال فترة واحدة(τ) ، تنتقل قمة الموجة مسافة تساوي طولها الموجي (λ) .
4. **حساب سرعة الطور:**

$$V_p = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda\nu \qquad (4\text{-}3)$$

يمكن القول إن $V_p = \lambda\nu$ تعني أن القمة تتقدم بمسافة λ بمقدار ν مرة لكل وحدة زمنية. هذه العلاقة لـ V_pصالحة لأي موجة، لأنها تعتمد على الهندسة البحتة. وفقاً للآلية الفيزيائية المسؤولة عن توليد هذه الموجة، يمكن أن تكون سرعةV_p دالة لطول الموجة/التردد أو قد تكون ثابتة ومستقلة عن طول الموجة/التردد. في الحالة الأخيرة، تُسمى الموجة توافقية. سنعود إلى هذا الموضوع لاحقاً.

4.4 جبهة الموجة

يمكننا أيضًا تسميتها سطح الموجة، أو نُعَرِّفها كسطح ذو طور متساوٍ لموجة، أي أن هذه النقاط استغرقت نفس الوقت في الانتقال من المصدر.

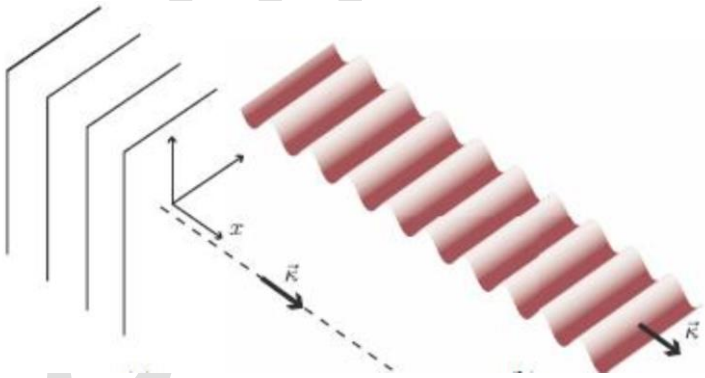


الشكل 4-3: سطح الموجة (جبهة الموجة)

1.4.4 أمثلة على الموجات المستوية والكروية:

الموجة المستوية: تتميز الموجة المستوية بوجود جبهة موجية مسطحة تتقدم في اتجاه معين.حيث يتناسب الطول الموجي (λ) مع المسافة بين مستويين متتاليين من جبهة الموجة، و يكون اتجاه انتشار الموجة عموديًا على اتجاه جبهة الموجة $\vec{k} = \vec{e}_x$. تكتب الموجة المستوية أحادية اللون على الشكل التالي:

$$A(x,t) = A_0\cos(kx - vt) \qquad (4\text{-}4)$$



(ب) (أ)

الشكل 4-4: جبهات الموجة المستوية (أ) و سعة موجة تنتشر على طول محورx (ب)

الموجة الكروية: تتميز الموجة الكروية بوجود جبهة موجية كروية تتوسع من مصدر نقطي. يتناسب الطول الموجي (λ) مع المسافة بين نقطتين متتاليتين على جبهة الموجة و يكون اتجاه انتشار الموجة شعاعيًا من المصدر. وبالتالي، اتجاه انتشار الموجة:

$$\vec{k} = \left(k_r, k_\theta = 0, k_\varphi = 0\right)), \vec{k} = k_r \vec{e}_r \quad (4\text{-}5)$$

والمؤثر التفاضلي لابلاس في الإحداثيات الكروية هو كما يلي:

$$\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) \quad (4\text{-}6)$$

و معادلة الموجة الكروية هي:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (4\text{-}7)$$

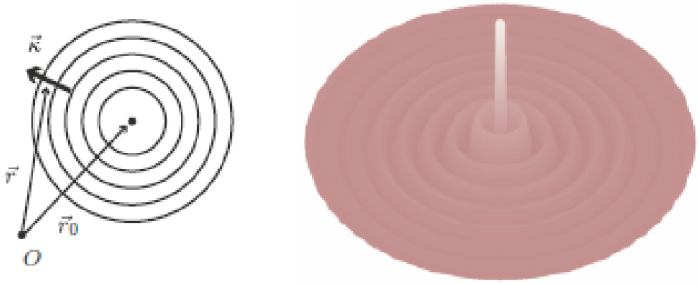
نستنتج من المعادلة الموجية أحادية البعد مع حلها rA على شكل مجموع $F(r - ct) + G(r + ct)$ أن دالة الموجة الكروية تأخذ الشكل:

$$A(r,t) = \frac{1}{r}F(r - ct) + \frac{1}{r}G(r + ct) \quad (4\text{-}8)$$

في حالة الموجة الكروية أحادية اللون، تصبح دالة الموجة الكروية:

$$A(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(k\|\vec{r} - \vec{r_0}\| \pm \omega t) \quad (4\text{-}9)$$

حيث: مع الأخذ بعين الاعتبار $\vec{r_0}(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ كموقع المصدر أو نقطة الامتصاص، و $\vec{r}(r, \theta, \varphi)$ كإحداثيات كروية للنقطة المعتبرة.

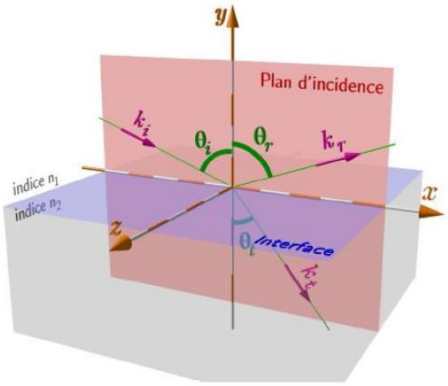


(أ) (ب)

الشكل 4-5: جبهات الموجة الكروية (أ) وسعة الموجة الكروية (ب)

5.4 انعكاس وانتقال الموجات

سطح مستوٍ (Dioptre) يفصل بين نصفي فضاء حيث يُشار إليهما بـ: $y > 0$ و $y < 0$ يتميز كل نصف فضاء بمعامل انكسار مختلف n_1 وn_2



الشكل 4-5: الانعكاس والانتقال.

نفترض وجود موجة مستوية تقدمية ذات ناقل موجة $\overrightarrow{k_i}$ تتجه نحو سطح مستوٍ (ديوبتر). يُشكل ناقل الموجة $\overrightarrow{k_i}$ زاوية θ_i (زاوية السقوط) مع محور Oy الذي يُعد عموديًا على السطح. عند واجهة بين وسطين مختلفين في خصائصهما (n_1 و n_2)، تحدث ظاهرتان:

- **الانكسار:** بعد عبور السطح، تنحرف الموجة عن مسارها الأصلي.، و تُصبح الموجة المنكسرة موجة مستوية تقدمية جديدة ذات ناقل موجة $\overrightarrow{k_t}$ يُشكل زاوية θ_t مع محور Oy .

- **الانعكاس:** تنعكس موجة مستوية عن السطح وترجع إلى الوسط 1، و تُصبح الموجة المنعكسة موجة مستوية تقدمية جديدة ذات ناقل موجة $\overrightarrow{k_r}$ يُشكل زاوية θ_r مع محور Oy .

تبقى ترددات (pulsations) هذه الموجات الثلاث متساوية.

مثال:

المجال الكهرومغناطيسي في نصفي الفضاء

المجال الكهربائي:

في نصف الفضاء $y > 0$، يُمثل المجال الكهربائي $\vec{E}(x, y > 0, z, t)$ تراكب مجالات الموجة الساقطة والموجة المنعكسة:

$$\vec{E}(x, y > 0, z, t) = \overrightarrow{E_{0i}} e^{i(\overrightarrow{k_i}\vec{r} - \omega t)} + \overrightarrow{E_{0r}} e^{i(\overrightarrow{k_r}\vec{r} - \omega t)} \quad (4\text{-}10)$$

أما في نصف الفضاء الثاني، $y < 0$، تتواجد موجة واحدة فقط. يُمثل المجال الكهربائي مجال الموجة المنقولة $\vec{E}(x, y < 0, z, t)$:

$$\vec{E}(x, y < 0, z, t) = \overrightarrow{E_{0t}} e^{i(\overrightarrow{k_t}\vec{r} - \omega t)} \quad (4\text{-}11)$$

المجال المغناطيسي:

بما أن كل موجة من الموجات الثلاث (الساقطة، المنعكسة، المنقولة) هي موجة مستوية، يمكن التعبير عن المجال المغناطيسي ببساطة كدالة لناقلات الموجة والمجال الكهربائي، باستخدام α لتمثيل مؤشر كل موجة $(\alpha = i, r,$ أو $t)$:

$$\overrightarrow{B_\alpha} = \overrightarrow{B_{0\alpha}} e^{i(\overrightarrow{k_\alpha}\vec{r} - \omega t)} = \frac{n}{c} \frac{\overrightarrow{k_\alpha}}{\|\overrightarrow{k_\alpha}\|} \wedge \overrightarrow{E_{0\alpha}} e^{i(\overrightarrow{k_\alpha}\vec{r} - \omega t)} \quad (4\text{-}12)$$

الفصل الخامس

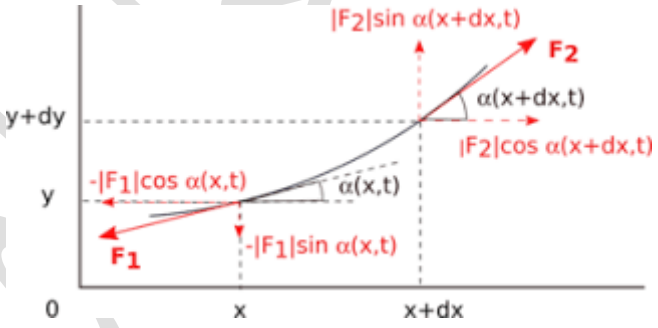
موجات عرضية على حبل

1.5. مقدمة

نفترض وجود حبل مشدود ومستقيم على طول الإحداثي x بطول لا نهائي. سنقوم بدراسة انتشار اهتزاز خفيف على طول الحبل. نفترض أن هذا الاهتزاز يحدث على طول المحور (OY) دعونا ندرس معادلة حركة هذا الحبل. سنرمز إلى الشد الذي يتعرض له الحبل بحرف T في نقطة ذات إحداثي x ، نفترض قطعة قصيرة جدًا من هذا الحبل بطول Δx يتم إعطاء كتلة Δm للقطعة بواسطة:

$$\Delta m = \mu \, \Delta x \tag{5-1}$$

حيث μ هي الكتلة الخطية للحبل، أي الكتلة لكل وحدة طول، والتي تُعبّر عنها بوحدة (kg/m).



الشكل 5-1: موجة على حبل مهتز.

في حالة خارج التوازن، لم يعد الجزء مستقيماً، بل يظهر انحناءً .نحن نعتبر حركات اهتزاز الوتر ذات السعة الصغيرة.

في حالة خارج التوازن، لم يعد المقطع مستقيماً، بل يظهر انحناءً. نعتبر حركات اهتزاز الوتر ذات السعة الصغيرة:

$$\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{e}_y \tag{5-2}$$

ولينا من أجل θ صغيرة:

$$\sin(\theta)\,|_x = tg(\theta)|_x = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \tag{5-3}$$

$$\sin(\theta)\,|_{x+\Delta x} = tg(\theta)|_{x+\Delta x} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \tag{5-4}$$

بإهمال تمدد المقطع أيضاً من خلال التقريب.

$$T = \text{ثابت} \tag{5-5}$$

القوة المطبقة على المقطع في اتجاه y هي محصلة القوة المطبقة عند النقطة x ، حيث تكون القوة المطبقة نحو الأسفل مساوية في المقدار إلى:

$$F(x,t) = T\sin(\theta)\,|_x \approx Ttg(\theta)|_x = T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x \tag{5-6}$$

أما بالنسبة للقوة المطبقة عند $x+\Delta x$ التي اتجاهها نحو الأسفل:

$$F(x+\Delta x,t) = T\sin(\theta)\,|_{x+\Delta x} \approx Ttg(\theta)|_{x+\Delta x} = T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \tag{5-7}$$

مركبة مجموع القوتين في اتجاه y هي:

$$R = T\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right] \tag{5-8}$$

و بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$R = \Delta m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5-9}$$

من المعادلتين (5-8) و (5-9) ، ونقسمهما على Δx فنستنتج:

$$T\frac{\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right]}{\Delta x} = \frac{\Delta m}{\Delta x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{5-10}$$

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5\text{-}11)$$

لنضع $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$، بعده بعد سرعة، ونعوضه في المعادلة (5-11) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (5\text{-}12)$$

يُطلق على هذه المعادلة اسم معادلة الموجة للحبل. هذه المعادلة هي معادلة دالمبيرت ذات البعد الواحد.

3.5. الممانعة المميزة

إذا افترضنا أن موجتنا هي موجة توافقية تقدمية، يمكننا تعريفها بـ

$$u(x,t) = u_0\cos(\omega t - kx) \quad (5\text{-}13)$$

وتمثيلها الركب:

$$\bar{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (5\text{-}14)$$

نُعرف القوة في نقطة ما على أنها الإسقاط على (Oy) للقوة التي تُمارسها في تلك النقطة (الجزء الأيسر من الحبل على الجزء الأيمن) :

$$F = -T\frac{\partial u}{\partial x} \quad (5\text{-}15)$$

$$F = jkTu_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (5\text{-}16)$$

سرعة جسيمات الحبل هي:

$$\dot{u}(x,t) = \frac{du}{dt} = j\omega u_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (5\text{-}17)$$

نلاحظ أن القوة F و السرعة $\dot{u}(x,t)$ بنفس الطور.

نسمي الممانعة في نقطة ما نسبة سعة القوة المركبة إلى سعة سرعة الجسيم المركبة.

$$Z = \frac{F_y}{\dot{u}_y} \quad (5\text{-}18)$$

في حالة الموجة التقدمية، نحصل على:

$$Z(x) = \mu V = \sqrt{\mu T} \quad (5\text{-}19)$$

الكمية $\sqrt{\mu T}$ تُعرف بالممانعة المميزة للحبل.

4.5. الموجات المستقرة

تمثل الموجة المستقرة، في التمثيل الحقيقي، على شكل جداء دالة مكانية ودالة زمنية:

$$y(x,t) = F(x) \times G(t) \quad (5\text{-}20)$$

1.4.5.الحل المستقر لمعادلة دالمبرت

ليكن الحل لمعادلة دالمبرت:

$$\forall x,t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = G(t)F''(x) - \frac{1}{V^2}F(x)G''(t) = 0 \quad (5\text{-}21)$$

اذن الحل المستقر للمعادلة هو:

$$y(x,t) = (C\sin(kx) + D\cos(kx))\cos(\omega t + \varphi) \quad (5\text{-}22)$$

حيث العدد الموجي $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$، سعة الموجة هي $\sqrt{C^2 + D^2}$، و λ هو طول الموجة.

يمكننا اعتبار الموجة المستقرة كتراكب لموجتين تقدميتين لهما نفس السعة ولكن في اتجاهين متعاكسين.ذ

لذلك، يتم ايجاد الثوابت C و D بواسطة الشروط الابتدائية والشروط الحدية.

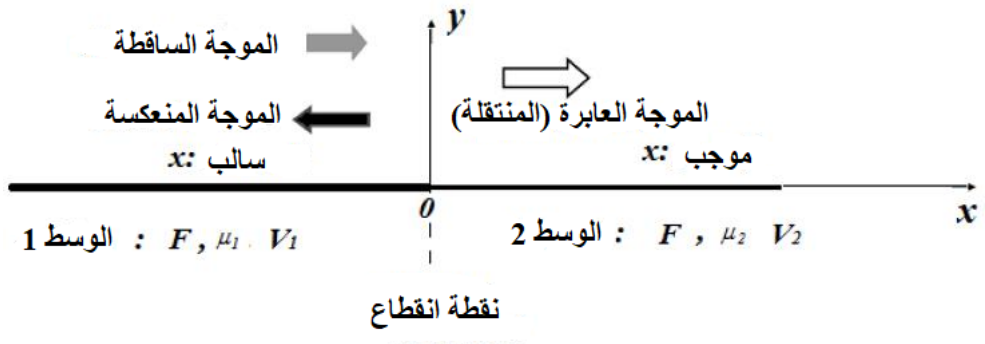
مع:

$$f.\lambda = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad (5\text{-}23)$$

حيث T_0 توتر الحبل، و μ الكثافة الخطية.

3.4.5 الانعكاس والانتقال

عند مرور الموجة الميكانيكية الساقطة من الوسط 1 إلى الوسط 2، توجد موجة منقولة نحو الوسط 2 وموجة منعكسة نحو الوسط 1.



الشكل 5-2: أوضاع انتقال وانعكاس الموجة الميكانيكية.

عند نقطة الانقطاع، نطبق شروط الاستمرارية مثل:

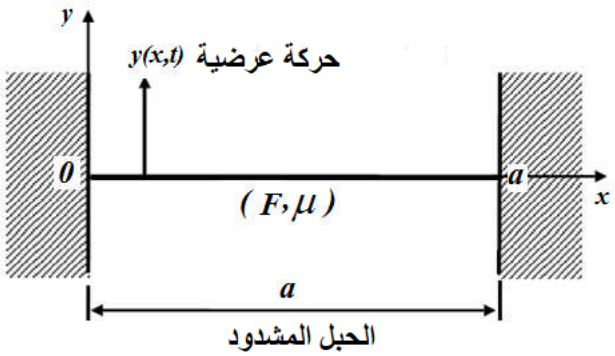
$$y_i(x,0) = y_t(x,0) = y_t(x,0)$$

$$\left[\frac{\partial y_i(x,0)}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial y_t(x,0)}{\partial x}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial y_r(x,0)}{\partial x}\right]_{x=0} \quad (5\text{-}24)$$

4.4.5. أنواع الشروط الحدية للحبل المهتز

1.4.4.5. طرفان ثابتان

عندما يكون الحبل مشدودًا عند الطرفين، ستحدث تداخل بين الموجات الساقطة والموجات المنعكسة، مما يؤدي إلى ظهور الموجات المستقرة. في هذه الحالة، يتم تطبيق الشروط الحدودية كما يلي:



الشكل 5-3: نموذج الحبل المشدود.

بتطبيق الشروط الحدية على الحل $y(x,t)$ ، نحصل على الأنماط الذاتية:

$$y(0,t) = D\ cos(\omega t) = 0 \Longrightarrow D = 0$$

$$y(L,t) = C\ \sin(kL)\ cos(\omega t) = 0 \Longrightarrow \sin(kL) = 0$$

$$kL = p\pi \longrightarrow p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots$$

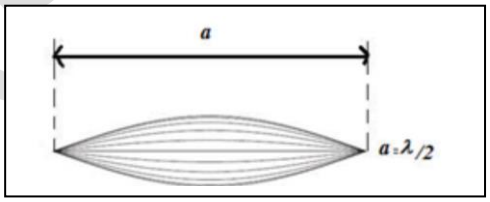
$$k_p = \frac{p\pi}{L}$$

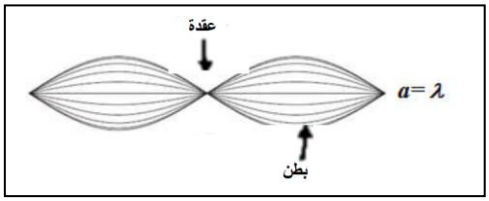
$$\omega_p = v k_p = p\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (5\text{-}25)$$

ω_p هي النبضة التي تتذبذب بها جميع أجزاء الحبل في نمط p معين (k_p) .

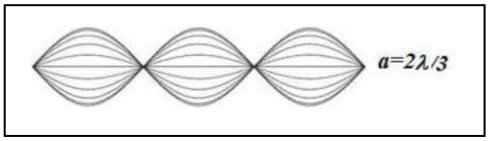
من أجل $p=0$، الحبل في توازن.

النمط 1، $k_1 = \frac{\pi}{L}$:





النمط 2، $k_2 = \frac{\pi}{2L}$:



النمط 3، $k_3 = \frac{\pi}{3L}$

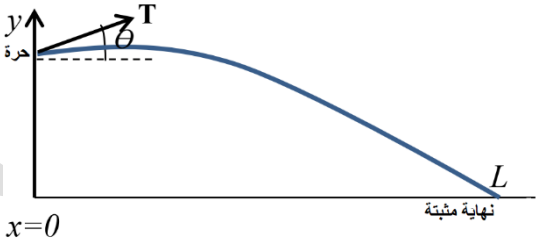
وهكذا دواليك...

$$y_p(x,t) = C_p \sin(k_p x)\cos(\omega_p t + \varphi_p) \quad (5\text{-}26)$$

$$y(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} y_p(x,t) \quad (5\text{-}27)$$

2.4.4.5. طرف ثابت والآخر حر

افترض أنه عند $x=x_0$ ، يوجد محرك شاقولي يطبق قوة على نهاية الحبل.



في لحظة معينة، القوة الرأسية التي يطبقها الحبل عبر نهايته على المحرك هي:

$$F(\text{المحرك على الحبل}) = T\sin(\theta) = T\cos(\theta)\,tg(\theta) \approx T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}$$

الآن، إذا لم يكن هناك أي محرك عند $x=x_0$، وكانت النهاية اليسرى حرة، فإن قوة رد الفعل الحبل على المحرك F (المركبة الرأسية) يجب أن تكون صفراً:

$$T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

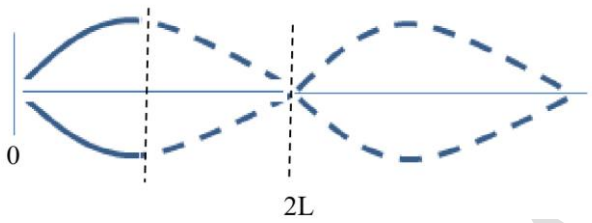
$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

هذا هو الشرط لنهاية حرة، نطبق هذا الشرط على معادلة الموجة (5-22) ، فنحصل على $D = 0$.

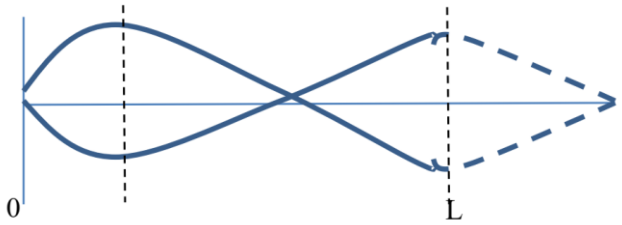
$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \Longrightarrow \cos(kL) = 0 \Longrightarrow kL = p\frac{\pi}{2} \qquad \text{p=1,3,5,7,.....}$$

(5-28) $$y_p(x,t) = C_p \sin(k_p x)\cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

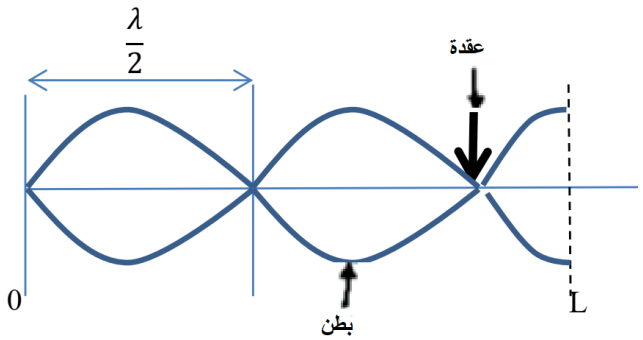
$$k_p = p\frac{\pi}{2L}, \qquad \omega_p = vk_p = v\frac{p\pi}{2L}$$



$$y_1(x,t) = C_1 sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right) cos(\omega_1 t + \varphi_1):\ p=1$$



$$y_2(x,t) = C_2 sin\left(\frac{3\pi}{2L}x\right) cos(\omega_2 t + \varphi_2):\ p=3$$



$$y_3(x,t) = C_2 sin\left(\frac{5\pi}{2L}x\right) cos(\omega_3 t + \varphi_3):\ p=5$$

$$y(x,t) = \sum_p C_p sin\left(\frac{p\pi}{2L}x\right) cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

2.4.4.5. طرفان حران للحبل

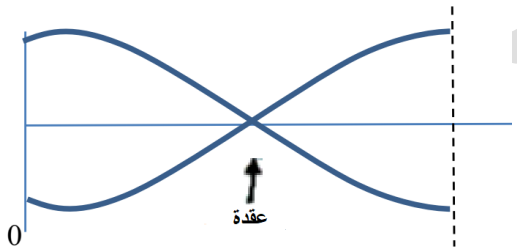
نطبق الشرط في النهايتين معا: $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0;L} = 0$ في

$$y(x,t) = \big(C\ sin(kx) + D\ cos(kx)\big)cos(\omega t + \varphi)$$

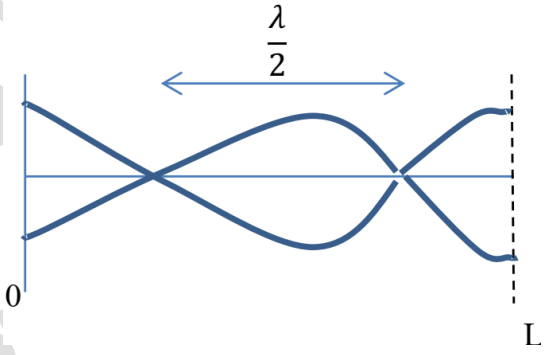
$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Longrightarrow Ccos(\omega t + \varphi) = 0 \Longrightarrow C = 0$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L} = Dk\sin(kL) = 0 \Longrightarrow kL = p\pi, \qquad p = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots\dots$$

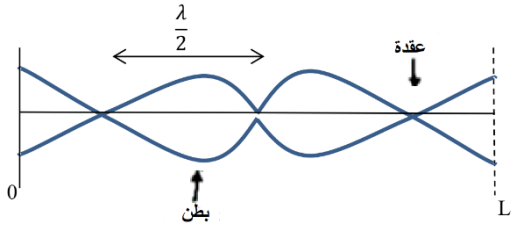
$$k_p = \frac{p\pi}{L}, \qquad p = 1,2, \dots\dots$$



$$y_1(x,t) = D_1 cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) cos(\omega_1 t + \varphi_1):\ p=1$$



$$y_2(x,t) = D_2 cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) cos(\omega_2 t + \varphi_2):\ p=2$$



$$y_3(x,t) = D_3 cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) cos(\omega_3 t + \varphi_3):\ p=3$$

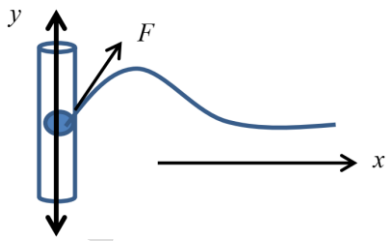
(5-29) $$y(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} D_p \cos\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

2.4.4.5. *أنواع أخرى من الشروط الحدية*

توجد أنواع أخرى من الشروط الحدية التي يمكن مواجهتها في الأجهزة: الحبل مربوط بكتلة تتحرك شاقوليا في فتحة.

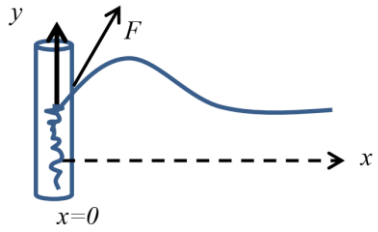
المعادلة ، عند x=0 ، يكتب:

(5-30) $$m\ddot{y}(0,t) = T\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$



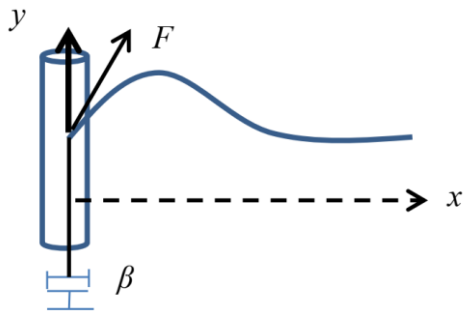
الحبل مربوط بنابض ذو صلابة k . في هذه الحالة:

$$k\, y(0,t) = T\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$



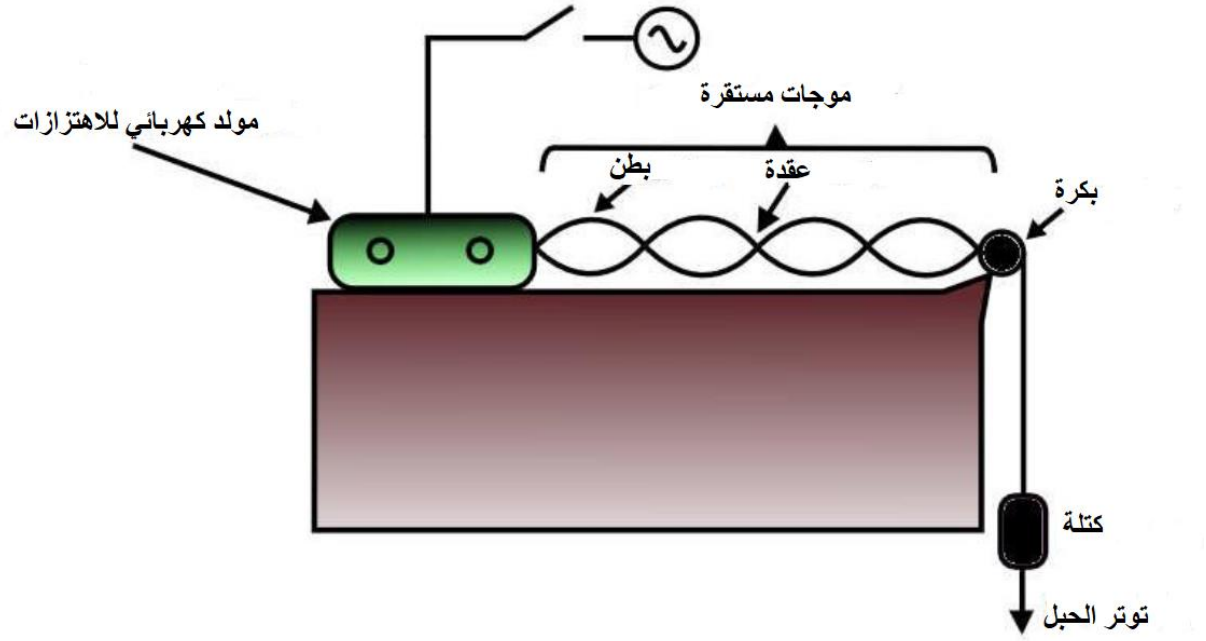
الحبل مربوط بمثبط ذو معامل β ، في هذه الحالة:

$$\beta\, \dot{y}(0,t) = T\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$$



5.5الجزء التجريبي

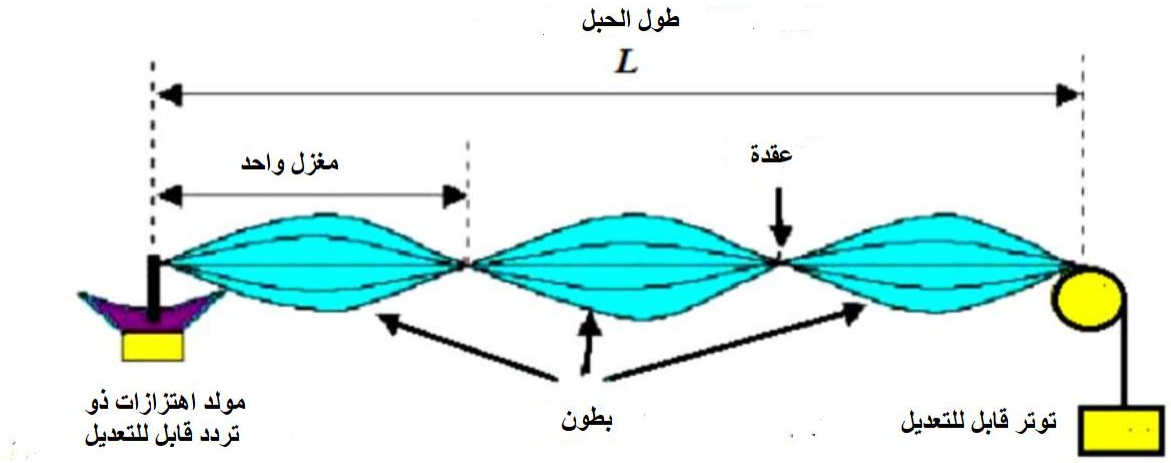
أول جهاز تجريبي يوضح تجربة إنتاج الموجات الثابتة هو جهاز "ميلدي" الموضح في الشكل 5-3.



الشكل 5-4: الجهاز التجريبي "ميلدي"

1.5.5 التجربة العامة

توضع حبل بطول L أفقيًا على قضيبين من الحديد، ونقوم بربط وزن ذو كتلة M عند أحد طرفي الحبل. يقوم مولد اهتزازات بجعل الحبل يهتز بشدة متغيرة. نلاحظ أن هناك حركة خاصة للحبل تظهر فيها بطون وعقد في نقاط مختلفة.



الشكل 5-4: تجربة الحبل المشدود.

2.5.5. الطاقة المخزنة في حبل مهتز

يجب ملاحظة أنه بالنسبة للموجات الثابتة، لا يوجد ظاهرة انتشار، لا للمادة ولا للطاقة :ومع ذلك، فإن هذه الحسابات ستكون مفيدة جدًا لنا عند دراسة ظواهر الانتشار.

3.5.5. الطاقة الحركية

الطاقة الحركية لعنصر صغير جدًا من الحبل تُعطى بواسطة:

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu.dl.\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \quad \text{مع} \quad : \quad dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \qquad (5\text{-}31)$$

للإنحرافات البسيطة للحبل عن وضع التوازن الخاص به، يمكن تجاهل هذا المقدار $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$، أمام 1، اذن: $dl \approx dx$، ومنه:

$$dE_c = \frac{1}{2}\mu.dx.\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad (5\text{-}32)$$

نعرّف كثافة الطاقة الحركية:

$$e_c = \frac{1}{2}\mu.\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad (5\text{-}33)$$

4.5.5. الطاقة الكامنة

الطاقة الكامنة تساوي العمل اللازم لتمديد جزء صغير من الحبل طوله dx ليصبح طوله dl.

$$dE_p = \frac{1}{2} T\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (5\text{-}34)$$

وكثافة الطاقة الكامنة:

$$e_p = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (5\text{-}35)$$

لذا فإن كثافة الطاقة الكلية:

$$e = e_c + e_p = \frac{1}{2}\mu . \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (5\text{-}36)$$

و الطاقة الكلية للحبل:

$$E_T = \int_0^L e(x,t)dx \quad (5\text{-}37)$$

فريحة خلفاوي

الفصل السادس

الأمواج الطولية في الموائع

1.6. مقدمة

"علم الصوتيات هو العلم الذي يدرس طبيعة وانتشار الموجات الصوتية، وهي اضطرابات ميكانيكية تنتقل عبر الأوساط المادية. لا يقتصر مجال دراسة الصوتيات على الهواء فقط، بل يشمل جميع الأوساط المرنة، سواء كانت صلبة أو سائلة أو غازية. ورغم تعقيدات وصف حركة الموائع، إلا أن معادلة الموجة الصوتية تبقى بسيطة نسبيًا عندما تكون تغييرات الضغط صغيرة نسبيًا. تعتمد سرعة انتشار الموجات الصوتية (سرعة الصوت) بشكل أساسي على خواص الوسط الذي تنتشر فيه، مثل الكثافة ومعامل الحجمي (أو معامل الانضغاط).

تقليدياً، تصنف المادة إلى ثلاث حالات أساسية: الصلبة، السائلة، والغازية. تُصنف الحالتان السائلة والغازية معًا تحت مسمى "الموائع."

على عكس المواد الصلبة التي تتميز بشكل وحجم ثابتين، لا تستطيع الموائع الاحتفاظ بشكل محدد. فالسوائل تأخذ شكل الوعاء الذي توضع فيه، بينما تميل الغازات إلى أن تشغل كامل الحجم المتاح لها. هذا السلوك يعود إلى طبيعة الجسيمات المكونة للموائع (ذرات أو جزيئات) والتي تكون حرة الحركة وتتحرك بشكل عشوائي وغير منتظم، مما يجعلها قادرة على التكيف مع شكل الحاوية.

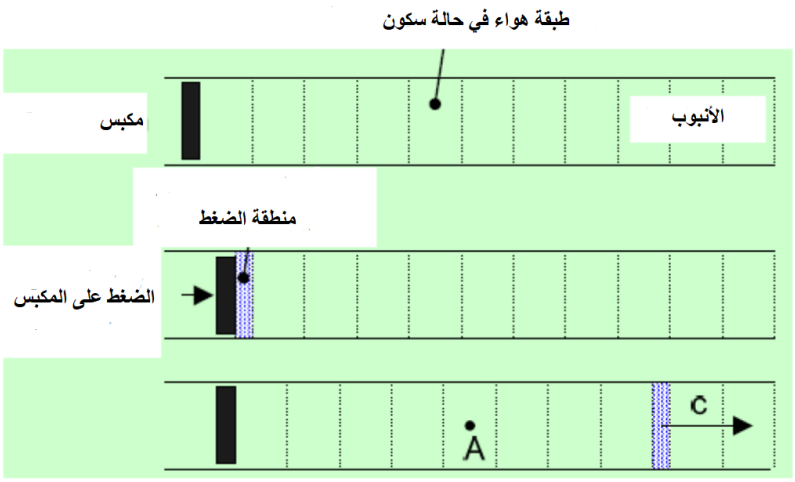
2.6 الأمواج المستوية في أنبوب أسطواني

1.2.6 معادلة الأمواج في الغاز

تُعرف الموجات الصوتية في الموائع على أنها اضطرابات ميكانيكية تنتشر في الأوساط المادية المرنة، سواء كانت غازات أو سوائل .بافتراض وسط مثالي (أي خالٍ من اللزوجة و التأثيرات الحرارية)، فإن الموجة الصوتية تنتقل على شكل تغييرات دورية في الضغط والكثافة .في الهواء، على سبيل المثال، ينتج الصوت عن اهتزازات مصدر صوتي تؤدي إلى تضاغطات وتخلخلات في جزيئات الهواء.

للدراسة الرياضية للموجة الصوتية المنتشرة في اتجاه المحور x ، نستخدم الرموز التالية:

- x: إحداثي التوازن لجسيم في الوسط.
- u_x : المركبة على المحور x لإزاحة الجسيم بالنسبة لموقع التوازن.
- ρ_0: الكتلة الحجمية للسوائل في حالة التوازن.
- P: الضغط اللحظي في نقطة معينة.
- P_0: الضغط في حالة التوازن.
- $p = P - P_0$: الضغط الزائد أو الضغط الصوتي.
- c: سرعة انتشار الموجة.



الشكل 6-1: انتشار موجة مرنة جيبية مستوية في الهواء.

في الغاز، يكون الضغط غالباً بمقدار الضغط الجوي، $P = 10^5$ Pa. ينتقل الاهتزاز الميكانيكي في الغاز على شكل تغييرات في الضغط المحلي $p(x,t)$ ، بحيث:

$$|p| \ll P$$

بما أن تغيرات الضغط الصوتي تحدث بسرعة كبيرة، فلا يكون هناك وقت كافٍ لتبادل الحرارة .لذلك، يمكن اعتبار التغيرات في الضغط متساوية الحرارة .وبالتالي، فإن العلاقة بين التغير في الحجم V والتغير في الضغط p تعطى بالعلاقة:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \qquad (6\text{-}1)$$

حيث $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ هو نسبة السعات الحرارية عند الضغط الثابت والحجم الثابت. نحصل على العلاقة التالية :

ثابت $= P.V^{\gamma}$.

من هذه العلاقة، يمكن الحصول على العلاقة بين التغير في الضغط والتغير في الكثافة.

ملاحظة :نعتبر أن الوسط الصوتي يتكون من عناصر حجمية صغيرة جداً، ولكن كبيرة بما يكفي لاحتواء عدد كبير من الجزيئات، بحيث يمكن اعتبار الخصائص الفيزيائية لهذا العنصر ثابتة .كما نفترض أن الوسط متجانس ومتماثل الخواص وغير مبدد للطاقة

2.2.6 الموجات المستوية في أنابيب اسطوانية

تعتبر دراسة انتشار الموجات الصوتية في الأنابيب ذات أهمية كبيرة في العديد من التطبيقات الهندسية، مثل تصميم أنظمة العادم في السيارات أو أنظمة التهوية.

1.2.2.6 معادلة الموجات في أنبوب اسطواني

عند انتشار موجة صوتية مستوية في أنبوب أسطواني، فإن طول الموجة λ يرتبط بقطر الأنبوب D وسرعة الصوت c بالعلاقة التالية:

$$\lambda = \frac{c}{f} \gg D \qquad (6\text{-}2)$$

1.2.2.6 معادلة الموجات في سائل

الكثير من مشاكل الضوضاء الصناعية مرتبطة بانتشار الموجات الصوتية في الأنابيب والقنوات. يتحدد هذا الانتشار بطول الموجة الصوتية λ على النحو التالي:

$$\lambda = \frac{c}{f} \gg D \qquad (6\text{-}2)$$

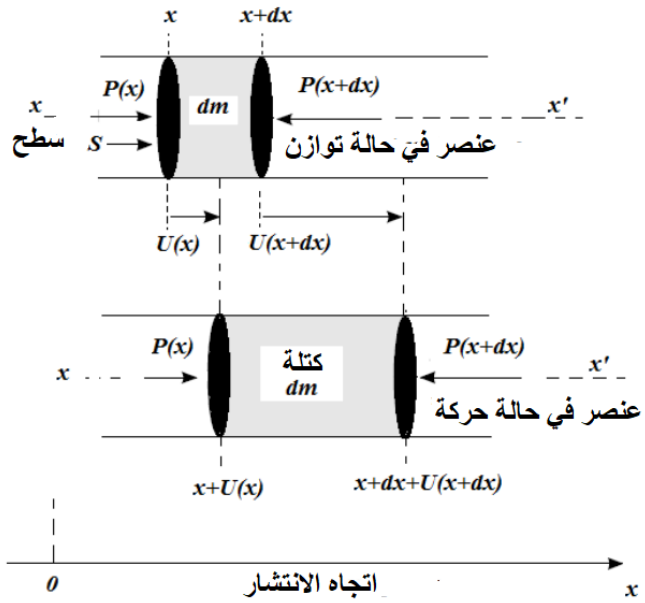
D: قطر القناة الصوتية

c: سرعة الصوت في الهواء والتي تساوي 344 m/s عند 20 °C

f: تردد الموجة

2.2.2.6 نموذج مبسط لانتشار الموجة الصوتية في سائل

لتبسيط التحليل، نفترض أن لدينا غشاء اهتزازي (مصدر صوتي) يولد موجة صوتية مستوية متقدمة في سائل متجانس وكثافته ρ وضغطه P_0 في حالة السكون. تنتشر هذه الموجة في الاتجاه الموجب للمحور x ، كما هو في **الشكل 6-2.**



الشكل 6-2: انتشار الموجة الصوتية في مائع.

نتيجة للاضطراب الناجم عن الموجة الصوتية، تتغير الضغوط والكثافة في نقاط مختلفة من السائل. لنعتبر طبقة من السائل بسمك dx تقع بين الإحداثيين x و .x+dx تؤثر على هذه الطبقة قوتان ناتجتان عن فرق الضغط بين السطحين الأمامي والخلفي للطبقة. هذا الفرق في الضغط يؤدي إلى تسارع الطبقة وحركتها.

ننظر إلى طبقة من السائل بسمك dx تقع عند الإحداثيات x و $x + dx$. تكون الضغوط $P(x)$ و $P(x + dx)$ المؤثرة على المستويين x و $x + dx$ على التوالي، والتي تولد حركة الطبقة كما هو موضح في الشكل6-2.

لتكن $U(x)$ و $U(x + dx)$ هي الإزاحات في اللحظة t للمستويات عند الإحداثيات x و $x + dx$ على التوالي.

بتطبيق قانون الديناميكا لنيوتن:

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x+dx) - F(x) \quad (6\text{-}3)$$

$F(x)$ و $F(x+dx)$ هما قوتا الفعل المطبقتان على المستويين عند الإحداثيات x و $x+dx$ على التوالي.

$$F(x+dx) - F(x) = -S\big(P(x+dx) - P(x)\big) \quad (6\text{-}4)$$

$$P(x+dx) - P(x) = \frac{\partial P}{\partial x}dx \quad (6\text{-}5)$$

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -S\frac{\partial P}{\partial x}dx \quad (6\text{-}6)$$

نُعرّف الضغط الزائد p لسائل قابل للانضغاط كما يلي:

$$p = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U}{\partial x} \quad (6\text{-}7)$$

حيث χ معامل الانضغاطية. عند إدخال قيمة الضغط الزائد في معادلة الحركة؛ نحصل على:

$$\rho S dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -S\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\chi}\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx \quad (6\text{-}8)$$

ومن ثم تكتب معادلة انتشار الموجات الصوتية في المائع على النحو التالي:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (6\text{-}9)$$

حيث: $V = \sqrt{\frac{1}{\rho\chi}}$ يُسمى سرعة الموجة الصوتية في المائع.

2.2.2.6 سرعة الصوت

بما أن ظاهرة الانتشار هي عملية متسايرة الحرارة، نُعرّف سرعة الصوت في سائل كما يلي:

$$V = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} \quad (6\text{-}10)$$

الهواء، في الشروط النظامية، $T = 20°C, P_0 = 10^5 N.m^{-2}$ ، $\gamma = 1.4$،
و $\rho_0 = 1.29\ kg.m^{-3}$، اذن: $V \approx 300\ m.s^{-1}$

✓ قيمة الضغط في حالة التوازن تعتمد بشكل كبير على درجة الحرارة. بالنسبة لمول واحد من الغاز المثالي، لدينا:

$$V = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (6\text{-}10)$$

حيث M الكتلة المولية للغاز.

✓ في الغاز المثالي، سرعة انتشار الصوت تتناسب مع الجذر التربيعي لدرجة الحرارة المقاسة بالكلفن(°K) .

3.2.2.6 المقاومة الصوتية والمقاومة المميزة

تكتب الموجة الصوتية الجيبية كما يلي:

$$p(x,t) = p_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] \quad (6\text{-}11)$$

نُعرّف قيمة (أو طول) شعاع الموجة k بـ:

$$k = \frac{\omega}{V} \quad (6\text{-}12)$$

$$p(x,t) = p_0 \cos(\omega t - kx) \quad (6\text{-}13)$$

في التمثيل المركب، تكتب الموجة المتقدمة الجيبية كما يلي:

$$p(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (6\text{-}14)$$

العلاقة التي تربط بين الضغط الصوتي والانضغاطية هي:

$$p(x,t) = -\kappa \frac{\partial U}{\partial x} \quad (6\text{-}15)$$

و منه، يمكن كتابة:

$$U(x,t) = -\frac{1}{\kappa}\int p(x,t)dx \quad (6\text{-}16)$$

$$U(x,t) = -\frac{1}{\kappa}\int p_0 e^{j(\omega t - kx)}dx \quad (6\text{-}17)$$

$$U(x,t) = \frac{p_0}{j\omega\rho_0 V} e^{j(\omega t - kx)} \quad (6\text{-}18)$$

التغير في هذه العبارة الأخيرة بالنسبة للزمن يسمح بكتابة السرعة.

$$\dot{U}(x,t) = \frac{dU}{dt} = \frac{p_0}{\rho_0 V} e^{j(\omega t - kx)} \quad (6\text{-}19)$$

نلاحظ أنه بالنسبة لموجة متقدمة، تكون سرعة الجسيمات في الطور نفسه مع الضغط الصوتي. يُطلق على المقاومة الصوتية عند نقطة ما نسبة السعة المركبة للضغط إلى السعة المركبة لسرعة الجسيمات:

$$Z = \frac{p}{\dot{U}} \quad (6\text{-}20)$$

الجداء $\rho_0 V$ يمثل المقاومة الصوتية المميزة للمائع.

نحصل على خاصية للموجة المستوية المتقدمة:

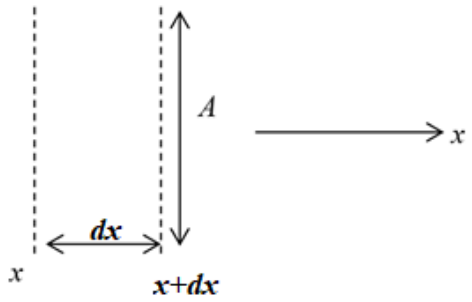
$$Z(x) = Z_c \,, \quad \forall x \quad (6\text{-}21)$$

4.2.2.6 الطاقة المنقولة لموجة

بالنسبة لموجة تتحرك في سائل، يمكن تقسيم الطاقة المنقولة إلى طاقة حركية وطاقة وضع. دعونا نركز أولاً على الطاقة الحركية.

- **الطاقة الحركية**

إزاحة موضع السائل بين المستويين x و $x+dx$ يُعطى بواسطة $U(x)$



الطاقة الحركية لهذا الموضع أثناء حركته تكون مساوية لـ:

$$dE_c = \frac{1}{2}(\rho_0 . A . \mathrm{d}x)\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right)^2 \quad (6\text{-}22)$$

في حالة أن Δx صغيرة جداً، يمكن تعريف الطاقة الحركية الحجمية أو الكثافة الحجمية للطاقة الحركية كالتالي:

$$e_c = \frac{dE_c}{dV} = \frac{1}{2}\rho_0 \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right)^2 \quad (6\text{-}23)$$

حيث: $dV = A.dx$.

- **الطاقة الكامنة**

يرافق إزاحة السائل تغيير طفيف في حجم الموضع المذكور أعلاه تحت تأثير الضغط الزائد. إنه يشبه ضغط زنبرك من خلال توفير عمل يتم تخزينه في هذا الموضع ثم يتم تحريره بمجرد أن يتوقف تأثير الضغط .و بالتالي، فإن الطاقة الكامنة تساوي العمل اللازم لتغيير حجم الموضع، وبالتالي:

$$dW = -PdV \quad (6\text{-}24)$$

لدينا: $dV = \frac{\partial V}{\partial P} dP$، اذن:

$$dW = -P\frac{\partial V}{\partial P} dP \quad (6\text{-}24)$$

مع العلم أن معامل الانضغاط : $B = -V\frac{\partial P}{\partial V}$ و $B = \frac{1}{\chi}$

نظرًا لأن حجم dV للموضع في السائل يساوي $A \cdot dx$ ، يمكننا إعادة كتابة عبارة العمل على الشكل التالي:

$$d^2W = A.dx.\frac{P}{B} dP \quad (6\text{-}25)$$

العمل المتراكم بواسطة السائل عندما ينتقل الضغط الزائد من 0 إلى ΔP انطلاقاً من ضغط التوازن يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$dW = A.dx.\frac{1}{B}\int_{P_0}^{P_0+\Delta P} P\, dP \quad (6\text{-}26)$$

$$dW = A.dx.\frac{1}{B}\left[\frac{P^2}{2}\right]_{P_0}^{P_0+\Delta P}$$

$$dW = A.dx.\frac{1}{2B}[(\Delta P)^2 + 2P_0\Delta P]$$

بالنسبة لدالة موجية لدينا:

$$\Delta P = \Delta P_{max}\cos(\omega t - kx)$$

القيم المتوسطة للموجة بالنسبة للزمن والفضاء معدومة:

$$\langle \Delta P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \Delta P_{max}\cos(\omega t - kx)\,dt$$

$$\langle \Delta P \rangle = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \Delta P_{max}\cos(\omega t - kx)\,dx$$

علما أن $\Delta P = -B\frac{\partial U}{\partial x}$، فعبارة العمل المنقول تصبح:

$$dW = \frac{B_s}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 A.dx \qquad (6\text{-}27)$$

وهذا يمثل الطاقة الكامنة المخزنة في الموضع الذي حجمه $dV=A\cdot dx$.

$$dE_p = \frac{B_s}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 A.dx \qquad (6\text{-}28)$$

الكثافة الحجمية للطاقة الكامنة في الموضع x هي:

$$e_p = \frac{dE_p}{dV} = \frac{B_s}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \qquad (6\text{-}29)$$

اذن، الكثافة الحجمية للطاقة الكلية هي:

$$e_t = e_c + e_p = \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{B_s}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \qquad (6\text{-}30)$$

الطاقة الصوتية الكلية لأنبوب بطول L يتم الحصول عليها عن طريق التكامل:

$$E_t = \int_0^L e_t\,A.dx_p \qquad (6\text{-}31)$$

$$E_t = \frac{1}{2}A\left[\rho_0\int_0^L\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + B_s\int_0^L\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx\right] \qquad (6\text{-}32)$$

في حالة موجة تقدمية جيبية أحادية التردد:

$$U(x,t) = U_{max}\cos(\omega t \pm kx) \quad (6\text{-}33)$$

بتعويض هذه العبارة في (6-32)، و اذا كان L مضاعف لـ λ ، فنحصل:

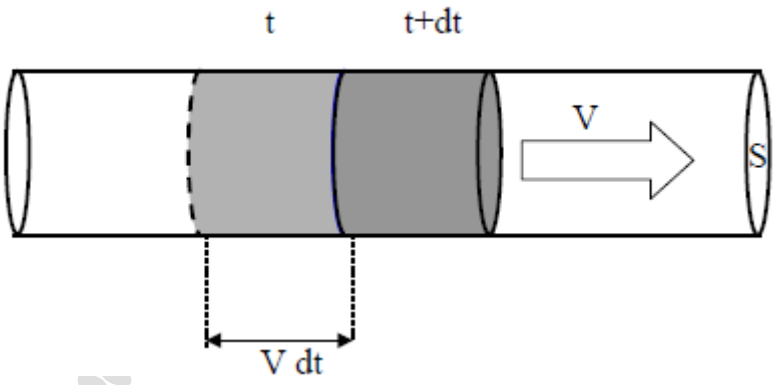
$$E_t = \frac{AL}{4}U_{max}^2[\rho_0\omega^2 + B_s k^2] \quad (6\text{-}34)$$

و بتعويض علاقة التشتت $k = \frac{\omega}{v_{sound}}$ ،و مع العلم أن $v_{sound}^2 = \frac{B_s}{\rho_0}$ نحصل على :

$$\frac{E_t}{V} = \frac{1}{4}\rho_0 U_{max}^2\omega^2 \quad (6\text{-}35)$$

5.2.2.6 *شدة الموجة الصوتية*

الشدة الصوتية هي الاستطاعة المنقولة بواسطة الموجات الصوتية، لكل وحدة سطح، مقاسة عموديًا على اتجاه هذا الانتقال. لحساب هذه الشدة، يجب حساب الطاقة عندما تعبر الموجة سطحًا S عموديًا على اتجاه الانتشار خلال فترة زمنية معينة.



الشكل 6-3: شدة الموجة الصوتية

تساوي هذه الطاقة dE الطاقة الموجودة في حجم $S{\cdot}V{\cdot}dt$ وهي تساوي:

$$dE = \varepsilon.S.Vdt \quad (6\text{-}36)$$

حيث الاستطاعة: $$p = \frac{dE}{dt} = \varepsilon . S . V \quad (6\text{-}37)$$

نستنتج عبارة شدة الموجة الصوتية:

$$I = \frac{p}{S} = \varepsilon . V \quad (6\text{-}38)$$

لدينا: $$I = \frac{p_0^2}{\rho_0 V} cos^2(\omega t - kx) \quad (6\text{-}39)$$

وقيمتها المتوسطة هي:

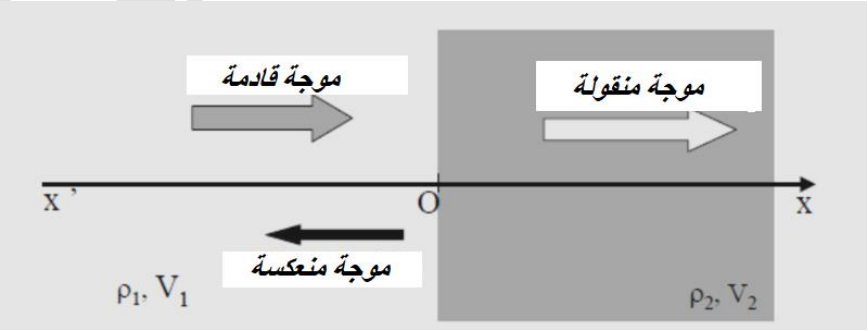
$$\langle I \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I(t)dt \quad (6\text{-}40)$$

$$\langle I \rangle = \frac{p_0^2}{2\rho_0 V} = \frac{p_0^2}{2Z_c} \quad (6\text{-}41)$$

6.2.2.6 معاملات الانعكاس والنقل للأمواج (شروط الحدود)

لنفترض وجود وسطين سائلين شبه لانهائيين مفصولين بسطح مستوٍ. دعونا نختار نظام إحداثيات متعامدة بحيث يتطابق المستوى yOz مع سطح الفاصل. عندما تصل موجة صوتية قادمة من $-\infty$ تنتشر في الوسط الأول في اتجاه محور x إلى سطح الفاصل، فإنها تنتج موجتين:

- موجة منعكسة تنتشر في الوسط الأول في اتجاه تناقص محور x.
- موجة منقولة تنتشر في الوسط الثاني في اتجاه تزايد محور x.



الشكل 6-4: الانعكاس عند واجهة مائع-مائع

الموجة الناتجة في الوسط الأول ($x \leq 0$) تتميز بـ:

$$p_1(x,t) = p_i(x,t) + p_r(x,t) \quad (6\text{-}42)$$

$$p_1(x,t) = p_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + p_r e^{j(\omega t - k_1 x)} \quad (6\text{-}43)$$

$$\dot{U}_1(x,t) = \frac{1}{Z_1}\left[p_i e^{j(\omega t - k_1 x)} - p_r e^{j(\omega t - k_1 x)}\right] \quad (6\text{-}44)$$

أما في الوسط الثاني:

$$p_2(x,t) = p_T(x,t) \quad (6\text{-}45)$$

$$p_2(x,t) = p_T e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad (6\text{-}46)$$

$$\dot{U}_2(x,t) = \frac{1}{Z_2} p_T e^{j(\omega t - k_2 x)} \quad (6\text{-}47)$$

نستنتج :

$$\begin{cases} 1 + \frac{p_r}{p_i} = \frac{p_t}{p_i} \\ 1 - \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{p_t}{p_i} \end{cases} \quad (6\text{-}48)$$

معامل النعكاس للضغط هو:

$$R_P = \frac{p_r}{p_i} \quad (6\text{-}49)$$

معامل النتقال للضغط هو:

$$T_P = \frac{p_T}{p_i} \quad (6\text{-}50)$$

ومنه، علاقتي الاستمرارية تكتب على الشكل:

$$\begin{cases} 1 + R_P = T_P \\ 1 - R_P = \frac{Z_1}{Z_2} T_P \end{cases} \quad (6\text{-}51)$$

نستنتج علاقتي معاملي الانكسار و الانتقال للضغط:

$$R_P = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$
$$T_P = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (6\text{-}52)$$

وريحة خلفاوي

مع الأخذ بعين الاعتبار العلاقات: $p_t = Z_2\dot{U}_t \; , p_r = -Z_1\dot{U}_r \; , p_i = Z_1\dot{U}_i$، يمكن حساب معاملات الانكسار والانتقال لسرعة و إزاحة الجسيمات :

$$R_{\dot{U}} = R_U = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_{\dot{U}} = T_U = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

يمكننا حساب معاملات الانتقال والانعكاس لشدة الصوت بناءً على العلاقات التالية: $I_i = p_i^2/2Z_i$، $I_r = p_r^2/2Z_i$ و $I_t = p_t^2/2Z_2$:

$$\alpha_R = \frac{I_r}{I_i} = \left[\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right]^2 \quad (6\text{-}53)$$

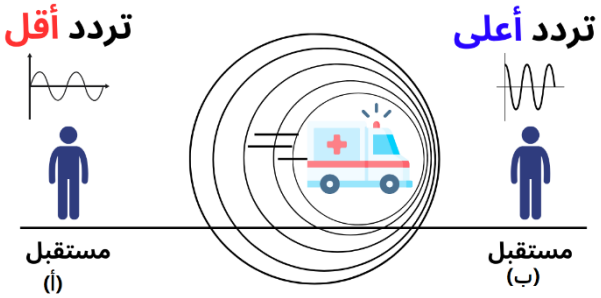
$$\alpha_T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1Z_2}{[Z_1 + Z_2]^2} \quad (6\text{-}54)$$

3.6 تأثير دوبلير Doppler:

تم اكتشاف تأثير دوبلر في عام 1842 بواسطة يوهان كريستيان دوبلر (1803-1853 / نمساوي). ثم تم إعادة اكتشافه بعد ست سنوات بواسطة هيبوليت فيزو (1819-1896 / فرنسي)، ولهذا السبب يُعرف هذا التأثير أيضًا باسم تأثير دوبلر-فيزو.

1.3.6 تعريف

طول موجة الموجات المنبعثة من مصدر متحرك يعتمد على المكان الذي تُلاحظ منه. يظهر تأثير دوبلر في حياتنا اليومية مثل الرادار وصفارة سيارة الإسعاف المتحركة... يظهر هذا التأثير مع الموجات الصوتية وكذلك الموجات الضوئية. نفترض أن هناك مصدرًا S يصدر موجة في الهواء بطول موجي λ_s وبسرعة v_s . في الوقت نفسه، يتحرك المصدر بسرعة v.



الشكل 6-5: المخطط المبسط لتأثير دوبلر

عندما يقترب المصدر من المراقب (ب) ، تكون الموجات المنبعثة من المصدر ذات طول موجي λ أقل من λ_s . وعلى العكس، يستقبل المراقب (أ) موجات يكون طولها λ أكبر من λ_s .

لدينا إذًا العلاقة بين تردد الانبعاث $f_s = \frac{v_s}{\lambda_s}$ والتردد $f = \frac{v_s}{\lambda}$ للموجة المستقبلة من قبل المراقبين.

- بالنسبة للملاحظ (أ)، لدينا: $f < f_s$

$$f = f_s(1 - \frac{v_s}{v}) \qquad (6\text{-}55)$$

- بالنسبة للملاحظ (ب)، لدينا: $f > f_s$

$$f = f_s(1 + \frac{v_s}{v}) \qquad (6\text{-}56)$$

لكي تكون هذه العلاقات متوافقة، يجب:

- ✓ يُفترض أن الهواء ثابت بالنسبة للأرض.
- ✓ سرعة المصدر (v) أقل بكثير من سرعة الموج(v_s) .

بالنسبة للمراقب (ب) ، سيكون الصوت الذي يسمعه أكثر حدة، على عكس المراقب (أ) الذي سيشعر بأن الصوت أكثر عمقًا.

الفصل السابع

الأمواج المرنة في المواد الصلبة

1.7 مقدمة

يُعرف انتشار الموجة في وسط مادي بأنه انتقال اضطراب دوري يحمل معه طاقة من نقطة إلى أخرى في ذلك الوسط، دون انتقال مادة. ينشأ هذا الاضطراب نتيجة لتأثير قوة خارجية (إثارة) على الوسط، وتنتشر الموجة بفعل التفاعلات بين جسيمات الوسط. تعتمد سرعة وانتشار الموجة على خصائص الوسط الفيزيائية، مثل الكثافة ومعامل المرونة

2.7 تعريف وخصائص المواد الصلبة المرنة

تُعتبر المواد الصلبة أوساطًا مرنة، حيث ترتبط جسيماتها ببعضها البعض بقوى قوية، مما يجعلها تحتفظ بشكلها وحجمها .وبسبب هذه الروابط القوية، فإن المواد الصلبة قادرة على نقل الموجات الميكانيكية، سواء كانت طولية أو عرضية .تنتشر هذه الموجات نتيجة لاهتزازات الجسيمات حول مواضع اتزانها، وتعتمد سرعتها على خصائص المادة مثل الكثافة ومعامل المرونة.

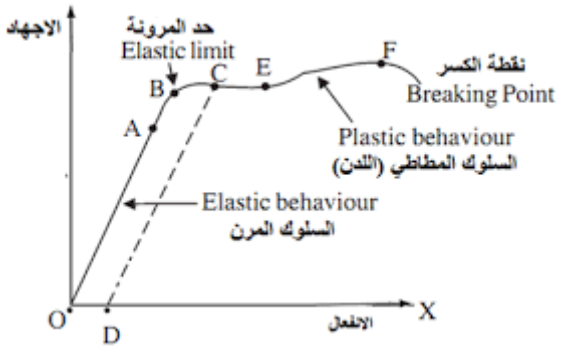
عند تطبيق قوة على مادة صلبة، فإنها تتعرض لتشوه مرن يتناسب طرديًا مع القوة المطبقة، وفقًا لقانون هوك .يمكن وصف هذا التناسب بالعلاقة التالية:

$$\sigma = E \times \varepsilon \qquad (7\text{-}1)$$

حيث σ الإجهاد المطبق (القوة لكل وحدة مساحة بوحدة Pa)، ε الاجهاد النسبي (التغير النسبي في الطول، وهو كمية بلا أبعاد)، و E معامل يونغ،وهو معامل المرونة بوحدة (Pa) .

يمثل معامل يونغ مقياسًا لصلابة المادة، حيث كلما كان معامل يونغ أكبر، كانت المادة أكثر صلابة وأقل قابلية للتشوه.

في حالة الموجات الطولية :تنتقل الطاقة على شكل تضاغطات وتخلخلات متعاقبة في اتجاه انتشار الموجة . تترافق هذه التضاغطات والتخلخلات مع تغييرات في الضغط والكثافة، ويمكن وصفها باستخدام معادلات الموجة".



الشكل 7-1: منحنى الإجهاد-التشوه في مادة صلبة

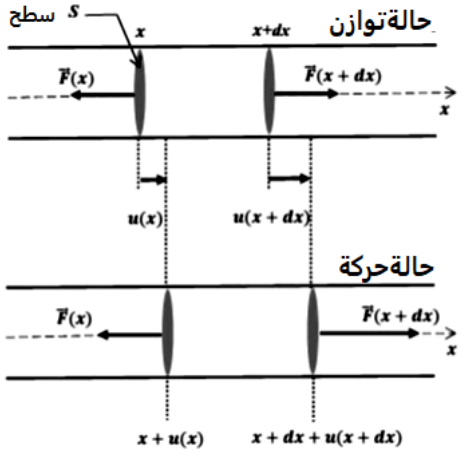
3.7 معادلة الموجة في قضيب صلب

لنعتبر قضيبًا صلبًا مستمرًا، متجانسًا، ، أي أن خصائصه الفيزيائية ثابتة في جميع أنحائه، بكثافة حجمية ρ ومساحة مقطع عرضي صغيرة S ، ومعامل مرونة E . يتعرض القضيب لقوة شد تُطبق عموديًا على مقطعه العرضي وتكون في نفس اتجاه المحور (ox) تؤدي إلى انتشار موجة طولية فيه.

يمكن وصف انتشار الموجة الطولية :

$$\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{e}_x \qquad (7\text{-}2)$$

الحركات ذات سعات صغيرة تعطينا تشوهات مرنة.



الشكل 7-2: انتشار إزاحة طولية في قضيب صلب

لنعتبر عنصرًا صغيرا من القضيب بطول dx في حالة توازن، ومساحة مقطع عرضي S ، فكتلته $dm=\rho Sdx$ يتعرض لازاحة $\vec{u}(x,t)$ ، فان الازاحة عند $dx' = x+dx$ تكون $\vec{u}(x+dx,t)$.

نطبق العلاقة الأساسية في الديناميكا على هذا العنصر، حيث تكون القوى المطبقة هي:

- القوة المطبقة على المقطع العرضي الأيمن $F(x+dx)$.
- القوة المطبقة على المقطع العرضي الأيسر $-F(x)$.

$$\sum \vec{F} = dm \times \vec{a}_c \qquad (7\text{-}3)$$

بالنسبة للحركة الطولية:

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\vec{e}_x \qquad (7\text{-}4)$$

بالاسقاط على المحور (Ox):

$$F(x+dx) - F(x) = (\rho S dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (7\text{-}5)$$

و بالتالي:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = (\rho S dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (7\text{-}6)$$

قوة الشد المطبقة على طول عنصري من القضيب تسبب ظهور تشوه مرن ε الذي يتبع قانون هوك. و بتعويضها في (7-5)، فنستنتج:

$$\frac{\partial (SE\varepsilon)}{\partial x}dx = (\rho S dx)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (7\text{-}7)$$

نموذج مبسط يسمح بالتعبير عن التشوه المرن بدلالة الإزاحة الطولية.

أثناء التمدد، يكون العنصر الصغير dx مشوهًا ومتحركًا في نفس الوقت:

$$dx' = dx + [u(x+dx) - u(x)] \qquad (7\text{-}8)$$

نعرف التمدد النسبي للعنصر dx :

$$\varepsilon = dx' - dx = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{7-9}$$

بتعويض هذه العلاقة في (7-6)، نحصل على معادلة دالمبيرت ذات البعد الواحد لموجة مرنة في مادة صلبة:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{7-10}$$

سرعة انتشار هذه الموجة تعتمد على الخصائص الميكانيكية للمادة الصلبة:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{7-11}$$

4.7 حل معادلة دالمبيرت

الحل العام لمعادلة دالمبيرت أحادية البعد يُكتب على الشكل التالي:

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right) \tag{7-12}$$

يجب أن تفي الدوال f و g بالشروط التي يخضع لها وسط الانتشار:

- شروط الحدية.
- الشروط الأولية.
- شروط الاستمرارية.

1.4.7 قضيب لانهائي

حل معادلة دالمبيرت هو موجة مستوية تقدمية تنتشر نحو تزايد x أو نحو تناقص x عندما يُعتبر القضيب لانهائيًا بطول $L \gg S$، في حالة الاهتزازات الجيبية، يكون الحل على الشكل التالي:

$$u(x,t) = u_m \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \tag{7-13}$$

و تمثيلها المركب:

$$\bar{u}(x,t) = \bar{u}_m e^{j(\omega t \pm kx)} \quad (7\text{-}14)$$

2.4.7 الممانعة الميكانيكية

الممانعة الميكانيكية في نقطة معينة هي نسبة السعة المركبة للقوة إلى السعة المركبة لسرعة الجسيم:

$$Z(x) = \frac{\overline{F(x)}}{\overline{\dot{u}(x)}} = \frac{-SE\overline{\frac{\partial u}{\partial x}}}{\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}} \quad (7\text{-}15)$$

في حالة الموجة المستوية التقدمية المتوافقة، نحصل على:

$$Z(x) = \frac{SEK}{\omega} \quad (7\text{-}16)$$

ولدينا علاقة التشتت $k = \omega/c$ ، و سرعة الانتشار $c^2 = \frac{E}{\rho}$ ، اذن:

$$Z(x) = S\sqrt{\rho E} = SZ_c \quad (7\text{-}17)$$

و

$$Z_c = \sqrt{\rho E} \quad (7\text{-}18)$$

3.4.7 الجانب الطاقي

- **الطاقة الحركية**:

تُعطى الطاقة الحركية dE_C لعنصر صغير $dV=Sdx$ في قضيب صلب عند مرور الموجة به على النحو التالي:

$$dE_c = \frac{1}{2}dm\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho S dx\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \quad (7\text{-}19)$$

الطاقة الكامنة المحسوبة بناءً على القوى المؤثرة عند مرور الموجة.

$$dE_p = \frac{1}{2}ESdx\varepsilon^2 = \frac{1}{2}ESdx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \quad (7\text{-}20)$$

في حالة الموجة المستوية التقدمية المتوافقة التي تنتشر نحو زيادة x، تُكتب كثافات الطاقة الحركية والكامنة كما يلي:

$$\varepsilon_c = \frac{dE_c}{d\tau} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_m^2 sin^2\left[\omega(t-\frac{x}{c})\right] \quad (7\text{-}21)$$

$$\varepsilon_p = \frac{dE_p}{d\tau} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}E\frac{\omega^2}{c^2}u_m^2 sin^2\left[\omega(t-\frac{x}{c})\right] \quad (7\text{-}22)$$

كثافة الطاقة الكلية:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_c + \varepsilon_p == \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_m^2\left(1-\cos 2\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right) \quad (7\text{-}23)$$

و متوسط كثافة الطاقة الكلية:

$$\langle\varepsilon_T\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_m^2\left(1-\cos 2\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)\right)dt = \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_m^2 \quad (7\text{-}24)$$

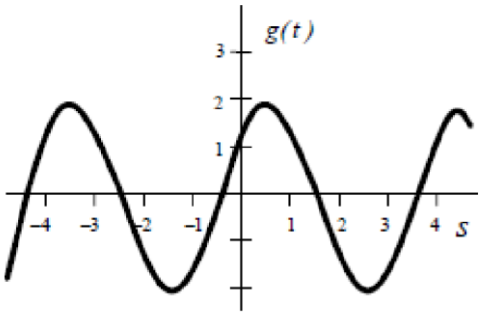
فوزية خلفاوي

مسائل الفصل الأول

الحركة الدورية -عموميات-

التمرين الأول

لتكن الكمية الجيبية g(t) الموضحة في الرسم البياني:



- أحسب السعة(A) ، التردد الزاوي(ω) ، و الطور الأولي(φ)
- استنتج عبارة الدالة g(t) .

الحل:

يمكننا تمثيل هذه الدالة الجيبية بالمعادلة العامة التالية : $g(t) = Acos(\omega(t - B)) + C$

حيث:

- $\boldsymbol{A}$ السعة = 2
- ω يرتبط بدورالموجة .بما أن الدور تساوي 4، فإن $\omega = 2\pi / 4 = \pi/2$.
- B يمثل الإزاحة الأفقية(Phase shift) . من الرسم $B = 0.5$ اذن، الطور الأولي هو: $\varphi = -\frac{\pi}{4}$
- C يمثل الإزاحة الرأسية (Vertical shift) في هذا الرسم، $C= 0$.

عبارة الدالة هي:

$$g(t) = 2cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$$

التمرين الثاني

لتكن حركة اهتزازية موصوفة بالمعادلة التالية:

$$x(t) = 4\cos(25\pi t + \frac{\pi}{2})$$

حيث x الإزاحة (بالسنتيمتر)، t الزمن (بالثواني)، و φ الطور (بالراديان)

- أحسب السعة القصوى.
- أحسب التردد الزاوي، التردد، و دور للحركة.
- أحسب الطور الابتدائي (التأخر عن المرجع).
- أحسب الإزاحة، السرعة، والتسارع في الزمنين t = 0 s و t = 0.5 s

الحل:

- السعة القصوى: $x_0 = 4\ cm$
- التردد الزاوي $\omega = 25\ \pi\ (\frac{Rad}{s})$، التردد $f = \frac{\omega}{2\pi} = 12.5\ (s^{-1})$، و دور الحركة

$$T = \frac{1}{f} = 0.08\ (s)$$

- الطور الابتدائي: $\phi_0 = \frac{\pi}{2}\ (Rad)$

	t=0 s	t=0.5 s
الازاحة (cm)	0	-4
السرعة (cm/s)	$-100\ \pi$	0
التسارع (cm/s^2)	0	$2500\ \pi^2$

التمرين الثالث

نقول عن جسم M يتحرك حركة خطية جيبية اذا كان موضعه x هو دالة جيبية بالنسبة للزمن:

$$x(t) = 2\cos(4t + 6)$$

باستعمال التمثيل المركب

- أحسب سرعة الحركة الخطية الجيبية $\dot{x}(t)$.

- أحسب تسارع الحركة الخطية الجيبية $\ddot{x}(t)$.

الحل:

حساب السرعة: $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -8\sin(4t+6)$.

حساب التسارع: $\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = -32\cos(4t+6)$.

التمرين الرابع

لتكن حركة توافقية معرفة بـــ: $x(t) = X\cos(100t+\varphi)$، مع الشروط الأولية $x(0) = 0\ m$ ، و $\dot{x}(0) = 1\ m/s$.

- أحسب X و φ.
- عبر عن $x(t)$ بالشكل: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$، ثم استنتج القيم A، B، و ω

الحل:

بتطبيق الشروط الابتدائية: $x(0) = X\cos(100(0)+\varphi) = X\cos(\varphi) = 0$ و

$$\dot{x}(0) = -100\,X\sin(100(0)+\varphi) = -100\,X\sin(\varphi) = 1$$

و منه: $\cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

اذا كان $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ، فان $X = -\frac{1}{100}$ ، أما من أجل $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ، فان $X = +\frac{1}{100}$

النتيجتين متكافئتين، نختار العبارة : $x(t) = +\frac{1}{100}\cos(100t-\frac{\pi}{2})$

لكتابة العبارة الأخيرة على الشكل: $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$، نستعمل العلاقة التالية:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$x(t) = +\frac{1}{100}\left(\cos(100t)\cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(100t)\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

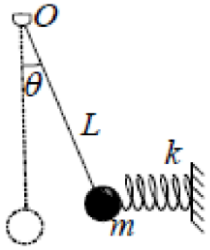
$$x(t) = +\frac{1}{100}\left(-\sin(100t)\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$x(t) = +\frac{1}{100}\sin(100t)$$

بالمطابقة، نتحصل على: $B = \frac{1}{100}$، $A = 0$، و $\omega = 100$.

التمرين الخامس

جملة ميكانكية ،الموضحة في الشكل، تدور حول نقطة O ، جسم نقطي كتلته m ، وخيط غير قابل للامتطاط و مهمل الكتلة. $sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1$.



- أحسب الطاقة الحركية و الطاقة الميكانكية للجملة.
- أوجد معادلة الحركة.
- أحسب تردد الاهتزازات ω_0 ، علما أن: $m = 1kg, L = 2\ m, k = 2N/m, g = 10\ m/s^2$

الحل:

حساب الطاقة الحركية:

بما أن $x = Lsin(\theta) \approx L\theta$ ، اذن:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(L\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

حساب الطاقة الكامنة:

نعتبر الوضع الشلقولي للخيط هو المرجع للطاقة الكامنة الثقالية. فالطاقة الكامنة الثقالية :

$$U_{pp} = mgh = mgL - mgLcos(\theta) = mgL(1 - \cos(\theta))$$

و الطاقة الكامنة المرونية:

$$U_p = U_{pp} + U_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kL^2\theta^2$$

حساب الطاقة الميكانكية:

$$E = T + U_{pp} + U_{pe} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1-\cos(\theta)) + \frac{1}{2}kL^2\theta^2$$

باستعمال مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانكية، $\frac{dE}{dt} = 0$، نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin(\theta) + kL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

فحلها من الشكل:

$$\theta(t) = \theta_0 cos(\omega t + \varphi)$$

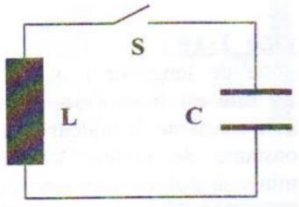
حيث: التردد الزاوي للحركة هو $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}$، ونحصل على القيم θ_0 و φ ، باستعمال الشروط الابتدائية.

حساب التردد الزاوي للاهتزازات:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{2}{1} + \frac{10}{2}} = \sqrt{7}\ s^{-1}$$

التمرين السادس

نعتبردارة كهربائية مكونة من مكثف سعته C متصل بأطراف ملف ذو حاثة L.في البداية يتم شحن المكثف، ثم نغلق المفتاح S.من خلال كتابة قانون الشبكات، نعطي المعادلة التفاضلية للنظام كدالة للشحنة q(t) للمكثف؛ نستنتج نبض الدارة



الحل:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0$$

$$\ddot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$

معادلة تفاضلية حلها من الشكل:

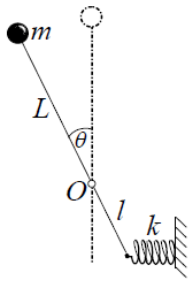
$$q(t)=q_0 sin(\omega t+\varphi)$$

حيث النبض (التردد الزاوي) :

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

التمرين السابع

سنقوم بدراسة جملة ميكانيكية تتكون من قضيب رفيع (مهمل الكتلة) وكتلة نقطية ونابض. يتم توصيل أحد طرفي القضيب بكتلة نقطية m، بينما يتم توصيل الطرف الآخر بنابض ثابت مرونته k . يمكن للقضيب الدوران بحرية حول نقطة O ، كما هو موضح في الشكل، عند التوازن، القضيب شاقولي.



- أعط عبارتي الطاقة الكامنة و الطاقة الحركية للجملة.
- أوجد معادلة الحركة .
- ما هو شرط تذبذب الجملة؟
- أحسب نبضها ω_0.

حساب لبطاقة الحركية للجملة: تمثل فقط الطاقة الحركية للنقطة المادية لأن القضيب مهمل الكتلة:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

حساب الطاقة الكامنة للجملة: مجموع الطاقة الكامنة الثقالية للنقطة المادية و الطاقة الكامنة المرونية للنابض

$$U = U_{pp} + U_{pe} = mgL(cos(\theta) - 1) + \frac{1}{2}kx^2$$

اذا فرضنا أن θ صغيرة جدا، فإن $x = l\ sin(\theta)$:

$$U = mgL(cos(\theta) - 1) + \frac{1}{2}kl^2sin^2(\theta)$$

الطاقة الميكانكية الكلية للجملة هي:

$$E = T + U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(cos(\theta) - 1) + \frac{1}{2}kl^2sin^2(\theta)$$

باستعمال مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانكية، $\frac{dE}{dt} = 0$، نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgL\dot{\theta}\sin(\theta) + kl^2\dot{\theta}\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{L}\sin(\theta) + \frac{kl^2}{mL^2}\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$$

من أجل θ صغيرة جدا، نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{kl^2}{mL^2} - \frac{g}{L}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{kl^2 - gmL}{mL^2}\right)\theta = 0$$

شرط تذبذب الجملة هو $\frac{kl^2 - gmL}{mL^2} > 0$.

مسائل الفصل الثاني

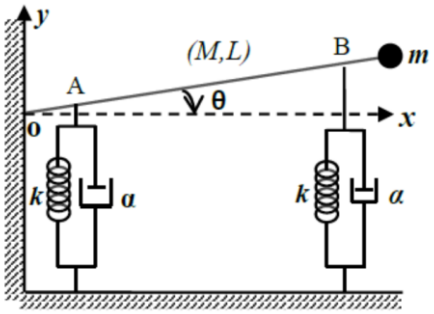
أنظمة خطية ذات درجة حرية واحدة

التمرين الأول

ليكن النظام الميكانيكي الاهتزازي الموضح في الشكل المجاور. إذا كان G هو مركز ثقل العارضة ذات الكتلة M والطول L

- إيجاد المعادلة التفاضلية للحركة. استنتج ω_0 و λ .
- كتابة معادلة الحركة في حالة $\lambda<\omega_0$.

علما: $J_{/G}=\frac{1}{12}ML^2$, $OA=L_1, OB=L_2$



الحل:

حساب الطاقة الحركية للجملة

$$T=\frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

مع: $J_{/O}=J_{/G}+M(OG)^2=\frac{1}{12}ML^2+M\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{3}ML^2$

$$T=\frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

حساب الطاقة الكامنة للجملة

هي مجموع الطاقة الكامنة الثقالية للكتلة m، E_{pp} ، و الطاقتين الكامنتين المرونية للنابضين E_{pe1} و E_{pe2}:

$$U=U_{pp}+U_{pe1}+U_{pe2}$$

$$U = mgLsin(\theta) + \frac{1}{2}kL_1^2 sin^2\theta + \frac{1}{2}kL_2^2 sin^2\theta$$

حساب لاغراجيان الجملة:

$$L = T - U = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \left(mgLsin(\theta) + \frac{1}{2}kL_1^2 sin^2\theta + \frac{1}{2}kL_2^2 sin^2\theta\right)$$

باستعمال معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\alpha L_1\,\dot{\theta} - \alpha L_2\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta} + mL^2\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgLcos(\theta) - kL_1^2\sin(\theta)\cos(\theta) - kL_2^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\theta} + mgLcos(\theta) + kL_1^2\sin(\theta)\cos(\theta) + kL_2^2\sin(\theta)\cos(\theta) = -\alpha L_1\,\dot{\theta} - \alpha L_2\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + 3\frac{m}{M}\ddot{\theta} + 3\frac{m}{M}\frac{g}{L}cos(\theta) + 3\frac{k}{M}\frac{L_1^2}{L^2}\sin(\theta)\cos(\theta) + 3\frac{k}{M}\frac{L_2^2}{L^2}\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{3\alpha L_1}{ML^2}\,\dot{\theta} + \frac{3\alpha L_2}{ML^2}\,\dot{\theta} = 0$$

$$\left(1 + 3\frac{m}{M}\right)\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ML^2}(L_1 + L_2)\,\dot{\theta} + 3\frac{k}{ML^2}(L_1^2 + L_2^2)\sin(\theta)\cos(\theta) + 3\frac{m}{M}\frac{g}{L}cos(\theta) = 0$$

المعادلة التفاضلية للحركة:

$$\left(\frac{M + 3m}{M}\right)\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{ML^2}(L_1 + L_2)\,\dot{\theta} + 3\frac{k}{ML^2}(L_1^2 + L_2^2)\,\theta = -3\frac{m}{M}\frac{g}{L}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha(L_1 + L_2)}{(M + 3m)L^2}\dot{\theta} + 3\frac{k(L_1^2 + L_2^2)}{(M + 3m)L^2}\theta = -\frac{3mg}{(M + 3m)L}$$

المعادلة التفاضلية من الشكل: $\ddot{\theta} + 2\lambda\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = \gamma$، فمنه:

$$\lambda = \frac{3\alpha(L_1+L_2)}{2(M+3m)L^2}\text{، }\omega_0 = \sqrt{3\frac{k(L_1^2+L_2^2)}{(M+3m)L^2}}$$

حل هذه المعادلة هو مجموع الحل الخاص θ_p و حل المعادلة المتجانسة (دون الطرف الثاني)θ_h

$$\theta_p = \frac{\gamma}{\omega_0^2} = -\frac{mgL}{k(L_1^2 + L_2^2)}$$

لحل المعادلة المتجانسة: $\ddot{\theta} + 2\lambda\,\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$، نحل معادلتها الخاصة: $r^2 + 2\lambda\,r + \omega_0^2 = 0$

نحسب محدد هذه المعادلة: $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$، الحركة غير دورية $\phi < 0.5$

نلاحظ اخمادا كبيراً مفروضاً على الجملة، بمجرد تحرير هذه الجملة، فإنها تعود فقط إلى موضع توازنها دون حدوث أي اهتزاز، لذا فإن الاخماد المطبق قوي جداً. وسيكون حل معادلتنا السابقة كما يلي:

$$\theta(t) = \theta_p + \theta_h = \theta_p + A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t}$$

بحيث: $r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ و $r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

اذن: $\theta(t) = A_1\, e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2\, e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$، حالة الحركة الحرجة ($\phi = 0.5$) في نظام ما وتوضح:

النظام يسمى حرج لأنه يتوافق مع اخماد حرج حيث يتم التحول من نظام به اهتزازات بدورية زائفة نحو نظام لا توجد فيه اهتزازات..

معادلات هذه الحركة كما يلي:

$$\theta(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, t\, e^{r_2 t} + \theta_p$$

$$r_1 = r_2 = r = -\lambda$$

$$\theta(t) = (A_1 + A_2\, t)e^{-\lambda t} + \theta_p$$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$، حركة دورية زائفة

حيث تتناقص السعة بمرور الوقت بسبب الاحتكاك.

$$r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ و } r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

بحساب بسيط يمكن كتابة الحل بالشكل المكافئ:

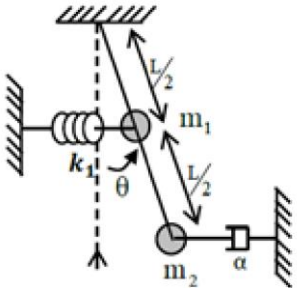
$$\theta(t) = A\, e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi) + \theta_p$$

التردد الزاوي الزائف: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

التمرين الثاني

جملة ميكانكية مكونة من كتلتين m_1 ، m_2 ، ساق مهملة الكتلة طولها L ، ونابض ثابت صلابته k

بمعامل الاحتكاك اللزج α



موضع التوازن

- أكتب المعادلة التفاضلية للحركة علما أن الجملة تهتز اهتزازات صغيرة السعة.
- أحسب نبض حركة الجملة.
- أوجد معادلة الحركة، علما أن $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$

يعطى: $m_2 = \frac{m_1}{4} = m,\ \lambda < \omega_0$

الحل:

حساب الطاقة الحركية للجملة

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2L^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)L^2\dot{\theta}^2$$

حساب الطاقة الكامنة للجملة

هي مجموع الطاقة الكامنة الثقالية للكتلتين E_{pp1} ، وE_{pp2} و الطاقة الكامنة المرونية للنابض E_{pe} :

$$U = U_{pp1} + U_{pp2} + U_{pe}$$

$$U = m_1g\left(L - \frac{L}{2}\cos\theta\right) + m_2g(L - L\cos\theta) + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\right)^2 sin^2\theta$$

حساب لاغراجيان الجملة:

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right)L^2\dot{\theta}^2 - \left(m_1g\left(L - \frac{L}{2}\cos\theta\right) + m_2g(L - L\cos\theta) + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\right)^2 sin^2\theta\right)$$

باستعمال معادلة لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\alpha L\,\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)L^2\dot{\theta}\Longrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)L^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-m_1 g\,\frac{L}{2}sin(\theta)-m_2 gLsin(\theta)-k\left(\frac{L}{2}\right)^2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\left(\frac{m_1}{4}+m_2\right)L^2\ddot{\theta}+m_1 g\,\frac{L}{2}sin(\theta)+m_2 gLsin(\theta)+k\left(\frac{L}{2}\right)^2\sin(\theta)\cos(\theta)=-\alpha L\,\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}+\frac{4\alpha}{L(m_1+4m_2)}\,\dot{\theta}+\frac{2m_1 g}{L(m_1+4m_2)}sin(\theta)+\frac{4m_2 g}{L(m_1+4m_2)}sin(\theta)+\frac{k}{(m_1+4m_2)}\sin(\theta)\cos(\theta)=0$$

بما أن الاهتزازات صغيرة، المعادلة التفاضلية للحركة

$$\ddot{\theta}+\frac{4\alpha}{L(m_1+4m_2)}\,\dot{\theta}+\left(\frac{2m_1 g+4m_2 g+kL}{L(m_1+4m_2)}\right)\theta=0$$

المعادلة التفاضلية من الشكل $\ddot{\theta}+2\lambda\,\dot{\theta}+\omega_0^2\,\theta=0$ ، ومنه:

$$\lambda=\frac{2\alpha}{L(m_1+4m_2)}=\frac{\alpha}{4mL}\text{،}\omega_0=\sqrt{\frac{2m_1 g+4m_2 g+kL}{L(m_1+4m_2)}}=\sqrt{\frac{12\mathrm{mg}+kL}{8mL}}$$

يجب حل معادلتها الخاصة: $r^2+2\lambda\,r+\omega_0^2=0$

نحسب محدد هذه المعادلة: $\Delta'=\lambda^2-\omega_0^2$

- $\Delta'=\lambda^2-\omega_0^2>0$، الحركة غير دورية $\phi<0.5$

نلاحظ اخمادا كبيراً مفروضاً على الجملة، بمجرد تحرير هذه الجملة، فإنها تعود فقط إلى موضع توازنها دون حدوث أي اهتزاز، لذا فإن الاخماد المطبق قوي جداً. وسيكون حل معادلتنا السابقة كما يلي:

$$\theta(t)=A_1\,e^{r_1 t}+A_2\,e^{r_2 t}$$

بحيث: $r_1=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$ و $r_2=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$

اذن: $\theta(t)=A_1\,e^{-\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}+A_2\,e^{-\left(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}$

- $\Delta'=\lambda^2-\omega_0^2=0$، حالة الحركة الحرجة ($\phi=0.5$) في نظام ما وتوضح:

النظام يسمى حرج لأنه يتوافق مع اخماد حرج حيث يتم التحول من نظام به اهتزازات بدورية زائفة نحو نظام لا توجد فيه اهتزازات..

معادلات هذه الحركة كما يلي:

$$\theta(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, t\, e^{r_2 t}$$

$$r_1 = r_2 = r = -\lambda$$

$$\theta(t) = (A_1 + A_2\, t) e^{-\lambda t}$$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$، حركة دورية زائفة

حيث تتناقص السعة بمرور الوقت بسبب الاحتكاك.

$$r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ و } r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

بحساب بسيط يمكن كتابة الحل بالشكل المكافئ:

$$\theta(t) = A\, e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi)$$

التردد الزاوي الزائف: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

باستعمال الشروط الابتدائية، $\theta(0) = \theta_0$، نحصل على:

$$A \sin(\varphi) = \theta_0$$

و الشرط: $\dot{\theta}(0) = 0$، نحصل على:

$$A\omega \cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Longrightarrow A = \pm\theta_0$$

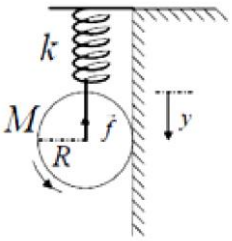
اذن الحل، معادلة الحركة، هو:

$$\theta(t) = \theta_0\, e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

التمرين الثالث

في حركته ذهابًا وإيابًا، يبقى القرص المعلق بالنابض أدناه على اتصال بالجدار الذي يجعله يدور حول نفسه. يتم تمثيل جميع الاحتكاكات بالقوة: $f_{disk} = -\alpha v$ المطبقة في مركز القرص. عند التوازن، كان النابض ممتدًا بمقدار y_0.

- أعط عبارة الطاقة الكامنة U للجملة بدلالة y.
- بسط عبارة U باستعمال الشروط الابتدائية
- ما هو شرط تذبذب الجملة؟
- أعط عبارتي الطاقة الحركية T و *دالة التبدد* D.
- *استنتج لاغرانجيان، و معادلة الحركة.* مع العلم أن $k=13.5N/m$ و $M=1\ kg$
- أوجد القيمة القصوى التي لا يجب أن يصل إليها معامل الاحتكاك α لكي يستمر النظام في الاهتزاز.
- إذا كان $\alpha = 9\ N.s/m$، أوجد طبيعة الحركة وكذلك المعادلة الزمنية $y(t)(y(0) = 1cm, \dot{y}(0) = 0)$
- إذا كان $\alpha = 3\ N.s/m$ ، أوجد الزمن τ اللازم لكي تقل السعة إلى $\frac{1}{15}$ من قيمتها، واحسب التثبيط اللوغاريتمي δ للحركة.



الحل:

حساب الطاقة الكامنة: مجموع الطاقة الكامنة الثقالية للقرص والطاقة الكامنة المرونية للنابض

$$\boldsymbol{U = U_{pp} + U_{pe}}$$

نعتبر مستوى الوضع الابتدائي هو المرجع للطاقة الكامنة الثقالية: $U_{pp} = Mg(y - y_0)$

$$U = Mg(y - y_0) + \frac{1}{2}k\,y^2$$

شرط التذبذب هو: $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0$، نلاحظ أن $\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} = k > 0$

و باعتبار دوران القرص أيضا دون انزلاق على الجدار: $y = R\theta$، نستنتج الطاقة الحركية للجملة:

$$T = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2$$

بما أن قوة الاحتكاك $f = -\alpha v = -\alpha\dot{y}$ فدالة التبدد D، المعرفة بـ: $f = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}}$، هي:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$$

حساب لاغرانجيان:

$$L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - \left(Mg(y - y_0) + \frac{1}{2}k\,y^2\right)$$

معادلة الحركة:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\alpha\,\dot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = M\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -Mg - ky$$

$$M\ddot{y} + Mg + ky = - - \alpha\,\dot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{M}\,\dot{y} + + \frac{k}{M}y = -g$$

المعادلة التفاضلية للحركة المتحصل عليها حلها هو مجموع حلين: الحل الخاص الذي من نفس شكل الطرف الثاني للمعادلة، بالتعويض فيها، نحصل على:

$$y_p = -g\,\frac{M}{k}$$

و الحل الثاني هو حل المعادلة المتجانسة: $\ddot{y} + \frac{\alpha}{M}\,\dot{y} + + \frac{k}{M}y = 0$، و هي من الشكل:

$$\ddot{y} + 2\lambda\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = 0\ ،$$

ومنه: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$، $\lambda = \frac{\alpha}{2M}$

نحسب محدد هذه المعادلة: $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0$، الحركة غير دورية $\phi < 0.5$

نلاحظ اخمادا كبيراً مفروضاً على الجملة، بمجرد تحرير هذه الجملة، فإنها تعود فقط إلى موضع توازنها دون حدوث أي اهتزاز، لذا فإن الاخماد المطبق قوي جداً. وسيكون حل معادلتنا السابقة كما يلي:

$$y(t) = y_h(t) + y_p = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t} + g\frac{M}{k}$$

بحيث: $r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ و $r_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

اذن: $$y(t) = A_1\, e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2\, e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} - g\frac{M}{k}$$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$، حالة الحركة الحرجة ($\phi = 0.5$) في نظام ما وتوضح:

النظام يسمى حرج لأنه يتوافق مع اخماد حرج حيث يتم التحول من نظام به اهتزازات بشبه دور نحو نظام لا توجد فيه اهتزازات..

معادلات هذه الحركة كما يلي:

$$y(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, t\, e^{r_2 t}$$

$$r_1 = r_2 = r = -\lambda$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p = (A_1 + A_2\, t)e^{-\lambda t} - g\frac{M}{k}$$

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0$، حركة شبه دورية

حيث تتناقص السعة بمرور الوقت بسبب الاحتكاك.

$$r_1 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ و } r_2 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p = A\, e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi) - g\frac{M}{k}$$

شبه التردد الزاوي: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{M} - \left(\frac{\alpha}{2M}\right)^2}$

باستعمال الشروط الابتدائية، $y(0) = y_0$، نحصل على:

$$A\sin(\varphi) - g\frac{M}{k} = y_0$$

$$A = y_0 + g\frac{M}{k}$$

و الشرط: $\dot{y}(0) = 0$، نحصل على:

$$A\omega\cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2} \Longrightarrow A = \pm y_0$$

اذن الحل، معادلة الحركة، هو:

$$y(t) = \left(y_0 + g\frac{M}{k}\right) e^{-\lambda t} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - g\frac{M}{k}$$

التطبيق العددي:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{13.5}{1}} = 3.674 \text{ ،} \lambda = \frac{\alpha}{2M} = \frac{9}{2*1} = 4.5$$

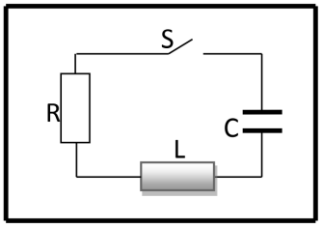
$$\lambda^2 - \omega_0^2 = (4.5\ )^2 - 13.5 = 6.75 > 0$$

اذن الحركة لا دورية.

التمرين الرابع

تمثل الصورة المجاورة دارة كهربائية. في البداية، يكون المكثف مشحونًا، ثم نغلق المفتاح S . لدينا $L=1\,H$ و $C=0.01\mu F$ نرمز بـ $q(t)$ لشحنة المكثف عند اللحظة t .

1. أكتب المعادلة التفاضلية التي تصف الدارة للمتغير q. حدد قيم λ و ω_0.
2. في أي حالة يتذبذب النظام؟ ما هي قيمة المقاومة الحرجة؟
3. أرسم تقريبيا $q\,(t)$ عند $R=100\Omega$ و $R=500\Omega$.



الحل:

المعادلة التفاضلية للنظام هو

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0$$

حيث $\lambda=\frac{R}{2L}$ و $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$

شرط تذبذب النظام هو $\lambda^2-\omega_0^2<0$

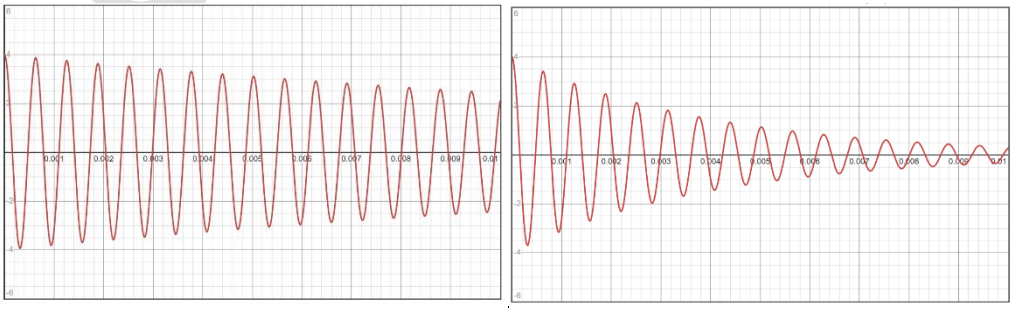
النظام الحرج : $\lambda^2-\omega_0^2=0\Rightarrow\frac{R^2}{4L^2}=\frac{1}{LC}\Rightarrow R_c=2\sqrt{\frac{L}{C}}=2\times\sqrt{\frac{1}{0.01\times10^{-6}}}$

$$R_c=20\ k\Omega$$

من أجل $R=100\ \Omega$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{1\times10^{-8}}-\left(\frac{100}{2\times1}\right)^2}=10000$$

$$q(t)=q_0e^{-50t}\sin(10000t+\tfrac{\pi}{2}),\quad R=100\ \Omega$$



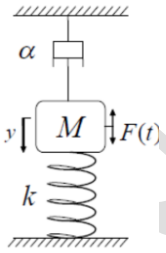
$$q(t)=q_0e^{-250t}\sin(10000t+\tfrac{\pi}{2}),\quad R=500\ \Omega$$

مسائل الفصل الثالث

أنظمة خطية متعددة درجات الحرية

التمرين الأول

كتلة m ، معلقة بواسطة نابض ثابت صلابته k ومثبط ذو معامل احتكاك، تتذبذب عمودياً تحت تأثير إثارة F على شكل $F(t)=F_0 cos\Omega t$.



المطلوب:

1. إيجاد الطاقة الحركية T ، والطاقة الكامنة U ، ودالة التبديد D
2. إيجاد لاغرانجيان ثم معادلة الحركة.
3. إيجاد، باستخدام التمثيل المركب، الحل الدائم لمعادلة الحركة (حدد سعتها A وطورها)
4. إعطاء شرط الرنين وتردد الرنين Ω_R
5. إعطاء عرض الشريط النافذ B لاخماد ضعيف($\lambda << \omega_0$)

الحل:

حساب الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

حساب الطاقة الكامنة: $U = U_{pe} + U_{pp} = \frac{1}{2} kx^2 - mg(x - x_0)$

حساب دالة التبديد: $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

حساب لاغراجيان: $\boldsymbol{L = T - U} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}kx^2 - mg(x - x_0)\right)$

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mgx + mgx_0$$

معادلة لاغراجيان:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha\,\dot{x} + F(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx + mg$$

$$m\ddot{x} + kx - mg = -\alpha\,\dot{x} + F_0 cos\Omega t$$

المعادلة التفاضلية للحركة: $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{F_0}{m}cos\Omega t$

باستعمال التمثيل المركب للحل: $\boldsymbol{X(t) = Ae^{j(\Omega t+\varphi)}}$

$$\left(\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)\boldsymbol{Ae^{j(\Omega t+\varphi)}} = Be^{j\Omega t}, \quad B = \frac{F_0}{m}$$

$$\left(\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)\boldsymbol{A} = Be^{-j\varphi}$$

$$\left(\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) - j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)\boldsymbol{A}^* = Be^{j\varphi}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{\Omega\alpha}{m}\right)^2}}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{-\frac{\Omega\alpha}{m}}{\frac{k}{m} - \Omega^2}\right)$$

شرط الرنين: $\phi = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

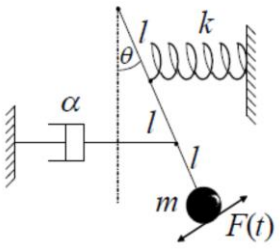
$$\frac{\partial A}{\partial \Omega}\Big)_{\Omega_R} = 0 \Longrightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}}$$

لحساب عرض الشريط النافذ، يجب حساب Ω_1, Ω_2 جذري المعادلة: $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

$$B = |\Omega_2 - \Omega_1|$$

التمرين الثاني

في النظام المبين بالشكل، الكرة تعتبر كنقطة والساق ذات طول إجمالي $3\,l$ وكتلتها مهملة. مع $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$.



المطلوب:

1. إيجاد الطاقة الحركية T ، والطاقة الكامنة U ، ودالة التبديد D .
2. إيجاد لاغرانجيان ثم معادلة الحركة.
3. إيجاد، باستخدام التمثيل المركب، الحل للنظام الدائم لمعادلة الحركة(حدد سعتها A وطورها)
4. استنتاج تردد الرنين Ω_R.
5. إعطاء ترددات القطع Ω_1 ؛ Ω_2 وعرض النطاق B لتخميد ضعيف($\lambda << \omega_0$)
6. حساب Ω_R ، B، ومعامل الجودة إذا كانت $m=1kg$ ، $k=15\ N/m$ ، $l=0.5\ m$ ، $\alpha=0.5N.m/s$ ، $g=10\ m/s^2$.

الحل:

حساب الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(3l)^2\dot{\theta}^2 = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

حساب الطاقة الكامنة: $U = U_{pe} + U_{pp} = \frac{1}{2}kl^2sin^2(\theta) + mg(3l - 3l\cos(\theta))$

$$U = \frac{1}{2}kl^2sin^2(\theta) + 6\ m\ g\ l\ sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

حساب دالة التبديد: $D = \frac{1}{2}\alpha v^2 = \frac{1}{2}\alpha(2l\dot{\sin}(\theta))^2 = 2\alpha l^2\dot{\theta}^2\cos^2(\theta)$

حساب لاغراجيان: $\boldsymbol{L = T - U} = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2}kl^2sin^2(\theta) + 6\ m\ g\ l\ sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$$\boldsymbol{L} = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kl^2sin^2(\theta) - 6\ m\ g\ l\ sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

معادلة لاغراجيان:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F_0\cos(\Omega t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 9ml^2\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 9ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kl^2\sin(\theta)\cos(\theta) - 6mgl\ sin\left(\frac{\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{kl^2}{2}\sin(2\theta) - 3\ mgl\ sin(\theta)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha l^2\dot{\theta}cos^2(\theta)$$

المعادلة التفاضلية للحركة:

$$9ml^2\ddot{\theta} - \left(-\frac{kl^2}{2}\sin(2\theta) - 3\ mgl\ sin(\theta)\right) = -4\alpha l^2\dot{\theta}cos^2(\theta) + F_0\cos(\Omega t)$$

$$9ml^2\ddot{\theta} + 4\alpha l^2cos^2(\theta)\dot{\theta} + \frac{kl^2}{2}\sin(2\theta) + 3\ mgl\ sin(\theta) = F_0\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4}{9}\frac{\alpha}{m}cos^2(\theta)\dot{\theta} + \frac{1}{18}\frac{k}{m}\sin(2\theta) + \frac{1}{3}\frac{g}{l}\ sin(\theta) = \frac{F_0}{9ml^2}\cos(\Omega t)$$

لتبسيط هذه المعادلة، نعتبر الزاوية صغيرة جدا، نتحصل على المعادلة:

$$\ddot{\theta} + \frac{4}{9}\frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{1}{9}\frac{k}{m}\theta + \frac{1}{3}\frac{g}{l}\ \theta = \frac{F_0}{9ml^2}\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{4}{9}\frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right)\theta = \frac{F_0}{9ml^2}\cos(\Omega t)$$

اذن

$$\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right)}\text{ ،}\boldsymbol{\lambda} = \frac{2}{9}\frac{\alpha}{m}\text{ و}$$

باستعمال التمثيل المركب للحل: $\boldsymbol{\Theta(t) = Ae^{j(\Omega t+\varphi)}}$

$$\left(\left(\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right) - \Omega^2\right) + j\Omega\frac{4}{9}\frac{\alpha}{m}\right)\boldsymbol{Ae^{j(\Omega t+\varphi)}} = Be^{j\Omega t}, \quad B = \frac{F_0}{9ml^2}$$

$$\left(\left(\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right) - \Omega^2\right) + j\Omega\frac{4}{9}\frac{\alpha}{m}\right)\boldsymbol{A} = Be^{-j\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right) - \Omega^2\right) - j\Omega\frac{4}{9}\frac{\alpha}{m}\right)\boldsymbol{A}^* = Be^{j\boldsymbol{\varphi}}$$

$$A = \frac{\frac{F_0}{9ml^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right) - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\frac{\Omega\alpha}{m}\right)^2}}$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{-\frac{4}{9}\frac{\Omega\alpha}{m}}{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right) - \Omega^2}\right)$$

شرط الرنين: $\phi = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right)}}{\frac{4}{9}\frac{\alpha}{m}} = \frac{9m}{4\alpha}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right)} > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial \Omega}\right)_{\Omega_R} = 0 \Longrightarrow \Omega_R = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m} + \frac{g}{l}\right) - 2\left(\frac{2}{9}\frac{\alpha}{m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{9m} + \frac{g}{3l} - \frac{8\alpha^2}{81m^2}}$$

نحسب A_{max}، بتعويض Ω_R في عبارة A، *نحصل على:* $A_{max} = \frac{F_0}{4\alpha l^2\sqrt{\frac{k}{9m}+\frac{g}{3l}+\frac{12\alpha^2}{81m^2}}}$

لحساب عرض الشريط النافذ، يجب حساب Ω_1, Ω_2 جذري المعادلة: $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

$$B = |\Omega_2 - \Omega_1|$$

التطبيق العددي:

$$\phi = \frac{9m}{4\alpha}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m}+\frac{g}{l}\right)} = \frac{9\times 1}{4\times 0.5}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{15}{3\times 1}+\frac{10}{0.5}\right)} \approx 5.77$$

$$\Omega_R = \sqrt{\frac{k}{9m}+\frac{g}{3l}-\frac{8\alpha^2}{81m^2}} = \sqrt{\frac{15}{9\times 1}+\frac{10}{3\times 0.5}-\frac{8\times 0.5^2}{81\times 1^2}} \approx 2.882$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{k}{3m}+\frac{g}{l}\right)} = \sqrt{\frac{15}{9\times 1}+\frac{10}{3\times 0.5}} \approx 2.886$$

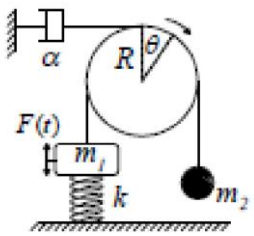
$$\Omega_R \approx \omega_0$$

$$\boldsymbol{A_{max}} == \frac{\frac{F_0}{9ml^2}}{\sqrt{\left(\frac{4}{9}\frac{\Omega\alpha}{m}\right)^2}} = \frac{F_0}{4\,\alpha\, l^2\ \ \omega_0}$$

من أجل قيم صغيرة لـ λ، لدينا : $B = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\times\lambda = 2\times\frac{2}{9}\frac{\alpha}{m} = 0.222\ rad/s$

التمرين الثالث

في النظام المبين في الشكل، خيط حول القرص (كتلته مهملة) غير قابل للتمدد وغير منزلق، مرتبط بكتلتين m_1 و m_2 ونابض ذو صلابة معينة.



المطلوب:

1. إيجاد الطاقة الحركية T ، والطاقة الكامنة U ، ودالة التبديد D .
2. إيجاد لاغرانجيان ثم معادلة الحركة $(F=F_0\cos(\Omega t))$.
3. إيجاد، باستخدام التمثيل المركب، الحل للنظام الدائم لمعادلة الحركة (حدد سعتها A وطورها φ)

4. استنتاج تردد الرنين Ω_R
5. إعطاء ترددات القطع Ω_{c1} ؛ Ω_{c2} وعرض النطاق B لتخميد ضعيف.($\lambda << \omega_0$)

$\alpha=0.1\ N.s/m$، $k=10\ N/m$، $m_2=1\ kg$، $m_1=2\ kg$ ، ومعامل الجودة إذا كانتB، Ω_R حساب

الحل:

حساب الطاقة الحركية: $T = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2$

حساب الطاقة الكامنة: $U = U_{pe} + U_{pp1} + U_{pp2} = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + m_1gR\theta - m_2gR\theta$

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + (m_1 - m_2)gR\theta$$

حساب دالة التبديد: $D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$

حساب لاغراجيان: $\boldsymbol{L = T - U} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2}kR^2\theta^2 + (m_1 - m_2)gR\theta\right)$

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + (m_2 - m_1)gR\theta$$

معادلة لاغراجيان:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F_0\cos(\Omega t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (m_1 + m_2)R^2\dot{\theta} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta + (m_2 - m_1)gR$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

المعادلة التفاضلية للحركة:

$$(m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} - (-kR^2\theta + (m_2 - m_1)gR) = -\alpha R^2\dot{\theta} + F_0\cos(\Omega t)$$

$$(m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} + kR^2\theta - (m_2 - m_1)gR = -\alpha R^2\dot{\theta} + F_0\cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{(m_1+m_2)}\dot{\theta}+\frac{k}{m_1+m_2}\theta=\frac{(m_2-m_1)}{m_1+m_2}\frac{g}{R}+\frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2}\cos(\Omega t)$$

اذن

$$\boldsymbol{\omega_0}=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}\text{ ،}\boldsymbol{\lambda}=\frac{\alpha}{2(m_1+m_2)}\text{ و}:$$

باستعمال التمثيل المركب للحل: $\boldsymbol{\Theta(t)=Ae^{j(\Omega t+\varphi)}}$

$$\left(\left(\frac{k}{m_1+m_2}-\Omega^2\right)+j\Omega\frac{\alpha}{R^2(m_1+m_2)}\right)\boldsymbol{Ae^{j(\Omega t+\varphi)}}=Be^{j\Omega t},\quad B=\frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2}$$

$$\left(\left(\frac{k}{m_1+m_2}-\Omega^2\right)+j\Omega\frac{\alpha}{R^2(m_1+m_2)}\right)\boldsymbol{A}=Be^{-j\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\left(\left(\frac{k}{m_1+m_2}-\Omega^2\right)-j\Omega\frac{\alpha}{(m_1+m_2)}\right)\boldsymbol{A^*}=Be^{j\boldsymbol{\varphi}}$$

$$A=\frac{\frac{F_0}{R^2(m_1+m_2)}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m_1+m_2}-\Omega^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\Omega}{(m_1+m_2)}\right)^2}}$$

$$\varphi=tg^{-1}\left(\frac{-\frac{\alpha\Omega}{(m_1+m_2)}}{\frac{k}{m_1+m_2}-\Omega^2}\right)$$

شرط الرنين: $\phi=\frac{\omega_0}{2\lambda}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}}{\frac{\alpha}{m_1+m_2}}=\frac{(m_1+m_2)}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{k(m_1+m_2)}=10\sqrt{30}>\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial\Omega}\right)_{\Omega_R}=0\Longrightarrow\Omega_R=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}-2\left(\frac{\alpha}{2(m_1+m_2)}\right)^2}=\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}-\frac{\alpha^2}{2(m_1+m_2)^2}}$$

نحسب A_{max}، بتعويض Ω_R في عبارة A، *نحصل على:* $A_{max}=\frac{F_0}{\alpha\sqrt{\frac{3}{4(m_1+m_2)^2}\alpha^2-\frac{k}{m_1+m_2}}}$

لحساب عرض الشريط النافذ، يجب حساب Ω_1,Ω_2 جذري المعادلة: $A=\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

$$B=|\Omega_2-\Omega_1|$$

التطبيق العددي:

$$\Omega_R = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2} - \frac{\alpha^2}{2(m_1+m_2)^2}} = \sqrt{\frac{10}{1+2} - \frac{0.1^2}{2(1+2)^2}} \approx 3.3338$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{10}{1+2}} \approx 3.3333$$

$$\Omega_R \approx \omega_0$$

$$\boldsymbol{A_{max}} = \frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2\sqrt{4\left(\frac{\alpha}{2(m_1+m_2)}\right)^2\left(\frac{k}{m_1+m_2}\right)^2 - 4\left(\frac{\alpha}{2(m_1+m_2)}\right)^4}}$$

لايجاد حدي الشريط النافذ، نحل المعادلة: $A = \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ ، نتحصل على Ω_1، Ω_2

وكذلك من أجل قيم صغيرة لـ λ، لدينا:

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 = 2 \times \lambda = 2 \times \frac{\alpha}{2(m_1+m_2)} = 0.0333\ rad/s$$

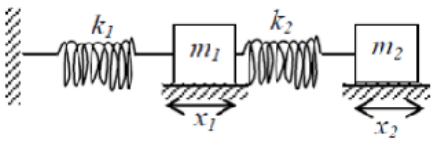
مسائل الفصل الرابع

الموجات الميكانكية ـ عموميات ـ

التمرين الأول

نعتبر الاهتزازات الحرة للنظام ذي درجتي حرية.

1. احسب الطاقات الحركية والكامنة للنظام.
2. بالنسبة إلى $k_1=k_2=k$ و $m_1=m_2=m/2$، واستخدام صيغة لاغرانج لايجاد المعادلات التفاضلية للحركة. استنتج النبضات الذاتية للنظام.



الحل

1- حساب الطاقة الحركية:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x_2}^2$$

حساب الطاقة الكامنة:

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 = kx_1^2 - kx_1x_2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \text{و} \quad T = \frac{1}{4}m\left(\dot{x_1}^2 + \dot{x_2}^2\right)$$

$$= k\left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2\right)$$

$$L = T - U = \frac{1}{4}m\,\dot{x_1}^2 + \frac{1}{4}m\dot{x_2}^2 - \left(k\left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2\right)\right)$$

2- معادلات لاغرانج: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$ ، و $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{1}{2}m\,\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{1}{2}m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2kx_1 + kx_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = kx_1 - kx_2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\,\ddot{x}_1 - (-2kx_1 + kx_2) = 0 \\ \frac{1}{2}m\,\ddot{x}_2 - (kx_1 - kx_2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m}(2x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{2k}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

لحل جملة المعادلات التفاضلية، نفرض الشكل المركب للحلول:

$X_1 = A_1 e^{j\omega t}$ و $X_2 = A_2 e^{j\omega t}$، و نعوضه في الجملة فنحصل على:

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\omega^2 A_1} + \frac{2k}{m}(2A_1 - A_2) = 0 \\ -\boldsymbol{\omega^2 A_2} + \frac{2k}{m}(A_2 - A_1) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\boldsymbol{4k}}{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{\omega^2}\right)\boldsymbol{A_1} - \frac{2k}{m}A_2 = 0 \\ -\frac{2k}{m}A_1 + \left(\frac{\boldsymbol{2k}}{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{\omega^2}\right)\boldsymbol{A_2} = 0 \end{cases}$$

لحساب النبضات الذاتية للنظام، نحل المعادلة:

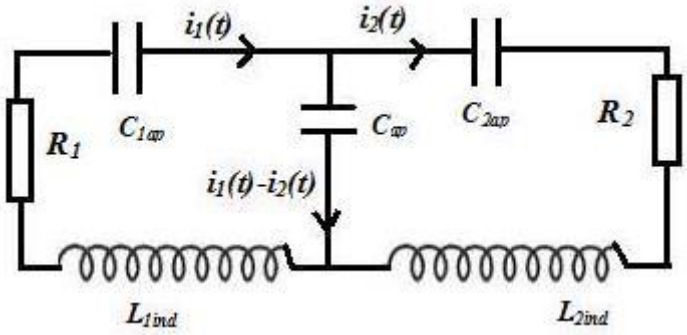
$$\boldsymbol{\Delta = 0}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\boldsymbol{4k}}{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{\omega^2} & -\frac{2k}{m} \\ -\frac{2k}{m} & \frac{\boldsymbol{2k}}{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{\omega^2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

نجد الحلين: $\boldsymbol{\omega_1 = \left(3 + \sqrt{5}\right)\frac{k}{m}}$ ، و $\boldsymbol{\omega_2 = \left(3 - \sqrt{5}\right)\frac{k}{m}}$

التمرين الثاني

نعتبر دائرتين كهربائيتين (R, L_{ind}, C_{ap}) متصلتين كما هو موضح في الشكل أدناه:



- ما هو عدد درجات الحرية؟
- أوجد لاغرانجيان النظام.
- أعط معادلات الحركة.

نهمل مقاومات الدائرتين. نأخذ الكميات الفيزيائية الجديدة مثل: $L_{1ind}=L_{2ind}=L_{ind}$ و $C_{1ap}=C_{2ap}=C_{ap}$ و $\omega_0^2=1/(L_{ind}.C_{ap})$

- أكتب المعادلات التفاضلية الجديدة للحركة.
- استنتاج النبضات الذاتية للنظام بدلالة ω_0 .
- أوجد الحلول العامة.
- ما هو النموذج الميكانيكي المكافئ؟

الحل:

فهم المشكلة

لدينا دائرتين كهربائيتين متساويتين متصلتين على التوالي، ويتم تمثيلهما بـ .(R, Lind, Cap) نريد تحديد عدد درجات الحرية، إيجاد لاغرانجيان النظام، ومعادلات الحركة .كما نريد إيجاد النبضات الذاتية للنظام وحل المعادلات التفاضلية .وأخيراً، نريد إيجاد النموذج الميكانيكي المكافئ.

الحل

1- عدد درجات الحرية

- **التيار :**بما أن التيار يتدفق في الدارتين، لدينا تياران مستقلان، وبالتالي درجتي حرية.

- **الشحنة :**بدلاً من التيار، يمكننا استخدام الشحنة على المكثفتين كدرجات حرية .وبالتالي، لدينا أيضاً درجتي حرية.

2.لاغرانجيان النظام

لإيجاد لاغرانجيان، نحتاج إلى تحديد الطاقة الحركية والطاقة الكامنة للنظام.

- **الطاقة الحركية :**تتعلق بالحث الذاتي للتيار .وبالتالي:

$$T = \frac{1}{2}L_{1ind}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{2ind}i_2^2$$

- **الطاقة الكامنة :**تتعلق بالشحنة المخزنة في المكثفات .وبالتالي:

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap1}}Q_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap2}}Q_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap}}Q^2$$

حيث Q_1 و Q_2 هما الشحنتان على المكثفين.

- **لاغراجيان النظام:**

$$L = T - U = \frac{1}{2}L_{1ind}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{2ind}i_2^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap1}}Q_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap2}}Q_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap}}(Q_1 - Q_2)^2\right)$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}L_{1ind}\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}L_{2ind}\dot{Q}_2^2 - \left(\frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap1}}Q_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap2}}Q_2^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C_{ap}}(Q_1 - Q_2)^2\right)$$

الطاقة المبددة هي: $D = \frac{1}{2}R_1 i_1^2 + \frac{1}{2}R_2 i_2^2 = \frac{1}{2}R_1\dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2}R_2\dot{Q}_2^2$

معادلات لاغرانج : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_1} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{Q}_1}$ و $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{Q}_2}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_1} = L_{1ind}\dot{Q}_1 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_1}\right) = L_{1ind}\ddot{Q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_2} = L_{2ind}\dot{Q}_2 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_2}\right) = L_{2ind}\ddot{Q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1} = -\frac{1}{C_{ap1}}Q_1 - \frac{1}{C_{ap}}Q_1 + \frac{1}{C_{ap}}Q_2,\ \frac{\partial L}{\partial Q_2} = -\frac{1}{C_{ap2}}Q_2 - \frac{1}{C_{ap}}Q_2 + \frac{1}{C_{ap}}Q_1,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{Q}_1} = R_1\dot{Q}_1, \frac{\partial D}{\partial \dot{Q}_2} = R_1\dot{Q}_2$$

$$\begin{cases} L_{1ind}\ddot{Q}_1 + \dfrac{1}{C_{ap1}}Q_1 + \dfrac{1}{C_{ap}}Q_1 - \dfrac{1}{C_{ap}}Q_2 = -R_1\dot{Q}_1 \\ L_{2ind}\ddot{Q}_2 + \dfrac{1}{C_{ap2}}Q_2 + \dfrac{1}{C_{ap}}Q_2 - \dfrac{1}{C_{ap}}Q_1 = -R_2\dot{Q}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \left(\dfrac{1}{L_{1ind}C_{ap1}} + \dfrac{1}{L_{1ind}C_{ap}}\right)Q_1 - \dfrac{1}{L_{1ind}C_{ap}}Q_2 = -\dfrac{R_1}{L_{1ind}}\dot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 + \left(\dfrac{1}{L_{2ind}C_{ap2}} + \dfrac{1}{L_{2ind}C_{ap}}\right)Q_2 - \dfrac{1}{L_{2ind}C_{ap}}Q_1 = -\dfrac{R_2}{L_{2ind}}\dot{Q}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \dfrac{R_1}{L_{1ind}}\dot{Q}_1 + \left(\dfrac{1}{L_{1ind}C_{ap1}} + \dfrac{1}{L_{1ind}C_{ap}}\right)Q_1 - \dfrac{1}{L_{1ind}C_{ap}}Q_2 = 0 \\ \ddot{Q}_2 + \dfrac{R_2}{L_{2ind}}\dot{Q}_2 + \left(\dfrac{1}{L_{2ind}C_{ap2}} + \dfrac{1}{L_{2ind}C_{ap}}\right)Q_2 - \dfrac{1}{L_{2ind}C_{ap}}Q_1 = 0 \end{cases}$$

باهمال المقاومات ، و اعتبار الحاثيا متساوية ةسعات المكثفات متساوية:

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \left(\dfrac{1}{LC} + \dfrac{1}{LC}\right)Q_1 - \dfrac{1}{LC}Q_2 = 0 \\ \ddot{Q}_2 + \left(\dfrac{1}{LC} + \dfrac{1}{LC}\right)Q_2 - \dfrac{1}{LC}Q_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{Q}_1 + \dfrac{2}{LC}Q_1 - \dfrac{1}{LC}Q_2 = 0 \\ \ddot{Q}_2 + \dfrac{2}{LC}Q_2 - \dfrac{1}{LC}Q_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + 2\omega_0^2 Q_1 - \omega_0^2 Q_2 = 0 \\ \ddot{Q}_2 + 2\omega_0^2 Q_2 - \omega_0^2 Q_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \omega_0^2(2Q_1 - Q_2) = 0 \\ \ddot{Q}_2 + \omega_0^2(2Q_2 - Q_1) = 0 \end{cases}$$

لحل هذه الجملة، نفرض الشكل المركب للحلين: $Q_1 = A_1 e^{j\omega t},\ Q_2 = A_2 e^{j\omega t}$

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + 2\omega_0^2 A_1 - \omega_0^2 A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_2 + 2\omega_0^2 A_2 - \omega_0^2 A_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\omega_0^2 - \omega^2)A_1 - \omega_0^2 A_2 = 0 \\ -\omega_0^2 A_1 + (2\omega_0^2 - \omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

لحساب الترددات الزاوية الذاتية للنظام، نحل المعادلة:

$$\Delta = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)(2\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = \mathbf{0}$$

الترددات الزاوية الذاتية للنظام هي: ω_0 و $\sqrt{3}\omega_0$.

لايجاد الحلول، نحل معادتي القيم الذاتية ونجد من أجل $\omega = \omega_0$:

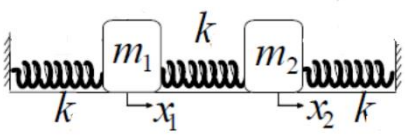
$$\begin{cases} Q_1(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ Q_2(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

الحلان من نفس الطور، أما من أجل $\omega = \sqrt{3}\omega_0$

$$\begin{cases} Q_1(t) = A\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi) \\ Q_2(t) = -A\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

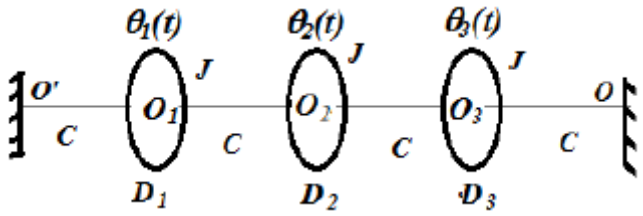
الحلان متعاكسان في الطور

النموذج الميكانيكي المكافئ:



التمرين الثالث

على عمود أفقي وثابت OO' ، ذو كتلة مهملة، مثبت عند طرفيه O وO' ، تم تثبيت ثلاثة أقراص(D_1) ، (D_2)و (D_3) بمراكزO_1، O_2و O_3 على التوالي، وجميعها لها نفس عزم القصور الذاتي J بالنسبة لمحورها المشترك .'OO سنرمز بـ $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ و$\theta_3(t)$ ، الزوايا الزاوية لدوران كل من الأقراص الثلاثة بالنسبة لوضعيتها المستقرة (التوازن).



الأجزاء الأربعة$O'O_1$ ، O_1O_2، O_2O_3 و O_3O من العمود لها نفس ثابت الالتواءC .

نضع: $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$.

المطلوب:

النظام الحر

- اعطاء لاغرانجيان هذا النظام.
- كتابة المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية التي تحققها الزوايا $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ و$\theta_3(t)$.
- استنتاج النبضات الذاتية الثلاثة ω_{1p} و ω_{2p} و ω_{3p} لهذا النظام بدلالة ω_0.
- تحديد السعات الزاوية للأقراص D_2 و D_3 لكل نمط ذاتي إذا كانت السعة الزاوية للقرص D_1 هي $A = 1Rad$.
- حساب الطاقة الميكانيكية الكلية E_T لهذه السلسلة من ثلاثة أقراص، لكل نمط ذاتي، بدلالة C والسعة الزاوية θ_1 للقرص D_1 .

النظام القسري

يتم تطبيق عزم محرك جيبي على القرص (D_1) فقط، وعزم الدوران هو $\Gamma(t)=\Gamma_0 cos(\omega t)$ حيث النبضة قابلة للتعديل وبسعة Γ_0. المطلوب:

- ايجاد السعات الزاوية A_1 و A_2 و A_3 لكل من الأقراص في النظام القسري بدلالة المعامل $X=(\omega/\omega_0)^2$.
- قيم X التي يكون فيها هذا النظام في حالة رنين؟

الحل:

حساب الطاقة الحركية للجملة:

$$T=\frac{1}{2}J\dot{\theta_1}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta_2}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta_3}^2$$

حساب الطاقة الكامنة للجملة:

$$U=\frac{1}{2}c\,\theta_1^2+\frac{1}{2}c\,(\theta_1+\theta_2)^2+\frac{1}{2}c\,(\theta_2+\theta_3)^2+\frac{1}{2}\,c\,\theta_3^2$$

لاغراجيان الجملة:

$$L=T-U=\frac{1}{2}J\dot{\theta_1}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta_2}^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta_3}^2-\left(\frac{1}{2}c\,\theta_1^2+\frac{1}{2}c\,(\theta_1+\theta_2)^2+\frac{1}{2}c\,(\theta_2+\theta_3)^2+\frac{1}{2}\,c\,\theta_3^2\right)$$

معادلات لاغرانج:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_2}=0\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_3}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_3}=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}J\ddot{\theta}_1+2c\theta_1+c\theta_2=0\\ J\ddot{\theta}_2+2c\theta_2+c\theta_1+c\theta_3=0\\ J\ddot{\theta}_3+2c\theta_3+c\theta_2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\ddot{\theta}_1+2\omega_0^2\theta_1+\omega_0^2\theta_2=0\\ \ddot{\theta}_2+2\omega_0^2\theta_2+\omega_0^2\theta_1+\omega_0^2\theta_3=0\\ \ddot{\theta}_3+2\omega_0^2\theta_3+\omega_0^2\theta_2=0\end{cases}$$

نفرض الحلول على الشكل:

$$\theta_i(t)=A_ie^{j\omega t}\quad\text{من أجل}:\ i=1,2,3$$

بتعويض هذه الحلول في الجملة، نتحصل على:

$$\begin{cases} (2\omega_0^2-\omega^2)A_1+\omega_0^2A_2 & =0 \\ \omega_0^2A_1+(2\omega_0^2-\omega^2)A_2+\omega_0^2A_3 & =0 \\ \omega_0^2A_{2+}(2\omega_0^2-\omega^2)A_3 & =0 \end{cases}$$

اذن قيم التردد الزاوي الذاتية للجملة تحقق : $\Delta=0$ ، نجد:

$$\omega_1=\sqrt{2}\omega_0,\ \omega_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega_0, \omega_3=\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega_0$$

من أجل $\omega_1=\sqrt{2}\omega_0$، نحصل على:

$$\begin{cases} \theta_1(t)=A_1\cos\left(\sqrt{2}\omega_0t+\varphi\right), & A_1=1 \\ \theta_2(t)=0 & A_2=0 \\ \theta_3(t)=-A_1\cos\left(\sqrt{2}\omega_0t+\varphi\right), & A_3=-1 \end{cases}$$

من أجل $\omega_2=\left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0$، نحصل على:

$$\begin{cases} \theta_1(t)=A_1\cos\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\omega_0t+\varphi\right), & A_1=1 \\ \theta_2(t)=\sqrt{2}\ A_1\cos\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\omega_0t+\varphi\right) & A_2=\sqrt{2} \\ \theta_3(t)=A_1\cos\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\omega_0t+\varphi\right), & A_3=1 \end{cases}$$

من أجل $\omega_3=\left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0$، نحصل على:

$$\begin{cases} \theta_1(t)=A_1\cos\left(\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\omega_0t+\varphi\right), & A_1=1 \\ \theta_2(t)=-\sqrt{2}\ A_1\cos\left(\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\omega_0t+\varphi\right) & A_2=-\sqrt{2} \\ \theta_3(t)=A_1\cos\left(\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\omega_0t+\varphi\right), & A_3=1 \end{cases}$$

حساب الطاقة الكلية للجملة:

$$E_T = \frac{1}{2}J\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right) + \frac{1}{2}c(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)$$

من أجل من أجل $\omega = \sqrt{2}\omega_0$، نحصل على: $E_T = J\dot{\theta}_1^2 + c\theta_1^2$

من أجل من أجل $\omega = \left(2 + \sqrt{2}\right)\omega_0$، و $\omega = \left(2 - \sqrt{2}\right)\omega_0$ ، نحصل على:

$$E_T = 2J\dot{\theta}_1^2 + 2c\theta_1^2$$

وريدة خلفاوي

مسائل الفصل الخامس

موجات عرضية على الحبل

التمرين الأول

تحقق ما إذا كانت الدوال التالية حلولًا لمعادلة ألمبيرت :

- $u(x,t) = Asin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right)$ ،
- $u(x,t) = Ae^{i\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)}$ ،
- $u(x,t) = A\,cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right)$
- $u(x,t) = Ae^{i\omega\left(t+\frac{x}{V}\right)}$
- $u(x,t) = \alpha(x+Vt)^2$

حيث : x ، t و V هي الموضع ، الزمن وسرعة الانتشار، على التوالي.

الحل:

معادلة ألومبير: $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = 0}$

من أجل $u(x,t) = Asin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right)$ ، $u(x,t) = Ae^{i\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)}$ ، $u(x,t) = A\,cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right)$

$u(x,t) = Ae^{i\omega\left(t+\frac{x}{V}\right)}$

- $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = -\omega^2 u}$ و $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = -\frac{\omega^2}{V^2}u}$ ، **اذن** $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = -\frac{\omega^2}{V^2}u - \left(-\frac{\omega^2}{V^2}\right)u = 0}$

من أجل: $u(x,t) = \alpha(x+Vt)^2$

$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \alpha V^2$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \alpha$ ، اذن $\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = \alpha - \frac{1}{V^2}\alpha V^2 = 0}$

التمرين الثاني

لنعتبر الأمواج الجيبية المعرفة بالمعادلتين التاليتين:

$$A_1(x,t) = 2\cos(6.28t - 15x) \quad \text{و} \quad A_2(x,t) = 5\cos(9.42t + 22x)$$

- جد سرعة الطور لكل موجة، v_{p_1} و v_{p_2} ؟
- أحسب سرعتي الطورو المجموعة v_p و v_g للموجة المحصلة .

الحل:

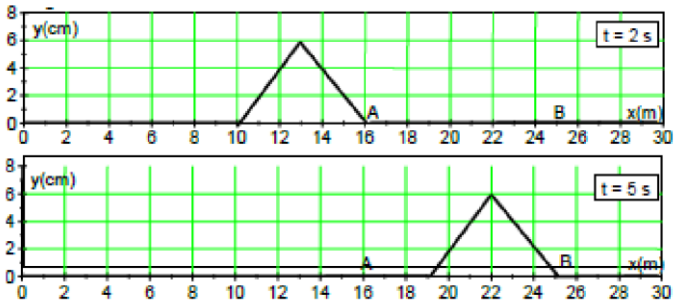
سرعة الطور للموجة $A_1(x,t)$: $v_{p_1} = \frac{\omega}{k} = \frac{6.28}{15} = 0.419\ m.s^{-1}$

سرعة الطور للموجة $A_2(x,t)$: $v_{p_1} = \frac{\omega}{k} = \frac{9{,}42}{22} = 0.428\ m.s^{-1}$

سرعة المجموعة: $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\pi}{37} = 0.085\ \text{m/s}$

التمرين الثالث

الشكل أدناه يمثل مظهر اهتزاز ينتشر على طول حبل لا نهائي الطول. مظهر الحبل ممثل في اللحظتين $t = 2s$، و $t = 5s$.



1- احسب سرعة انتشار هذا الاهتزاز. ما هو موضع الاهتزاز عند $t=0$؟

2- في أي لحظة t_1 ستكون سعة النقطة B في أقصاها؟

3- في أي لحظة t_2 تعود النقطة B إلى وضعها الأصلي

4- في أي لحظة t_3 ستعود النقطة A لأول مرة إلى إزاحة صفرية؟

5- ارسم على نفس الرسم البياني سعات النقاط $y_A(t)$ و $y_B(t)$ على الحبل .

6- مثل منحنى السرعة $\dot{y}_B(t)$ للنقطة B .

الحل:

أقصى سعة تتحرك على طول الحبل بسرعة v، وهي سرعة انتشار هذا الاهتزاز، نلاحظ من اشكل:

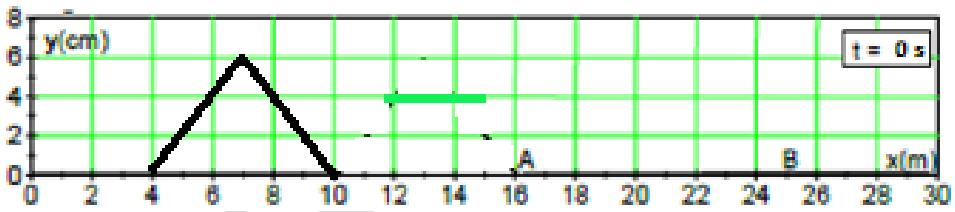
$y(13\ m, 2s) = y_0 = 6\ cm$ و $y(22\ m, 5s) = y_0 = 6\ cm$، $v = \frac{22-13}{5-2} = 3\ m.s^{-1}$

$$x = v \times t + x_0$$

اذن:

$$x_0 = x - v \times t = 13 - 3 \times 2 = 22 - 3 \times 5 = 7\ m$$

شكل الحبل عند $t=0$



نلاحظ أن $x_B = 25\ m$، $x_B = v \times t_1 + 7$، ومنه: $t_1 = \frac{x_B - 7}{3} = 6\ s$

ترجع النقطة B الى موضعها الأصلي بعد قطع مسافة 3 m، أي $t_2 = t_1 + \frac{d}{v} = 6 + 1 = 7s$

تعود النقطة A الى الازاحة الصفرية بعد بلوغ أقصى سعة(بعد قطع مسافة 3 m) أي

$$t_3 = t_A + \frac{d}{v} = \frac{x_A - 7}{3} + 1 = 4\ s$$

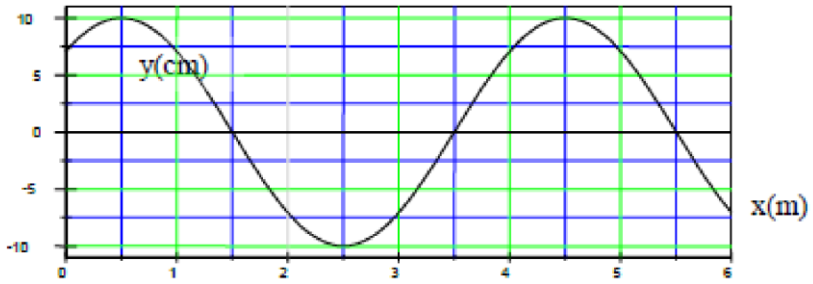
$$y_A(t) = \begin{cases} 6t - 12 & 2 \le t \le 3 \\ -6t + 24 & 3 \le t \le 4 \\ 0 & t \notin]2,4[\end{cases}$$

$$y_B(t) = \begin{cases} 6t - 30 & 5 \le t \le 6 \\ -6t + 42 & 6 \le t \le 7 \\ 0 & t \notin [5,7] \end{cases}$$

$$\dot{y}_B(t) = \begin{cases} 6 & 5 \le t \le 6 \\ -6 & 6 \le t \le 7 \\ 0 & t \notin [5,7] \end{cases}$$

التمرين الرابع

موجة عرضية جيبية تنتشر على طول حبل في اتجاه محور x السالب بسرعة $V=10\ m/s$. يوضح الشكل أدناه إزاحة الجسيمات على الحبل كدالة للموضع بدلالة الزمن t.



احسب سعة هذه الموجة، طولها، سرعة طورها، دورها، السرعة القصوى لجسيم على الحبل، و ما هي معادلة هذه الموجة؟

سعة هذه الموجة: $y_0 = 10\ cm$،

طول الموجة هي: $\lambda = 4\ m$،

دورها: $T = \frac{\lambda}{v} = 0.4\ s$،

سرعة طورها: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 5\pi\ rad/s$

معادلة هذه الموجة: $y(t) = A\ cos(\omega t - kx + \varphi)$

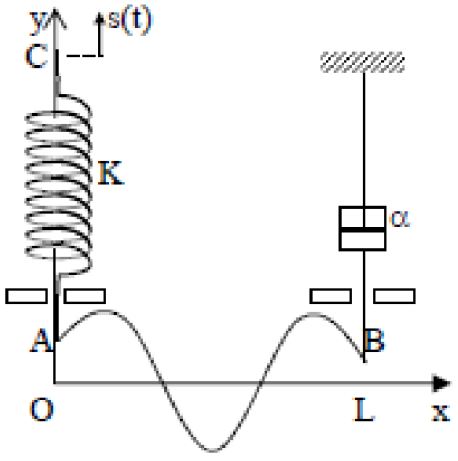
السرعة القصوى هي: $v_{max} = A \times \omega = 10 \times 5\pi = 50\pi\ cm/s$

التمرين الخامس

حبل أفقي AB ، بكتلة m وطول $L=2\ m$ ، مشدود بقوة شد قابلة للتعديل T. الحبل متصل عند نهايته A عند النقطة $x=0$ بنابض ذو صلابة K والذي يتصل نهايته C بجهاز هزاز. هذا الأخير ينقل للنابض حركة جيبية عرضية بسعة $s_0=1cm$ وتردد زاوي: $\omega=100\pi\ rad/s$: $S(t)=s_0e^{j\omega t}$

النهاية الأخرى B عند النقطة $x=L$ من الحبل متصلة بممتص صدمات ذو معامل احتكاك لزج $\alpha=0.2\ N.s.m^{-1}$. الأجهزة المنزلقة تماماً تسمح فقط بالحركات العرضية للنقاط A ، B و C . يتم تحديد نقطة M عند النقطة x في اللحظة t بإزاحتها الصغيرة $y(x,t)$ الموجة المنتشرة من A إلى B هي موجة تقدمية.

1- ما هي قوة الشد T، المعبر عنها بدلالة α و μ ، التي تجعل الموجة المنتشرة على طول الحبل موجة تقدمية؟ استنتج سرعة الطور V للموجة وطول الموجة λ.
2- أثبت أن النهايتين A و B من الحبل تهتزان في الطور ذاته.
3- عبّر عن القوى التي تؤثر في النقطة A واكتب المعادلة التفاضلية لحركة هذه النقطة.
4- أعط عبارات السعة y_0 والطور ϕ للإزاحة $y(0,t)$ للنقطة A . استنتج الإزاحة $y(x,t)$ لنقطة معينة على الحبل. في أي حالة يكون الطور ϕ مساوياً للصفر؟ وما هي في هذه الحالة سعة الاهتزاز لكل نقطة على الحبل؟



الحل:

شرط الموجة التقدمية :لكي تكون الموجة المنتشرة على طول الحبل موجة تقدمية، يجب أن تكون قوة الشد كافية للتغلب على قوى الاحتكاك في ممتص الصدمات .هذا يعني أن قوة الشد يجب أن تكون أكبر من القوة التي يولدها ممتص الصدمات.

العلاقة بين قوة الشد وسرعة الطور :سرعة الطور (v) للموجة على حبل مشدود تعطى بالعلاقة:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

حيث:

- Tهو قوة الشد.
- $\mu = \frac{m}{L}$ هو الكثافة الخطية للحبل.

ب. تحديد قوة الشد :T

قوة الشد Tالتي تجعل الموجة تقدمية تعتمد على معامل الاحتكاك اللزج αالمعادلة التي تصف تلاشي الموجة بمرور الزمن هي:

$$T = \alpha v$$

بتبديل v من معادلة سرعة الطور نحصل على:

$$T = \alpha \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

تربيع المعادلة لحل :T

$$T = \frac{\alpha^2}{\mu}$$

ج. طول الموجة λ

طول الموجة مرتبط بالتردد الزاوي ω وسرعة الطور v

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

إثبات أن النهايتين A و B تهتزان في الطور ذاته:

من المعلوم أن الحركة الجيبية العرضية عند النقطة A تُعطى بـ:

$$S(t) = S_0 e^{j\omega t}$$

والحركة عند النقطة B يمكن أن تُمثل كدالة جيبية:

$$S_B(t) = S_{0B} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

حيث φ هو فرق الطور.

إذا كانت النهايتان تهتزان في الطور ذاته، فإن $\varphi = 0$ ويكون:

$$\boldsymbol{S_B(t) = S(t)}$$

القوى المؤثرة عند النقطة A والمعادلة التفاضلية:

النقطة A تتأثر بعدة قوى:

- قوة النابض $F_s = -k\,S(t)$.
- قوة الشد T
- قوة الاخماد الناتجة عن معامل الاحتكاك اللزج

$$F_{damping} = -\alpha \dot{y}(0,t)$$

المعادلة التفاضلية للحركة عند النقطة A تصبح:

$$m\frac{d^2y(0,t)}{dt^2} + \alpha\frac{dy(0,t)}{dt} + k\,y(0,t) = 0$$

حساب السعة y_0 والطور ϕ

الإزاحة $y(0,t)$ يمكن تمثيلها كـ:

$$y(0,t) = y_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

لحل المعادلة التفاضلية، نحتاج إلى إيجاد القيم الابتدائية y_0 و ϕ

عندما يكون الطور $\phi=0$، تكون السعة هي الأعلى، ويكون الاهتزاز لكل النقاط على الحبل في الطور ذاته.

الاستنتاج النهائي:

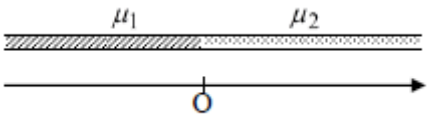
- قوة الشد T تعتمد على α و λ من خلال المعادلة : $T = \mu\alpha^2$
- سرعة الطور V تعتمد على T و μ .
- النهايتان A و B تهتزان في الطور ذاته عندما يكون الطور $\phi=0$.
- يمكن حساب الإزاحة $y(x,t)$ لأي نقطة على الحبل باستخدام المعادلة العامة للموجة العرضية المتنقلة.

التمرين السادس

حبلان 1 و 2، ذوا كتل خطية μ_1 و μ_2، متصلان عند النقطة O ومشدودان أفقيًا على طول محور Ox بقوة شد T . يتم اختيار الإحداثية $x=0$ عند وصلة O للحبلين. لنعتبر موجة ساقطة بالشكل التالي:

$$y_i(x,t) = a_i e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

تؤدي هذه الموجة إلى توليد، عند الوصلة O ، موجة منعكسة $y_r(x,t)$ (في المنطقة $x<0$) وموجة منقولة $y_t(x,t)$ في المنطقة $x>0$.



1- اكتب عبارات $y_1(x,t)$ للمنطقة $x<0$ و$y_2(x,t)$ للمنطقة $x>0$.

2- عبّر عن التوتر اللحظي في كل نقطة عرضية لحظية τ : في كل نقطة M عند الإحداثية x من الحبل 1 (المنطقة x<0) .

3- اكتب معادلتين للاستمرارية عند مستوى الوصلة O بالنسبة للإزاحة والتوتر العرضي.

4- استنتج معاملات الانعكاس r والانتقال t في الإزاحة بدلالة μ_1 وμ_2 .

5- تطبيق رقمي: احسب r وt عندما يكون حبل فولاذي (الحبل 1) بقطر $d_1=2\ mm$ متصلاً عند الوصلة O بحبل فولاذي آخر (الحبل 2) بقطر $d_2=1\ mm$.

6- تطبيق رقمي: نفس الأسئلة، مع الموجة الساقطة القادمة من اليمين نحو الوصلة O .

الحل:

الموجة الساقطة :تمثل بمعادلة جيبية تحدد سعتها، طول موجتها، وترددها الزاوي.

$$y_i(x,t) = a_i e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

الموجة المنعكسة :تمثل بمعادلة مشابهة للموجة الساقطة ولكن باتجاه معاكس.

$$y_r(x,t) = a_r\, e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

موجة الحبل الأول:

$$y_1(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = a_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + a_r\, e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

الموجة المنقولة (الحبل الثاني)

$$y_2(x,t) = y_t(x,t) = a_t e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

في نقطة التقاء الحبلين، يجب أن يتحقق شرطين:

- **استمرارية الإزاحة :**يجب أن تكون إزاحة الحبل متصلة عند نقطة التقاء الحبلين.
- **استمرارية المشتقة الأولى للإزاحة :**هذا الشرط يضمن استمرارية السرعة في نقطة التقاء الحبلين.

$$\boldsymbol{a_i + a_r = a_t}$$

$$\boldsymbol{k_1(a_i - a_r) = k_2 a_t}$$

باستخدام معادلتي الاستمرارية، يمكننا التعبير عن $\frac{a_r}{a_i}$ r و $\frac{a_t}{a_i}$ بدلالة k_1 و k_2 ، ثم بدلالة μ_1 و μ_2 مع العلم بأن سرعة الانتشار في وتر تعطى بالعلاقة $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ وأن عدد الموجي يرتبط بالسرعة بالعلاقة $k = \frac{\omega}{v}$نحصل على معاملي الانعكاس و الانكسار:

$$t = \frac{a_t}{a_i} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}} \quad \text{و} \quad r = \frac{a_r}{a_i} = \frac{\sqrt{\mu_2}-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}$$

لدينا الكثافة الخطية للحبل الأول هو ضعف كثافة الحبل الثاني، اذن: $\mu_1 = 4\mu_2$

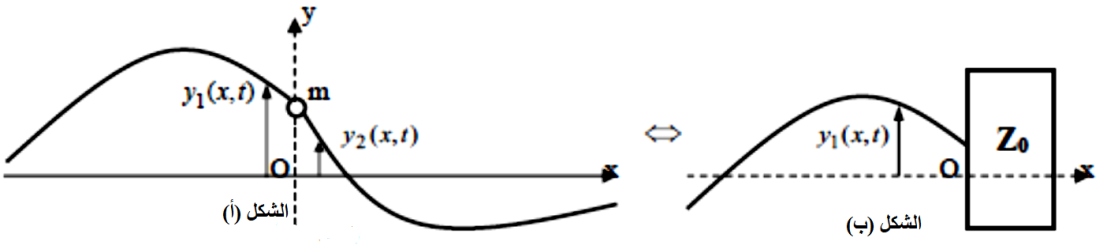
$$t = \frac{4}{3}, \quad r = \frac{-1}{3}$$

في هذه الحالة، تتغير معادلات وصف الموجات الساقطة والمنعكسة والمنقولة بشكل طفيف، ولكن مبادئ الحل تبقى كما هي .الفرق الرئيسي هو أن الموجة الساقطة تنتشر باتجاه x السالبة والموجة المنقولة تنتشر باتجاه x الموجبة في الحبل الأول.

التمرين السابع

حبل بطول لا نهائي، بكتلة خطية μ ، مشدود تحت توتر T اتجاه الحبل في حالة السكون متوازي مع المحور $x'O$ تم تثبيت كتلة m عند المركز $x=0$(انظر الشكل أ). يتم تجاهل وزن الحبل ووزن الكتلة m مقارنةً بالقوى الأخرى. نعتبر موجة ساقطة بإزاحة بالشكل التالي:

$$y_i(x,t) = a_i e^{j(\omega t - k_1 x)}$$



الموجة القادمة من اليسار (المنطقة $x<0$) وتنتشر في اتجاه زيادة x إنها تولد عند $x=0$ موجة منعكسة $y_r(x,t)$ وموجة منقولة $y_t(x,t)$ سنشير إلى r و t كمعاملات انعكاس وانتقال معقدة بالنسبة للأمبليتودات للإزاحات عند النقطة O .

1- قدم االعبارات المركبة للموجة العرضية، $y_1(x,t)$ للمنطقة $x<0$ وللموجة العرضية، $y_2(x,t)$ للمنطقة $x>0$.

2- بين أن القوة العرضية التي تؤثر على الكتلة m يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$F_y(0,t) = T\left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0}\right]$$

3- بين أنه، بالنظر إلى شرط استمرارية الإزاحة عند $x=0$ ومعادلة حركة الكتلة m، فإن معاملات الانعكاس r والانتقال t يمكن كتابتها كالتالي:

$$r = -\frac{jm\omega}{jm\omega+2Z_c}, \quad t = \frac{2Z_c}{jm\omega+2Z_c} \quad \text{مع} \quad Z_c = \sqrt{T\mu}$$

ما هي حدود هذين المعاملين عندما $m\to 0$ و $m\to\infty$ ؟

الحل:

1- الأمواج العرضية:

المنطقة x<0 :الموجة الناتجة هي مجموع الموجة الساقطة والموجة المنعكسة.

$$y_1(x,t) = a_i e^{j(\omega t - k_1 x)} + r\, a_i e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

المنطقة x>0 :الموجة المنقولة فقط.

$$y_2(x,t) = t\, a_i e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

حيث a_i :هو سعة الموجة الساقطة، r معامل الانعكاس، t معامل الانتقال، و k_1 و k_2 العددان الموجيان في المنطقتين.

2- القوة العرضية المطبقة على الكتلة m :

القوة تساوي الشد مضروبًا في فرق ميل الحبل على جانبي الكتلة. لأن الشد في اتجاهين مختلفين

$$F_y(0,t) = T \times \left(\left.\frac{\partial y_2}{\partial x}\right|_{x=0} - \left.\frac{\partial y_1}{\partial x}\right|_{x=0} \right)$$

3- معاملات الانعكاس والانتقال

بتطبيق شروط استمرارية الإزاحة والقوة عند نقطة الوصل، نحصل على جملة معادلات تسمح بحساب r و t:

$$1 + r = t \quad \text{و} \quad j\big((1-r) - t\big)k\,T = m\omega^2$$

و لدينا: $k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\frac{T}{\mu}}$، فنحصل على:

$$r = -\frac{jm\omega}{jm\omega + 2\sqrt{T\mu}}, \quad t = \frac{2\sqrt{T\mu}}{jm\omega + 2\sqrt{T\mu}}$$

الحالات الحدية:

- الكتلة المنعدمة :($m=0$) في هذه الحالة، $r = 0$ و$t = 1$ ، مما يعني أن الموجة بأكملها تمر ولا ينعكس شيء. الكتلة ليس لها أي تأثير على انتشار الموجة.
- الكتلة اللانهائية :($m \longrightarrow \infty$) في هذ الحالة، $r = -1$ و$t = 0$ ، مما يعني أن الموجة بأكملها تنعكس ولا يمر شيء. الكتلة تمنع تمامًا انتشار الموجة.
- التردد المنعدم :($\omega=0$) في هذه الحالة، $r = 0$ و$t = 1$ ، مما يعني أن الموجة بأكملها تمر. الترددات المنخفضة تعبر الكتلة بسهولة أكبر.
- التردد اللانهائي :($\omega \longrightarrow \infty$) في هذه الحالة، $r \longrightarrow -1$ و$t \longrightarrow 0$ ، مما يعني أن الموجة بأكملها تنعكس. الترددات العالية تنعكس بشكل أكبر بواسطة الكتلة.

مسائل الفصل السادس

الأمواج الطولية في السوائل

التمرين الأول

لتكن I شدة الصوت لموجة صوتية، وشدة المصدر تساوي $10^{-12}\ W/m^2$. لتكن I_{dB} مستوى شدة الصوت المعبر عنه بوحدة الديسيبل:(dB)

$$I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

1. احسب عتبة الألم للأذن البشرية بوحدة الديسيبل، علمًا أن شدتها هي $\mathbf{10\ W/m^2}$.
2. أحد مكبرات الصوت في جهاز الصوت عالي الدقة (Hi-Fi) يعمل، ومستوى شدة الصوت عند موقع المستمع هو $65\ dB$. ما هي شدة الصوت المدركة؟
3. يعمل مكبرا الصوت معًا. هل تم الوصول إلى عتبة الألم؟ وما هو المستوى الصوتي للمستمع؟

الحل:

•عتبة الألم:

$$I_{dB} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \times \log\left(\frac{10}{10^{-12}}\right) = 130\ dB$$

إذن، عتبة الألم للأذن البشرية هي130 dB.

•شدة الصوت عند مستوى I_{dB}= 65 dB :

$$I = I_0 \times 10^{(I_{dB}/10)} = 10^{5.5}\ W.m^{-2}$$

إذن، الشدة الصوتية التي يدركها المستمع هي $10^{5.5}\ W.m^{-2}$

●**عندما يعمل مكبرا الصوت معًا :**من الصعب تحديد الشدة الصوتية النهائية بدقة دون معلومات إضافية حول كيفية تداخل الصوتين (التراكب البناء أو الهدام) .بشكل عام، إذا افترضنا أن الصوتين يتراكبان بشكل بناء، فإن الشدة الصوتية ستزداد، ولكن ليس بالضرورة بشكل مضاعف.

التمرين الثاني

1. لدى الإنسان، أقصى سعة ضغط يمكن تحملها من الأذن (عتبة الألم) هي $p_m = 28\ Pa$ ما هي سعة الإزاحة u_m لمثل هذه الموجة الصوتية في الهواء عند تردد $f = 1000\ Hz$ ؟ احسب شدتها الصوتية.
2. نفس الأسئلة إذا كانت سعة الضغط الدنيا التي يمكن تحملها من الأذن البشرية (عتبة السمع) هي $p_m = 2.8 \times 10^{-5} Pa$ عند نفس التردد.

معطى للهواء: $\rho = 1.2\ kg/m^3$ و $v = 340\ m/s$.

الحل:

عتبة الألم

1. **حساب التردد الزاوي :** $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 1000 = 2000\pi\ \text{rad/s}$
2. **حساب سعة الإزاحة** $u_m = \frac{p_m}{\rho v\, \omega} = \frac{28}{1.2\times340\times2000\pi} = 1.09 \times 10^{-5} m$
3. **حساب شدة الصوت :** $I = 1\ W/m^2$

التمرين الثالث

يُعرَّف الممانعة الصوتية النوعية لوسط معين بأنها نسبة الضغط الصوتي إلى سرعة الجسيمات في التمثيل المركب: $Z = \frac{p}{\dot{u}}$ بـ (Rayls)

1. احسب Z لموجة مستوية تقدمية جيبية تتقدم نحو تزايد x

تطبيق عددي: نعطى للهواء: $\rho = 1.21\ kg/m^3$ و $v = 343\ m/s$

2. موجة ساقطة، $u(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$ ، تنتشر في الهواء وتصل إلى سطح صلب بممانعة صوتية نوعية عند $x=0$ تساوي $Z_0 = \frac{p(0,t)}{\dot{u}(0,t)}$

أ- احسب في نقطة ذات الإحداثي $x(x \leq 0)$ الممانعة $Z = \frac{p(x,t)}{\dot{u}(x,t)}$ بدلالة ρ ، V، Z_0 و $tg(kx)$.

ب- *ماهي قيمة الممانعة* $Z(-\frac{\lambda}{4})$، *أي عند* $x = -\frac{\lambda}{4}$. *أدرس الحالات الخاصة* $Z_0 = \infty$، $Z_0 = \rho V$، $Z_0 = jX$ *حيث* *عدد حقيقي موجب، وأحسب من أجل كل حالة :* $p(\left(-\frac{\lambda}{4}, t\right)$ و $\dot{u}((-\frac{\lambda}{4}, t)$.

ت- *نفس الأسئلة عند:* $x = -\frac{\lambda}{2}$.

التمرين الرابع

لنعتبر مصدر صوت ثابت بتردد f . و نعتبر جسمًا يقترب من مصدر الصوت بسرعة v . عند نفس موقع مصدر الصوت، يستقبل جهاز الاستقبال الصوتي الصوت المنعكس من الجسم المتحرك. يلاحظ أن التردد f' للصوت المستقبل مختلف عن التردد الصادر f .

1. ما هي هذا الظاهرة؟
2. يلاحظ أيضًا أن f' أكبر من f لماذا؟ سوف نقوم الآن بإيجاد العلاقة الرياضية التي تربط بين f' و f لنرمز بـ T لدور المصدر الصوتي و T' لدور الصوت المستقبل .لنعتبر الصوت المنبعث من المصدر عند اللحظة $t=0$ ينتشر الصوت ويصل إلى الجسم؛ لنرمز بـ d المسافة التي تفصل المصدر الصوتي عن الجسم في هذه اللحظة.
3. ما هي المدة الزمنية τ التي يستغرقها الصوت المنبعث عند اللحظة $t=0$ للوصول إلى الجسم والعودة؟
4. ما هي المدة الزمنية τ' التي يستغرقها الصوت المنبعث عند اللحظة $t= T$ للوصول إلى الجسم والعودة؟
5. ما هي العلاقة بين τ و τ' و T و T′ ؟
6. استنتج سرعة الجسم v، سرعة الصوت في الهواء c، علما أن : $f' = f\frac{c}{c-2V}$