

N° d'ordre :

Université de Saida– Dr. Moulay Tahar
Faculté des Sciences

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat en Sciences

Filière : Mathématiques

Spécialité : Géométrie différentielle

Par :

HALIMI Abderrazak

Thème :

Applications p-biharmoniques, bi-p-harmoniques et les formules de monotonie .



Thèse soutenue le 02/06/2002 devant le jury composé de :

N°	Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
01	Benziadi Fatima	MCA	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Président
02	Ouakkas Seddik	Prof.	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Rapporteur
03	Belarbi Lakehal	Prof.	Université de Mostaganem – Abdelhamid Ibn Badis	Examineur
04	Elhendi Hichem	MCA.	Université Tahri Mohammed – Béchar	Examineur

Résumé

"ثنائية التوافقية p -التوافقية، تطبيقات p -تطبيقات ثنائية وصيغ الرتبة"

الملخص:

في الجزء الأول من هذه الأطروحة ، درسنا التطبيقات التوافقية الثنائية حيث نجحنا في توصيف التوافق الثنائي للتطبيق المطابقة ، هذه النتيجة سمحت لنا ببناء أمثلة جديدة للتطبيقات p -ثنائية. التوافقية على وجه الخصوص في الفضاء الإقليدي.

في الجزء الثاني ، نحن مهتمون بإثبات معادلة الرتبة ، من خلال إعطاء بعض نتائج تطبيقات هذه الصيغة. كلمات مفتاحية: تطبيقات توافقية ، التطبيقات ثنائية التوافقية. تطبيق مطابق ، للتطبيقات p -ثنائية. التوافقية ،

« Applications p -biharmoniques, bi- p -harmoniques et les formules de monotonie »

Résumé :

Dans la première partie de cette thèse, nous avons étudié les applications bi- p -harmoniques où nous avons réussi à caractériser la bi- p -harmonicité d'une application conforme, ce résultat nous a permis de construire de nouveaux exemples d'applications bi- p -harmoniques en particulier sur l'espace euclidien.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à la démonstration de la formule de monotonie, en donnant quelques résultats d'applications de cette formule.

Mots clés : Applications harmoniques, applications biharmoniques, applications conformes et applications bi- p -harmonique.

« p -biharmonic maps , bi- p -harmonic maps and monotonicity formula »

Abstract :

In the first part of this thesis, we studied the bi- p -harmonic maps where we succeeded in characterizing the bi- p -harmonicity of a conformal map, this result allowed us to construct new examples of bi- p -harmonic maps in particular on Euclidean space.

In the second part, we are interested in the proof of the monotonicity formula, by giving some results of applications of this formula.

Key words : Harmonic maps , biharmonic maps, conformal maps, bi- p -harmonic maps.

Table des matières

1	Applications harmoniques et bi-harmoniques	10
1.1	Rappels de géométrie riemannienne	10
1.1.1	Définitions et notations	10
1.1.2	Théorème de divergence	13
1.1.3	Fibré inverse (Pull-back)	14
1.1.4	Seconde forme fondamentale	16
1.1.5	Troisième forme fondamentale	16
1.2	Equations d'Euler-Lagrange	17
1.3	Applications harmoniques	19
1.3.1	Généralités	19
1.3.2	Tenseur énergie-impulsion	21
1.3.3	Champ de tension et tenseur énergie-impulsion d'une application conforme	21
1.3.4	Formule de monotonie pour les applications harmo- niques	23
1.4	Applications biharmoniques	23
1.4.1	Généralités	23
1.4.2	Tenseur bi-énergie impulsion	24
1.4.3	Tenseur bi-énergie-impulsion d'une application conforme	25
1.4.4	Champ de bi-tension d'une application conforme	25
1.4.5	Formule de monotonie pour les applications biharmo- niques	26
2	Applications p-harmoniques et bi-p-harmoniques	27
2.1	Applications p -harmoniques	27

2.1.1	Généralités	27
2.1.2	Première variation de de la p -énergie	28
2.1.3	Deuxième variation de la fonctionnelle p -énergie	30
2.1.4	Applications p -harmoniques stables	33
2.1.5	Tenseur p -énergie impulsion	36
2.2	Applications bi- p -harmoniques	37
2.2.1	Généralités	37
2.2.2	Première variation de la bi- p -énergie	38
2.2.3	Tenseur bi- p -énergie impulsion	43
2.3	Bi- p -harmonicité des applications conformes	44
2.3.1	Champ de bi- p -tension d'une application conforme	44
2.3.2	Tenseur bi- p -énergie-impulsion d'une application conforme	57
2.3.3	Le cas d'un difféomorphisme conforme	60
3	Quelques résultats sur les applications p-biharmoniques.	64
3.1	Généralités sur les applications f -harmoniques et f -biharmoniques	64
3.1.1	Applications f -harmoniques	64
3.1.2	Applications f -biharmoniques	65
3.2	Applications p -biharmoniques	66
3.3	La p -biharmonicité des applications conformes	67
3.3.1	Le cas d'un difféomorphisme conforme	72
3.3.2	Le tenseur p -bi-énergie impulsion	76
3.4	Formule de monotonie pour les applications p -harmoniques	81
3.5	La formule de monotonie pour les applications p -biharmoniques	84

Remerciements

Je ne peut finaliser ce modeste travail sans remercier les personnes ayant contribué à sa réalisation. Je commence par le personne sans qui cette thèse n'aurait pas vue le jour, j'ai nommé mon directeur de thèse le professeur Ouakkas Seddik. J'ai eu le plaisir de beaucoup apprendre auprès de lui, je le remercie pour sa patience et son investissement lors de la rédaction de ce manuscrit.

Je remercie les membres du jury, à commencer par Dr. Benziadi Fatima qui a accepter de le présider. Ma gratitude va également aux examinateurs : Prof. Belarbi Lakehal et Dr. Elhendi Hichem qui ont eu la gentillesse et la patience d'évaluer ce travail.

Ma reconnaissance va également à toute personne ayant participer d'une quelque façon, à la réalisation de cette thèse, en particulier Mr. Zaglaoui Ahmed pour son soutien et son aide concrète.

Je termine par un vif hommage à mes très chers parents, qui ont toujours été la pour moi, au même titre que ma femme, et mes frères.

Introduction.

Les applications harmoniques et biharmoniques ont fait l'objet de plusieurs papiers ces dernières années, notamment la construction de telles applications.

Etant donné $\phi : M \longrightarrow N$ une application lisse, entre deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, g) . Les applications harmoniques et biharmoniques sont respectivement définies comme étant les points critiques des fonctionnelles énergie et bi-énergie. Ces fonctionnelles définies comme suit :

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_D |d\phi|^2 dv_g,$$

et

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\phi)|^2 dv_g,$$

où dv_g la mesure de M associée à la métrique g et $|d\phi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\phi$.

Les équations d'Euler-Lagrange, nous permettent de définir respectivement l'équation d'harmonicité et de biharmonicité par :

$$\tau(\phi) = \text{Tr}_g(\nabla d\phi) = 0,$$

$$\tau_2(\phi) = -\text{Tr}_g(\nabla^\phi)^2 \tau(\phi) - \text{Tr}_g R^N(\tau(\phi), d\phi) d\phi = 0,$$

où $\tau(\phi)$ et $\tau_2(\phi)$ sont le champ de tension et de bitension de ϕ respectivement. Soient $p \in M$, (U, x^i) un système de coordonnées locales au-dessus de p et (V, y^α) un système de coordonnées locales au-dessus de $\phi(p)$. La restriction de $\tau(\phi)$ à U s'écrit alors :

$$\tau(\phi)^\alpha = \Delta \phi^\alpha + g^{ij} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x_j}, \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

et la restriction de $\tau_2(\phi)$ à V s'écrit :

$$\begin{aligned} \tau_2(\phi) = & g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \tau^\sigma}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \tau^\beta}{\partial x_j} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + \tau^\alpha \frac{\partial^2 \phi^\beta}{\partial x_i \partial x_j} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \right. \\ & + \tau^\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial x_j} + \tau^\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^v}{\partial x_j} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\rho {}^N \Gamma_{v\rho}^\sigma \\ & \left. - \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial x_k} + \tau^\alpha \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_k} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \right) - \tau^v \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x_j} {}^N R_{\beta\alpha v}^\sigma \right) \frac{\partial}{\partial y_\sigma} \circ \phi. \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations montrent que les applications harmoniques (resp. biharmoniques) sont les solutions d'un système elliptique non linéaire du second (resp. quatrième) ordre.

Pour les applications harmoniques, on cite une généralisation donnée par les applications p -harmoniques, qui sont les points critiques de la fonctionnelle p -énergie :

$$E_p(\phi) = \frac{1}{p} \int_D |d\phi|^p v_g.$$

Ces applications satisfont l'équation d'Euler-Lagrange associée à E_p , qui est équivalente à la nullité du champ de p -tension de ϕ suivant

$$\tau_p(\phi) = \operatorname{div}^M(|d\phi|^{p-2} d\phi) = |d\phi|^{p-2} \{ \tau(\phi) + (p-2) d\phi(\operatorname{grad} \ln |d\phi|) \}.$$

Le but principal de cette thèse est de présenter deux généralisations des applications biharmoniques. La première généralisation concerne les applications bi- p -harmoniques, qui sont les points critiques de la fonctionnelle bi- p -énergie associée à ϕ , donnée par :

$$E_{2,p}(\phi) = \frac{1}{2} \int_D |\tau_p(\phi)|^2 v_g,$$

et qui sont les solutions de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(\phi) = & -|d\phi|^{p-2} \operatorname{Tr}_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi - \operatorname{Tr}_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) \\ & - (p-2) \operatorname{Tr}_g \nabla^\phi (|d\phi|^{p-4} d\phi \langle \nabla^\phi \tau_p(\phi), d\phi \rangle) \\ = & 0, \end{aligned}$$

où $\tau_{2,p}(\phi)$ est appelé le champ de bi- p -tension de ϕ .

La deuxième généralisation est celle des applications p -biharmoniques qui sont les points critiques de la fonctionnelle p -bi-énergie :

$$E_{p,2}(\phi) = \frac{1}{p} \int_M |\tau(\phi)|^p dv_g,$$

ces applications sont les solutions de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\tau_{p,2} &= \frac{-2}{p} \Delta(|\tau(\phi)|^{p-2} \tau(\phi)) - \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} \text{Tr}_g R(\tau(\phi), d\phi) d\phi \\ &= 0\end{aligned}$$

Cette thèse se décompose en trois chapitres. Dans le premier chapitre on donne un rappel géométrique de quelques notions de variétés riemanniennes, en particulier la géométrie associée à l'espace fibré tangent inverse et la connexion induite, et on rappelle quelques concepts concernant les applications harmoniques et biharmoniques.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à la première généralisation donnée les applications bi-p-harmoniques, on rappelle les principaux résultats des applications p-harmoniques, les tenseurs p-énergie impulsion et le tenseur bi-p-énergie impulsion, ainsi que la relation entre ces tenseurs et les applications p-harmoniques et bi-p-harmoniques. Comme premier résultat, nous avons établi une relation entre $\tau_{2,p}(\phi)$ et $\tau_p(\phi)$, donnée par la proposition suivante :

Proposition 1. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , alors la relation entre $\tau_{2,p}(\phi)$ et $\tau_p(\phi)$ est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\tau_{2,p}(\phi) &= -|d\phi|^{p-2} \left(\text{Tr}_g (\nabla^\phi)^2 \tau_p(\phi) + \text{Tr}_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi \right) \\ &\quad + (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi (\text{grad}(\ln |d\phi|^2)) \\ &\quad - (p-2) |d\phi|^{p-4} d\phi (\text{grad} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle) \\ &\quad - (p-2) |d\phi|^{-2} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle \tau_p(\phi) \\ &\quad - \frac{(p-2)}{2} |d\phi|^{p-2} \nabla_{\text{grad}(\ln |d\phi|^2)}^\phi \tau_p(\phi).\end{aligned}$$

Le but principal de ce chapitre est l'étude de la bi-p-harmonicité des applications conformes, on a obtenu un résultat qui la caractérise en fonction uniquement de la dilatation. Nous calculons le champ de bi-p-tension d'une application conforme, nous obtenons :

Théorème 1.

Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , alors la bi-p-tension de ϕ est donnée par :

$$\tau_{2,p}(\phi) = (n-p) n^{p-3} \lambda^{2p-4} d\phi (H(\lambda, n, p)),$$

où

$$\begin{aligned} H(\lambda, n, p) = & (n + p - 2) \operatorname{grad}(\Delta \ln \lambda) \\ & - \frac{(n^2 - 5np + 4n - 2p^2 + 8p - 8)}{2} \operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \\ & - (p - 1)(n^2 - 3np + 4n - 2p^2 + 8p - 8) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & - 2(n - p^2 + 3p - 2)(\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda + 2n \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \lambda). \end{aligned}$$

Puis, nous calculons le tenseur bi- p -énergie impulsion d'une application conforme, nous montrons que sa trace ne dépend que de la dilatation λ , nous avons le théorème suivant :

Théorème 2. Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ , alors on a

$$\begin{aligned} S_{2,p}(\phi)(X, Y) = & (p - n)(n - p + 2)n^{p-3}\lambda^{2p-2}(\Delta \ln \lambda)g(X, Y) \\ & + \frac{p - n}{2}n^{p-3}\lambda^{2p-2}(n(n + p - 4) - 2(p - 2)^2)|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\ & - 2(p - n)n^{p-2}\lambda^{2p-2}(\nabla d \ln \lambda(X, Y) - (p - 2)X(\ln \lambda)Y(\ln \lambda)), \end{aligned}$$

Il suit que

$$\operatorname{Tr}_g S_{2,p}(\phi) = -(p - n)^2 n^{p-2} \lambda^{2p-2} T(\lambda),$$

où

$$T(\lambda) = \Delta \ln \lambda + \frac{n(n + p - 4) - 2(p - 2)(p - 4)}{2(n - p)} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2.$$

Enfin, on a étudié la bi- p -harmonicité de l'application inverse, en donnant la condition nécessaire pour qu'un difféomorphisme conforme et son inverse soient bi- p -harmoniques. Ces résultats nous ont permis de construire quelques exemples applications bi- p -harmoniques.

Le travail réalisé dans ce chapitre a fait l'objet d'un papier intitulé " on the bi- p -harmonic maps and the conformal maps", publié dans la revue "Facta Universitatis. Series : Mathematics and Informatics" (2021).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des applications p -biharmoniques, on donne tout d'abord la relation entre $\tau_{p,2}(\phi)$ et $\tau_2(\phi)$ par la formule sui-

vante :

$$\begin{aligned}\tau_{p,2}(\phi) = & \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} \tau_2(\phi) - \frac{p-2}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} \Delta(|\tau(\phi)|^2) \tau(\phi) \\ & - \frac{(p-2)(p-4)}{2p} |\tau(\phi)|^{p-6} |\text{grad}(|\tau(\phi)|^2)|^2 \tau(\phi) \\ & - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} \nabla_{\text{grad}(|\tau(\phi)|^2)}^\phi \tau(\phi).\end{aligned}$$

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons une caractérisations de la p -biharmonicité des applications conformes. Cette caractérisation est donnée, par le théorème suivant :

Théorème 3. Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$, $(n \geq 3)$, une application conforme de dilatation λ . Alors ϕ est p -biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}& |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{grad}(\Delta \ln \lambda) - \frac{(n-4p+2)}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2) \\ & + (p-2)^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda (\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)) \text{grad} \ln \lambda \\ & + (p-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2 \nabla_{\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)} \text{grad} \ln \lambda \\ & + \frac{p-2}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^2 \Delta(|\text{grad} \ln \lambda|^2) \text{grad} \ln \lambda \\ & + \frac{(p-2)(p-4)}{4} |\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)|^2 \text{grad} \ln \lambda \\ & + (p^2 - 2p - n + 2) |\text{grad} \ln \lambda|^6 \text{grad} \ln \lambda \\ & + (p-4) |\text{grad} \ln \lambda|^4 (\Delta \ln \lambda) \text{grad} \ln \lambda \\ & + 2 |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{Ricci}(\text{grad} \ln \lambda) = 0.\end{aligned}$$

En calculant le tenseur p -bi-énergie impulsion d'une application conforme, nous obtenons :

Théorème 4. Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ , alors on a

$$\begin{aligned}& S_{2,p}(\phi)(X, Y) \\ & = \frac{p-n}{2} n^{p-3} \lambda^{2p-2} (n(n+p-4) - 2(p-2)^2) |\text{grad} \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\ & + (p-n)(n-p+2) n^{p-3} \lambda^{2p-2} (\Delta \ln \lambda) g(X, Y) \\ & - 2(p-n) n^{p-2} \lambda^{2p-2} (\nabla d \ln \lambda(X, Y) - (p-2) X(\ln \lambda) Y(\ln \lambda)),\end{aligned}$$

et la trace de $S_{2,p}(\phi)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} Tr_g S_{2,p}(\phi) &= \frac{p-n}{2} n^{p-2} \lambda^{2p-2} (n(n+p-4) - 2(p-2)(p-4)) |grad \ln \lambda|^2 \\ &\quad - (p-n)^2 n^{p-2} \lambda^{2p-2} (\Delta \ln \lambda). \end{aligned}$$

Enfin, nous donnons une condition nécessaire pour qu'un difféomorphisme conforme et son inverse soient p -biharmoniques.

Dans la deuxième partie, on a réussi à démontrer des formules de monotonie pour les applications p -harmoniques et p -biharmoniques, en se basant sur le fait que :

$$\operatorname{div} S_p(\phi) = -h(\tau_p(\phi), d\phi)$$

et

$$\operatorname{div} S_{p,2}(\phi) = -h(\tau_{p,2}(\phi), d\phi) - \frac{p-2}{2p} |\tau(\phi)|^{p-2} d(|\tau(\phi)|^2).$$

on a obtenu les résultats suivants :

Théorème 5. $\phi : B_R^m \longrightarrow (N, h)$ une application p -harmonique, alors :

$$\frac{m-p}{p} \int_{B_r^m} |d\phi|^p dx = \int_{\partial B_r^m} r \left(\frac{1}{p} |d\phi|^p - |d\phi|^{p-2} \left| d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right|^2 \right) d\sigma, \quad r < R.$$

Théorème 6. $\phi : B_R^m \longrightarrow (N, h)$ une application bi- p -harmonique, alors :

$$\begin{aligned} &\frac{4-m}{p} \int_{B_R^m} |\tau(\phi)|^p dx - \frac{p-2}{p^2} \int_{B_R^m} r \frac{\partial}{\partial r} (|\tau(\phi)|^p) dx \\ &= -\frac{r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^p d\sigma - \frac{2(m-2)}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} h \left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right) d\sigma \\ &\quad - \frac{2r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(h \left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \right) d\sigma \\ &\quad + \frac{4r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} h \left(\tau(\phi), \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Notons que, si on remplace $p = 2$ dans les résultats trouvés, on obtient les formules de monotonie connues pour les applications harmoniques et biharmoniques.

Chapitre 1

Applications harmoniques et bi-harmoniques

Ce premier chapitre se veut comme un bref rappel des applications harmoniques. On commence par énumérer les résultats préliminaires de géométrie riemannienne qui seront utiles par la suite. Plus précisément dans l'étude des applications harmoniques et bi-harmoniques.

Dans toute la suite de manuscrit, et sauf mention contraire, M (resp. N) désigne une variété de classe C^∞ de dimension m (resp. n). On note également $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe C^∞ et $\Gamma(TM)$ le $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs sur M .

1.1 Rappels de géométrie riemannienne

1.1.1 Définitions et notations

1. Une métrique riemannienne g sur M est un champ de $(0, 2)$ -tenseurs sur M tel que $\forall x \in M$, g_x est un produit scalaire sur $T_x M$. On dit que (M, g) est une variété riemannienne de classe C^∞ et de dimension m . Une métrique g peut être vue comme une application $C^\infty(M)$ -bilinéaire de $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ à valeurs dans $C^\infty(M)$. Si $(U, x^1, \dots, x^m)$ est un système de coordonnées locales au-dessus

d'un ouvert U , la restriction de g à U peut s'écrire :

$$g = \sum_{i,j=1}^m g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

où g_{ij} sont des fonctions C^∞ sur U , telles que $g_{ij} = g_{ji}, \forall i, j \in \mathbb{N}$, on note g^{ij} l'élément qui se trouve à l'intersection de la i -ème ligne et de j -ème colonne de la matrice inverse de $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$.

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, la métrique g induit :

2. Une unique connexion affine ∇^M sans torsion i.e

$$\nabla_X^M Y - \nabla_Y^M X = [X, Y], \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

et parallèle relativement à g i.e

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X^M Y, Z) + g(Y, \nabla_X^M Z), \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM),$$

appelée la connexion de Levi-Civita de g ou de (M, g) .

Dans un système de coordonnées locales (U, x^i) , on appelle les symboles de Christoffel de ∇^M relativement à ce système, les fonctions C^∞ sur U définie par : $\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^M \frac{\partial}{\partial x_j})$. Elles sont données explicitement par les formules :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad i, j, k = 1, \dots, m.$$

3. Le tenseur de courbure R^M de (M, g) , ou de ∇^M est défini par :

$$R^M(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Il vérifie, en particulier, les identités suivantes :

$$R^M(X, Y)Z + R^M(Y, Z)X + R^M(Z, X)Y = 0.$$

$$(\nabla_X R^M)(Y, Z) + (\nabla_Y R^M)(Z, X) + (\nabla_Z R^M)(X, Y) = 0.$$

4. La courbure de Ricci :

$$\text{Ric}^M(X, Y) = \text{tr}_g(Z \mapsto g(R^M(X, Z)Z, Y)).$$

On appelle tenseur de Ricci de (M, g) le champ de $(1, 1)$ -tenseurs défini par :

$$g(\text{Ric}^M X, Y) = \text{Ric}^M(X, Y)$$

5. La courbure sectionnelle d'un plan engendré par une famille g -orthonormée $\{X, Y\}$ est définie par :

$$Sect^M(X, Y) = g(R^M(X, Y)Y, X).$$

6. Un isomorphisme de $C^\infty(M)$ -modules :

$$\begin{aligned} \# : \Gamma(T^*M) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ \omega &\mapsto \omega^\# \end{aligned}$$

défini par $g(\omega^\#, X) = \omega(X)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

À l'aide de la métrique, on peut définir les applications suivantes :

1. L'application gradient est définie par :

$$\begin{aligned} \text{grad}^M : C^\infty(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ f &\longmapsto df^\#, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$df(X) = X(f) = g(\text{grad}^M f, X), \text{ pour tout } X \in \Gamma(TM).$$

2. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ est définie par :

$$\begin{aligned} \text{div}^M : \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto \text{div}^M X = \text{tr}_g(Y \longmapsto g(\nabla_Y^M X, Y)). \end{aligned}$$

Cette application peut s'étendre aux 1-formes différentielles et au un champ de $(0, 2)$ -tenseurs comme suit :

$$\text{div}^M \omega = \text{div}(\omega^\#),$$

$$(\text{div}^M T)(X) = \text{tr}_g(Y \longmapsto \nabla_Y T(X, Y)).$$

3. Le Laplacien est défini par :

$$\begin{aligned} \Delta^M : C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto \Delta^M f = \text{div}^M(\text{grad}^M f). \end{aligned}$$

4. La hessienne d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est définie par :

$$\begin{aligned} (\text{Hess}^M f) : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\longmapsto (\text{Hess}^M f)(X, Y) = g(\nabla_X^M \text{grad}^M f, Y). \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1. Dans une base orthonormée locale au-dessus d'un ouvert U , on a :

1. $\text{div}^M X = \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}^M X, e_i)$.
2. $\text{div}^M \omega = \sum_{i=1}^m (e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i}^M e_i))$.
3. $(\text{div}^M T)(X) = \sum_{i=1}^m (e_i(T(e_i, X)) - T(\nabla_{e_i}^M e_i, X) - T(e_i, \nabla_{e_i}^M X))$.
4. $\Delta^M f = \text{div}^M \text{grad}^M f = \sum_{i=1}^m (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}^M e_i)(f)), f \in C^\infty(M)$.

1.1.2 Théorème de divergence

Définition 1.1.1. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n . On appelle mesure de volume riemannienne, noté v^M ou v^g , la mesure définie localement dans un repère par

$$v^M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Exemple 1.1.1. On considère la variété $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y) on a

$$g_0 = dx^2 + dy^2,$$

et,

$$v^{g_0} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy$$

On Considère la sphère S^2 muni de la métrique :

$$g = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

alors,

$$v^g = \sqrt{\det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |\sin \theta| d\theta \wedge d\varphi$$

Proposition 1.1.1. (Théorème de divergence). Soient D un domaine compact à bord dans une variété riemannienne (M, g) , ω une 1-forme et X un champ de vecteurs, définies sur un voisinage incluse dans D . Alors :

$$\int_D (\text{div} \omega) v^M = \int_{\partial D} \omega(\mathbf{n}) v^{\partial D} \text{ et } \int_D (\text{div} X) v^M = \int_{\partial D} g(X, \mathbf{n}) v^{\partial D},$$

où ∂D est le bord de D et $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ est le vecteur unitaire normale à ∂D .

Corollaire 1.1.1. *Pour tout ω une 1-forme et X un champ de vecteurs à supports compact dans un domaine D , alors :*

$$\int_D (\operatorname{div} \omega) v^M = 0 \text{ et } \int_D (\operatorname{div} X) v^M = 0$$

1.1.3 Fibré inverse (Pull-back)

Définition 1.1.2. *Soit $\phi : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ entre deux variétés différentiables. Le fibré inverse (Pull-back) est défini par :*

$$\begin{aligned} \phi^{-1}TN &= \{(x, v) | x \in M, v \in T_{\phi(x)}N\} \\ &= \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_{\phi(x)}N, \end{aligned}$$

Une section sur $\phi^{-1}TN$ est une application de classe C^∞ , $V : M \rightarrow TN$ tel que $V_x \in T_{\phi(x)}N, \forall x \in M$. Notons par $\Gamma(\phi^{-1}TN)$ l'ensemble des sections sur $\phi^{-1}TN$.

Définition 1.1.3. *Soient M, N deux variétés différentiables, $\phi : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ , et ∇^N une connexion linéaire sur N . La connexion de Pull-back est une application :*

$$\nabla^\phi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\phi^{-1}TN) \longrightarrow \Gamma(\phi^{-1}TN),$$

définie par :

$$\nabla_X^\phi(Y \circ \phi) = (\nabla_{d\phi(X)}^N Y) \circ \phi, \quad \forall X \in \Gamma(TM), \forall Y \in \Gamma(TN).$$

Soient $(U, x^i), (V, y^\beta)$ deux systèmes de coordonnées locales au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ et $V \subset N$ respectivement tels que $\phi(U) \subset V$, alors pour tout $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ et $\varphi^\beta = y^\beta \circ \phi$, on a

$$d\phi(X) = X^i \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \phi \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$$

et

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\phi d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\{ \frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \phi \right\} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \phi$$

En effet

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\phi d\phi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\phi \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \phi \\
&= \frac{\partial^2 \phi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \phi + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}^\phi \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \phi \\
&= \frac{\partial^2 \phi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \phi + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}^N \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) \circ \phi \\
&= \frac{\partial^2 \phi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \phi + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \circ \phi \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \phi.
\end{aligned}$$

Remarque 1.1.3.1. Soient M, N deux variétés différentiables, $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(TN)$ et $\phi : M \rightarrow N$ une application différentiable ; Si X et V (resp. Y et W) sont ϕ -conjugué i.e. $d\phi(X) = V \circ \phi$ et $d\phi(Y) = W \circ \phi$, alors :

$$\nabla_X^\phi d\phi(Y) = (\nabla_V^N W) \circ \phi.$$

Proposition 1.1.2. Soit $\phi : M \rightarrow N$ une application différentiable. Si ∇^N une connexion linéaire compatible avec une métrique h sur N , alors la connexion linéaire ∇^ϕ est compatible avec la métrique h_ϕ sur $\phi^{-1}TN$. C'est à dire, pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $V, W \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ on a :

$$X(h_\phi(V, W)) = h_\phi(\nabla_X^\phi V, W) + h_\phi(V, \nabla_X^\phi W).$$

Démonstration. Soient $X \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ et $\tilde{X}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \Gamma(TN)$, tels que

$$d\phi(X) = \tilde{X} \circ \phi, \tilde{V} \circ \phi = V \text{ et } \tilde{W} \circ \phi = W$$

alors,

$$\begin{aligned}
X(h_\phi(V, W)) &= X(h(\tilde{V}, \tilde{W}) \circ \phi) \\
&= \tilde{X}(h(\tilde{V}, \tilde{W})) \circ \phi \\
&= h(\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{V}, \tilde{W}) \circ \phi + h(\tilde{V}, \nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{W}) \circ \phi \\
&= h_\phi(\nabla_X^\phi V, W) + h_\phi(V, \nabla_X^\phi W).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.3. Si ∇^N une connexion sans torsion sur N , alors

$$\nabla_X^\phi d\phi(Y) = \nabla_Y^\phi d\phi(X) + d\phi([X, Y]),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Démonstration. Soit $V, W \in \Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs ϕ -conjugués avec X et Y respectivement. On a :

$$[V, W] \circ \phi = d\phi \circ [X, Y]$$

$$\nabla_V^N W = \nabla_W^N V + [V, W]$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla_X^\phi d\phi(Y) &= (\nabla_V^N W) \circ \phi \\ &= (\nabla_W^N V + [V, W]) \circ \phi \\ &= \nabla_Y^\phi d\phi(X) + d\phi([X, Y]). \end{aligned}$$

□

1.1.4 Seconde forme fondamentale

Définition 1.1.4. Soient $(M, g), (N, h)$ deux variétés riemannienne et $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ . La seconde forme fondamentale de l'application ϕ est la dérivée covariante de la 1-forme vectorielle $d\phi$, définie par :

$$\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^\phi d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X^M Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Propriété 1.1.1. Soit $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ une application différentiable. La seconde forme fondamentale de l'application ϕ est une forme vectorielle $C^\infty(M)$ -bilinéaire symétrique. C'est à dire :

$$(\nabla d\phi)(\alpha.X, \beta.Y) = \alpha\beta(\nabla d\phi)(X, Y)$$

$$(\nabla d\phi)(X, Y) = (\nabla d\phi)(Y, X)$$

pour tous $(\alpha, \beta \in C^\infty(M))$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$.

1.1.5 Troisième forme fondamentale

Définition 1.1.5. Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ . La troisième forme fondamentale de ϕ est la dérivée covariante de $\nabla d\phi$, elle est définie par :

$$\nabla^2 d\phi(X, Y, Z) = \nabla_X(\nabla d\phi(Y, Z)) - \nabla d\phi(\nabla_X Y, Z) - \nabla d\phi(Y, \nabla_X Z),$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Proposition 1.1.4. *Contrairement à la seconde forme fondamentale, la troisième forme fondamentale n'est pas symétrique, nous avons :*

$$\begin{aligned} \nabla^2 d\phi(X, Y, Z) = & \nabla^2 d\phi(Z, Y, X) + d\phi(R^M(Z, X)Y) \\ & - R^N(d\phi(Z), d\phi(X)), d\phi(Y). \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.2 Equations d'Euler-Lagrange

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un lagrangien sur U est une fonction de classe C^∞ :

$$L : U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \ni (x, y, t) \longmapsto L(x, y, t) \in \mathbb{R}.$$

Etant donné deux points $x_1, x_2 \in U$, le problème variationnel associé à L consiste à chercher les courbes $\phi : [t_1, t_2] \rightarrow U$ tracées dans U , telles que $\phi(t_1) = x_1$ et $\phi(t_2) = x_2$, qui minimisent la fonctionnelle énergie :

$$E(\phi) = \int_{t_1}^{t_2} L(\phi(t), \phi'(t), t) dt. \quad (1.2)$$

Pour caractériser les fonctions $\phi : [t_1, t_2] \rightarrow U$ recherchées, on considère la variation $\phi_s(t) = \phi(t) + s v(t)$ où $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ et $v(t)$ une fonction non nulle, sauf aux bornes t_1 et t_2 , on alors :

$$v(t_1) = v(t_2) = 0, \quad \phi_s(t_1) = \phi(t_1) = x_1 \text{ et } \phi_s(t_2) = \phi(t_2) = x_2.$$

Théorème 1.2.1.

$$\frac{d}{ds} E(\phi_s)|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}(\phi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(\phi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

où $\langle, \rangle_{\mathbb{R}^n}$ désigne le produit scalaire standard de $\mathbb{R}^n$ et

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial L}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial x^n} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \left(\frac{\partial L}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial y^n} \right).$$

Démonstration. Soit $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application définie par :

$$\varphi(s, t) = \phi_s(t) = \phi(t) + sv(t) \quad (1.3)$$

d'après (1.2) et (1.3), on a :

$$\frac{d}{ds} E(\phi_s)|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t)|_{s=0} dt. \quad (1.4)$$

comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} L(\varphi(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t), t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial L}{\partial x^i}(\varphi(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t), t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial t} \right)(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i}(\phi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial t} \right)(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i}(\varphi(s, t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s, t), t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial s} \right)(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i}(\varphi(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t), t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial L}{\partial y^i}(\varphi(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t), t) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s, t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y^i}(\varphi(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t), t) \right) dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

D'après les formules (1.3), (1.4), (1.5) et (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\phi_s)|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad + \left\{ v(t), \frac{\partial L}{\partial y}(\phi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(\varphi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned} \quad (1.7)$$

comme $v(t_1) = v(t_2) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\phi_s)|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}(\phi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(\phi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.2. *La courbe $\phi : [t_1, t_2] \rightarrow U$ est un point critique pour la fonctionnelle énergie E si, et seulement si :*

$$\frac{\partial L}{\partial x}(\phi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t) - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial y}(\phi(t), \frac{d\phi}{dt}(t), t)) = 0. \quad (1.8)$$

Ce système de n équations différentielles du second ordre s'appelle système d'équations d'Euler-Lagrange.

Exemple 1.2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $L : U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$L(x, y, t) = \frac{y^2}{2},$$

ici le lagrangien représente l'énergie cinétique.

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt$$

le système (1.6) est réduit à l'équation :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$$

les solutions des équations d'Euler Lagrange sont les droites affine (géodésiques) :

$$\phi(t) = \alpha t + b, \quad \alpha, b \in \mathbb{R}^n$$

1.3 Applications harmoniques

1.3.1 Généralités

Définition 1.3.1. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, D un domaine compact de M . L'énergie d'une application $\phi \in C^1(M, N)$ est définie par :*

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_D |d\phi|^2 dv_g. \quad (1.9)$$

où dv_g la mesure de M associée à la métrique g et $|d\phi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\phi$ définie par :

$$|d\phi|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\phi(e_i), (d\phi(e_i))).$$

($\{e_i\}_{i=1}^m$ étant une base orthonormée locale sur (M^m, g)).

Une application $\phi \in C^\infty(M, N)$ est dite harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle énergie (1.9), c'est-à-dire si elle est solution de l'équation d'Euler- Lagrange associée à (1.9) :

$$\tau(\phi) = \text{Tr}_g(\nabla d\phi) = 0, \quad (1.10)$$

$\tau(\phi)$ est appelé le champ de tension de ϕ , voir [14].

Remarque 1.3.1.1. Si $(U, (x^i)_{1 \leq i \leq m})$ et $(V, (y^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n})$ sont deux systèmes de coordonnées locales sur M et N respectivement, alors, la restriction de $\tau(\phi)$ à U s'écrit :

$$\tau(\phi)^\alpha = \Delta\phi^\alpha + g^{ij}\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial\phi^\beta}{\partial x_i} \frac{\partial\phi^\gamma}{\partial x_j}, \quad 1 \leq \alpha \leq n \quad (1.11)$$

où $\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j})$ est le Laplacien sur (M, g) et $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ sont les symboles de Christoffel de ∇^N dans $(V, (y^\alpha))$.

Exemples 1.3.1. 1. Toute application constante $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$, $x \longmapsto y_0$ est harmonique ($d_x\phi = 0, \forall x \in M$).

2. L'application identité $\text{Id}_M : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$, $x \longmapsto x$ est totalement géodésique (c'est-à-dire $\nabla \text{Id}_M = 0$). Donc Id_M est harmonique.

3. Soient (M^n, g) une variété riemannienne, $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction différentiable. Alors $\tau(f) = \Delta(f)$, c'est-à-dire le champ de tension est la généralisation du Laplacien pour les fonctions réelles.

4. L'application de Hopf $\phi : (\mathbb{R}^4, g_{\mathbb{R}^4}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g_{\mathbb{R}^3})$ définie par

$$\phi(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2z\bar{w})$$

est harmonique. ($g_{\mathbb{R}^n}$ est la métrique euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$)

1.3.2 Tenseur énergie-impulsion

Définition 1.3.2. Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ . Le tenseur énergie-impulsion de ϕ est le champ de tenseur symétrique de type $(0, 2)$ sur M défini par :

$$S(\phi) = e(\phi)g - \phi^*h,$$

où $e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2$ est la densité d'énergie de ϕ .

La relation de base entre le tenseur énergie-impulsion et les applications harmoniques est donnée par la formule suivante (voir [20]).

Théorème 1.3.1. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , alors :

$$[\operatorname{div} S(\phi)](X) = -h(\tau(\phi), d\phi(X)), \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Corollaire 1.3.1. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ .

1. Si ϕ est harmonique, alors $[\operatorname{div}^M S(\phi)] = 0$.
2. Si ϕ est une submersion et $[\operatorname{div}^M S(\phi)] = 0$, alors ϕ est harmonique.

1.3.3 Champ de tension et tenseur énergie-impulsion d'une application conforme

Définition 1.3.3. Soient (M^n, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, une application $\phi \in C^\infty(M^n, N^n)$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^∞ telle que pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$:

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y).$$

La fonction λ est appelée la dilatation de l'application ϕ . Le champ de tension et le tenseur énergie-impulsion d'une application conforme est donné par :

Remarque 1.3.1. Il est immédiat que l'énergie d'une application conforme est égale à :

$$e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2 = \frac{1}{2}n\lambda^2$$

Proposition 1.3.1. *Si $\phi : M^n \rightarrow N^n$ est une application conforme, alors :*

$$S(\phi) = \frac{(n-2)\lambda^2}{2}g$$

Preuve : Soit (e_i) une base locale orthonormale, on a :

$$\begin{aligned} S(\phi)(e_i, e_j) &= e(\phi)g(e_i, e_j) - h(d\phi(e_i), d\phi(e_j)) \\ &= \frac{1}{2}n\lambda^2g(e_i, e_j) - \lambda^2g(e_i, e_j) \\ &= \left(\frac{1}{2}n\lambda^2 - \lambda^2\right)g(e_i, e_j). \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.2. *Si $\phi : M^n \rightarrow N^n$ est une application conforme, alors le champ de tension est donné par :*

$$\tau(\phi) = (2-n)d\phi(\text{grad } \ln \lambda)$$

Preuve : Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée sur M définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i}^M e_j = 0$ au point x , pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Au point x , on a :

$$\begin{aligned} h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) &= \sum_{i=1}^n h(\nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i), d\phi(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n \{e_i(h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) - h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_j))\}. \end{aligned}$$

Puisque ϕ est conforme de dilatation λ et $\nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_j) = \nabla_{e_j}^\phi d\phi(e_i)$, alors :

$$\begin{aligned} h(\tau(\phi), d\phi(e_j)) &= \sum_{i=1}^n \{e_i(\lambda^2)(g(e_i, e_j)) - h(d\phi(e_i), \nabla_{e_j}^\phi d\phi(e_i))\} \\ &= \sum_{i=1}^n \{2\lambda^2(g(e_i(\ln \lambda)e_i, e_j)) - \frac{1}{2}e_j(h(d\phi(e_i), d\phi(e_i)))\} \\ &= 2\lambda^2g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) - n\lambda^2e_j(\ln \lambda) \\ &= 2\lambda^2g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) - n\lambda^2g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) \\ &= (2-n)\lambda^2g(\text{grad}^M \ln \lambda, e_j) \\ &= (2-n)h(d\phi(\text{grad}^M \ln \lambda), d\phi(e_j)). \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.3.2. *Soit $\phi : M^m \rightarrow N^n$ une application conforme, alors ϕ est harmonique si, et seulement si $n = 2$ ou la dilatation λ est constante.*

1.3.4 Formule de monotonie pour les applications harmoniques

Théorème 1.3.2. ([7]) $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N, h)$ une application harmonique. Soit $x_0 \in M$, alors pour toute boule B_r^m de centre x_0 et de rayon r incluse dans M , nous avons

$$\frac{m-2}{2} \int_{B_r^m} |d\phi|^2 dx = r \int_{\partial B_r^m} \left(\frac{1}{2} |d\phi|^2 - \left| d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right|^2 \right) d\sigma, \quad r < R.$$

1.4 Applications biharmoniques

1.4.1 Généralités

Définition 1.4.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes et D un domaine compact de M . La bi-énergie d'une application $\phi \in C^2(M, N)$ est définie par :

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\phi)|^2 dv_g. \quad (1.12)$$

Une application $\phi \in C^2(M, N)$ est dite biharmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-énergie, c'est-à-dire si elle est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (1.12), cette équation est équivalente à :

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g(\nabla^\phi)^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi) d\phi = 0, \quad (1.13)$$

où $Tr_g(\nabla^\phi)^2 = trace_g((X, Y) \longmapsto \nabla_X^\phi \nabla_Y^\phi - \nabla_{\nabla_X^\phi Y}^\phi)$ est le Laplacien sur les sections du fibré $\phi^{-1}TN$ et R^N désigne le tenseur de courbure de (N^n, h) .

Il est clair que toute application harmonique est biharmonique. G.Y. Jiang [23] a montré le théorème suivant :

Théorème 1.4.1. Soient (M^n, g) une variété Riemannienne compacte sans bord, et (N^n, h) une variété Riemannienne avec $h(R^N(X, Y)Y, X) \leq 0$, pour tout $X, Y \in \Gamma(TN)$. Alors, toute application biharmonique $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique.

Exemples 1.4.1. 1. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique (c'est-à-dire $\Delta f = 0$), alors la fonction $\phi(x) = r^2(x)f(x)$ est une fonction

biharmonique non-harmonique, où $r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est la fonction distance.

2. Soit la transformation de Kelvin :

$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^l}$, alors le champ tension et bitension de cette application sont donnés par :

$$\tau(\phi)(x) = \Delta(\phi) = l(l-n)\|x\|^{-2-l}x;$$

et

$$\tau_2(\phi)(x) = -\Delta(\Delta(\phi)) = -l(l-n)(-2-l)(-2+n-l)\|x\|^{-4-l}x.$$

3. L'inverse de la projection stéréographique :

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, x \longmapsto \phi(x) = \frac{1}{\|x\|^2 + 1}(2x, \|x\|^2 - 1),$$

est biharmonique, non-harmonique si et seulement si, $n = 4$.

1.4.2 Tenseur bi-énergie impulsion

Définition 1.4.2. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , le tenseur bi-énergie impulsion de ϕ noté $S_2(\phi)$ est défini par :

$$S_2(\phi) = \left(\frac{-1}{2}|\tau(\phi)|^2 + \operatorname{div} h(\tau(\phi), d\phi) - 2\operatorname{sym} h(\nabla \tau(\phi), d\phi),\right.$$

où

$$\operatorname{sym} h(\nabla \tau(\phi), d\phi)(X, Y) = \frac{1}{2}\{h(\nabla_X \tau(\phi), d\phi(Y)) + h(\nabla_Y \tau(\phi), d\phi(X))\}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Théorème 1.4.2. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , alors :

$$[\operatorname{div} S_2(\phi)](X) = -h(\tau_2(\phi), d\phi(X)), \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Corollaire 1.4.1. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ .

1. Si ϕ est biharmonique, alors $[\operatorname{div}^M S_2(\phi)] = 0$.
2. Si ϕ est une submersion et $[\operatorname{div}^M S_2(\phi)] = 0$, alors ϕ est biharmonique.

1.4.3 Tenseur bi-énergie-impulsion d'une application conforme

Théorème 1.4.3. ([32]) *Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ , alors nous avons :*

$$S_2(\phi) = (2 - n) \lambda^2 \left\{ \left(\frac{n-2}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda \right) g - 2 \nabla d \ln \lambda \right\}, \quad (1.14)$$

et la trace de $S_2(\phi)$ est donnée par :

$$\text{Tr} S_2(\phi) = - (2 - n)^2 \lambda^2 \left\{ \frac{n}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda \right\}. \quad (1.15)$$

Corollaire 1.4.2. *Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$, ($n \neq 2$) une application conforme de dilatation λ , alors la trace de $S_2(\phi)$ est nulle si et seulement si la fonction $\lambda^{\frac{n}{2}}$ est harmonique.*

1.4.4 Champ de bi-tension d'une application conforme

Théorème 1.4.4. ([32]) *Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$, ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , alors le champ de bitension de ϕ est donné par :*

$$\tau_2(\phi) = (n - 2) d\phi(H)$$

où

$$\begin{aligned} H = & \text{grad} \Delta \ln \lambda - \frac{(n-6)}{2} \text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2) + 2 \text{Ricci}^M(\text{grad} \ln \lambda) \\ & - (2 (\Delta \ln \lambda) + (n-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2) \text{grad} \ln \lambda. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante sur la dilatation pour qu'une application conforme soit biharmonique.

Théorème 1.4.5. ([32]) *Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , alors ϕ est biharmonique si et seulement si la dilatation λ satisfait :*

$$\begin{aligned} & \text{grad} (\Delta \ln \lambda) - (2 (\Delta \ln \lambda) + (n-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2) \text{grad} \ln \lambda \\ & + \frac{6-n}{2} \text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2) + 2 \text{Ricci}^M(\text{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

1.4.5 Formule de monotonie pour les applications biharmonique 26

Proposition 1.4.1. ([31]) *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) un difféomorphisme conforme de dilatation λ . Alors l'application réciproque $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^m, g)$ est bi- p -harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} & \text{grad}(\Delta \ln \lambda) - 2(n-4)|\text{grad} \ln \lambda|^2 \text{grad} \ln \lambda - \frac{6-n}{2} \text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2) \\ & - 2(\Delta \ln \lambda) \text{grad} \ln \lambda + 2\text{Ricci}(\text{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

1.4.5 Formule de monotonie pour les applications biharmoniques

Théorème 1.4.6. ([7]) *$\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N, h)$ une application biharmonique. Soit $x_0 \in M$, alors pour toute boule B_r^m de centre x_0 et de rayon r incluse dans M , nous avons :*

$$\begin{aligned} \frac{4-m}{2} \int_{B_R^m} |\tau(\phi)|^2 dx &= -\frac{r}{2} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^2 d\sigma - (m-2) \int_{\partial B_R^m} h\left(\tau(\phi), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) d\sigma \\ &\quad - r \int_{\partial B_R^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(h\left(\tau(\phi), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) \right) d\sigma \\ &\quad + 2r \int_{\partial B_R^m} h\left(\tau(\phi), \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Chapitre 2

Applications p -harmoniques et bi- p -harmoniques

Le deuxième chapitre de cette thèse se divise entre deux parties, dans la première partie nous mettons un accent assez prononcé sur les applications p -harmoniques (resp. bi- p -harmoniques), qui généralisent les applications harmoniques (resp. biharmoniques) c'est-à-dire le cas particulier $p = 2$, et en rappelant quelques-unes de leurs propriétés.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de la bi- p -harmonicité des applications conformes. Nous établissons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application conforme soit (bi-) p -harmonique. Nous donnons enfin quelques exemples de ce genre d'applications.

2.1 Applications p -harmoniques

2.1.1 Généralités

Définition 2.1.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, D un domaine compact de M , $\phi \in C^\infty(M, N)$. Pour $2 \leq p < \infty$, on définit la p -énergie de ϕ sur D par :

$$E_p(\phi; D) = \frac{1}{p} \int_D |d\phi|^p v_g, \quad (2.1)$$

où $|d\phi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\phi$ et dv_g est l'élément de volume riemannien associé à la métrique g .

Définition 2.1.2. Soient M et N deux variétés différentiables. Une variation à support dans un domaine compact $D \subset M$ d'une application $\phi \in C^2(M, N)$ est une famille d'applications $\{\phi_t\}_{t \in (\varepsilon, -\varepsilon)} \subset C^\infty(M, N)$ telles que $\phi_0 = \phi$ et $\phi_t = \phi$ sur $M \setminus \text{int}(D)$ (où $\text{int}(D)$ est l'intérieur de D).

Définition 2.1.3. Une application $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ , entre deux variétés Riemanniennes est dite p -harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle de la p -énergie (2.1), c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} E_p(\phi; D) \big|_{t=0} = 0 \quad (2.2)$$

2.1.2 Première variation de de la p -énergie

Théorème 2.1.1. Soient $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes, $\{\phi_t\}_{t \in (\varepsilon, -\varepsilon)}$ une variation de classe C^∞ à support dans $D \subset M$, alors :

$$\frac{d}{dt} E_p(\phi; D) \big|_{t=0} = - \int_D h(v, \tau_p(\phi)) v_g, \quad (2.3)$$

où $v = \frac{d}{dt} \phi_t \big|_{t=0}$ dénote le champ de vecteurs de variation de $\{\phi_t\}_{t \in (\varepsilon, -\varepsilon)}$, et

$$\tau_p(\phi) = \text{div}^M(|d\phi|^{p-2} d\phi) = |d\phi|^{p-2} \{ \tau(\phi) + (p-2) d\phi(\text{grad} \ln |d\phi|) \}, \quad (2.4)$$

est appelé le champ de p -tension de l'application ϕ .

Démonstration. Soient $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée locale sur (M^m, g) , et $\{\frac{d}{dt}\}$ la base sur $(\varepsilon, -\varepsilon)$, alors $\{(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})\}_{i=1}^m$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale $g + dt^2$ sur la variété produit $M^m \times (\varepsilon, -\varepsilon)$, et on a le crochet de Lie $[(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})] = 0$, pour tout $i = 1, \dots, m$.

Soit $\{\phi_t\}_{t \in (\varepsilon, -\varepsilon)}$ une variation à support dans un domaine compact $D \subset M$ de l'application ϕ . On définit l'application $\varphi : M^m \times (\varepsilon, -\varepsilon) \longrightarrow N$ par $\varphi(x, t) = \phi_t(x)$. D'après la formule de Leibniz, on trouve que :

$$\begin{aligned} d\varphi(e_i, 0)(x, 0) &= d_x \varphi_0(e_i|_x) + d_0 \varphi_x(0) \\ &= d_x \varphi_0(e_i|_x) \\ &= d_x \phi(e_i|_x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\varphi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} &= dx\varphi_0(0) + d_0\varphi_x(\frac{d}{dt}|_{t=0}) \\
&= d\varphi_x(\frac{d}{dt})|_{t=0} \\
&= v(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $d\varphi(e_i, 0) = d\phi(e_i)$ et $d\phi(0, \frac{d}{dt}) = v$ en $t = 0$.

Soit ∇^φ la connexion de Pull-back associée à l'application φ . On a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_p(\phi_t; D) |_{t=0} &= \frac{1}{p} \int_D \frac{\partial}{\partial t} |d\phi_t|^p |_{t=0} v_g \\
&= \frac{1}{p} \int_D \frac{\partial}{\partial t} (|d\phi_t|^2)^{\frac{p}{2}} |_{t=0} v_g \\
&= \frac{1}{2} \int_D (|d\phi_t|^2)^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial}{\partial t} (|d\phi_t|^2 |_{t=0}) v_g \\
&= \frac{1}{2} \int_D (|d\phi_t|^2)^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial}{\partial t} h(d\phi_t(e_i), d\phi_t(e_i) |_{t=0} v_g \\
&= \frac{1}{2} \int_D |d\phi_t|^{p-2} \frac{\partial}{\partial t} h(d\varphi(e_i, 0), d\varphi(e_i, 0)) |_{t=0} v_g \\
&= \int_D |d\phi_t|^{p-2} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi d\varphi(e_i, 0), d\varphi(e_i, 0)) |_{t=0} v_g \\
&= \int_D |d\phi_t|^{p-2} h(\nabla_{e_i}^\varphi d\varphi(\frac{\partial}{\partial t}), d\varphi(e_i, 0)) |_{t=0} v_g \\
&= \int_D h(\nabla_{e_i}^\varphi v, |d\phi_t|^{p-2} d\phi(e_i)) v_g.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D définie par :

$$\omega(X) = h(v, |d\phi|)^{p-2} d\phi(X), \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Donc, la divergence de ω dans (M^m, g) est donnée par :

$$\operatorname{div}^M \omega = e_i [h(v, |d\phi|)^{p-2} d\phi(X)] \tag{2.6}$$

D'après les formules (2.5), (2.6) et le théorème de divergence, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_p(\phi; D) |_{t=0} &= \int_D (\operatorname{div}^M \omega) v_g - \int_D h(v, \nabla_{e_i}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\phi(e_i)) v_g \\
&= - \int_D h(v, \tau_p(\phi)) v_g.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

□

Corollaire 2.1.1. *Une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ entre deux variétés riemanniennes est p -harmonique si, et seulement si :*

$$\tau_p(\phi) = \operatorname{div}^M(|d\phi|^{p-2} d\phi) = |d\phi|^{p-2} \{ \tau(\phi) + (p-2) d\phi(\operatorname{grad} \ln |d\phi|) \} = 0.$$

Ce qui est équivalent à l'équation suivante :

$$\tau(\phi) = (2-p) d\phi(\operatorname{grad} \ln |d\phi|).$$

Exemple 2.1.1. *Soit $n \geq 2$, l'application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^l}, \end{aligned}$$

est p -harmonique si et seulement si, $l = \frac{n+p-2}{p-1}$

Remarques 2.1.1. 1. L'équation (2.3) est dite équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle p -énergie.

2. Si $p = 2$, on a $\tau_p(\phi) = \tau(\phi)$ le champ de tension de ϕ .

3. Localement, si $(x^i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(y^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n}$ désignent deux systèmes de coordonnées locales au-dessus de deux ouverts $U \in M$ et $V \in N$ respectivement, alors, (2.4) s'écrit relativement à ces deux systèmes comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_p(\phi) = & \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} (g^{ij} h_{\alpha\beta} \partial_i \phi^\alpha \partial_j \phi^\beta)^{\frac{p-2}{2}} g^{ij} \partial_j \phi^l) \\ & + (g^{ij} h_{\alpha\beta} \partial_i \phi^\alpha \partial_j \phi^\beta)^{\frac{p-2}{2}} g^{ij} \Gamma_{\alpha\beta}^l(\phi) \partial_i \phi^\alpha \partial_j \phi^\beta, \quad 1 \leq l \leq m, \partial_i = \partial / \partial x_i \end{aligned}$$

où $\Gamma_{\alpha\beta}^l$ sont les symboles de Christoffel de ∇^N relativement au système (y^α) .

2.1.3 Deuxième variation de la fonctionnelle p -énergie

Théorème 2.1.2. *Soient $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application p -harmonique entre deux variétés riemanniennes et D un domaine compact de M . Si $\{\phi_{t,s}\}$ est une variation à deux paramètres et à support dans D de l'application ϕ , alors :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_p(\phi_{t,s}; D) \big|_{t=s=0} = \int_D h(J_p^\phi(v), W) v_g, \quad (2.8)$$

où $v = \frac{\phi_{t,s}}{\partial t} \big|_{t=s=0}$ et $v = \frac{\phi_{t,s}}{\partial s} \big|_{t=s=0}$ désignent les champs de vecteurs de variation et J_p^ϕ l'opérateur de Jacobi généralisé de ϕ donné par :

$$\begin{aligned} J_p^\phi(v) = & -|d\phi|^{p-2} R^N(v, d\phi)d\phi - \text{trace}_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi v \\ & - (p-2) \text{trace}_g \nabla |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ici $\langle, \rangle$ désigne le produit scalaire sur $T^*M \otimes \phi^{-1}TN$.

Démonstration. Soit $\varphi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ une application de classe C^∞ définie par $\varphi(x, t, s) = \phi_{t,s}(x)$. On a $\varphi(x, 0, 0) = \phi(x)$, et les champs de vecteurs de variation associés à la variation $\{\phi_{t,s}\}_{(t,s) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ sont donnés par :

$$v(x) = d_{(x,0,0)}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad w(x) = d_{(x,0,0)}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), \quad \forall x \in M.$$

Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée locale sur (M^m, g) telle que $\nabla_{e_i}^M e_j = 0$ en $x \in M$ pour tout $i, j = 1, \dots, m$.

On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_p(\phi_t; D) \Big|_{t=s=0} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \int_D \frac{|d\phi_{t,s}|^p}{p} \Big|_{t=s=0} v_g \\ &= \frac{1}{p} \int_D \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} (|d\phi_{t,s}|^p) \Big|_{t=s=0} v_g. \end{aligned} \quad (2.10)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} |d\phi_{t,s}|^p &= \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} (|d\phi_{t,s}|^2)^{\frac{p}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left((|d\phi_{t,s}|^2)^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial}{\partial s} |d\phi_{t,s}|^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t} \left((|d\phi_{t,s}|^2)^{\frac{p}{2}-1} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0), d\varphi(e_i, 0, 0)) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} (|d\phi_{t,s}|^p) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t} (|d\phi_{t,s}|^2)^{\frac{p}{2}-1} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0), d\varphi(e_i, 0, 0)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m |d\phi_{t,s}|^{p-2} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0), d\varphi(e_i, 0, 0)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m |d\phi_{t,s}|^{p-2} h(\nabla_{\frac{\phi \partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} |d\phi_{t,s}|^p &= \sum_{i,j=1}^m (p-2) |d\phi_{t,s}|^{p-4} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi d\varphi(e_j, 0, 0), d\varphi(e_j, 0, 0)) \\
&\quad h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0), d\varphi(e_i, 0, 0)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m |d\phi_{t,s}|^{p-2} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0), d\varphi(e_i, 0, 0)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m |d\phi_{t,s}|^{p-2} h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0)).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Par la définition du tenseur de courbure de (N, h) et les propriétés :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\varphi(e_i, 0, 0) = \nabla_{(e_i, 0, 0)}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\varphi d\varphi(e_i, 0, 0) = \nabla_{(e_i, 0, 0)}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right),$$

avec $[\frac{\partial}{\partial t}, (e_i, 0, 0)] = 0$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} |d\phi_{t,s}|^p|_{t=s=0} &= \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{e_i}^\phi w, (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi(e_i)\right) \\
&\quad - |d\phi|^{p-2} \sum_{i=1}^m h(R^N(v, d\phi(e_i)) d\phi(e_i), w) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m h(\nabla_{e_i}^\phi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\phi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)|_{t=s=0}, |d\phi|^{p-2} d\phi(e_i)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m h\left(\nabla_{e_i}^\phi w, |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi v\right).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Gamma(T^*M)$ définies par :

$$\begin{aligned}
\omega_1(X) &= h(w, (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi(X)); \\
\omega_2(X) &= h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)|_{t=s=0}, |d\phi|^{p-2} d\phi(X)); \\
\omega_3(X) &= h(w, |d\phi|^{p-2} \nabla_X^\phi v), \quad \forall X \in \Gamma(TM).
\end{aligned}$$

La divergence de ω_1 , ω_2 et ω_3 est donnée par :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^M \omega_1 &= \sum_{i=1}^m e_i h(w, (p-2)|d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi(e_i)); \\ \operatorname{div}^M \omega_2 &= \sum_{i=1}^m e_i h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi d\varphi(\frac{\partial}{\partial s})|_{t=s=0}, |d\phi|^{p-2} d\phi(e_i)); \\ \operatorname{div}^M \omega_3 &= \sum_{i=1}^m e_i h(w, |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi v), \quad \forall X \in \Gamma(TM).\end{aligned}$$

Par les équations (2.10), (2.14), la condition de p -harmonicité de ϕ et le théorème de divergence, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_p(\phi_{t,s}; D)_{t=s=0} &= - \int_D \sum_{i=1}^m h(w, \nabla_{e_i}^\phi (p-2)|d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi(e_i)) v_g \\ &\quad - \int_D |d\phi|^{p-2} \sum_{i=1}^m h(w, R^N(v, d\phi(e_i)) d\phi(e_i)) v_g \\ &\quad - \int_D \sum_{i=1}^m h\left(w, \nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi v\right) v_g.\end{aligned}\tag{2.15}$$

□

2.1.4 Applications p -harmoniques stables

Définition 2.1.4. Soient (M, g) est une variété riemannienne compacte, ϕ une application p -harmonique de (M, g) à valeurs dans une variété riemannienne (N, h) . On dit que ϕ est une application p -harmonique stable pour tout champ vectoriel v le long de ϕ , si :

$$I_p^\phi(v, v) = \int_M h(v, J_p^\varphi(v)) v_g \geq 0. \tag{2.16}$$

Proposition 2.1.1. Toute application p -harmonique d'une variété riemannienne compacte (M, g) , à valeurs dans une variété riemannienne (N, h) de courbure sectionnelle négative ($\operatorname{Sect}^N \leq 0$) est stable.

Démonstration. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} I_p^\phi(v, v) &= \int_M h(v, J_p^\phi(v)) v_g \\ &= \int_M [h(v, |d\phi|^{p-2} R^N(v, d\phi) d\phi - \text{trace}_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi v \\ &\quad - (p-2) \text{trace}_g \nabla |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi] v_g, \end{aligned} \quad (2.17)$$

En utilisant le théorème de Green [11], il est facile de prouver que :

$$\begin{aligned} I_p^\phi(v, v) &= - \int_M |d\phi|^{p-2} \sum_{i=1}^m h(v, R^N(v, d\phi(e_i)) d\phi(e_i)) v_g \\ &\quad + \int_M |d\phi|^{p-2} |\nabla^\phi v|^2 v_g + \int_M (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle^2 v_g. \end{aligned} \quad (2.18)$$

□

Théorème 2.1.3. *Soit (M, g) est une variété riemannienne compacte, alors pour toute application p -harmonique stable $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ est constante, avec $2 \leq p < n$.*

Démonstration. Soient $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée locale sur (M, g) . On pose $\lambda(y) = \langle \alpha, y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, pour tout $y \in \mathbb{S}^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $v = \text{grad}^{\mathbb{S}^n} \lambda$. Nous avons $\nabla_X^{\mathbb{S}^n} v = -\lambda X$ pour tout $X \in \Gamma(T\mathbb{S}^n)$, où $\nabla^{\mathbb{S}^n}$ est la connexion Levi-Civita sur $\mathbb{S}^n$ par rapport à la métrique standard de la sphère. Nous calculons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi (v \circ \phi) &= \nabla_{\text{grad}^M |d\phi|^{p-2}}^\phi (v \circ \phi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi (v \circ \phi). \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant la propriété $\nabla_X^{\mathbb{S}^n} v = -\lambda X$, le premier terme de (2.19) est donné par :

$$\nabla_{\text{grad}^M |d\phi|^{p-2}}^\phi (v \circ \phi) = -(\lambda \circ \phi) d\phi(\text{grad}^M |d\phi|^{p-2}), \quad (2.20)$$

et le second terme de (2.19) est donné par :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi (v \circ \phi) &= - \sum_{i=1}^m |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi (\lambda \circ \phi) d\phi(e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^m |d\phi|^{p-2} \langle d\phi(e_i), v \circ \phi \rangle d\phi(e_i) \\ &\quad - (\lambda \circ \phi) |d\phi|^{p-2} \tau(\phi). \end{aligned} \quad (2.21)$$

La substitution des formules (2.20) et (2.21) dans (2.19) donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi (v \circ \phi) &= - (\lambda \circ \phi) d\phi(\text{grad}^M |d\phi|^{p-2}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m |d\phi|^{p-2} \langle d\phi(e_i), v \circ \phi \rangle d\phi(e_i) \\ &\quad - (\lambda \circ \phi) |d\phi|^{p-2} \tau(\phi) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Par la condition de p -harmonicité de ϕ

$$\tau_p(\phi) = |d\phi|^{p-2} \tau(\phi) + d\phi(\text{grad}^M |d\phi|^{p-2}) = 0,$$

et l'équation (2.22), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi (v \circ \phi), v \circ \phi \rangle = - \sum_{i=1}^m |d\phi|^{p-2} \langle d\phi(e_i), v \circ \phi \rangle^2. \quad (2.23)$$

Comme la sphère $\mathbb{S}^n$ a une courbure constante, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \langle |d\phi|^{p-2} R^{\mathbb{S}^n} (v \circ \phi, d\phi(e_i)) d\phi(e_i), v \circ \phi \rangle &= |d\phi|^p \langle v \circ \phi, v \circ \phi \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^m |d\phi|^{p-2} \langle d\phi(e_i), v \circ \phi \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Par la définition de l'opérateur de Jacobi généralisé et (2.23), (2.24), on

obtient :

$$\begin{aligned}
\langle J_f^\phi(v \circ \phi), v \circ \phi \rangle &= 2|d\phi|^{p-2} \sum_{i=1}^m \langle d\phi(e_i), v \circ \phi \rangle^2 \\
&\quad - |d\phi|^p \langle v \circ \phi, v \circ \phi \rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \langle \nabla_{e_i}^\phi(p-2)|d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v \circ \phi, d\phi \rangle d\phi(e_i), v \circ \phi \rangle,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

En utilisant le fait que : $\langle \nabla^\phi v \circ \phi, d\phi \rangle = -(\lambda \circ \phi)|d\phi|^2$ et l'équation (2.25), nous trouvons que :

$$\text{trace}_\alpha \langle J_f^\phi(v \circ \phi), v \circ \phi \rangle = (p-n)|d\phi|^p. \tag{2.26}$$

D'où le théorème découle de (2.1.3) et de la condition de p -harmonicité stable de ϕ , avec $2 \leq p < n$ pour tout $x \in M$. $\square$

2.1.5 Tenseur p -énergie impulsion

Définition 2.1.5. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ . Le tenseur p -énergie impulsion de ϕ avec $p \geq 2$, est défini par :

$$S_p(\phi) = \frac{1}{p}|d\phi|^p g - |d\phi|^{p-2} \phi^* h$$

où $\phi^* h$ l'image réciproque de la métrique h par ϕ donnée par

$$\phi^* h(X, Y) = h(d\phi(X), d\phi(Y)).$$

Théorème 2.1.4. Soient $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , $p \geq 2$ alors :

$$\text{div}^M S_p(\phi) = -h(\tau_p(\phi), d\phi).$$

Démonstration. Soient $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée locale sur (M^m, g) définie dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i} e_j = 0$ au point x ,

pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Au point x , on a :

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}^M S_p(\phi)](e_j) &= e_i \left[\frac{1}{p} |d\phi|^p \delta_{ij} - |d\phi|^{p-2} h(d\phi(e_i), d\phi(e_j)) \right] \\ &= \frac{1}{p} e_i (|d\phi|^p \delta_{ij} - e_i (|d\phi|^{p-2}) h(d\phi(e_i), d\phi(e_j))) \\ &\quad - |d\phi|^{p-2} h(\nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i), d\phi(e_j)) - |d\phi|^{p-2} h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_j)). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Par définition de $\tau(\phi)$, et le fait que $\nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_j) = \nabla_{e_j}^\phi d\phi(e_i)$, on trouve :

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}^M S_p(\phi)](e_j) &= - (p-2) |d\phi|^{p-3} h(\operatorname{grad} |d\phi|, d\phi(e_j)) \\ &\quad - |d\phi|^{p-2} h(\operatorname{grad} \tau(\phi), d\phi(e_j)) \\ &= - (p-2) |d\phi|^{p-2} h(\operatorname{grad} \ln |d\phi|, d\phi(e_j)) \\ &\quad - |d\phi|^{p-2} h(\operatorname{grad} \tau(\phi), d\phi(e_j)) \\ &= - h(\tau_p(\phi), d\phi(e_j)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

□

2.2 Applications bi- p -harmoniques

2.2.1 Généralités

Définition 2.2.1. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, D un domaine compact de M . La fonctionnelle bi- p -énergie d'une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est définie par :

$$E_{2,p}(\phi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau_p(\phi)|^2 v_g. \quad (2.29)$$

Définition 2.2.2. Une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ entre deux variétés riemanniennes est dite bi- p -harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle bi- p -énergie $E_{2,p}(\cdot; D)$ pour tout domaine compact D de M c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} E_{2,p}(\phi_t; D) \big|_{t=0} = 0,$$

où $\{\phi_t\}$ est une variation à support dans un domaine compact $D \subset M$.

2.2.2 Première variation de la bi- p -énergie

Théorème 2.2.1. Soient $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes, $\{\phi_t\}_{t \in (\varepsilon, -\varepsilon)}$ une variation de classe C^∞ de (ϕ) à support dans $D \subset M$, alors :

$$\frac{d}{dt} E_p(\phi; D) \big|_{t=0} = - \int_D h(v, \tau_{2,p}(\phi)) v_g \quad (2.30)$$

où $v = \frac{d}{dt} \phi_t \big|_{t=0}$ désigne le champ de vecteurs de variation de $\{\phi_t\}_{t \in (\varepsilon, -\varepsilon)}$, et $\tau_{2,p}$ est le champ bi- p -tension de ϕ défini par :

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(\phi) = & - |d\phi|^{p-2} \text{Tr}_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi - \text{Tr}_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) \\ & - (p-2) \text{Tr}_g \nabla^\phi (|d\phi|^{p-4} d\phi \langle \nabla^\phi \tau_p(\phi), d\phi \rangle). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Démonstration. Soit $\varphi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow N$ l'application de classe C^∞ définie par $\varphi(x, t) = \phi_t(x)$, on a :

$$\frac{d}{dt} E_{2,p}(\phi_t; D) = \int_D h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi \tau_p(\phi_t), \tau_p(\phi_t)) v_g. \quad (2.32)$$

En calculant dans un repère orthonormé à $x \in M$, on a :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi \tau_p(\phi_t) = \sum_{i=1}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi \nabla_{(e_i, 0)}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\varphi(e_i, 0). \quad (2.33)$$

À partir de la définition du tenseur de courbure de (N, h) , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi \nabla_{(e_i, 0)}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\varphi(e_i, 0) = & |d\phi_t|^{p-2} \sum_{i=1}^m R^N(d\varphi(\frac{\partial}{\partial t}), d\varphi(e_i, 0)) d\varphi(e_i, 0) \\ & + \sum_{i=1}^m \nabla_{(e_i, 0)}^\varphi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\varphi(e_i, 0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

On utilise la compatibilité de ∇^φ avec h , on trouve que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m h(\nabla_{(e_i, 0)}^\varphi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\varphi(e_i, 0), \tau_p(\phi_t)) \\ = \sum_{i=1}^m (e_i, 0) [h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\varphi(e_i, 0), \tau_p(\phi_t))] \\ - \sum_{i=1}^m h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\varphi(e_i, 0), \nabla_{(e_i, 0)}^\varphi \tau_p(\phi_t)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

De la propriété $\nabla_{\tilde{X}}^\varphi d\varphi(\tilde{Y}) = \nabla_{\tilde{Y}}^\varphi d\varphi(\tilde{X}) + d\varphi([\tilde{X}, \tilde{Y}])$, et en prenant $\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t}$ et $\tilde{Y} = |d\phi_t|^{p-2}(e_i, 0)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi |d\phi_t|^{p(x)-2} d\varphi(e_i, 0)|_{t=0} &= |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi v \\ &+ \sum_{j=1}^m (p-2) |d\phi|^{p-4} h(\nabla_{e_j}^\phi v, d\phi(e_j)) d\phi(e_i), \end{aligned} \quad (2.36)$$

pour tout $i = 1, \dots, m$. En remplaçant (2.36) dans (2.35), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m h(\nabla_{(e_i, 0)}^\varphi \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\varphi |d\phi_t|^{p-2} d\varphi(e_i, 0), \tau_p(\phi_t))|_{t=0} \\ = \sum_{i=1}^m e_i h(|d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi v, \tau_p(\phi)) \\ + \sum_{i=1}^m e_i h((p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi(e_i), \tau_p(\phi)) \\ - \sum_{i=1}^m e_i h(v, |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi)) \\ + \sum_{i=1}^m h(v, \nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi)) \\ - \sum_{j=1}^m e_j h(v, (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(e_j)) \\ + \sum_{j=1}^m h(v, \nabla_{e_j}^\phi (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(e_j)). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Soient $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 \in \Gamma(T^*M)$ définies par :

$$\begin{aligned} \eta_1(X) &= h(|d\phi|^{p-2} \nabla_X^\phi v, \tau_p(\phi)); \\ \eta_2(X) &= h((p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi v, d\phi \rangle d\phi(X), \tau_p(\phi)); \\ \eta_3(X) &= h(v, |d\phi|^{p-2} \nabla_X^\phi \tau_p(\phi)); \\ \eta_4(X) &= h(v, (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla^\phi \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(X)). \end{aligned}$$

Finalement, en calculant la divergence de $\eta_i (i = 1, \dots, 4)$ et en remplaçant dans (2.37) les formules (2.32)-(2.34), (2.37) et le théorème de divergence,

on obtient :

$$\frac{d}{dt} E_p(\phi; D) |_{t=0} = - \int_D h(v, \tau_{2,p}(\phi)) v_g.$$

Du théorème (2.2.1) on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1. *Une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ entre deux variétés riemanniennes, est bi- p -harmonique si, et seulement si :*

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(\phi) = & - Tr_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) - |d\phi|^{p-2} Tr_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi \\ & - (p-2) Tr_g \nabla^\phi (\langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle |d\phi|^{p-4} d\phi) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Remarques 2.2.1. 1. L'équation (2.29) est dite équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle bi- p -énergie.

2. Si $p = 2$ sur M alors $\tau_{2,p}(\phi) = \tau_2(\phi)$ (champ de bi-tension de ϕ).

3. Pour $p \neq 2$, il existe des applications bi- p -harmoniques ne sont pas p -harmoniques ni harmonique.

Maintenant, on donne une relation plus simple que (2.31) entre $\tau_{2,p}(\phi)$ et $\tau_p(\phi)$, que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre.

Proposition 2.2.1. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ , alors la relation entre $\tau_{2,p}(\phi)$ et $\tau_p(\phi)$ est donné par l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(\phi) = & - |d\phi|^{p-2} \left(Tr_g (\nabla^\phi)^2 \tau_p(\phi) + Tr_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi \right) \\ & + (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi (grad(\ln |d\phi|^2)) \\ & - (p-2) |d\phi|^{p-4} d\phi (grad \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle) \\ & - (p-2) |d\phi|^{-2} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle \tau_p(\phi) \\ & - \frac{(p-2)}{2} |d\phi|^{p-2} \nabla_{grad(\ln |d\phi|^2)}^\phi \tau_p(\phi). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Démonstration. Choisissons $\{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ une base orthonormée sur (M, g) . Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(\phi) = & - Tr_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) - |d\phi|^{p-2} Tr_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi \\ & - (p-2) Tr_g \nabla^\phi (\langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle |d\phi|^{p-4} d\phi). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Pour le terme $Tr_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi)$, on obtient :

$$Tr_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) = \nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi) - |d\phi|^{p-2} \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\phi \tau_p(\phi),$$

un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned}\nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi) &= |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi) + e_i(|d\phi|^{p-2}) \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi) \\ &= |d\phi|^{p-2} \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi) + \frac{(p-2)}{2} |d\phi|^{p-2} \nabla_{\text{grad}(\ln|d\phi|^2)} \tau_p(\phi),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}Tr_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) &= |d\phi|^{p-2} Tr_g (\nabla^\phi)^2 \tau_p(\phi) \\ &\quad + \frac{(p-2)}{2} |d\phi|^{p-2} \nabla_{\text{grad}(\ln|d\phi|^2)}^\phi \tau_p(\phi).\end{aligned}\tag{2.41}$$

Nous allons développer le terme $Tr_g \nabla^\phi (\langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle |d\phi|^{p-4} d\phi)$, nous avons :

$$\begin{aligned}&Tr_g \nabla^\phi (\langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle |d\phi|^{p-4} d\phi) \\ &= \nabla_{e_i}^\phi |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(e_i) - |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(\nabla_{e_i} e_i) \\ &= |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) + e_i(|d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle) d\phi(e_i) \\ &\quad - |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(\nabla_{e_i} e_i) \\ &= |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) - |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(\nabla_{e_i} e_i) \\ &\quad + |d\phi|^{p-4} e_i(\langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle) d\phi(e_i) + \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle e_i(|d\phi|^{p-4}) d\phi(e_i) \\ &= |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle \tau(\phi) + |d\phi|^{p-4} d\phi(\text{grad} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle) \\ &\quad + \frac{p-4}{2} |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(\text{grad}(\ln|d\phi|^2)).\end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

$$\tau(\phi) = |d\phi|^{-p+2} \tau_p(\phi) - \frac{(p-2)}{2} d\phi(\text{grad}(\ln|d\phi|^2)),$$

on trouve :

$$\begin{aligned}Tr_g \nabla^\phi (\langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle |d\phi|^{p-4} d\phi) &= |d\phi|^{-2} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle \tau_p(\phi) \\ &\quad + |d\phi|^{p-4} d\phi(\text{grad} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle) \\ &\quad - |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(\text{grad}(\ln|d\phi|^2)).\end{aligned}\tag{2.42}$$

En remplaçant (2.41) et (2.42) dans (2.40), on en déduit que :

$$\begin{aligned}\tau_{2,p}(\phi) &= - |d\phi|^{p-2} \left(Tr_g (\nabla^\phi)^2 \tau_p(\phi) + Tr_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi \right) \\ &\quad + (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle d\phi(\text{grad}(\ln|d\phi|^2)) \\ &\quad - (p-2) |d\phi|^{p-4} d\phi(\text{grad} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle) \\ &\quad - (p-2) |d\phi|^{-2} \langle \nabla \tau_p(\phi), d\phi \rangle \tau_p(\phi) \\ &\quad - \frac{(p-2)}{2} |d\phi|^{p-2} \nabla_{\text{grad}(\ln|d\phi|^2)}^\phi \tau_p(\phi).\end{aligned}$$

□

Exemple 2.2.1. Soient M la variété $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$ munie de la métrique Riemannienne $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, N la variété $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique riemannienne $h = dy_1^2 + dy_2^2$. L'application $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$, $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3)$ est bi- p -harmonique si, et seulement si $p = 4$. En effet, on pose $\phi_1(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_3$, on trouve :

$$|d\phi|^2 = g^{jj}(h_{\alpha\beta} \circ \phi) \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} = 2,$$

alors, la densité d'énergie de ϕ est constante, et d'après (2.4) le champ de p -tension $\tau_p(\phi)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \tau_p(\phi) &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \phi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \phi_\beta}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_i} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \circ \phi - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \\ &= \frac{2^{\frac{p-2}{2}}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{\partial}{\partial y_1} \end{aligned}$$

où Γ_{ij}^k (resp. $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$) sont les symboles de Christoffel de g (resp. h), dans ce cas $\Gamma_{ij}^k = 0$ et $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = 0$. Donc, l'application ϕ est une application non p -harmonique pour tout $p \geq 2$. Maintenant, nous calculons le champ de bi-tension $\tau_{2,p}(\phi)$. Nous avons :

$$-|d\phi|^{p-2} \text{trace}_g R^N(\tau_p(\phi), d\phi) d\phi = 0,$$

car le tenseur de courbure de Riemann R^N de la métrique h est nul. Le deuxième terme de $\tau_{2,p}(\phi)$ est donné par :

$$\begin{aligned} -\text{trace}_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) &= -g^{ij} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^\phi 2^{\frac{p-2}{2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^\phi \frac{2^{\frac{p-2}{2}}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ &\quad + 2^{\frac{p-2}{2}} g^{ij} \nabla_{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^M \frac{\partial}{\partial x_j}}^\phi 2^{\frac{p-2}{2}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}^\phi \frac{2^{\frac{p-2}{2}}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{\partial}{\partial y_1} \end{aligned}$$

et par quelques calculs, on obtient :

$$-\text{trace}_g \nabla^\phi |d\phi|^{p-2} \nabla^\phi \tau_p(\phi) = -\frac{2^{p-2}}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

On peut vérifier par un calcul direct que :

$$\langle \nabla^{\phi_{\tau_p}}, d\phi \rangle = -\frac{2^{p-2}}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donc, le troisième terme dans la formule (2.31) de $\tau_{2,p}(\phi)$ est donné par :

$$\begin{aligned} & -(p-2)\text{trace}_g \nabla \langle \nabla^{\phi} \tau_p(\phi), d\phi \rangle |d\phi|^{p-4} d\phi \\ &= (p-2)g^{ij} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}^{\phi} \frac{2^{\frac{p-2}{2}}}{x_1^2 + x_2^2} 2^{\frac{p-4}{2}} d\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ & - (p-2)g^{ij} \frac{2^{\frac{p-2}{2}}}{x_1^2 + x_2^2} 2^{\frac{p-4}{2}} d\phi \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_t}}^M \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Par un calcul simple, on trouve que :

$$-(p-2)\text{trace}_g \nabla \langle \nabla^{\phi} \tau_p(\phi), d\phi \rangle |d\phi|^{p-4} d\phi = \frac{(p-2)2^{p-3}}{(x^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial y_1},$$

nous concluons que :

$$\tau_{2,p}(\phi) = \left(-\frac{2^{p-2}}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(p-2)2^{p-3}}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{2^{p-3}(p-4)}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

2.2.3 Tenseur bi- p -énergie impulsion

Définition 2.2.3. Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ . Pour $p \geq 2$, le tenseur bi- p -énergie impulsion de ϕ est défini par :

$$\begin{aligned} S_{2,p}(\phi)(X, Y) &= -\frac{1}{2} |\tau_p(\phi)|^2 g(X, Y) - |d\phi|^{p-2} \langle d\phi, \nabla^{\phi} \tau_p(\phi) \rangle g(X, Y) \\ &+ |d\phi|^{p-2} h(d\phi(X), \nabla_Y^{\phi} \tau_p(\phi)) + |d\phi|^{p-2} h(d\phi(Y), \nabla_X^{\phi} \tau_p(\phi)) \\ &+ (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle d\phi, \nabla^{\phi} \tau_p(\phi) \rangle h(d\phi(X), d\phi(Y)). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Où $\langle, \rangle$ est la métrique riemannienne induite sur $\otimes^2 T^*M$.

Définition 2.2.4. Une variation de classe C^∞ à un paramètre de la métrique g , est une famille de classe C^∞ de métriques $(g_t) (-\varepsilon < t < \varepsilon)$ telle que $g_0 = g$, si on écrit $\delta = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=0}$, alors $\delta g \in \Gamma(\odot^2(T^*M))$ est un champ du tenseur 2-covariant symétrique sur M .

Si (x^i) les coordonnées locales sur M , la métrique g_t sur M s'écrit sous la forme $g_t = g_{ij}(t, x) dx^i dx^j$.

Théorème 2.2.2. [28] Soient $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ telle que $|d\phi|_x \neq 0$ pour tout $x \in M$, et $\{g_t\}$ une variation à un paramètre de g . On a

$$\frac{d}{dt} E_{2,p}(\phi; D)|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_D \langle S_{2,p}(\phi), \delta g \rangle v_g.$$

En utilisant la définition de la divergence pour les $(0, 2)$ -tenseurs symétriques (voir [9, 13]), nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.2.3. [28] Soit $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ telle que $|d\phi|_x \neq 0$ pour tout $x \in M$, alors

$$\operatorname{div}^M S_{2,p}(\phi)(X) = -h(\tau_{2,p}(\phi), d\phi(X)), \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Remarque 2.2.1. Lorsque $p = 2$, on a $S_{2,p}(\phi) = S_2(\phi)$, où $S_2(\phi)$ est le tenseur bi-énergie impulsion de ϕ .

2.3 Bi- p -harmonicité des applications conformes

2.3.1 Champ de bi- p -tension d'une application conforme

Nous calculons le champ de bi- p -tension d'une application conforme. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 2.3.1. Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , alors la bi- p -tension de ϕ est donnée par :

$$\tau_{2,p}(\phi) = (n - p) n^{p-3} \lambda^{2p-4} d\phi(H(\lambda, n, p)), \quad (2.44)$$

où

$$\begin{aligned} H(\lambda, n, p) = & (n + p - 2) \operatorname{grad}(\Delta \ln \lambda) \\ & - \frac{(n^2 - 5np + 4n - 2p^2 + 8p - 8)}{2} \operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \\ & - (p - 1) (n^2 - 3np + 4n - 2p^2 + 8p - 8) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & - 2 (n - p^2 + 3p - 2) (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda + 2n \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \lambda). \end{aligned}$$

Pour la démonstration du théorème 2.3.1, nous allons utiliser trois lemmes.

Lemme 2.3.1. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application C^∞ . Pour tout champ de vecteurs X et pour toute fonction positive f sur M , on a

$$Tr_g (\nabla^\phi)^2 f d\phi(X) = f Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(X) + 2 \nabla_{grad_f}^\phi d\phi(X) + (\Delta f) d\phi(X)$$

et

$$\Delta f^k = k f^k (\Delta \ln f + k |grad \ln f|^2).$$

Preuve. Par définition on a :

$$Tr_g (\nabla^\phi)^2 f d\phi(X) = \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} f d\phi(X) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} f d\phi(X).$$

simplifions les deux termes du côté droit de cette égalité. Pour le premier terme $\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} f d\phi(X)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} f d\phi(X) &= f \nabla_{e_i} d\phi(X) + e_i(f) d\phi(X) \\ &= f \nabla_{e_i} d\phi(X) + f e_i(\ln f) d\phi(X). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} f d\phi(X) &= \nabla_{e_i} f \nabla_{e_i} d\phi(X) + \nabla_{e_i} f e_i(\ln f) d\phi(X) \\ &= f \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} d\phi(X) + f e_i(\ln f) \nabla_{e_i} d\phi(X) \\ &+ f e_i(\ln f) \nabla_{e_i} d\phi(X) + f e_i(e_i(\ln f)) d\phi(X) + f |grad \ln f|^2 d\phi(X) \\ &= f \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} d\phi(X) + 2f \nabla_{grad \ln f} d\phi(X) \\ &+ f e_i(e_i(\ln f)) d\phi(X) + f |grad \ln f|^2 d\phi(X). \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on a :

$$\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} f d\phi(X) = f \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} d\phi(X) + f \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} (\ln f) d\phi(X).$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} Tr_g (\nabla^\phi)^2 f d\phi(X) &= f Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(X) + 2f \nabla_{grad \ln f} d\phi(X) \\ &+ f (\Delta \ln f) d\phi(X) + f |grad \ln f|^2 d\phi(X) \\ &= f Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(X) + 2 \nabla_{grad_f}^\phi d\phi(X) + (\Delta f) d\phi(X). \end{aligned}$$

Et, par définition on a :

$$\Delta f^k = e_i(e_i(f^k)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f^k),$$

en utilisant le fait que pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a

$$X(f^k) = kf^k(X(\ln f),$$

d'où

$$\begin{aligned} e_i(f^k) &= kf^k e_i(\ln f) \\ e_i(e_i(f^k)) &= kf^k e_i(e_i(\ln f)) + k^2 f^k |\text{grad } \ln f|^2 \end{aligned}$$

et

$$(\nabla_{e_i} e_i)(f^k) = kf^k (\nabla_{e_i} e_i)(\ln f)$$

Il suit que :

$$\Delta f^k = kf^k (\Delta \ln f + k |\text{grad } \ln f|^2) .$$

□

Le deuxième lemme nous donne une formule simple du terme $Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(\text{grad } \gamma)$ pour une application conforme $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) de dilatation λ et pour toute fonction $\gamma \in C^\infty(M)$.

Lemme 2.3.2. *Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , alors pour toute fonction $\gamma \in C^\infty(M)$, nous avons :*

$$\begin{aligned} Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(\text{grad } \gamma) &= d\phi(\text{grad } \Delta \gamma) + 4d\phi(\nabla_{\text{grad } \ln \lambda} \text{grad } \gamma) + d\phi(\text{Ricci}^M(\text{grad } \gamma)) \\ &\quad + (\Delta \ln \lambda) d\phi(\text{grad } \gamma) - 2(\Delta \gamma) d\phi(\text{grad } \ln \lambda) \\ &\quad - (n-2) d\ln \lambda (\text{grad } \gamma) d\phi(\text{grad } \ln \lambda) . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Preuve. Soit $\gamma \in C^\infty(M)$, par définition, nous avons

$$Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(\text{grad } \gamma) = \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad } \gamma) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\phi d\phi(\text{grad } \gamma) . \tag{2.46}$$

En commençant par le calcul du terme $\nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad } \gamma)$, nous avons

$$\nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad } \gamma) = \nabla d\phi(e_i, \text{grad } \gamma) + d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad } \gamma) .$$

On a

$$\nabla d\phi(e_i, \text{grad } \gamma) = e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad } \gamma) + d\ln \lambda (\text{grad } \gamma) d\phi(e_i) - e_i(\gamma) d\phi(\text{grad } \ln \lambda) ,$$

alors

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad}\gamma) = & e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma) + d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) d\phi(e_i) \\ & - e_i(\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad}\gamma). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad}\gamma) = & \nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma)\} + \nabla_{e_i}^\phi \{d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) d\phi(e_i)\} \\ & - \nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda)\} + \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad}\gamma). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Nous allons étudier terme par terme le côté droit de cette expression. Pour le premier terme $\nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma)\}$, nous avons

$$\nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma)\} = e_i(\ln \lambda) \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad}\gamma) + e_i(e_i(\ln \lambda)) d\phi(\text{grad}\gamma).$$

En utilisant l'équation (2.47), on déduit que :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma)\} = & e_i(\ln \lambda) e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma) + e_i(\ln \lambda) d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) d\phi(e_i) \\ & - e_i(\ln \lambda) e_i(\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + e_i(\ln \lambda) d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad}\gamma) \\ & + e_i(e_i(\ln \lambda)) d\phi(\text{grad}\gamma), \end{aligned}$$

alors, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma)\} = & |\text{grad} \ln \lambda|^2 d\phi(\text{grad}\gamma) + d\phi(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad}\gamma) \\ & + e_i(e_i(\ln \lambda)) d\phi(\text{grad}\gamma). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Pour le deuxième terme $\nabla_{e_i}^\phi \{d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) d\phi(e_i)\}$, un calcul similaire donne :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \{d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) d\phi(e_i)\} = & d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) + e_i\{g(\text{grad} \ln \lambda, \text{grad}\gamma)\} d\phi(e_i) \\ = & d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) + g(\nabla_{e_i} \text{grad} \ln \lambda, \text{grad}\gamma) d\phi(e_i) \\ & + g(\text{grad} \ln \lambda, \nabla_{e_i} \text{grad}\gamma) d\phi(e_i) \\ = & d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) + g(\nabla_{\text{grad}\gamma} \text{grad} \ln \lambda, e_i) d\phi(e_i) \\ & + g(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad}\gamma, e_i) d\phi(e_i), \end{aligned}$$

il suit que :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \{d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) d\phi(e_i)\} = & d\ln \lambda(\text{grad}\gamma) \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) + d\phi(\nabla_{\text{grad}\gamma} \text{grad} \ln \lambda) \\ & + d\phi(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad}\gamma). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Calculons le troisième terme $\nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda)\}$, en utilisant la même méthode de calcul et l'équation (2.47), nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda)\} &= e_i(\gamma) \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + e_i(e_i(\gamma)) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) \\ &= e_i(\gamma) e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + e_i(\gamma) d\ln \lambda (\text{grad} \ln \lambda) d\phi(e_i) \\ &\quad - e_i(\gamma) e_i(\ln \lambda) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + e_i(\gamma) d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad} \ln \lambda) \\ &\quad + e_i(e_i(\gamma)) d\phi(\text{grad} \ln \lambda), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \{e_i(\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda)\} &= |\text{grad} \ln \lambda|^2 d\phi(\text{grad} \gamma) + d\phi(\nabla_{\text{grad} \gamma} \text{grad} \ln \lambda) \\ &\quad + e_i(e_i(\gamma)) d\phi(\text{grad} \ln \lambda). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Regardons maintenant le dernier terme $\nabla_{e_i}^\phi d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad} \gamma)$, un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) &= e_i(\ln \lambda) d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) + d\ln \lambda (\nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) d\phi(e_i) \\ &\quad - g(e_i, \nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + d\phi(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) \\ &= 2d\phi(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad} \gamma) - (\Delta \gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) \\ &\quad + d\phi(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \text{grad} \gamma), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) &= d\phi(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) + 2d\phi(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad} \gamma) \\ &\quad - (\Delta \gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Si on remplace (2.49), (2.50), (2.51) et (2.52) dans (2.48), nous obtenons

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad} \gamma) &= 4d\phi(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad} \gamma) + e_i(e_i(\ln \lambda)) d\phi(\text{grad} \gamma) \\ &\quad + d\ln \lambda (\text{grad} \gamma) \nabla_{e_i}^\phi d\phi(e_i) - e_i(e_i(\gamma)) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) \\ &\quad + d\phi(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \text{grad} \gamma) - (\Delta \gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Pour compléter la preuve, il reste à calculer le terme $\nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\phi d\phi(\text{grad} \gamma)$, nous avons :

$$\nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\phi d\phi(\text{grad} \gamma) = \nabla d\phi(\nabla_{e_i} e_i, \text{grad} \gamma) + d\phi(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} \text{grad} \gamma).$$

Grâce à l'équation (2.46), nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\phi d\phi(\text{grad}\gamma) &= \nabla_{e_i} e_i (\ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma) + d\ln \lambda (\text{grad}\gamma) d\phi(\nabla_{e_i} e_i) \\ &\quad - \nabla_{e_i} e_i (\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + d\phi(\nabla_{\nabla_{e_i} e_i} \text{grad}\gamma). \end{aligned} \quad (2.54)$$

En substituant (2.53) et (2.54) dans (2.46), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(\text{grad}\gamma) &= \nabla_{e_i}^\phi \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad}\gamma) - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\phi d\phi(\text{grad}\gamma) \\ &= d\phi(\text{Tr}_g \nabla^2 \text{grad}\gamma) + 4d\phi(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad}\gamma) \\ &\quad + (\Delta \ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma) + d\ln \lambda (\text{grad}\gamma) \tau(\phi) \\ &\quad - 2(\Delta \gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant le fait que :

$$\text{Tr}_g \nabla^2 \text{grad}\gamma = \text{grad} \Delta \gamma + \text{Ricci}^M(\text{grad}\gamma)$$

et

$$\tau(\phi) = (2 - n) d\phi(\text{grad} \ln \lambda),$$

nous concluons que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_g (\nabla^\phi)^2 d\phi(\text{grad}\gamma) &= d\phi(\text{grad} \Delta \gamma) + 4d\phi(\nabla_{\text{grad} \ln \lambda} \text{grad}\gamma) + d\phi(\text{Ricci}^M(\text{grad}\gamma)) \\ &\quad + (\Delta \ln \lambda) d\phi(\text{grad}\gamma) - 2(\Delta \gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) \\ &\quad - (n - 2) d\ln \lambda (\text{grad}\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda). \end{aligned}$$

Maintenant, dans le deuxième lemme, nous allons calculer $\text{Tr}_g R^N(d\phi(\text{grad}\gamma), d\phi) d\phi$ pour une application conforme $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) de dilatation λ et pour toute fonction $\gamma \in C^\infty(M)$.

Lemme 2.3.3. *Soit $\phi : (M^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , alors pour toute fonction $\gamma \in C^\infty(M)$, nous avons :*

$$\begin{aligned} \text{Tr}_g R^N(d\phi(\text{grad}\gamma), d\phi) d\phi &= d\phi(\text{Ricci}^M(\text{grad}\gamma)) - (n - 2) d\phi(\nabla_{\text{grad}\gamma} \text{grad} \ln \lambda) \\ &\quad - (\Delta \ln \lambda + (n - 2) |\text{grad} \ln \lambda|^2) d\phi(\text{grad}\gamma) \\ &\quad + (n - 2) d\ln \lambda (\text{grad}\gamma) d\phi(\text{grad} \ln \lambda). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Preuve. Soit $\gamma \in C^\infty(M)$. Par définition, nous avons :

$$Tr_g R^N(d\phi(grad\gamma), d\phi)d\phi = R^N(d\phi(grad\gamma), d\phi(e_i))d\phi(e_i) \quad (2.56)$$

or il est bien connu que (voir [6])

$$\begin{aligned} Ric^N(d\phi(X), d\phi(Y)) &= Ric^M(X, Y) + (n-2)X(\ln\lambda)Y(\ln\lambda) \\ &\quad - (n-2)|grad\ln\lambda|^2 g(X, Y) \\ &\quad - (n-2)\nabla d\ln\lambda(X, Y) - (\Delta\ln\lambda)g(X, Y), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} Ric^N(d\phi(grad\gamma), d\phi(e_i)) &= Ric^M(grad\gamma, e_i) + (n-2)grad\gamma(\ln\lambda)e_i(\ln\lambda) \\ &\quad - (n-2)|grad\ln\lambda|^2 g(grad\gamma, e_i) \\ &\quad - (n-2)\nabla d\ln\lambda(grad\gamma, e_i) - (\Delta\ln\lambda)g(grad\gamma, e_i) \end{aligned}$$

il suit que

$$\begin{aligned} Ric^N(d\phi(grad\gamma), d\phi(e_i)) &= Ric^M(grad\gamma, e_i) + (m-2)d\ln\lambda(grad\gamma)e_i(\ln\lambda) \\ &\quad - (n-2)|grad\ln\lambda|^2 e_i(\gamma) - (n-2)\nabla d\ln\lambda(grad\gamma, e_i) \\ &\quad - (\Delta\ln\lambda)e_i(\gamma). \end{aligned} \quad (2.57)$$

En remplaçant (2.57) dans (2.56), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} Tr_g R^N(d\phi(grad\gamma), d\phi)d\phi &= R^N(d\phi(grad\gamma), d\phi(e_i))d\phi(e_i) \\ &= d\phi(Ricci^M(grad\gamma)) \\ &\quad + (n-2)d\ln\lambda(grad\gamma)d\phi(grad\ln\lambda) \\ &\quad - (n-2)|grad\ln\lambda|^2 d\phi(grad\gamma) \\ &\quad - (n-2)\nabla d\ln\lambda(grad\gamma, e_i)d\phi(e_i) - (\Delta\ln\lambda)d\phi(grad\gamma). \end{aligned}$$

Pour la suite de la démonstration, nous allons simplifier le terme

$$\nabla d\ln\lambda(grad\gamma, e_i)d\phi(e_i),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \nabla d\ln\lambda(grad\gamma, e_i)d\phi(e_i) &= \{e_i(g(grad\ln\lambda, grad\gamma)) - d\ln\lambda(\nabla_{e_i}grad\gamma)\}d\phi(e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i}grad\ln\lambda, grad\gamma)d\phi(e_i) \\ &= g(\nabla_{grad\gamma}grad\ln\lambda, e_i)d\phi(e_i) \\ &= d\phi(\nabla_{grad\gamma}grad\ln\lambda), \end{aligned}$$

ce qui nous donne finalement :

$$\begin{aligned} Tr_g R^N (d\phi (grad \gamma), d\phi) d\phi &= d\phi (Ricci^M (grad \gamma)) - (n-2) d\phi (\nabla_{grad \gamma} grad \ln \lambda) \\ &\quad - (\Delta \ln \lambda + (n-2) |grad \ln \lambda|^2) d\phi (grad \gamma) \\ &\quad + (n-2) d \ln \lambda (grad \gamma) d\phi (grad \ln \lambda), \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant prêts de démontrer le théorème 2.3.1.

Démonstration du théorème 2.3.1. Le fait que l'application ϕ est conforme de dilatation λ nous donne :

$$\tau(\phi) = (2-n) d\phi (grad \ln \lambda), \quad |d\phi|^2 = n\lambda^2, \quad |d\phi|^{p-2} = n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^{p-2}$$

et

$$grad (\ln |d\phi|^2) = 2 grad \ln \lambda.$$

alors

$$\begin{aligned} \tau_p(\phi) &= |d\phi|^{p-2} \left\{ \tau(\phi) + \left(\frac{p-2}{2} \right) d\phi (grad \ln |d\phi|^2) \right\} \\ &= n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^{p-2} \left((2-n) d\phi (grad \ln \lambda) + (p-2) d\phi (grad \ln \lambda) \right) \\ &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda). \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de $\tau_p(\phi)$ dans (2.39), on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(\phi) &= -(p-n) n^{p-2} \lambda^{p-2} Tr_g (\nabla^\phi)^2 \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad - (p-n) n^{p-2} \lambda^{p-2} Tr_g R^N (\lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda), d\phi) d\phi \\ &\quad - (p-2) (p-n) n^{p-2} \lambda^{p-2} \nabla_{grad \ln \lambda}^\phi \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad - (p-2) (p-n)^2 n^{p-3} \lambda^{p-4} \langle \nabla \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda), d\phi \rangle d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad - (p-2) (p-n) n^{p-3} \lambda^{p-4} d\phi (grad \langle \nabla \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda), d\phi \rangle) \\ &\quad + 2 (p-2) (p-n) n^{p-3} \lambda^{p-4} \langle \nabla \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda), d\phi \rangle d\phi (grad \ln \lambda). \end{aligned} \tag{2.58}$$

Nous allons simplifier les termes de cette dernière équation. Pour le terme

$$Tr_g (\nabla^\phi)^2 \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda),$$

on a :

$$\begin{aligned} Tr_g (\nabla^\phi)^2 \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda) &= \lambda^{p-2} Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi (grad \ln \lambda) + 2 \nabla_{grad \lambda^{p-2}}^\phi d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad + (\Delta \lambda^{p-2}) d\phi (grad \ln \lambda). \end{aligned}$$

Par le lemme 2.3.1, on a :

$$\begin{aligned} Tr_g (\nabla^\phi)^2 d\phi (grad \ln \lambda) &= d\phi (grad \Delta \ln \lambda) + 2d\phi (grad (|grad \ln \lambda|^2)) \\ &\quad - (\Delta \ln \lambda) d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad - (n-2) |grad \ln \lambda|^2 d\phi (grad \ln \lambda) + d\phi (Ricci (grad \ln \lambda)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 2\nabla_{grad \lambda^{p-2}}^\phi d\phi (grad \ln \lambda) &= 2(p-2) \lambda^{p-2} |grad \ln \lambda|^2 d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad + (p-2) \lambda^{p-2} d\phi (grad (|grad \ln \lambda|^2)) . \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.3.2, on obtient

$$\Delta \lambda^{p-2} = (p-2) \lambda^{p-2} (\Delta \ln \lambda + (p-2) |grad \ln \lambda|^2) ,$$

donc

$$\begin{aligned} Tr_g (\nabla^\phi)^2 \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda) &= \lambda^{p-2} d\phi (grad \Delta \ln \lambda) + p\lambda^{p-2} d\phi (grad (|grad \ln \lambda|^2)) \\ &\quad - (n-p^2+2p-2) \lambda^{p-2} |grad \ln \lambda|^2 d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad + (p-3) \lambda^{p-2} (\Delta \ln \lambda) d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad + \lambda^{p-2} d\phi (Ricci (grad \ln \lambda)) . \end{aligned} \tag{2.59}$$

le lemme 2.3.3, nous donne aussi la formule suivante :

$$\begin{aligned} Tr_g R^N (d\phi (grad \ln \lambda), d\phi) d\phi &= -\frac{n-2}{2} d\phi (grad (|grad \ln \lambda|^2)) - (\Delta \ln \lambda) d\phi (grad \ln \lambda) \\ &\quad + d\phi (Ricci (grad \ln \lambda)) \end{aligned} \tag{2.60}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_{grad \ln \lambda}^\phi \lambda^{p-2} d\phi (grad \ln \lambda) &= \lambda^{p-2} \left((p-1) |grad \ln \lambda|^2 d\phi (grad \ln \lambda) + \frac{1}{2} d\phi (grad (|grad \ln \lambda|^2)) \right) \end{aligned} \tag{2.61}$$

Pour le terme $\langle \nabla \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi \rangle$, on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi \rangle &= \text{Tr}_g h(\nabla \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi) \\
 &= h(\nabla_{e_i} \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(e_i)) \\
 &= \lambda^{p-2} h(\nabla_{e_i} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(e_i)) \\
 &\quad + e_i(\lambda^{p-2}) h(d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(e_i)) \\
 &= \lambda^{p-2} (\lambda^2 \Delta \ln \lambda + n \lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2) \\
 &\quad + (p-2) \lambda^{p-2} \lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2.
 \end{aligned}$$

alors :

$$\langle \nabla \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi \rangle = \lambda^p (\Delta \ln \lambda + (n+p-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2). \quad (2.62)$$

Finalement, en utilisant les formules suivantes :

$$\text{grad}(\lambda^p (\Delta \ln \lambda)) = \lambda^p \text{grad} \Delta \ln \lambda + p \lambda^p (\Delta \ln \lambda) \text{grad} \ln \lambda$$

et

$$\text{grad}(\lambda^p |\text{grad} \ln \lambda|^2) = \lambda^p \text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2) + p \lambda^p |\text{grad} \ln \lambda|^2 \text{grad} \ln \lambda,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
 \text{grad} \langle \nabla \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi \rangle &= \lambda^p \text{grad}(\Delta \ln \lambda) \\
 &\quad + \lambda^p (n+p-2) \text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2) \\
 &\quad + p \lambda^p (\Delta \ln \lambda) \text{grad}(\ln \lambda) \\
 &\quad + p (n+p-2) \lambda^p |\text{grad} \ln \lambda|^2 \text{grad} \ln \lambda
 \end{aligned} \quad (2.63)$$

si on remplace (2.59), (2.60), (2.61), (2.62) et (2.63) dans (2.58), nous concluons que :

$$\tau_{2,p}(\phi) = (n-p) n^{p-3} \lambda^{2p-4} d\phi(H(\lambda, n, p)),$$

où

$$\begin{aligned}
 H(\lambda, n, p) &= (n+p-2) \text{grad}(\Delta \ln \lambda) \\
 &\quad - \frac{(n^2 - 5np + 4n - 2p^2 + 8p - 8)}{2} \text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2) \\
 &\quad - (p-1) (n^2 - 3np + 4n - 2p^2 + 8p - 8) |\text{grad} \ln \lambda|^2 \text{grad} \ln \lambda \\
 &\quad - 2(n - p^2 + 3p - 2) (\Delta \ln \lambda) \text{grad} \ln \lambda + 2n \text{Ricci}(\text{grad} \ln \lambda).
 \end{aligned}$$

Théorème 2.3.2. *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , alors ϕ est bi- p -harmonique si et seulement si :*

$$\begin{aligned} & (n + p - 2) \operatorname{grad}(\Delta \ln \lambda) - \frac{(n^2 - 5np + 4n - 2p^2 + 8p - 8)}{2} \operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \\ & - (p - 1) (n^2 - 3np + 4n - 2p^2 + 8p - 8) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & - 2 (n - p^2 + 3p - 2) (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda + 2n \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

En particulier, nous démontrons que la bi- p -harmonicité d'une application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) où la dilatation λ est radiale ($\ln \lambda = \alpha(r)$, $r = |x|$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) est équivalente à une équation différentielle ordinaire du second ordre. Plus précisément, nous avons :

Corollaire 2.3.1. *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ où l'on suppose que la dilatation λ est radiale ($\lambda = \lambda(r)$, $r = |x|$). En posant $\beta = (\ln \lambda)'$, on obtient*

$$\operatorname{grad} \ln \lambda = \beta \frac{\partial}{\partial r}, \quad |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 = \beta^2, \quad \operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) = 2\beta\beta' \frac{\partial}{\partial r}$$

et

$$\Delta \ln \lambda = \beta' + \frac{n-1}{r} \beta, \quad \operatorname{grad} \Delta \ln \lambda = \left(\beta'' + \frac{n-1}{r} \beta' - \frac{n-1}{r^2} \beta \right) \frac{\partial}{\partial r}.$$

En utilisant le théorème 1.4.4, on en déduit que ϕ est bi- p -harmonique si et seulement si β vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} & (n + p - 2) \beta'' - (n^2 - 5np + 6n - 4p^2 + 14p - 12) \beta \beta' + \frac{(n + p - 2)(n - 1)}{r} \beta' \\ & - \frac{(n + p - 2)(n - 1)}{r^2} \beta + \frac{2(p^2 - 3p - n + 2)(n - 1)}{r} \beta^2 \\ & + (p - 1) (-n^2 + 3np - 4n + 2p^2 - 8p + 8) \beta^3 = 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Pour résoudre l'équation (2.64), nous allons étudier deux types de solutions. Dans le premier cas, on regarde les solutions qui s'écrivent sous la forme $\beta = \frac{a}{r}$, $a \in \mathbb{R}^*$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.3.2. *Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ , si on suppose que $(\ln \lambda)' = \beta = \frac{a}{r}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Alors ϕ*

est bi- p -harmonique si et seulement si a est solution de l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} a^2 n^2 p - a^2 n^2 - 3a^2 n p^2 + 7a^2 n p - 4a^2 n - 2a^2 p^3 + 10a^2 p^2 - 16a^2 p + 8a^2 + a n^2 \\ - 2a n p^2 + 11a n p - 12a n + 6a p^2 - 20a p + 16a + 2n^2 + 2n p - 8n - 4p + 8 = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Remarque 2.3.1. L'équation (2.65) nous ramène à deux types de solutions :

1.

$$a = -\frac{2(n-2) \left(n + \sqrt{n(17n-16)} \right)}{(3n^2 - 6n + 4) \sqrt{n(17n-16)} - 13n^3 + 42n^2 - 28n}$$

et

$$p = \frac{1}{4} \sqrt{n(17n-16)} - \frac{3}{4}n + 2,$$

avec $n \geq 3$.

2.

$$a = \frac{A(n, p) - 12n - 20p - 2np^2 + 11np + n^2 + 6p^2 + 16}{8n + 32p + 6np^2 - 2n^2p - 14np + 2n^2 - 20p^2 + 4p^3 - 16}$$

ou

$$a = -\frac{A(n, p) + 12n + 20p + 2np^2 - 11np - n^2 - 6p^2 - 16}{8n + 32p + 6np^2 - 2n^2p - 14np + 2n^2 - 20p^2 + 4p^3 - 16},$$

avec

$$A(n, p) = \sqrt{4(n-1)^2 p^4 - 4(n-1)(n-4)p^3 + (12n^3 - 35n^2 + 8n + 16)p^2 - 2n(4n^3 - 3n^2 - 16n + 16)p + n^2(3n-4)^2}$$

et

$$p \neq \frac{1}{4} \sqrt{n(17n-16)} - \frac{3}{4}n + 2$$

La remarque 2.3.1 permet d'étudier les exemples suivants. Les exemples à citer correspondent aux cas où $a = -2$ et $a = -1$.

Exemple 2.3.1. On considère l'inversion $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($n \geq 3$) défini par $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. ϕ est une application conforme de dilatation $\lambda = \frac{1}{r^2}$. On en déduit que ϕ est bi- p -harmonique si et seulement si :

$$p = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\sqrt{-20n + 12n^2 + 9} + \frac{5}{4}, \quad n \geq 4$$

ou

$$p = -\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\sqrt{n(17n-16)} + 2, \quad n \geq 3.$$

Exemple 2.3.2. Soit $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ donnée en coordonnées polaires par :

$$\phi(r\theta) = (\ln r, \theta), \quad r > 0, \quad \theta \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

ϕ est une application conforme de dilatation $\lambda = \frac{1}{r}$. Nous concluons que ϕ est bi- p -harmonique si et seulement si :

$$p = \frac{n}{2}, \quad n \geq 4$$

ou

$$p = -\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\sqrt{n(17n-16)} + 2, \quad n \geq 3.$$

Comme deuxième cas particulier, nous chercherons les solutions de la forme $\beta = \frac{a}{1+r^2}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Corollaire 2.3.3. Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) une application conforme de dilatation λ où l'on suppose que $(\ln \lambda)' = \beta = \frac{a}{1+r^2}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Alors ϕ est bi- p -harmonique si et seulement si a est solution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} n^5 p + 2n^5 - 3n^4 p^2 - 6n^4 p - 4n^4 + n^3 p^3 + 6n^3 p^2 \\ + 14n^3 p - 4n^3 + 3n^2 p^4 - 6n^2 p^3 - 12n^2 p^2 + 4n^2 p \\ + 8n^2 - 2np^5 + 4np^4 - 2np^3 + 16np^2 - 24np \\ + 4p^4 - 16p^3 + 16p^2 = 0 \\ \text{et} \\ 3an^2 - 2anp^2 + anp - 2ap^2 + 8ap - 8a + 2n^2 + 2np + 4p - 8 = 0 \end{array} \right. \quad (2.66)$$

Remarques 2.3.1. Pour résoudre ce système, nous distinguons trois cas :

1.

$$p = n, \quad a = \frac{2}{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Dans ce cas, l'application conforme est n -harmonique donc bi- n -harmonique.

2.

$$p = \frac{n}{2}, \quad a = \frac{6n-8}{n^2-8n+8}, \quad n \geq 4.$$

Alors ϕ est bi- p -harmonique non- p -harmonique.

2.3.2 Tenseur bi- p -énergie-impulsion d'une application conforme 57

3.

$$p = \frac{1}{2n} \left(\sqrt{-16n + 4n^2 + 8n^3 + n^4 + 4} + n^2 + 2 \right)$$

et

$$a = -\frac{2n^2 + 2np + 4p - 8}{3n^2 - 2np^2 + np - 2p^2 + 8p - 8}, \quad n \geq 3.$$

Alors ϕ est bi- p -harmonique non p -harmonique.

2.3.2 Tenseur bi- p -énergie-impulsion d'une application conforme

Dans cette partie, nous calculons le tenseur bi- p -énergie d'une application conforme.

Théorème 2.3.3. *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ , alors on a :*

$$\begin{aligned} S_{2,p}(\phi)(X, Y) = & \frac{p-n}{2} n^{p-3} \lambda^{2p-2} \left(n(n+p-4) - 2(p-2)^2 \right) |\text{grad} \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\ & + (p-n)(n-p+2) n^{p-3} \lambda^{2p-2} (\Delta \ln \lambda) g(X, Y) \\ & - 2(p-n) n^{p-2} \lambda^{2p-2} (\nabla d \ln \lambda(X, Y) - (p-2) X(\ln \lambda) Y(\ln \lambda)), \end{aligned} \quad (2.67)$$

et la trace de $S_{2,p}(\phi)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_g S_{2,p}(\phi) = & \frac{p-n}{2} n^{p-2} \lambda^{2p-2} (n(n+p-4) - 2(p-2)(p-4)) |\text{grad} \ln \lambda|^2 \\ & - (p-n)^2 n^{p-2} \lambda^{2p-2} (\Delta \ln \lambda). \end{aligned} \quad (2.68)$$

En utilisant le fait que :

$$\Delta \lambda^k = k \lambda^k (\Delta \ln \lambda + k |\text{grad} \ln \lambda|^2),$$

on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.4. *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application conforme de dilatation λ où $n \neq p$, alors*

$$\text{Tr}_g S_{2,p}(\phi) = -(p-n)^2 n^{p-2} \lambda^{2p-2} T(\lambda),$$

2.3.2 Tenseur bi- p -énergie-impulsion d'une application conforme 58

où

$$T(\lambda) = \Delta \ln \lambda + \frac{n(n+p-4) - 2(p-2)(p-4)}{2(n-p)} |\text{grad} \ln \lambda|^2$$

et

$Tr_g S_{2,p}(\phi) = 0$ si et seulement si la fonction $\lambda^{\frac{n(n+p-4)-2(p-2)(p-4)}{2(n-p)}}$ est harmonique.

Remarque 2.3.2. Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$, ($n \neq p$) soit une application conforme de dilatation λ , si on suppose que la dilatation λ est radiale. En posant $\beta = (\ln \lambda)'$, on en déduit que la trace de $S_{2,p}(\phi)$ est nulle si et seulement si β satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\beta' + \frac{n-1}{r} \beta + \frac{n+2p-4}{2} \beta^2 = 0. \quad (2.69)$$

La solution générale de cette équation est donnée par :

$$\beta = \begin{cases} \frac{2(n-2)}{A(n-2)r^{n-1} - (n+2p-4)r}, & n \neq 2, A \in \mathbb{R} \\ \frac{2}{(n+2p-4)r \ln r + Ar}, & n = 2, A \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Remarque 2.3.3. Soit $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$, ($n \neq p$, $n \neq 2$) une application conforme de dilatation λ , si on suppose que la dilatation λ est radiale. nous chercherons les solutions de la forme $\beta = \frac{a}{r}$, $a \in \mathbb{R}^*$. on en déduit que la trace de $S_{2,p}(\phi)$ est nulle si et seulement si :

$$a = -\frac{2(n-2)}{n+2p-4}, \quad n+2p-4 \neq 0. \quad (2.70)$$

Par exemple, si on considère l'application conforme

$\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ donnée en coordonnées polaires par :

$$\phi(r\theta) = (\ln r, \theta),$$

on en déduit que pour cette application ϕ la trace de $S_{2,p}(\phi)$ vaut zéro si et seulement si $n = 2p$.

Démonstration du théorème 2.3.3. Choisissons $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ comme base orthonormé sur (M, g) . Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned} S_{2,p}(\phi)(X, Y) &= \frac{1}{2} |\tau_p(\phi)|^2 g(X, Y) + |d\phi|^{p-2} \langle d\phi, \nabla^\phi \tau_p(\phi) \rangle g(X, Y) \\ &\quad - |d\phi|^{p-2} h(d\phi(X), \nabla_Y^\phi \tau_p(\phi)) - |d\phi|^{p-2} h(d\phi(Y), \nabla_X^\phi \tau_p(\phi)) \\ &\quad - (p-2) |d\phi|^{p-4} \langle d\phi, \nabla^\phi \tau_p(\phi) \rangle h(d\phi(X), d\phi(Y)). \end{aligned} \quad (2.71)$$

2.3.2 Tenseur bi- p -énergie-impulsion d'une application conforme 59

Utilisant le fait que :

$$\tau_p(\phi) = (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda),$$

on obtient :

$$|\tau_p(\phi)|^2 = (p-n)^2 n^{p-2} \lambda^{2p-2} |\text{grad} \ln \lambda|^2. \quad (2.72)$$

Pour le terme $\langle d\phi, \nabla^\phi \tau_p(\phi) \rangle$, on a

$$\begin{aligned} \langle d\phi, \nabla^\phi \tau_p(\phi) \rangle &= h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}^\phi \tau_p(\phi)) \\ &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}^\phi \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda)) \\ &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^{p-2} h(d\phi(e_i), \nabla_{e_i}^\phi d\phi(\text{grad} \ln \lambda)) \\ &\quad + (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} e_i(\lambda^{p-2}) h(d\phi(e_i), d\phi(\text{grad} \ln \lambda)) \\ &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p (\Delta \ln \lambda + n |\text{grad} \ln \lambda|^2) \\ &\quad + (p-n)(p-2) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p |\text{grad} \ln \lambda|^2. \end{aligned}$$

d'où

$$\langle d\phi, \nabla^\phi \tau_p(\phi) \rangle = (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p (\Delta \ln \lambda + (n+p-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2). \quad (2.73)$$

Il reste à simplifier $h(d\phi(X), \nabla_Y^\phi \tau_p(\phi))$ et $h(d\phi(Y), \nabla_X^\phi \tau_p(\phi))$, on a :

$$\begin{aligned} h(d\phi(X), \nabla_Y^\phi \tau_p(\phi)) &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} h(d\phi(X), \nabla_Y^\phi \lambda^{p-2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda)) \\ &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p \nabla d \ln \lambda(X, Y) \\ &\quad + (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p |\text{grad} \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\ &\quad + (p-n)(p-2) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p X(\ln \lambda) Y(\ln \lambda), \end{aligned}$$

qui nous donne :

$$\begin{aligned} h(d\phi(X), \nabla_Y^\phi \tau_p(\phi)) &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p \nabla d \ln \lambda(X, Y) \\ &\quad + (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p |\text{grad} \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\ &\quad + (p-n)(p-2) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p X(\ln \lambda) Y(\ln \lambda). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Un calcul similaire donne :

$$\begin{aligned} h(d\phi(Y), \nabla_X^\phi \tau_p(\phi)) &= (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p \nabla d \ln \lambda(X, Y) \\ &\quad + (p-n) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p |\text{grad} \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\ &\quad + (p-n)(p-2) n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^p X(\ln \lambda) Y(\ln \lambda). \end{aligned} \quad (2.75)$$

En remplaçant (2.70), (2.72), (2.74) et (2.75) dans (2.71) et en utilisant le fait que :

$$|d\phi|^{p-2} = n^{\frac{p-2}{2}} \lambda^{p-2}, \quad |d\phi|^{p-4} = n^{\frac{p-4}{2}} \lambda^{p-4},$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} S_{2,p}(\phi)(X, Y) &= \frac{p-n}{2} n^{p-3} \lambda^{2p-2} (n(n+p-4) - 2(p-2)^2) |grad \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\ &+ (p-n)(n-p+2) n^{p-3} \lambda^{2p-2} (\Delta \ln \lambda) g(X, Y) \\ &- 2(p-n) n^{p-2} \lambda^{2p-2} (\nabla d \ln \lambda(X, Y) - (p-2) X(\ln \lambda) Y(\ln \lambda)). \end{aligned}$$

Pour compléter la preuve, calculons la trace de $S_{2,p}(\phi)$, nous avons :

$$\begin{aligned} Tr_g S_{2,p}(\phi) &= S_{2,p}(\phi)(e_i, e_i) \\ &= \frac{p-n}{2} n^{p-3} \lambda^{2p-2} (n(n+p-4) - 2(p-2)^2) |grad \ln \lambda|^2 g(e_i, e_i) \\ &+ (p-n)(n-p+2) n^{p-3} \lambda^{2p-2} (\Delta \ln \lambda) g(e_i, e_i) \\ &- 2(p-n) n^{p-2} \lambda^{2p-2} (\nabla d \ln \lambda(e_i, e_i) - (p-2) e_i(\ln \lambda) e_i(\ln \lambda)), \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Tr_g S_{2,p}(\phi) &= \frac{p-n}{2} n^{p-2} \lambda^{2p-2} (n(n+p-4) - 2(p-2)(p-4)) |grad \ln \lambda|^2 \\ &- (p-n)^2 n^{p-2} \lambda^{2p-2} (\Delta \ln \lambda). \end{aligned}$$

2.3.3 Le cas d'un difféomorphisme conforme

On va regarder maintenant le cas où $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un difféomorphisme conforme et on va étudier la bi- p -harmonicité de l'application inverse. Notons que si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un difféomorphisme conforme de dilatation λ , alors l'application réciproque

$\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^m, g)$ est une application conforme de dilatation $\tilde{\lambda}(y) = \frac{1}{\lambda(\psi(y))}$ pour tout $y \in N$.

Théorème 2.3.4. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) un difféomorphisme conforme de dilatation λ . Alors l'application réciproque $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow$*

(M^n, g) est bi- p -harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} & (n + p - 2) \operatorname{grad} (\Delta \ln \lambda) - p (n - 2p) (n + p - 2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & - \frac{2p^2 + 3np - 4p - n^2}{2} \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) - 2 (p^2 - 2p + n) (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & + 2n \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Preuve. Comme l'application $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^n, g)$ est conforme de dilatation $\tilde{\lambda}(y) = \frac{1}{\lambda(\psi(y))}$ pour tout $y \in N$, alors elle est bi- p -harmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned} & (n + p - 2) \operatorname{grad} (\Delta \ln \tilde{\lambda}) \\ & - \frac{(n^2 - 5np + 4n - 2p^2 + 8p - 8)}{2} \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda}|^2) \\ & - (p - 1) (n^2 - 3np + 4n - 2p^2 + 8p - 8) |\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda}|^2 \operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda} \\ & - 2 (n - p^2 + 3p - 2) (\Delta \ln \tilde{\lambda}) \operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda} + 2n \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda}) = 0. \end{aligned}$$

Un long calcul nous donne :

$$\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda),$$

$$|\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda}|^2 = \frac{1}{\lambda^2} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2,$$

$$\Delta \ln \tilde{\lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} (\Delta \ln \lambda + (n - 2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2),$$

$$\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda}|^2) = \frac{1}{\lambda^4} d\phi(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)) - \frac{2}{\lambda^4} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (\Delta \ln \tilde{\lambda}) &= -\frac{1}{\lambda^4} d\phi(\operatorname{grad} (\Delta \ln \lambda)) - \frac{(n - 2)}{\lambda^4} d\phi(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)) \\ &+ \frac{2}{\lambda^4} (\Delta \ln \lambda) d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda) + \frac{2(n - 2)}{\lambda^4} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda}) &= \frac{(n - 2)}{2\lambda^4} d\phi(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)) + \frac{1}{\lambda^4} (\Delta \ln \lambda) d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda) \\ &- \frac{1}{\lambda^4} d\phi(\operatorname{Ricci}^M(\operatorname{grad} \ln \lambda)). \end{aligned}$$

D'où la bi- p -harmonicité de l'application réciproque $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^n, g)$ est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned} & (n + p - 2) \operatorname{grad} (\Delta \ln \lambda) - p (n - 2p) (n + p - 2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & - \frac{2p^2 + 3np - 4p - n^2}{2} \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) - 2 (p^2 - 2p + n) (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & + 2n \operatorname{Ricci} (\operatorname{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 2.3.4. *En particulier, une condition nécessaire pour que ϕ et sa réciproque soient bi- p -harmoniques est donnée par :*

$$\begin{aligned} & (n^2 + 2np^2 - 9np + 4n - 6p^2 + 16p - 8) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & - (n^2 + 2n - 4np + 6p - 2p^2 - 4) \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \\ & + 2 (2p - 1) (p - 2) (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda = 0. \end{aligned}$$

De plus, si la dilatation λ du diff eomorphisme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) est radiale, c'est à dire : $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x| \text{ et } \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, alors cette condition nécessaire est traduite par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} & -2 (2n + 11p - 4np + n^2 - 4p^2 - 6) \beta' + \frac{2 (2p - 1) (p - 2) (n - 1)}{r} \beta \\ & + (n^2 + 2np^2 - 9np + 4n - 6p^2 + 16p - 8) \beta^2 = 0, \end{aligned}$$

où $\beta = \alpha'$. En cherchant des solutions particulières de la forme $\beta = \frac{a}{r}$ où $a \neq 0$, on trouve l'équation algébrique suivante :

$$(n^2 + 2np^2 - 9np + 4n - 6p^2 + 16p - 8) (a + 2) = 0.$$

Pour la résolution de cette équation, deux cas se présentent :

1. *Premier cas : Si $4n + 16p + 2np^2 - 9np + n^2 - 6p^2 - 8 \neq 0$, on trouve $a = -2$ pour tout $n \geq 3$. Dans ce cas, tous les dif eomorphismes conformes de dilatation $\lambda = \frac{C}{r^2}$, $C > 0$ vérifient la condition nécessaire.*
2. *Deuxième cas : $4n + 16p + 2np^2 - 9np + n^2 - 6p^2 - 8 = 0$, on trouve*

$$\begin{cases} p = \frac{1}{4n-12} (9n + \sqrt{-128n + 73n^2 - 8n^3 + 64} - 16) \\ \text{ou} \\ p = \frac{1}{4n-12} (9n - \sqrt{-128n + 73n^2 - 8n^3 + 64} - 16) \end{cases}$$

avec $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ et a est quelconque.

De même, si on cherche des solutions particulières de la forme $\beta = \frac{ar}{r^2+1}$ où $a \neq 0$, on trouve le système algébrique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 8a + 8n + 32p + 2n^2 - 12p^2 - 16 + 4an + 16ap \\ -18np + an^2 - 6ap^2 + 4np^2 - 9anp + 2anp^2 = 0 \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ 4np^2 - 12p - 2np - 2n^2 + 4p^2 + 8 = 0 \end{array} \right.$$

Pour ce système, on obtient deux cas :

1. Premier cas : $a = -2$ et $p = \frac{n + \sqrt{-20n + 9n^2 + 8n^3 + 4} + 6}{4n + 4}$, $n \geq 6$. Dans ce cas, tous les difféomorphismes conformes de dilatation $\lambda = \frac{C}{r^2}$, $C > 0$ vérifient la condition nécessaire.
2. Deuxième cas : $n = 6$, $p = 2$ et a quelconque.

Chapitre 3

Quelques résultats sur les applications p -biharmoniques.

Dans ce chapitre, on présente quelques résultats sur les applications p -biharmoniques.

Dans une première partie, on s'intéresse à l'étude de la p -biharmonicité des applications conformes, en donnant quelques propriétés et en construisant de nouveaux exemples d'applications p -biharmoniques.

La formule de monotonie pour les applications p -harmoniques et p -biharmoniques fait l'objet de la deuxième partie de ce chapitre.

3.1 Généralités sur les applications f -harmoniques et f -biharmoniques

3.1.1 Applications f -harmoniques

Définition 3.1.1. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ et soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive. On définit la fonctionnelle f -énergie de l'application ϕ par :

$$E_f(\phi) = \frac{1}{2} \int_M f |d\phi|^2 dv_g.$$

où $|d\phi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\phi$ et dv_g la mesure de M associée à la métrique g .

Les équations d'Euler-lagrange associées à cette fonctionnelle nous permettent de définir la f -harmonicité. ϕ est dite f -harmonique si :

$$\tau_f(\phi) = \text{Tr}_g \nabla f \tau(\phi) = 0,$$

$\tau_f(\phi)$ est appelée le champ de f -tension de ϕ et un calcul simple nous donne l'expression suivante :

$$\tau_f(\phi) = f \{ \tau(\phi) + d\phi(\text{grad} \ln f) \}.$$

Remarque 3.1.1. Les applications p -harmoniques qui sont les points critiques de la fonctionnelle p -énergie définie par :

$$E_p(\phi) = \frac{1}{p} \int_M |d\phi|^p dv_g,$$

sont un cas particulier de applications f -harmoniques en prenant $f = \frac{2}{p} |d\phi|^{p-2}$. Par suite, l'application ϕ est dite p -harmonique si

$$\tau_p(\phi) = \frac{2}{p} |d\phi|^{p-2} \left\{ \tau(\phi) + \frac{p-2}{2} d\phi(\text{grad} \ln(|d\phi|^2)) \right\} = 0,$$

c'est à dire

$$\tau(\phi) + \frac{p-2}{2} d\phi(\text{grad} \ln(|d\phi|^2)) = 0.$$

$\tau_p(\phi)$ est appelé le champ de p -tension de ϕ .

3.1.2 Applications f -biharmoniques

Définition 3.1.2. Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ . La f -bi-énergie de ϕ est définie par :

$$E_{f,2}(\phi) = \frac{1}{2} \int_M f |\tau(\phi)|^2 dv_g \quad (3.1)$$

Les équations d'Euler-lagrange associées à cette fonctionnelle nous donnent la caractérisation de la f -biharmonicité. ϕ est dite f -biharmonique si :

$$\tau_{f,2}(\phi) = f \tau_2(\phi) - (\Delta f) \tau(\phi) - 2 \nabla_{\text{grad} f}^\phi \tau(\phi) = 0. \quad (3.2)$$

$\tau_{f,2}(\phi)$ est appelé le champ de f -bi-tension.

Remarque 3.1.2. *En remarquant que :*

$$\Delta f = f (\Delta \ln f) + f |\operatorname{grad} \ln f|^2,$$

il suit que

$$\tau_{f,2}(\phi) = f \left(\tau_2(\phi) - (\Delta \ln f + |\operatorname{grad} \ln f|^2) \tau(\phi) - 2 \nabla_{\operatorname{grad} \ln f}^\phi \tau(\phi) \right)$$

d'où ϕ est f -biharmonique si et seulement

$$\tau_2(\phi) - (\Delta \ln f + |\operatorname{grad} \ln f|^2) \tau(\phi) - 2 \nabla_{\operatorname{grad} \ln f}^\phi \tau(\phi) = 0$$

3.2 Applications p -biharmoniques

Définition 3.2.1. *Les applications p -biharmoniques sont les points critiques de La fonctionnelle p -bi-énergie :*

$$E_{p,2}(\phi) = \frac{1}{p} \int_M |\tau(\phi)|^p dv_g, \quad (3.3)$$

où $|d\phi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\phi$ et dv_g la mesure de M associée à la métrique g .

La propriété suivante, nous donne l'expression du champ de p -bi-tension $\tau_{p,2}(\phi)$, en remplaçant $f = \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2}$ dans l'équation (3.2).

$$\begin{aligned} \tau_{p,2}(\phi) &= \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} \tau_2(\phi) - \frac{p-2}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} \Delta (|\tau(\phi)|^2) \tau(\phi) \\ &\quad - \frac{(p-2)(p-4)}{2p} |\tau(\phi)|^{p-6} |\operatorname{grad} (|\tau(\phi)|^2)|^2 \tau(\phi) \\ &\quad - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} \nabla_{\operatorname{grad}(|\tau(\phi)|^2)}^\phi \tau(\phi). \end{aligned} \quad (3.4)$$

On déduit que l'application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est p -biharmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned} &|\tau(\phi)|^4 \tau_2(\phi) - (p-2) |\tau(\phi)|^2 \nabla_{\operatorname{grad}(|\tau(\phi)|^2)}^\phi \tau(\phi) \\ &\quad - \frac{(p-2)(p-4)}{4} |\operatorname{grad} (|\tau(\phi)|^2)|^2 \tau(\phi) \\ &\quad - \frac{(p-2)}{2} |\tau(\phi)|^2 \Delta (|\tau(\phi)|^2) \tau(\phi) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Remarques 3.2.1. 1. L'équation (3.3) est obtenue en remplaçant

$$f = \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} \text{ dans l'équation (3.1).}$$

2. Par l'expression du champ de p -bitension de ϕ , on déduit que si ϕ est biharmonique et $|\tau(\phi)|$ est constant, alors ϕ est p -biharmonique.

3.3 La p -biharmonicité des applications conformes

Théorème 3.3.1. Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$, ($n \geq 3$), une application conforme de dilatation λ . Alors ϕ est p -biharmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned} & |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{grad} (\Delta \ln \lambda) - \frac{(n-4p+2)}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2) \\ & + (p-2)^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda (\text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2)) \text{grad} \ln \lambda \\ & + (p-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2 \nabla_{\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)} \text{grad} \ln \lambda \\ & + \frac{p-2}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^2 \Delta (|\text{grad} \ln \lambda|^2) \text{grad} \ln \lambda \\ & + \frac{(p-2)(p-4)}{4} |\text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2)|^2 \text{grad} \ln \lambda \\ & + (p^2 - 2p - n + 2) |\text{grad} \ln \lambda|^6 \text{grad} \ln \lambda \\ & + (p-4) |\text{grad} \ln \lambda|^4 (\Delta \ln \lambda) \text{grad} \ln \lambda \\ & + 2 |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{Ricci} (\text{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Preuve. Comme ϕ est conforme, on a :

$$\begin{aligned} \tau(\phi) &= (2-n) d\phi(\text{grad} \ln \lambda), \\ |\tau(\phi)|^2 &= (2-n)^2 \lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2, \\ |\tau(\phi)|^4 &= (2-n)^4 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^4, \\ \text{grad} (|\tau(\phi)|^2) &= (2-n)^2 \text{grad} (\lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2) \\ &= (2-n)^2 \lambda^2 \text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2) \\ &\quad + 2(2-n)^2 \lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2 \text{grad} \ln \lambda. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\text{grad} (|\tau(\phi)|^2)|^2 &= (2-n)^4 \lambda^4 |\text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2)|^2 + 4(2-n)^4 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^6 \\ &\quad + 4(2-n)^4 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda (\text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2)). \end{aligned}$$

Regardons le terme $\nabla_{grad(|\tau(\phi)|^2)}^\phi \tau(\phi)$, on a :

$$\begin{aligned} \nabla_{grad(|\tau(\phi)|^2)}^\phi \tau(\phi) &= (2-n)^3 \lambda^2 \nabla_{grad(|grad \ln \lambda|^2)}^\phi d\phi(grad \ln \lambda) \\ &\quad + 2(2-n)^3 \lambda^2 |grad \ln \lambda|^2 \nabla_{grad \ln \lambda}^\phi d\phi(grad \ln \lambda) \end{aligned}$$

Il est bien connu que pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a (voir [3])

$$\begin{aligned} \nabla_X^\phi d\phi(Y) &= X(\ln \lambda) d\phi(Y) + Y(\ln \lambda) d\phi(X) \\ &\quad - g(X, Y) d\phi(grad \ln \lambda) + d\phi(\nabla_X Y). \end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned} \nabla_{grad(|grad \ln \lambda|^2)}^\phi d\phi(grad \ln \lambda) &= |grad \ln \lambda|^2 d\phi(grad(|grad \ln \lambda|^2)) \\ &\quad + d\phi\left(\nabla_{grad(|grad \ln \lambda|^2)} grad \ln \lambda\right) \end{aligned}$$

et

$$\nabla_{grad \ln \lambda}^\phi d\phi(grad \ln \lambda) = |grad \ln \lambda|^2 d\phi(grad \ln \lambda) + \frac{1}{2} d\phi(grad(|grad \ln \lambda|^2)).$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \nabla_{grad(|\tau(\phi)|^2)}^\phi \tau(\phi) &= 2(2-n)^3 \lambda^2 |grad \ln \lambda|^2 d\phi(grad(|grad \ln \lambda|^2)) \\ &\quad + (2-n)^3 \lambda^2 d\phi\left(\nabla_{grad(|grad \ln \lambda|^2)} grad \ln \lambda\right) \\ &\quad + 2(2-n)^3 \lambda^2 |grad \ln \lambda|^4 d\phi(grad \ln \lambda). \end{aligned}$$

Pour le terme $\Delta((2-n)^2 \lambda^2 |grad \ln \lambda|^2)$, en utilisant les propriétés du laplacien, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta((2-n)^2 \lambda^2 |grad \ln \lambda|^2) &= (2-n)^2 \Delta(\lambda^2 |grad \ln \lambda|^2) \\ &= (2-n)^2 |grad \ln \lambda|^2 \Delta(\lambda^2) \\ &\quad + (2-n)^2 \lambda^2 \Delta(|grad \ln \lambda|^2) \\ &\quad + 2(2-n)^2 g(grad \lambda^2, grad(|grad \ln \lambda|^2)). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$grad \lambda^2 = 2\lambda^2 grad \ln \lambda$$

et

$$\Delta (\lambda^2) = 2\lambda^2 (\Delta \ln \lambda) + 4\lambda^2 |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2,$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \Delta (|\tau(\phi)|^2) &= 2(2-n)^2 \lambda^2 |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 (\Delta \ln \lambda) + (2-n)^2 \lambda^2 \Delta (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \\ &\quad + 4(2-n)^2 \lambda^2 d \ln \lambda (\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)) \\ &\quad + 4(2-n)^2 \lambda^2 |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4. \end{aligned}$$

Enfin, l'expression de $\tau_2(\phi)$ est donnée par (voir [7])

$$\tau_2(\phi) = (n-2) d\phi(H),$$

où

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{grad} \Delta \ln \lambda - \frac{n-6}{2} \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) - 2(\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda \\ &\quad - (n-2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda + 2\operatorname{Ricci}^M(\operatorname{grad} \ln \lambda) \end{aligned}$$

En revenant à la deuxième équation, on conclut que ϕ est p -biharmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned} &|\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 \operatorname{grad} (\Delta \ln \lambda) - \frac{(n-4p+2)}{2} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \\ &+ (p-2)^2 |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda (\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)) \operatorname{grad} \ln \lambda \\ &+ (p-2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \nabla_{\operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)} \operatorname{grad} \ln \lambda \\ &+ \frac{p-2}{2} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \Delta (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \operatorname{grad} \ln \lambda \\ &+ \frac{(p-2)(p-4)}{4} |\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ &+ (p^2 - 2p - n + 2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^6 \operatorname{grad} \ln \lambda \\ &+ (p-4) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda \\ &+ 2 |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Corollaire 3.3.1. *En particulier, si la dilatation λ de l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) est radiale, c'est à dire : $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x| \text{ et } \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, on a (voir [32])*

$$\operatorname{grad} \alpha = \alpha' \frac{\partial}{\partial r}, \quad |\operatorname{grad} \alpha|^2 = (\alpha')^2, \quad \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \alpha|^2) = 2\alpha' \alpha'' \frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta\alpha = \alpha'' + \frac{n-1}{r}\alpha', \quad \text{grad}\Delta\alpha = \left(\alpha^{(3)} + \frac{n-1}{r}\alpha'' - \frac{n-1}{r^2}\alpha' \right) \frac{\partial}{\partial r},$$

et

$$\Delta(|\text{grad}\alpha|^2) = 2\alpha'\alpha^{(3)} + 2(\alpha'')^2 + \frac{2(n-1)}{r}\alpha'\alpha''.$$

Donc $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ est p -biharmonique si et seulement si α est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} & (p-1)(\alpha')^4\alpha^{(3)} + (p-2)(p-1)(\alpha')^3(\alpha'')^2 + \frac{(n-1)(p-1)}{r}(\alpha')^4\alpha'' \\ & + (2p^2 - 3p - n + 2)(\alpha')^5\alpha'' + (p^2 - 2p - n + 2)(\alpha')^7 \\ & + \frac{(p-4)(n-1)}{r}(\alpha')^6 - \frac{n-1}{r^2}(\alpha')^5 = 0 \end{aligned}$$

En posant $\beta = \alpha'$, la p -biharmonicité dans ce cas se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} & (p-1)\beta\beta'' + (p-2)(p-1)(\beta')^2 + \frac{(n-1)(p-1)}{r}\beta\beta' \\ & + (2p^2 - 3p - n + 2)\beta^2\beta' + (p^2 - 2p - n + 2)\beta^4 \\ & + \frac{(p-4)(n-1)}{r}\beta^3 - \frac{n-1}{r^2}\beta^2 = 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1. On va chercher les solutions de la forme $\beta = \frac{a}{r}$ où $a \neq 0$, dans ce cas, l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ est p -biharmonique si et seulement si a est solution de l'équation algébrique suivante :

$$(p^2 - 2p - n + 2)a^2 - (2p^2 - np - 2p + 3n - 2)a - p(n - p) = 0.$$

Deux cas se présentent :

1. Premier cas :

$$\begin{cases} p^2 - 2p - n + 2 = 0 \\ \text{et} \\ -3n + 2p + np - 2p^2 + 2 \neq 0 \end{cases}$$

Il suit que

$$\begin{cases} p = \sqrt{n-1} + 1 \\ \text{et} \\ a = \frac{np-p^2}{-3n+2p+np-2p^2+2} \end{cases}$$

Par exemple, si on prend $n = 10$, on obtient $p = 4$ et $a = -2$.

2. *Deuxième cas : $p^2 - 2p - n + 2 \neq 0$, c'est à dire $p \neq \sqrt{n-1} + 1$. Les solutions sont données par :*

$$a = \frac{1}{-2n - 4p + 2p^2 + 4} \left(2p^2 - 2p - np + 3n - 2 + \sqrt{A(n, p)} \right)$$

et

$$a = -\frac{1}{-2n - 4p + 2p^2 + 4} \left(-2p^2 + np + 2p - 3n + 2 + \sqrt{A(n, p)} \right),$$

où

$$A(n, p) = n^2 p^2 + 12np^2 - 12p^2 - 10n^2 p + 8p + 9n^2 - 12n + 4.$$

Pour ce type de solutions, on va citer deux exemples. Le premier exemple correspond au cas où $a = -2$.

Exemple 3.3.1. *On considère l'inversion $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ($n \geq 3$) définie par $\phi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. ϕ est une application conforme de dilatation $\lambda = \frac{1}{r^2}$. En utilisant le fait que $p \geq 2$, on déduit que ϕ est p -biharmonique si et seulement si :*

$$3p^3 - np^2 - 8p^2 + n^2 - np + 10p - 4 = 0,$$

ce qui nous donne comme solutions :

$$p = \frac{n+2}{3}, \quad n \geq 3$$

ou

$$p = \sqrt{n-1} + 1, \quad n \geq 3.$$

Par exemple, on prend $n = 10$, on obtient $p = 4$.

Maintenant, regardons un exemple qui traite le cas où $a = -1$.

Exemple 3.3.2. *Soit $\phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \times S^{n-1}$ donnée en coordonnées polaires par*

$$\phi(r\theta) = (\ln r, \theta), \quad r > 0, \quad \theta \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

ϕ est une application conforme de dilatation $\lambda = \frac{1}{r}$. En utilisant le fait que $p \geq 2$, on conclut que ϕ est p -biharmonique si et seulement si

$$2p^3 - np^2 - 4p^2 + 4p + n^2 - 2n = 0,$$

ce qui nous donne comme solutions :

$$p = \frac{n}{2}, \quad n \geq 3$$

ou

$$p = \sqrt{n-1} + 1, \quad n \geq 3.$$

3.3.1 Le cas d'un difféomorphisme conforme

On va regarder maintenant le cas où $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un difféomorphisme conforme et on va étudier la p -biharmonicité de l'application inverse. Notons que si $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ est un difféomorphisme conforme de dilatation λ , alors l'application réciproque $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^m, g)$ est une application conforme de dilatation $\tilde{\lambda}(y) = \frac{1}{\lambda(\psi(y))}$ pour tout $y \in N$.

Théorème 3.3.2. *Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) un difféomorphisme conforme de dilatation λ . Alors l'application réciproque $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^m, g)$ est p -biharmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} & |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{grad} (\Delta \ln \lambda) + \frac{(n-4p+2)}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2) \\ & + \frac{(p-2)(n-4p+2)}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda (\text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2)) \text{grad} \ln \lambda \\ & + \frac{(p-2)(p-4)}{4} |\text{grad} (|\text{grad} \ln \lambda|^2)|^2 \text{grad} \ln \lambda \\ & + (p-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2 \nabla_{\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)} \text{grad} \ln \lambda \\ & + \frac{(p-2)}{2} |\text{grad} \ln \lambda|^2 \Delta (|\text{grad} \ln \lambda|^2) \text{grad} \ln \lambda \\ & - 2(p-1)(n-2p) |\text{grad} \ln \lambda|^6 \text{grad} \ln \lambda \\ & - 2(p-1) |\text{grad} \ln \lambda|^4 (\Delta \ln \lambda) \text{grad} \ln \lambda \\ & + 2 |\text{grad} \ln \lambda|^4 \text{Ricci}^M (\text{grad} \ln \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Preuve. Comme l'application $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^n, g)$ est conforme de dilatation $\tilde{\lambda}(y) = \frac{1}{\lambda(\psi(y))}$ pour tout $y \in N$, alors elle est p -biharmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^4 \text{grad} \Delta \ln \tilde{\lambda} - \frac{(n-4p+2)}{2} \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^4 \text{grad} \left(\left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) \\
& + (p-2)^2 \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 d \ln \tilde{\lambda} \left(\text{grad} \left(\left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) \right) \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \\
& + \frac{(p-2)}{2} \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \left(\Delta \left(\left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) \right) \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \\
& + (p-2) \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \nabla_{\text{grad}(|\text{grad} \ln \tilde{\lambda}|^2)} \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \\
& + \frac{(p-2)(p-4)}{4} \left| \text{grad} \left(\left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) \right|^2 \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \\
& + (p^2 - 2p - n + 2) \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^6 \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \\
& + (p-4) \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^4 \left(\Delta \ln \tilde{\lambda} \right) \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \\
& + 2 \left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^4 \text{Ricci} \left(\text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Un calcul rigoureux nous donne les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{grad} \ln \tilde{\lambda} &= -\frac{1}{\lambda^2} d\phi(\text{grad} \ln \lambda), \\
\left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 &= \frac{1}{\lambda^2} |\text{grad} \ln \lambda|^2, \\
\Delta \ln \tilde{\lambda} &= -\frac{1}{\lambda^2} (\Delta \ln \lambda + (n-2) |\text{grad} \ln \lambda|^2), \\
\text{grad} \left(\left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) &= \frac{1}{\lambda^4} d\phi(\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)) - \frac{2}{\lambda^4} |\text{grad} \ln \lambda|^2 d\phi(\text{grad} \ln \lambda), \\
\left| \text{grad} \left(\left| \text{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) \right|^2 &= \frac{4}{\lambda^6} |\text{grad} \ln \lambda|^6 + \frac{1}{\lambda^6} |\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)|^2 \\
&\quad - \frac{4}{\lambda^6} |\text{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda (\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)), \\
\text{grad}(\Delta \ln \tilde{\lambda}) &= -\frac{1}{\lambda^4} d\phi(\text{grad}(\Delta \ln \lambda)) - \frac{(n-2)}{\lambda^4} d\phi(\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)) \\
&\quad + \frac{2}{\lambda^4} (\Delta \ln \lambda) d\phi(\text{grad} \ln \lambda) + \frac{2(n-2)}{\lambda^4} |\text{grad} \ln \lambda|^2 d\phi(\text{grad} \ln \lambda),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d \ln \tilde{\lambda} \left(\operatorname{grad} \left(\left| \operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) \right) &= \frac{2}{\lambda^4} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 - \frac{1}{\lambda^4} d \ln \lambda \left(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \right), \\
\Delta \left(\left| \operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda} \right|^2 \right) &= \frac{1}{\lambda^4} (\Delta (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)) + \frac{(n-6)}{\lambda^4} d \ln \lambda \left(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \right) \\
&\quad - \frac{2}{\lambda^4} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 (\Delta \ln \lambda) + \frac{2(4-n)}{\lambda^4} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4, \\
\nabla_{\operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda}|^2)} \operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda} &= -\frac{2}{\lambda^6} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^6} d\phi \left(\nabla_{\operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)} \operatorname{grad} \ln \lambda \right) \\
&\quad + \frac{2}{\lambda^6} d \ln \lambda \left(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \right) d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ricci} \left(\operatorname{grad} \ln \tilde{\lambda} \right) &= \frac{(n-2)}{2\lambda^4} d\phi \left(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \right) + \frac{1}{\lambda^4} (\Delta \ln \lambda) d\phi(\operatorname{grad} \ln \lambda) \\
&\quad - \frac{1}{\lambda^4} d\phi \left(\operatorname{Ricci}^M(\operatorname{grad} \ln \lambda) \right).
\end{aligned}$$

D'où la p -biharmonicité de l'application réciproque $\psi = \phi^{-1} : (N^n, h) \rightarrow (M^n, g)$ est caractérisée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 \operatorname{grad} (\Delta \ln \lambda) + \frac{(n-4p+2)}{2} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \\
&+ \frac{(p-2)(n-4p+2)}{2} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda \left(\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \right) \operatorname{grad} \ln \lambda \\
&+ \frac{(p-2)(p-4)}{4} \left| \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \right|^2 \operatorname{grad} \ln \lambda \\
&+ (p-2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \nabla_{\operatorname{grad}(|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)} \operatorname{grad} \ln \lambda \\
&+ \frac{(p-2)}{2} |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 \Delta (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) \operatorname{grad} \ln \lambda \\
&- 2(p-1)(n-2p) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^6 \operatorname{grad} \ln \lambda \\
&- 2(p-1) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda \\
&+ 2 |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 \operatorname{Ricci}^M(\operatorname{grad} \ln \lambda) = 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.2. *En particulier, une condition nécessaire pour que ϕ et sa*

réci-proque soient p -biharmoniques est donnée par :

$$\begin{aligned} & |\operatorname{grad} \ln \lambda|^2 ((n - 4p + 2) \operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2) - 3(p - 2) (\Delta \ln \lambda) \operatorname{grad} \ln \lambda) \\ & + \frac{(p - 2)(n - 6p + 6)}{2} d \ln \lambda (\operatorname{grad} (|\operatorname{grad} \ln \lambda|^2)) \operatorname{grad} \ln \lambda \\ & + (3n - 2p - 2np + 3p^2 - 2) |\operatorname{grad} \ln \lambda|^4 \operatorname{grad} \ln \lambda = 0 \end{aligned}$$

De plus, si la dilatation λ du difféomorphisme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) est radiale, c'est à dire : $(\ln \lambda = \alpha(r), r = |x| \text{ et } \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$, alors cette condition nécessaire est traduite par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} & (7p + np - 6p^2 - 2) \beta' - \frac{3(p - 2)(n - 1)}{r} \beta \\ & + (3n - 2p - 2np + 3p^2 - 2) \beta^2 = 0, \end{aligned}$$

où $\beta = \alpha'$. En cherchant des solutions particulières de la forme $\beta = \frac{a}{r}$ où $a \neq 0$, on trouve l'équation algébrique suivante :

$$(3n - 2p - 2np + 3p^2 - 2) a + 6n - 4p - 4np + 6p^2 - 4 = 0.$$

Pour la résolution de cette équation, plusieurs cas se présentent :

- Premier cas : Si $3n - 2p - 2np + 3p^2 - 2 \neq 0$, on trouve $a = -2$ pour tout $n \geq 3$. Dans ce cas, tous les diféomorphismes conformes de dilatation $\lambda = \frac{C}{r^2}$, $C > 0$ vérifient la condition nécessaire.
- Deuxième cas : $3n - 2p - 2np + 3p^2 - 2 = 0$, on trouve $p = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}\sqrt{n^2 - 7n + 7} + \frac{1}{3}$, $n \geq 6$ et a est quelconque. Par exemple, si on prend $n = 9$, on trouve $p = 5$.

De même, si on cherche des solutions particulières de la forme $\beta = \frac{ar}{r^2 + 1}$ où $a \neq 0$, on trouve le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} 2a - 6n + 4p - 6p^2 + 4 - 3an + 2ap + 4np - 3ap^2 + 2anp = 0 \\ \text{et} \\ -10p - 6n + 2np + 6p^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Pour ce système, on obtient deux cas :

- Premier cas : $a = -2$ et $p = \frac{1}{6}(\sqrt{n^2 + 26n - 23} - n + 5)$, $n \geq 6$. Dans ce cas, tous les diféomorphismes conformes de dilatation $\lambda = \frac{C}{r^2}$, $C > 0$ vérifient la condition nécessaire.
- Deuxième cas : $n = 6$, $p = 2$ et a quelconque.

3.3.2 Le tenseur p -bi-énergie impulsion

Pour les applications p -biharmoniques, on définit le tenseur p -bi-énergie impulsion.

Définition 3.3.1. [36] Soit $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ . Le tenseur p -bi-énergie impulsion de ϕ est donnée par l'équation suivante :

$$S_{p,2}(\phi) = \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} S_2(\phi) + \frac{p-2}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(\text{grad}(|\tau(\phi)|^2))) g \\ - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} d(|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi))$$

où

$$(d(|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)))(X, Y) = \frac{1}{2} d(|\tau(\phi)|^2)(X) h(\tau(\phi), d\phi(Y)) \\ + \frac{1}{2} d(|\tau(\phi)|^2)(Y) h(\tau(\phi), d\phi(X)) \\ = \frac{1}{2} X(|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(Y)) \\ + \frac{1}{2} Y(|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(X))$$

et

$$S_2(\phi) = \left(-\frac{1}{2} |\tau(\phi)|^2 + \text{div} h(\tau(\phi), d\phi) \right) g - 2\text{sym} h(\nabla \tau(\phi), d\phi).$$

Le lien entre $\tau_{p,2}(\phi)$ et la divergence de $S_{p,2}(\phi)$ est donné par :

$$\text{div} S_{p,2}(\phi) = -h(\tau_{p,2}(\phi), d\phi) - \frac{p-2}{2p} |\tau(\phi)|^{p-2} d(|\tau(\phi)|^2).$$

Comme premier résultat, on va calculer le tenseur p -bi-énergie impulsion d'une application conforme.

Théorème 3.3.3. Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$, ($n \geq 3$), une application conforme de dilatation λ . Alors, le tenseur p -bi-énergie impulsion de ϕ est

donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 S_{p,2}(\phi) = & \frac{2(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p (\Delta \ln \lambda) |grad \ln \lambda|^{p-2} g \\
 & + \frac{(2-n)^{p-1}(n+2p-6)}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^p g \\
 & + \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d \ln \lambda (grad (|grad \ln \lambda|^2))) g \\
 & - \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d (|grad \ln \lambda|^2) \otimes d \ln \lambda) \\
 & - \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d \ln \lambda \otimes d (|grad \ln \lambda|^2)) \\
 & - \frac{4(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^{p-4} |grad \ln \lambda|^{p-2} (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda) \\
 & - \frac{4(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-2} (\nabla d \ln \lambda).
 \end{aligned}$$

Preuve. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}
 S_{p,2}(\phi)(X, Y) = & \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} S_2(\phi)(X, Y) \\
 & + \frac{p-2}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(grad (|\tau(\phi)|^2))) g(X, Y) \\
 & - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} (d (|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)))(X, Y)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 (d (|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)))(X, Y) = & \frac{1}{2} X (|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(Y)) \\
 & + \frac{1}{2} Y (|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(X))
 \end{aligned}$$

On va simplifier tous les termes qui apparaissent dans l'expression de $S_{p,2}(\phi)$.

Comme ϕ est conforme, alors $S_2(\phi)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 S_2(\phi)(X, Y) = & (2-n) \lambda^2 (\Delta \ln \lambda) g(X, Y) - \frac{(2-n)^2}{2} \lambda^2 |grad \ln \lambda|^2 g(X, Y) \\
 & - 2(2-n) \lambda^2 (\nabla d \ln \lambda(X, Y)).
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que : $|\tau(\phi)|^2 = (2-n)^2 \lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& h(\tau(\phi), d\phi(\text{grad}(|\tau(\phi)|^2))) \\
&= h((2-n) d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(\text{grad}((2-n)^2 \lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2))) \\
&= (2-n)^3 h(d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(\text{grad}(\lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2))) \\
&= (2-n)^3 \lambda^2 h(d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2))) \\
&+ (2-n)^3 |\text{grad} \ln \lambda|^2 h(d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(\text{grad}(\lambda^2))) \\
&= (2-n)^3 \lambda^4 g(\text{grad} \ln \lambda, \text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)) \\
&+ 2(2-n)^3 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^2 g(\text{grad} \ln \lambda, \text{grad} \ln \lambda) \\
&= (2-n)^3 \lambda^4 d \ln \lambda (\text{grad}(|\text{grad} \ln \lambda|^2)) \\
&+ 2(2-n)^3 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^4.
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve de ce théorème, on va regarder le terme

$(d(|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)))(X, Y)$. On a :

$$\begin{aligned}
(d(|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)))(X, Y) &= \frac{1}{2} X(|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(Y)) \\
&+ \frac{1}{2} Y(|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(X)).
\end{aligned}$$

Commençons par le calcul du terme $X(|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(Y))$, on obtient :

$$\begin{aligned}
X(|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(Y)) &= (2-n)^3 X(\lambda^2 |\text{grad} \ln \lambda|^2) h(d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(Y)) \\
&= (2-n)^3 \lambda^2 X(|\text{grad} \ln \lambda|^2) h(d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(Y)) \\
&+ (2-n)^3 |\text{grad} \ln \lambda|^2 X(\lambda^2) h(d\phi(\text{grad} \ln \lambda), d\phi(Y)) \\
&= (2-n)^3 \lambda^4 X(|\text{grad} \ln \lambda|^2) Y(\ln \lambda) \\
&+ 2(2-n)^3 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^2 X(\ln \lambda) Y(\ln \lambda) \\
&= (2-n)^3 \lambda^4 d(|\text{grad} \ln \lambda|^2)(X) d \ln \lambda(Y) \\
&+ 2(2-n)^3 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^2 d \ln \lambda(X) d \ln \lambda(Y) \\
&= (2-n)^3 \lambda^4 (d(|\text{grad} \ln \lambda|^2) \otimes d \ln \lambda)(X, Y) \\
&+ 2(2-n)^3 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^2 (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda)(X, Y).
\end{aligned}$$

De même, on déduit que :

$$\begin{aligned}
Y(|\tau(\phi)|^2) h(\tau(\phi), d\phi(X)) &= (2-n)^3 \lambda^4 (d \ln \lambda \otimes d(|\text{grad} \ln \lambda|^2))(X, Y) \\
&+ 2(2-n)^3 \lambda^4 |\text{grad} \ln \lambda|^2 (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda)(X, Y).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} (d(|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)))(X, Y) &= \frac{(2-n)^3}{2} \lambda^4 (d(|grad \ln \lambda|^2) \otimes d \ln \lambda)(X, Y) \\ &\quad + \frac{(2-n)^3}{2} \lambda^4 (d \ln \lambda \otimes d(|grad \ln \lambda|^2))(X, Y) \\ &\quad + 2(2-n)^3 \lambda^4 |grad \ln \lambda|^2 (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda)(X, Y). \end{aligned}$$

En revenant à l'expression de $S_{p,2}(\phi)$, on conclut que :

$$\begin{aligned} S_{p,2}(\phi)(X, Y) &= \frac{(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-2} (2(\Delta \ln \lambda) + (n+2p-6)|grad \ln \lambda|^2) g(X, Y) \\ &\quad + \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d \ln \lambda (grad(|grad \ln \lambda|^2))) g(X, Y) \\ &\quad - \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d(|grad \ln \lambda|^2) \otimes d \ln \lambda)(X, Y) \\ &\quad - \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d \ln \lambda \otimes d(|grad \ln \lambda|^2))(X, Y) \\ &\quad - \frac{4(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^{p-4} |grad \ln \lambda|^{p-2} (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda)(X, Y) \\ &\quad - \frac{4(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-2} (\nabla d \ln \lambda)(X, Y) \end{aligned}$$

d'où on obtient finalement :

$$\begin{aligned} S_{p,2}(\phi) &= \frac{2(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p (\Delta \ln \lambda) |grad \ln \lambda|^{p-2} g \\ &\quad + \frac{(2-n)^{p-1}(n+2p-6)}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^p g \\ &\quad + \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d \ln \lambda (grad(|grad \ln \lambda|^2))) g \\ &\quad - \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d(|grad \ln \lambda|^2) \otimes d \ln \lambda) \\ &\quad - \frac{(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d \ln \lambda \otimes d(|grad \ln \lambda|^2)) \\ &\quad - \frac{4(p-2)(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^{p-4} |grad \ln \lambda|^{p-2} (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda) \\ &\quad - \frac{4(2-n)^{p-1}}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-2} (\nabla d \ln \lambda). \end{aligned}$$

En passant à la trace dans l'expression du tenseur p -bi-énergie d'une application conforme et en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} Tr_g (d(|grad \ln \lambda|^2) \otimes d \ln \lambda) &= Tr_g (d \ln \lambda \otimes d(|grad \ln \lambda|^2)) \\ &= d \ln \lambda (grad(|grad \ln \lambda|^2)), \end{aligned}$$

$$Tr_g (d \ln \lambda \otimes d \ln \lambda) = |grad \ln \lambda|^2$$

et

$$Tr_g (\nabla d \ln \lambda) = \Delta \ln \lambda,$$

on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.2. *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$, ($n \geq 3$), une application conforme de dilatation λ . Alors la trace du tenseur p -bi-énergie impulsion de ϕ est donné par la l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} Tr_g S_{p,2}(\phi) &= -\frac{2(2-n)^p}{p} \lambda^p (\Delta \ln \lambda) |grad \ln \lambda|^{p-2} \\ &\quad - \frac{(2-n)^p (n+2p-4)}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^p \\ &\quad - \frac{(p-2)(2-n)^p}{p} \lambda^p |grad \ln \lambda|^{p-4} (d \ln \lambda (grad(|grad \ln \lambda|^2))). \end{aligned}$$

La trace de $S_{p,2}(\phi)$ est nulle si et seulement si :

$$\begin{aligned} (\Delta \ln \lambda) |grad \ln \lambda|^2 + \frac{n+2p-4}{2} |grad \ln \lambda|^4 \\ + \frac{p-2}{2} d \ln \lambda (grad(|grad \ln \lambda|^2)) = 0. \end{aligned}$$

Corollaire 3.3.3. *En particulier, si la dilatation λ de l'application conforme $\phi : (\mathbb{R}^n, g) \rightarrow (N^n, h)$ ($n \geq 3$) est radiale, c'est à dire :*

($\ln \lambda = \alpha(r)$, $r = |x|$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) et en utilisant les formules suivantes :

$$grad \alpha = \alpha' \frac{\partial}{\partial r}, \quad |grad \alpha|^2 = (\alpha')^2, \quad grad(|grad \alpha|^2) = 2\alpha' \alpha'' \frac{\partial}{\partial r},$$

et

$$\Delta \alpha = \alpha'' + \frac{n-1}{r} \alpha',$$

on déduit que la trace de $S_{p,2}(\phi)$ est nulle si et seulement si

$$(p-1)(\alpha')^2 \alpha'' + \frac{n-1}{r} (\alpha')^3 + \frac{n+2p-4}{2} (\alpha')^4 = 0.$$

3.4 Formule de monotonie pour les applications p -harmoniques 81

En posant $\beta = \alpha'$, alors $Tr_g S_{p,2}(\phi) = 0$ se traduit par l'équation différentielle suivante :

$$(p-1)\beta' + \frac{n-1}{r}\beta + \frac{n+2p-4}{2}\beta^2 = 0.$$

Remarque 3.3.3. On va chercher les solutions de la forme $\beta = \frac{a}{r}$ où $a \neq 0$, dans ce cas, la trace de $S_{p,2}(\phi)$ est nulle si et seulement si :

$$a = \frac{p-n}{n+2p-4}.$$

3.4 Formule de monotonie pour les applications p -harmoniques

Définition 3.4.1. Soit (M^m, g) une variété riemannienne de dimension m . Un champ de vecteurs X sur M est dit conforme si $L_X g = ag$ pour une certaine fonction $a : M \rightarrow \mathbb{R}$, où L_X désigne la dérivation de Lie dans la direction X définie par :

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X). \end{aligned}$$

De manière équivalente, X est conforme si et seulement si

$$symg(\nabla.X, \cdot) = \left(\frac{div X}{m}\right)g,$$

où

$$(symg(\nabla.X, \cdot))(Y, Z) = \frac{1}{2} \{g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y)\}.$$

Dans ce cas, on a la relation $a = \frac{2div X}{m}$

Définition 3.4.2. Soient (M^m, g) une variété riemannienne de dimension m et T un champ de tenseurs de type $(0, 2)$ symétrique. Pour un champ de vecteurs X sur M , on définit la 1-forme, notée $T]X$, de la manière suivante :

$$(T]X)(Y) = T(X, Y),$$

pour tout $Y \in \Gamma(TM)$.

3.4 Formule de monotonie pour les applications p -harmoniques 82

Dans le cas où le champ de vecteurs X est conforme, on a le résultat suivant :

Proposition 3.4.1. [4] *Soient (M^m, g) une variété riemannienne de dimension m , T un champ de tenseurs de type $(0, 2)$ symétrique et X un champ de vecteurs conforme. Alors on a :*

$$\operatorname{div} (T \rfloor X) = (\operatorname{div} T) (X) + \left(\frac{\operatorname{div} X}{m} \right) \operatorname{Tr}_g T.$$

En intégrant cette dernière formule sur un domaine compact et en utilisant le théorème de la divergence, on obtient la formule de monotonie donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.4.2. [4] *Soient (M^m, g) une variété riemannienne orientée de dimension m , X un champ de vecteurs conforme et $U \subset M$ un domaine compact de bord ∂U . Alors pour tout champ de tenseurs de type $(0, 2)$ symétrique T sur M , on a :*

$$\int_{\partial U} T (X, \mathbf{n}) d\sigma = \int_U (\operatorname{div} T) (X) dx + \int_U \left(\frac{\operatorname{div} X}{m} \right) (\operatorname{Tr}_g T) dx,$$

où dx est l'élément de volume sur M , $d\sigma$ celui sur ∂U et $\mathbf{n}$ est la normale pointant vers l'extérieur à ∂U .

Pour une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$, on rappelle que le tenseur p -énergie impulsion est défini par :

$$S_p(\phi) = \frac{1}{p} |d\phi|^p g - |d\phi|^{p-2} \phi^* h.$$

Ce tenseur vérifie la relation suivante :

$$\operatorname{div} S_p(\phi) = -h(\tau_p(\phi), d\phi)$$

où $\tau_p(\phi)$ est le champ de p -tension de l'application ϕ donné par :

$$\tau_p(\phi) = |d\phi|^{p-2} (\tau(\phi) + (p-2) d\phi(\operatorname{grad} \ln |d\phi|)).$$

Nous allons appliquer la formule de monotonie obtenue dans la proposition 3.4.2 dans le cas où $T = S_p(\phi)$, on obtient :

$$\int_{\partial U} S_p(\phi) (X, \mathbf{n}) d\sigma = \int_U (\operatorname{div} S_p(\phi)) (X) dx + \int_U \left(\frac{\operatorname{div} X}{m} \right) (\operatorname{Tr}_g S_p(\phi)) dx.$$

3.4 Formule de monotonie pour les applications p -harmoniques 83

Dans le cas où l'application $\phi : B_R^m \longrightarrow (N, h)$ est p -harmonique où B_R^m est la boule euclidienne de dimension m et de rayon R et en utilisant le fait que :

$$X = r \frac{\partial}{\partial r}, \quad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \operatorname{div} X = m,$$

$$\begin{aligned} S_p(\phi)(X, \mathbf{n}) &= r S_p(\phi) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= r \left(\frac{1}{p} |d\phi|^p - |d\phi|^{p-2} h \left(d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \right) \\ &= r \left(\frac{1}{p} |d\phi|^p - |d\phi|^{p-2} \left| d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_g S_p(\phi) &= \frac{1}{p} |d\phi|^p g(e_i, e_i) - |d\phi|^{p-2} h(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\ &= \frac{m}{p} |d\phi|^p - |d\phi|^p \\ &= \frac{m-p}{p} |d\phi|^p, \end{aligned}$$

On obtient le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. $\phi : B_R^m \longrightarrow (N, h)$ une application p -harmonique, alors

$$\frac{m-p}{p} \int_{B_r^m} |d\phi|^p dx = \int_{\partial B_r^m} r \left(\frac{1}{p} |d\phi|^p - |d\phi|^{p-2} \left| d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right|^2 \right) d\sigma, \quad r < R.$$

Cette dernière équation est appelée la formule de monotonie pour les applications p -harmoniques. Si $p = 2$, on obtient la formule de monotonie connue pour les applications harmoniques et qui est donnée par :

$$\frac{m-2}{2} \int_{B_r^m} |d\phi|^2 dx = r \int_{\partial B_r^m} \left(\frac{1}{2} |d\phi|^2 - \left| d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right|^2 \right) d\sigma, \quad r < R.$$

Une conséquence immédiate de cette formule est la suivante :

Corollaire 3.4.1. $\phi : B_R^m \longrightarrow (N, h)$ une application p -harmonique. Si $m > p$ et ϕ est constante sur ∂B_r^m pour certain $r < R$, alors ϕ est constante partout.

3.5 La formule de monotonie pour les applications p -biharmoniques

Dans cette section, nous allons établir la formule de monotonie pour les applications p -biharmoniques, cette nouvelle formule généralise celle connue pour les applications biharmoniques. Pour une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$, rappelons que le tenseur p -bi-énergie impulsion est défini par

$$S_{p,2}(\phi) = \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} S_2(\phi) + \frac{p-2}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(\text{grad}(|\tau(\phi)|^2))) g \\ - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} d(|\tau(\phi)|^2) \odot d\phi \cdot \tau(\phi).$$

Ce tenseur vérifie les propriétés suivantes :

$$\text{div} S_{p,2}(\phi) = -h(\tau_{p,2}(\phi), d\phi) - \frac{p-2}{2p} |\tau(\phi)|^{p-2} d(|\tau(\phi)|^2)$$

et

$$\text{Tr}_g S_{p,2}(\phi) = \frac{4-m}{p} |\tau(\phi)|^p + \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} \text{div}(h(\tau(\phi), d\phi)) \\ + \frac{(m-2)(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(\text{grad}(|\tau(\phi)|^2))).$$

Notons que si l'application ϕ est p -biharmonique, alors :

$$\text{div} S_{p,2}(\phi) = -\frac{p-2}{2p} |\tau(\phi)|^{p-2} d(|\tau(\phi)|^2)$$

En appliquant la formule de monotonie obtenue dans la proposition 3.4.2 dans le cas où $T = S_{p,2}(\phi)$, on obtient :

$$\int_{\partial U} S_{p,2}(\phi)(X, \mathbf{n}) d\sigma = \int_U (\text{div} S_{p,2}(\phi))(X) dx + \int_U \left(\frac{\text{div} X}{m} \right) (\text{Tr}_g S_{p,2}(\phi)) dx.$$

Si on suppose que l'application $\phi : B_R^m \longrightarrow (N, h)$ est p -biharmonique et en utilisant le fait que :

$$X = r \frac{\partial}{\partial r}, \quad r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \text{div} X = m,$$

On déduit que :

$$\int_{\partial B_R^m} r S_{p,2}(\phi) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) d\sigma = \int_{B_R^m} r (\operatorname{div} S_{p,2}(\phi)) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) dx + \int_{B_R^m} (\operatorname{Tr}_g S_{p,2}(\phi)) dx.$$

Nous allons regarder terme par terme cette dernière équation. On a :

$$\begin{aligned} S_{p,2}(\phi) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} S_2(\phi) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{p-2}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(\operatorname{grad}(|\tau(\phi)|^2))) \\ &\quad - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} (d(|\tau(\phi)|^2) \odot d\phi \cdot \tau(\phi)) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

Il est bien connu que (voir [7])

$$S_2(\phi) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2} |\tau(\phi)|^2 + \operatorname{div}(h(\tau(\phi), d\phi)) - 2h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right),$$

et un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} |\tau(\phi)|^{p-2} \operatorname{div}(h(\tau(\phi), d\phi)) &= \operatorname{div}(|\tau(\phi)|^{p-2} h(\tau(\phi), d\phi)) \\ &\quad + h(\tau(\phi), d\phi(\operatorname{grad}(|\tau(\phi)|^{p-2}))) \\ &= -\frac{p-2}{2} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(\operatorname{grad}(|\tau(\phi)|^2))) \\ &\quad + \operatorname{div}(|\tau(\phi)|^{p-2} h(\tau(\phi), d\phi)), \\ \frac{\partial}{\partial r}(|\tau(\phi)|^2) h\left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(|\tau(\phi)|^2 h\left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right) \right) \\ &\quad - |\tau(\phi)|^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(h\left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right) \right) \end{aligned}$$

et

$$h\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(h\left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right) \right) - h\left(\tau(\phi), \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right).$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} S_{p,2}(\phi) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{p} |\tau(\phi)|^p - \frac{4}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(h\left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right) \right) \\ &\quad + \frac{4}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} h\left(\tau(\phi), \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)\right) \\ &\quad + \frac{2}{p} \operatorname{div}(|\tau(\phi)|^{p-2} h(\tau(\phi), d\phi)), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R^m} r S_{p,2}(\phi) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) d\sigma &= -\frac{4r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(h \left(\tau(\phi), d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \right) d\sigma \\ &\quad - \frac{r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^p d\sigma + \frac{4r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} h \left(\tau(\phi), \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Comme l'application ϕ est p -biharmonique, en utilisant le fait que :

$$\frac{\partial}{\partial r} (|\tau(\phi)|^p) = \frac{p}{2} |\tau(\phi)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial r} (|\tau(\phi)|^2),$$

on déduit que :

$$(div S_{p,2}(\phi)) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = -\frac{p-2}{p^2} \frac{\partial}{\partial r} (|\tau(\phi)|^p),$$

ce qui nous donne :

$$\int_{B_R^m} r (div S_{p,2}(\phi)) \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) dx = -\frac{p-2}{p^2} \int_{B_R^m} r \frac{\partial}{\partial r} (|\tau(\phi)|^p) dx.$$

Pour compléter cette section, nous allons simplifier le terme $Tr_g S_{p,2}(\phi)$. En utilisant l'expression de $S_{p,2}(\phi)$, on a :

$$\begin{aligned} Tr_g S_{p,2}(\phi) &= \\ &\quad \frac{2}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} Tr_g S_2(\phi) + \frac{m(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(grad(|\tau(\phi)|^2))) \\ &\quad - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} Tr_g d(|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)). \end{aligned}$$

Or on sait que (voir [7])

$$Tr_g S_2(\phi) = \frac{4-m}{2} |\tau(\phi)|^2 + (m-2) div(h(\tau(\phi), d\phi))$$

et on remarque que,

$$Tr_g d(|\tau(\phi)|^2) \odot (d\phi \cdot \tau(\phi)) = h(\tau(\phi), d\phi(grad(|\tau(\phi)|^2)))$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} Tr_g S_{p,2}(\phi) &= \frac{4-m}{p} |\tau(\phi)|^p + \frac{2(m-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-2} (\operatorname{div} (h(\tau(\phi), d\phi))) \\ &\quad + \frac{m(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(\operatorname{grad}(|\tau(\phi)|^2))) \\ &\quad - \frac{2(p-2)}{p} |\tau(\phi)|^{p-4} h(\tau(\phi), d\phi(\operatorname{grad}(|\tau(\phi)|^2))) \\ &= \frac{4-m}{p} |\tau(\phi)|^p + \frac{2(m-2)}{p} \operatorname{div} (|\tau(\phi)|^{p-2} h(\tau(\phi), d\phi)). \end{aligned}$$

ce qui nous ramène à la formule suivante :

$$\begin{aligned} \int_{B_R^m} (Tr_g S_{p,2}(\phi)) dx &= \frac{4-m}{p} \int_{B_R^m} |\tau(\phi)|^p dx \\ &\quad + \frac{2(m-2)}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} h\left(\tau(\phi), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) d\sigma. \end{aligned}$$

On conclut finalement que :

$$\begin{aligned} \frac{4-m}{p} \int_{B_R^m} |\tau(\phi)|^p dx - \frac{p-2}{p^2} \int_{B_R^m} r \frac{\partial}{\partial r} (|\tau(\phi)|^p) dx \\ = -\frac{r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^p d\sigma - \frac{2(m-2)}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} h\left(\tau(\phi), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) d\sigma \\ - \frac{2r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(h\left(\tau(\phi), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)\right) d\sigma \\ + \frac{4r}{p} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^{p-2} h\left(\tau(\phi), \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est appelée la formule de monotonie pour les applications p -biharmoniques. Notons que si on remplace $p = 2$ dans cette formule, on obtient la formule de monotonie connue pour les applications biharmoni-

riques (voir [31]) et qui est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{4-m}{2} \int_{B_R^m} |\tau(\phi)|^2 dx &= -\frac{r}{2} \int_{\partial B_R^m} |\tau(\phi)|^2 d\sigma - (m-2) \int_{\partial B_R^m} h\left(\tau(\phi), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) d\sigma \\ &\quad - r \int_{\partial B_R^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(h\left(\tau(\phi), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) \right) d\sigma \\ &\quad + 2r \int_{\partial B_R^m} h\left(\tau(\phi), \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) d\sigma. \end{aligned}$$

Bibliographie

1. D. Allen : Relations between the local and global structure of finite semigroups. Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1968.
2. M. A. Aprodu : Some remarks on p -harmonic maps. Stud. Cercet. Mat. 50 (1998), 297 – 305.
3. P. Baird, *Harmonic maps with symmetry, harmonic morphisms and deformation of metrics*, Research Notes in Mathematics. Pitman, London (1983), 27-39.
4. P. Baird. Stress-energy tensors and the Lichnerowicz Laplacian. Journal of Geometry and Physics 58 (2008) 1329~1342.
5. P. Baird, J. Eells, *A conservation law for harmonic maps*, Lecture Notes in Math. 894, Springer, Berlin (1981), 1-25.
6. P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, Conformal and semi-conformal bi-harmonic maps, Ann. Glob Anal Geom 34, 403-414 (2008).
7. P. Baird, A. Fardoun, and S. Ouakkas. Liouville-type theorems for biharmonic maps between Riemannian manifolds. Adv. Calc. Var., 3(1) :49~68, 201.
8. P. Baird and S. Gudmundsson : p -harmonic maps and minimal submanifolds. Mathematische Annalen, 294 (1992), 611 – 624.
9. P. Baird, J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, Clarendon Press Oxford 2003.
10. X. Cao and Y. Luo : On p -biharmonic submanifolds in non-positively curved manifolds. Kodai Math. J. 39 (2016), 567-578.
11. M.H Cherif , *Applications harmoniques*, Université de Mascara.

12. A. M. Cherif : On the p -harmonic and p -biharmonic maps. Journal of Geometry, 109 (41) (2018), 1-11.
13. N. Course, f -harmonic maps which map the boundary of the domain to one point in the target, New York J. Math., 13(2007), 423-435.
14. M. Djaa, Introduction à la Géométrie Riemannienne Et L'Analyse Harmonique sur les variétés (Master - Doctorat) Centre Universitaire de Relizane (2013) .
15. M. Djaa and A. M. Cherif, On Generalized f -biharmonic Maps and Stress f -bienergy Tensor. Journal of Geometry and Symmetry in Physics JGSP 29(2013), pp. 65 – 81.
16. D. Djebbouri, Les Applications conformes biharmonique, produit tordu et structures dualistiques, Thèse de Doctorat, 2017, Université de Saida.
17. D. Djebbouri et S. Ouakkas : Some results of the f -biharmonic maps and applications. Arab. J. Math., 24 (1) (2018), 70-81.
18. S. Dragomir et A. Tommasoli : On p -harmonic maps into spheres. Tsukuba J. Math., 35 (2) (2011), 161 – 167.
19. J. Eells et A. Ratto, Harmonic Maps and Minimal Immersions with Symmetries, Princeton University Press 1993.
20. J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math., 86(1964), 109-160.
21. P. Erds : On the distribution of the roots of orthogonal polynomials. In : Proceedings of a Conference on Constructive Theory of Functions (G. Alexits, S. B. Steckhin, eds.), Akademiai Kiado, Budapest, 1972, pp. 145 – 150.
22. A. Fardoun :On equivariant p -harmonic maps. Ann. Inst. Henri Poincaré, 15 (1) (1998), 25-72.
23. G. Y.Jiang :2-harmonic maps and their first and second variational formulas. Chin. Ann. Math. Ser., A7 (1986), 389 – 402.
24. Y. Han et Y. Luo : Several results concerning nonexistence of proper p -biharmonic maps and Liouville type theorems. Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 6 (2020), 409 – 426.

25. S. Kawai : p -harmonic maps and convex functions. *Geometriae Dedicata*, 74 (1999), 261 – 265.
26. W.J. Lu, On f -bi-harmonic maps and bi- f -harmonic maps between Riemannian manifolds, *Sci. China Math.* 2015, 58-7, 1483–1498.
27. W.J. Lu, f -Harmonic maps of doubly warped product manifolds, *Appl. Math. J. Chin. Univ.* 28 (2) (2013) 240–252.
28. K. Mouffoki and A. M. Cherif : On the p -biharmonic submanifolds and stress p -bienergy tensors. *arXiv* : 2104.12562, 2021.
29. N. Nakauchi et S. Takakuwa : A remark on p -harmonic maps. *Non-linear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 25 (2) (1995), 169 – 185.
30. Y. L. Ou : p -Harmonic morphisms, biharmonic morphisms, and non-harmonic biharmonic maps. *Journal of Geometry and Physics*, 56 (2006), 358-374.
31. S. Ouakkas, Géométrie conforme associée aux applications biharmoniques et Théorèmes de Liouville, Thèse de Doctorat, 2008, Université de Sidi Belabbes.
32. S. Ouakkas and D. Djebbouri, Conformal Maps, Biharmonic Maps, and the Warped Product, *Mathematics* 2016, 4, 15.
33. A. Ostrowski : *Solution of Equations and Systems of Equations*. Academic Press, New York, 1966.
34. E. B.Saff et R. S.Varga : On incomplete polynomials II. *Pacific J. Math.* 92 (1981), 161 – 172.
35. Z. Wei :Some results on p -harmonic maps and exponentially harmonic maps between Finsler manifolds. *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, 25 (2) (2010), 236 – 242.
36. K. Zegga. Some results of f -biharmonic maps. *Acta Math. Univ. Comenianae*. Vol. 2, (2018), pp. 179 – 190.