



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université de Saida - Dr. Moulay Tahar
Faculté de Technologie

Département de Télécommunications

Théorie du Signal

Présenté par :

Dr. CHETIOUI MHAMMED

Maître de conférences « A » en Télécommunications

2024

Avant-propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants de deuxième année en télécommunications et porte sur une introduction approfondie à la "Théorie du Signal". Le traitement des signaux est une composante essentielle dans le domaine des télécommunications, car il constitue le socle sur lequel reposent de nombreuses applications pratiques, que ce soit en traitement de l'information, en transmission de données ou dans l'analyse des systèmes.

Le contenu de ce document a été conçu pour permettre une assimilation progressive des concepts fondamentaux de la théorie du signal. Il couvre des aspects essentiels tels que la classification des signaux, l'analyse de Fourier, la transformée de Laplace, ainsi que des outils cruciaux comme le produit de convolution et la corrélation des signaux.

Dans le premier chapitre, les étudiants seront introduits aux notions de base des signaux et à leurs caractéristiques (déterministes, aléatoires, périodiques, etc.). Ce chapitre permet de comprendre les objectifs du traitement du signal ainsi que les diverses fonctions et opérations qui y sont associées, telles que la filtration, la modulation, et la détection.

Le deuxième chapitre s'intéresse à l'analyse de Fourier, outil indispensable pour étudier le comportement fréquentiel des signaux. Les séries et la transformée de Fourier, ainsi que leurs propriétés, y seront expliquées de manière détaillée.

Le troisième chapitre aborde la 'Transformée de Laplace', une technique puissante pour l'analyse des systèmes linéaires et invariants par translation. Ce chapitre met l'accent sur l'application de cette transformée dans le cadre des systèmes SLIT, tant dans le domaine temporel que fréquentiel.

Le quatrième chapitre traite du 'Produit de Convolution', un concept clé pour la compréhension de la réponse des systèmes linéaires aux signaux d'entrée. Les propriétés fondamentales de la convolution et son lien avec l'impulsion de Dirac y seront abordés.

Enfin, le cinquième chapitre porte sur la 'Corrélation des Signaux', qui permet de mesurer les similitudes entre deux signaux dans le temps ou la fréquence. Il présente également des concepts avancés comme la densité spectrale d'énergie et de puissance, ainsi que le théorème de Wiener-Khintchine.

À travers ce polycopié, nous espérons fournir aux étudiants un cadre rigoureux et pratique pour aborder la théorie du signal, tout en leur offrant des outils leur permettant de mieux comprendre et maîtriser les différentes techniques d'analyse utilisées dans les systèmes de communication modernes.

Table des matières

Avant-propos

Introduction

Chapitre 1 : Généralités sur les signaux

1.1 Objectifs du traitement du signal

1.2 Domaines d'utilisation

1.3 Classification des signaux

1.3.1 Classification morphologique

1.3.2 Classification spectrale

1.4 Signaux déterministes et aléatoires

1.4.1 Signaux déterministes (périodiques et non périodiques)

1.4.2 Signaux aléatoires (stationnaires et non stationnaires)

1.5 Causalité

1.6 Notions de puissance et d'énergie

1.7 Fonctions de base en traitement du signal

1.7.1 Mesure, filtrage, lissage

1.7.2 Modulation, détection

1.8 Exemples de signaux de base

1.8.1 Impulsion rectangulaire

1.8.2 Impulsion triangulaire

1.8.3 Rampe, échelon, signe, Dirac

Chapitre 2 : Analyse de Fourier

2.1 Introduction

2.2 Rappels mathématiques

2.2.1 Produit scalaire, distance Euclidienne

2.2.2 Combinaison linéaire, base orthogonale

2.3 Approximation des signaux par combinaison de fonctions orthogonales

2.4 Séries de Fourier

2.5 Transformée de Fourier

2.6 Propriétés de la Transformée de Fourier

2.7 Théorème de Parseval

2.8 Spectre de Fourier

- 2.8.1 Spectre discret (signaux périodiques)
- 2.8.2 Spectre continu (signaux non périodiques)

Chapitre 3 : Transformée de Laplace

- 3.1 Définition de la Transformée de Laplace
- 3.2 Propriétés de la Transformée de Laplace
- 3.3 Relation signal/système
- 3.4 Applications aux systèmes linéaires et invariants par translation (SLIT)
 - 3.4.1 Analyse temporelle
 - 3.4.2 Analyse fréquentielle

Chapitre 4 : Produit de Convolution

- 4.1 Formulation du produit de convolution
- 4.2 Propriétés du produit de convolution
- 4.3 Produit de convolution et impulsion de Dirac

Chapitre 5 : Corrélation des signaux

- 5.1 Signaux à énergie totale finie
- 5.2 Signaux à puissance moyenne totale finie
- 5.3 Intercorrélation entre les signaux
- 5.4 Autocorrélation
- 5.5 Propriétés de la fonction de corrélation
- 5.6 Densité spectrale d'énergie
- 5.7 Densité spectrale de puissance
- 5.8 Théorème de Wiener-Khintchine
- 5.9 Cas des signaux périodiques

Introduction générale

La théorie du signal est une discipline fondamentale qui trouve ses applications dans divers domaines scientifiques et technologiques. Elle permet de représenter, décrire et analyser les signaux, c'est-à-dire les variations d'une grandeur physique ou d'information dans le temps. Le terme « signal » désigne ici toute fonction dépendant du temps, de la fréquence ou d'une autre variable, et ce dans des contextes aussi variés que les télécommunications, l'acoustique, l'électronique, ou encore la physique des ondes.

La notion de signal s'étend bien au-delà de sa simple forme temporelle, englobant les aspects énergétiques, spectrales et statistiques qui permettent de comprendre la manière dont l'information est véhiculée et transformée. Les signaux peuvent être classifiés en plusieurs catégories selon leurs propriétés. On distingue ainsi les signaux déterministes, où toutes les caractéristiques sont connues à l'avance, des signaux aléatoires, dont le comportement est imprévisible à certains égards. Ce classement est crucial pour adapter les outils mathématiques et physiques appropriés à leur traitement.

La théorie du signal permet d'étudier des notions telles que la puissance et l'énergie d'un signal, les bases orthogonales pour représenter un signal de manière compacte, ou encore la corrélation pour décrire la dépendance entre plusieurs signaux. Ces concepts jouent un rôle central dans l'analyse et la modélisation des systèmes qui interagissent avec les signaux, qu'il s'agisse de systèmes linéaires, invariants, ou plus complexes.

Le développement des méthodes de traitement du signal, en parallèle avec les avancées technologiques, a permis des progrès significatifs dans la manipulation et l'analyse des signaux aussi bien analogiques que numériques. La représentation numérique des signaux, en particulier, a ouvert la voie à des traitements puissants et flexibles, tout en restant stable face aux variations des conditions externes. Toutefois, ces méthodes numériques, bien que polyvalentes, peuvent parfois être plus complexes à mettre en œuvre que leurs équivalents analogiques, notamment pour des tâches simples et nécessitant un traitement en temps réel.

La théorie du signal est donc un domaine riche et en constante évolution, offrant un socle théorique indispensable à l'analyse des phénomènes dynamiques dans une grande variété de systèmes

Chapitre1

Généralités sur les signaux

1.1 Objectifs du traitement du signal

On appelle traitement du signal la science qui analyse et interprète les informations contenues dans un signal. **Un signal** est une variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'informations, c'est donc la représentation physique de l'information. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électrique, mécanique, optique.....

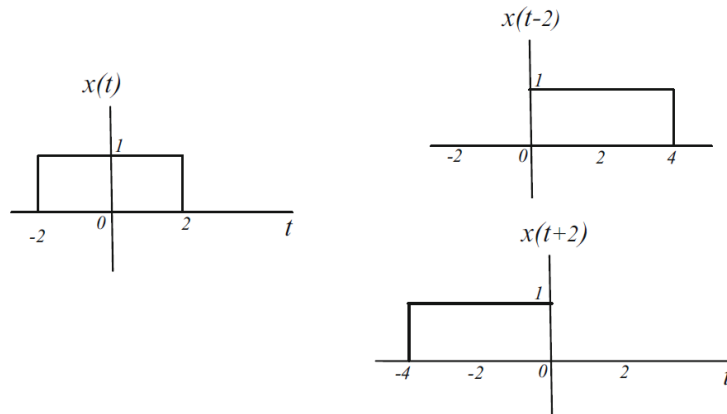
- **Théorie du signal** : C'est la description mathématique des signaux quelle que soit leur nature et quel que soit le support physique. L'objectif est d'établir une représentation d'un signal en fonction du temps ou de l'espace contenant une information à stocker, à transformer, à transmettre ou à recevoir.
- En général, un signal peut être modélisé par une fonction d'une ou plusieurs variables. Cette représentation ne se résume pas toujours en une expression mathématique compacte..
- La représentation **temporelle** d'un signal est définie par une fonction $x(t)$, réelle ou complexe, de la variable réelle temps t qui doit approcher " au mieux " les informations contenues dans le signal.
- Elle peut aussi être une " **fonction aléatoire** " et dans ce cas elle représente un signal dit aléatoire ou stochastique. Signalons que tout signal physique est forcément perturbé par un bruit plus ou moins important (bruit de mesure, influence des appareils utilisés etc ...). Un signal physique est donc un signal aléatoire.
- La notion de signal est très vaste. En physique, nous appelons signal toute grandeur mesurable qui dépend d'autres quantités telles que l'espace, le temps, la température, l'éclairement, etc.
- **Un signal** est défini comme toute quantité physique qui transporte des informations et varie avec le temps, l'espace ou toute autre variable ou variables indépendantes.
- Le monde de la science et de l'ingénierie est rempli de signaux: parole, télévision, images de sondes spatiales éloignées, tensions générées par le cœur et le cerveau, échos radar et sonar, sismique ,les vibrations, les signaux des satellites GPS, les signaux des gènes humains et d'innombrables autres applications.

1.2 Opérations élémentaires sur les signaux

$x(t)$ est un signal (ou fonction) de variable indépendante (t).

1.2.1 Décalage temporelle

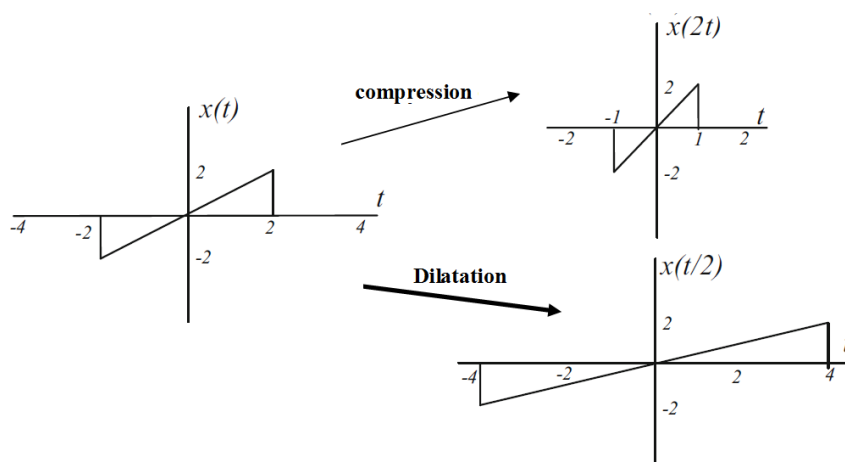
S'il est décalé dans le temps de t_0 , la version décalée dans le temps de $x(t)$ est représentée par $x(t-t_0)$. Les deux signaux $x(t)$ et $x(t-t_0)$ sont de forme identique mais décalés dans le temps l'un par rapport à l'autre. Si t_0 est positif, le signal $x(t)$ est **retardé** (décalé vers la droite) de t_0 . Si t_0 est négatif, le signal est **avancé** (décalé vers la gauche) de t_0 . L'opération de décalage temporel est illustrée à la figure suivante:



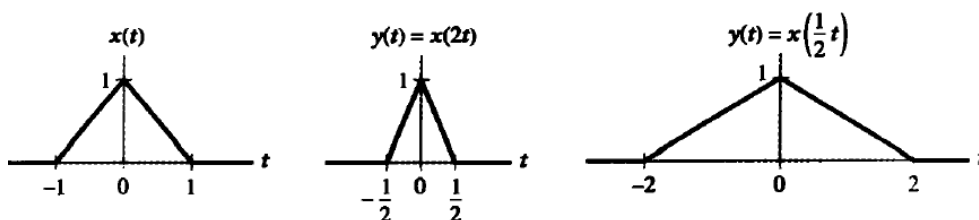
1.2.2 Dilatation /Compression d'un signal (Mise à l'échelle du temps)

La compression ou la dilatation d'un signal est appelée la mise à l'échelle temporelle. L'opération de mise à l'échelle temporelle est illustrée dans les exemples suivante:

Exemple01:

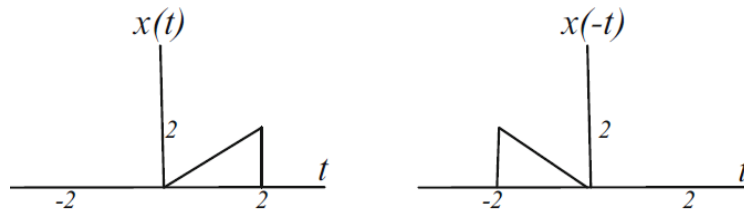


Exemple02:



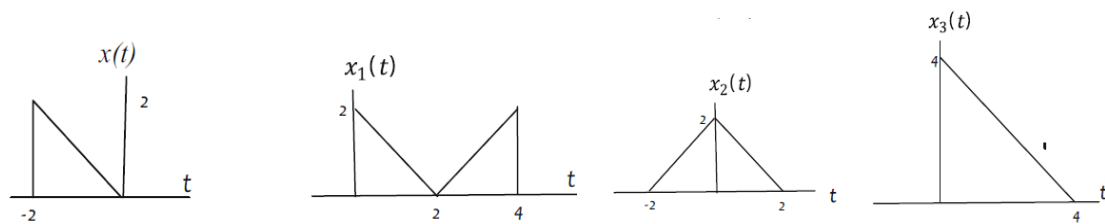
1.2.3 Inversion temporelle (Miroir)

Le signal $x(-t)$ est appelé l'inversion temporelle du signal $x(t)$. Le $x(-t)$ est obtenu à partir du signal $x(t)$ par une réflexion autour de $t = 0$. L'opération d'inversion temporelle est illustrée sur la figure suivante:



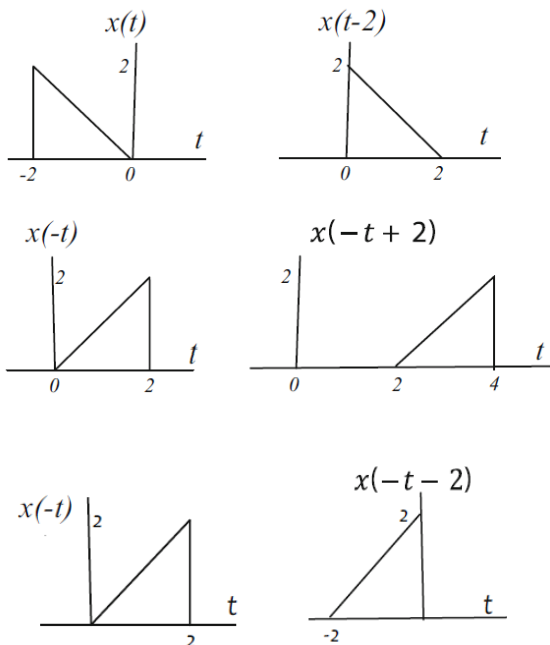
Exemple01 :

Considérons les signaux suivants $x(t)$ et $x_i(t)$, $i=1,2,3$.



Exprimez-les en utilisant uniquement $x(t)$ et sa version décalée dans le temps, mise à l'échelle dans le temps et inversée dans le temps.

Solution01:

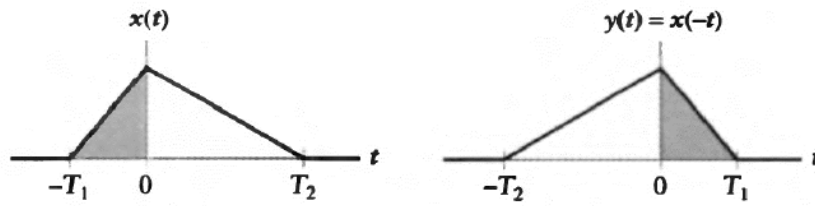


$$x_1(t) = x(t-2) + x(-t+2)$$

$$x_2(t) = x(t-2) + x(-t-2)$$

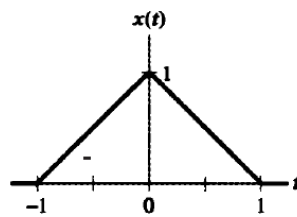
$$x_3(t) = 2x\left(\frac{t}{2}-2\right)$$

Exemple02 :



Exemple03 :

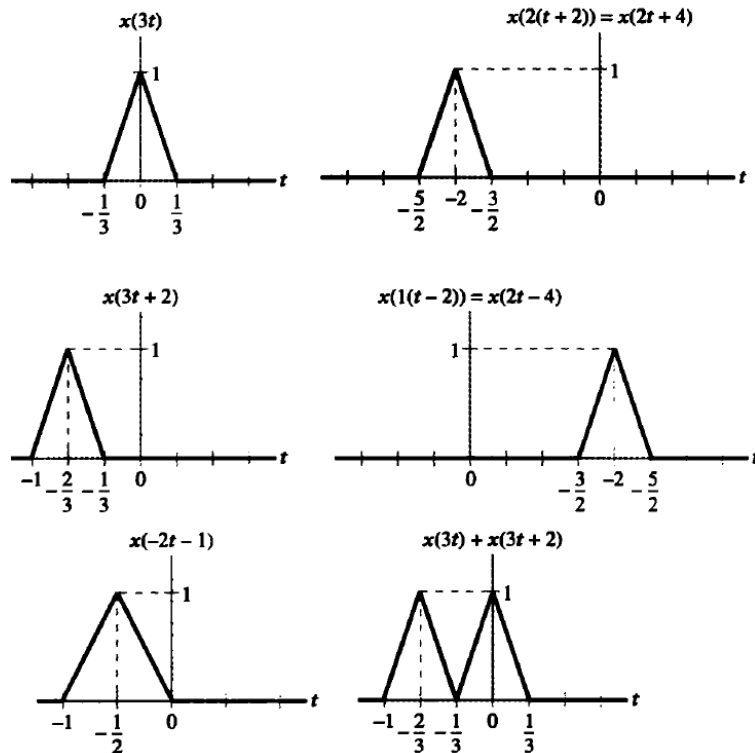
Soit le signal $x(t)$



Dessiner les signaux suivants:

- | | |
|----------------|-----------------------|
| (a) $x(3t)$ | (d) $x(2(t+2))$ |
| (b) $x(3t+2)$ | (e) $x(2(t-2))$ |
| (c) $x(-2t-1)$ | (f) $x(3t) + x(3t+2)$ |

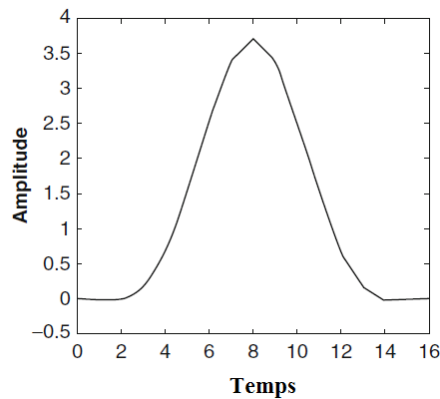
Solution :



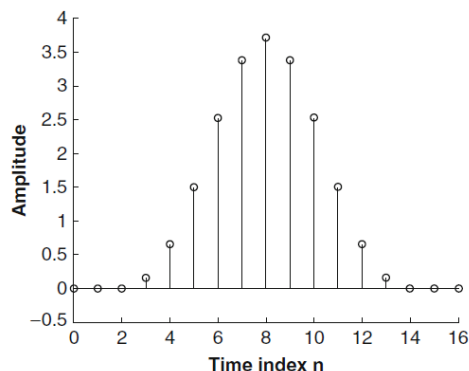
1.3 Classification des signaux

1.3.1 Signaux en temps continu et en temps discret

Les signaux à temps continu sont définis pour une continue de valeurs de la variable indépendante. Dans le cas de signaux à temps continu, la variable indépendante t est continue comme le montre la figure suivante :



Les signaux à temps discret ne sont définis qu'à des instants discrets, et pour ces signaux, la variable indépendante n prend uniquement un ensemble discret de valeurs d'amplitude comme le montre la figure suivante:



1.3.2 Signaux analogiques et numériques

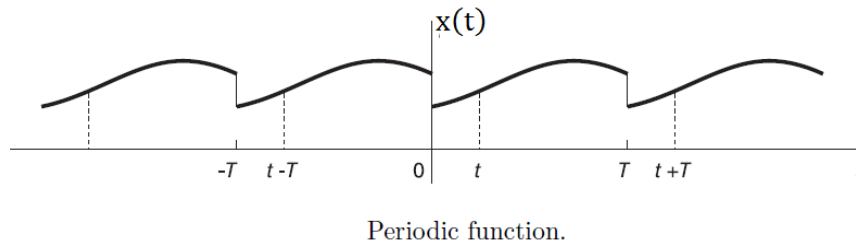
Un signal analogique est un signal à temps continu dont l'amplitude peut prendre n'importe quelle valeur dans une plage continue. Un signal numérique est un signal à temps discret qui ne peut avoir qu'un ensemble discret de valeurs. Le processus de conversion d'un signal à temps discret en un signal numérique est appelé **quantification**.

1.3.3 Signaux périodiques et apériodiques

Une fonction périodique $x(t)$ est une fonction qui se répète périodiquement sur tout l'axe des temps $t \in [-\infty, +\infty]$, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de t où $-\infty < t < \infty$. Une fonction périodique $x(t)$ de période T satisfait la relation

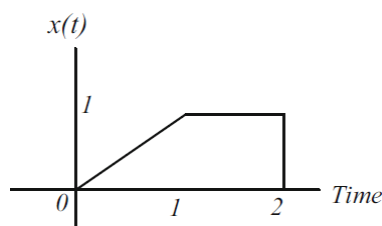
$$x(t + kT) = x(t), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Un signal $x(t)$ est dit périodique de période T (une valeur positive non nulle), s'il présente une périodicité, c'est-à-dire $x(t+T) = x(t)$, pour toutes les valeurs de t comme le montre la figure suivante:



Le signal périodique a la propriété d'être inchangé par un décalage temporel de T

Un signal qui ne satisfait pas la propriété de périodicité ci-dessus est appelé un signal **apériodique**. Le signal représenté sur la figure suivante est un exemple de signal apériodique.



Exemple 01 :

Pour chacun des signaux suivants, déterminez s'il est périodique ou apériodique. Si périodique, trouvez la période

- i) $x(t) = 5\sin(2\pi t)$
- ii) $x(t) = 1 + \cos(4t + 1)$
- iii) $x(t) = e^{-2t}$
- iv) $x(t) = e^{j(5t + \frac{\pi}{2})}$
- v) $x(t) = e^{j(5t + \frac{\pi}{2})} \cdot e^{-2t}$

Solution

- i) C'est un signal périodique, période = $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$
- ii) Il est périodique, période = $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- iii) il est apériodique,
- iv) Il est périodique. période = $\frac{2\pi}{5}$
- v) Puisque $x(t)$ est une exponentielle complexe multipliée par une exponentielle décroissante, elle est apériodique.

Exemple 02 :

Si un signal en temps continu $x(t)$ est périodique, pour chacun des signaux suivants, déterminez s'il est périodique ou apériodique. Si périodique, trouvez la période.

i) $x_1(t) = x(2t)$

ii) $x_2(t) = x(t/2)$

Solution

Soit T la période de $x(t)$. Ensuite nous avons $x(t) = x(t + T)$

(i) Pour que $x_1(t)$ soit périodique,

$$\begin{aligned} x(2t) &= x(2t + T) \\ x(2t + T) &= x\left(2\left(t + \frac{T}{2}\right)\right) \\ &= x_1\left(t + \frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

Puisque $x_1(t) = x_1\left(t + \frac{T}{2}\right)$, $x_1(t)$ est périodique de période fondamentale $\frac{T}{2}$

Comme $x_1(t)$ est la version compressée de $x(t)$ de moitié, la période de $x_1(t)$ est également compressée de moitié.

(ii) Pour que $x_2(t)$ soit périodique,

$$\begin{aligned} x(t/2) &= x\left(\frac{t}{2} + T\right) \\ x\left(\frac{t}{2} + T\right) &= x\left(\frac{1}{2}(t + 2T)\right) \\ &= x_2(t + 2T) \end{aligned}$$

Puisque $x_2(t) = x_2(t + 2T)$, $x_2(t)$ est périodique de période fondamentale $2T$. Comme $x_2(t)$ est la version étendue de $x(t)$ par deux, la période de $x_2(t)$ est également deux fois la période de $x(t)$.

Proposition : Soit les signaux en temps continu $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des signaux périodiques de périodes fondamentales T_1 et T_2 , respectivement. Le signal $x(t)$ qui est une combinaison linéaire de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est périodique si et seulement s'il existe des entiers m et k tels que $mT_1 = kT_2$ et

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k}{m} = \text{nombre rationnel}$$

La période fondamentale de $x(t)$ est donnée par $mT_1 = kT_2$ à condition que les valeurs de m et k soient choisies de telle sorte que le plus grand diviseur commun (pgcd) entre m et k soit 1.

Exemple :

Pour chacun des signaux suivants, déterminez s'il est périodique ou apériodique. Si périodique, trouvez la période.

i) $x(t) = 2\cos(4\pi t) + 3\sin(3\pi t)$

ii) $x(t) = 2\cos(4\pi t) + 3\sin(10t)$

Solution

i) Soit $x_1(t) = 2\cos(4\pi t)$ et $x_2(t) = 3\sin(3\pi t)$.

La période fondamentale de $x_1(t)$ est $T_1 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

La période fondamentale de $x_2(t)$ est $T_2 = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

Le rapport $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$ est un nombre rationnel. Par conséquent, $x(t)$ est un signal périodique.

La période fondamentale du signal $x(t)$ est $4T_1 = 3T_2 = 2$ secondes

ii) Soit $x_1(t) = 2\cos(4\pi t)$ et $x_2(t) = 3\sin(10t)$.

La période fondamentale de $x_1(t)$ est $T_1 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

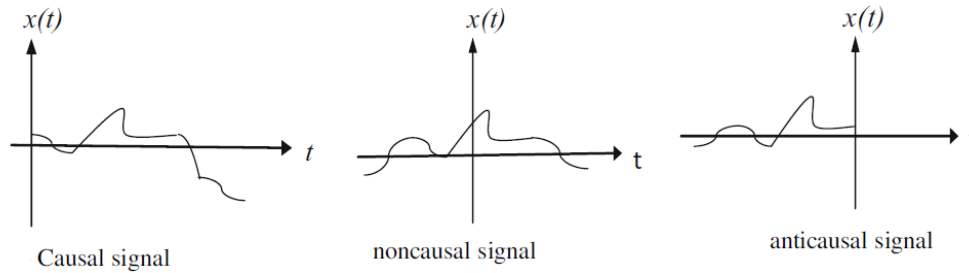
La période fondamentale de $x_2(t)$ est $T_2 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

Le rapport $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1/2}{\pi/5} = \frac{5}{2\pi}$ n'est pas un nombre rationnel. Par conséquent, $x(t)$ est un signal apériodique.

La période fondamentale du signal $x(t)$ est $4T_1 = 3T_2 = 2$ secondes

1.3.4 Signal causal, non causal et anticausal

Un signal causal est un signal qui a des valeurs nulles pour le temps négatif, c'est-à-dire $t < 0$. Un signal est non causal s'il a des valeurs non nulles pour les temps négatifs et positifs. Un signal anticausal a des valeurs nulles pour le temps positif, c'est-à-dire $t > 0$. Des exemples de signaux causaux, non causaux et anticausaux sont présentés sur les figures suivantes, respectivement.



1.3.5 Signaux d'énergie et de puissance

On verra ici quelques caractéristiques les plus communes des signaux, comme la valeur moyenne, l'énergie et la puissance.

- **Valeur moyenne:**

La valeur moyenne d'un signal $x(t)$ est obtenue selon :

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

La valeur moyenne d'un signal périodique $x(t)$ est :

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

- **Valeur efficace**

La valeur efficace (ou RMS en anglais, Root Mean Square) est une mesure très utile dans le calcul de puissance. C'est une mesure de l'amplitude d'un signal variable. La définition est :

$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$$

- **Energie et puissance**

Un signal $x(t)$ à énergie finie, ce qui signifie cette amplitude tend vers 0 comme le temps tend vers l'infini, est dit signal d'énergie, tandis qu'un signal $x(t)$ de puissance finie et non nulle est dit signal de puissance. Considérons un signal $x(t)$, qui peut être complexe. On définit la puissance instantanée $p(t)$ de ce signal comme le module au carré du signal :

$$p(t) = x^2(t)$$

L'énergie totale d'un signal en temps continu $x(t)$ peut être définie comme :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad \text{ou} \quad E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

pour un signal à valeur complexe:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puisque la puissance est la moyenne temporelle de l'énergie, la puissance moyenne est définie comme:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

Cas des signaux périodiques de période T : $P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$

Remarques :

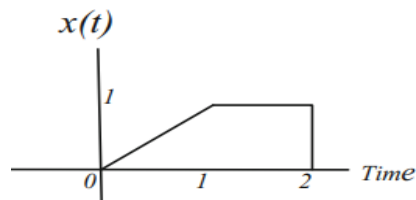
- Signaux à énergie finie $\rightarrow$ puissance moyenne nulle
Généralement, cas des signaux représentant une grandeur physique. Signaux transitoires à support borne
- Signaux à énergie infinie $\rightarrow$ puissance moyenne non nulle
Cas des signaux périodiques

Le signal $x(t)$ est un exemple de signal d'énergie :

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

L'énergie du signal est donnée par:

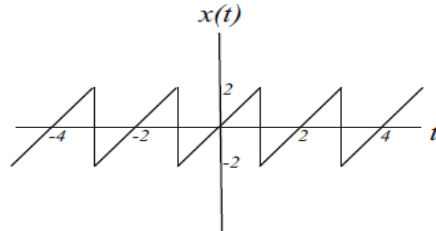
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 1 dt = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \text{ Joule}$$



Le signal $x(t)$ représenté sur la figure suivante est un exemple de signal de puissance.

Le signal est périodique avec la période 2, la puissance moyenne P est

$$P = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 4t^2 dt = \frac{4}{3}$$



Ainsi, un **signal d'énergie** a une énergie finie et une puissance moyenne nulle, alors qu'un **signal de puissance** a une puissance finie et une énergie infinie.

Exemple01: Calculer la valeur efficace du signal $x(t) = A \cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} x_{rms}^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2(\omega t) dt \\ &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Donc, la valeur efficace est : $x_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

Exemple02 : Calculer l'énergie et la puissance pour les signaux suivants et déterminer si chaque signal est un signal d'énergie, un signal de puissance ou aucun (NENP)

1) $x(t) = 4 \sin(2\pi t)$, $-\infty < t < \infty$

- 2) $x(t) = 2e^{-|t|}$, $-\infty < t < \infty$
 3) $x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{t}} & t > 1 \\ 0 & t \leq 1 \end{cases}$
 4) $x(t) = e^{-at}$ pour la valeur réelle a
 5) $x(t) = \cos(t)$
 6) $x(t) = e^{j(2t + \frac{\pi}{4})}$

Solution:

1)

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |4\sin(2\pi t)|^2 dt \\
 &= 16 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos(4\pi t)}{2} \right] dt \\
 &= 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} dt - 8 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(4\pi t) dt \\
 &= \infty \\
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 16\sin^2(2\pi t) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 16 \left[\frac{1 - \cos(4\pi t)}{2} \right] dt \\
 &= 16 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dt - 16 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\cos(4\pi t)}{2} dt \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

L'énergie du signal est infinie et sa puissance moyenne est finie; $x(t)$ est un signal de puissance.

2)

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_1^{\infty} \frac{4}{t} dt \\
 &= 4 \ln[t]_1^{\infty} \\
 &= \infty \\
 P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^{T/2} \frac{4}{t} dt \\
 &= 4 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \ln[t]_1^{T/2} \right) = 4 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \ln \left[\frac{T}{2} \right] - \frac{1}{T} \ln[1] \right) \\
 &= 4 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \ln \left[\frac{T}{2} \right] \right) \\
 &= 4 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left[\frac{T}{2} \right]}{T} \right)
 \end{aligned}$$

En utilisant la règle de L'Hospital, nous voyons que la puissance du signal est nulle. C'est-à-dire

$$P = 4 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln \left[\frac{T}{2} \right]}{T} \right) = 4 \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2}{T}}{1} \right) = 0$$

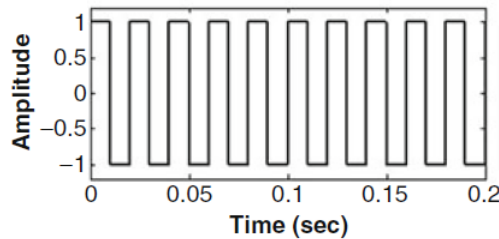
L'énergie du signal est infinie et sa puissance moyenne est nulle; $x(t)$ n'est ni un signal d'énergie ni un signal de puissance (NENP).

3)

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-at}|^2 dt = \infty \\ P &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2at} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{aT} - e^{-aT}}{2aT} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{aT}}{2aT} \right) - \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-aT}}{2aT} \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{aT}}{2aT} \right) - 0 \end{aligned}$$

1.3.6 Signaux déterministes et aléatoires

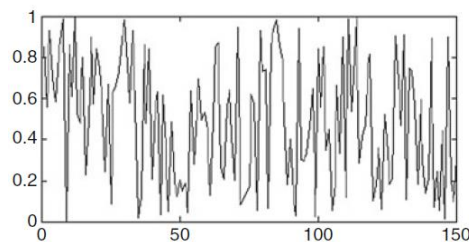
Pour un instant donné, les valeurs du signal déterministe sont complètement spécifiées comme le montre la Figure suivante :



Deterministic signal

Ainsi, un signal déterministe peut être décrit mathématiquement en fonction du temps.

Un signal aléatoire prend des valeurs aléatoires caractérisées statistiquement aléatoires comme le montre la figure suivante à un instant donné.



random signal

Le bruit est un exemple courant de signal aléatoire.

1.4 Signaux de base en temps continu

De nombreux signaux élémentaires (de base) ayant des expressions mathématiques très simples. C'est idéal, mais ne sont pas réalisables physiquement. Très pratiques pour la description des modèles mathématiques et largement utilisés en traitement du signal et l'image.

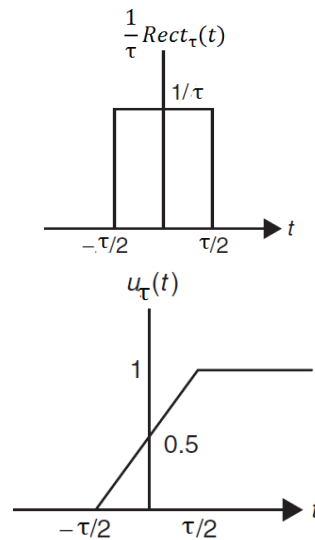
1.4.1 Impulsion de Dirac (Unit-Impulse $\delta(t)$) et Echelon unité (Unit-Step $u(t)$)

Considérons une impulsion rectangulaire de durée τ et de surface unitaire

$$\frac{1}{\tau} \text{Rect}_{\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & t < -\tau/2 \text{ et } t > \tau/2 \end{cases}$$

Son intégral est

$$u_{\tau}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\tau} \text{Rect}_{\tau}(z) dz = \begin{cases} 1 & t > \tau/2 \\ \frac{1}{\tau} \left(t + \frac{\tau}{2} \right) & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & t < -\tau/2 \end{cases}$$

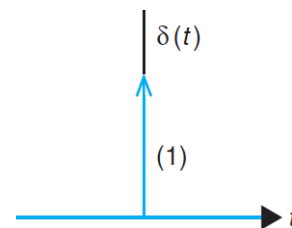


Supposons que $\tau \rightarrow 0$, alors

- L'impulsion $\frac{1}{\tau} \text{Rect}_{\tau}(t)$ a toujours une aire unitaire mais est une impulsion extrêmement étroite. Nous appellerons la limite le signal d'impulsion unitaire,

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \text{Rect}_{\tau}(t) = \begin{cases} \delta(t) = \infty, & \text{si } t = 0 \\ \delta(t) = 0, & \text{si } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

qui est zéro pour toutes les valeurs de t sauf en $t=0$ lorsque sa valeur n'est pas définie.



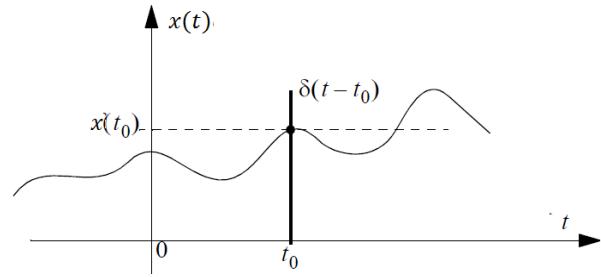
➤ Quelques propriétés spéciales de la fonction d'impulsion de Dirac :

a) Propriété d'échantillonnage

Si un signal arbitraire $x(t)$ est multiplié par une fonction d'impulsion décalée, le produit est donné par :

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$



Ce produit permet donc de prélever une valeur (échantillon) de la fonction $x(t)$, plus précisément la valeur $x(t_0)$ en $t = t_0$.

b) Propriété de décalage:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

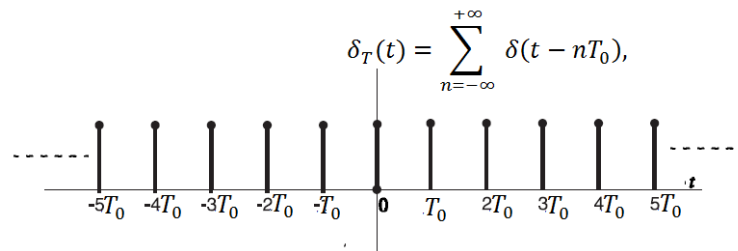
c) Propriété de mise à l'échelle

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$$

➤ **Fonction peigne de Dirac :**

C'est une fonction périodique de l'impulsion de Dirac définie comme suit :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_0), \quad \text{Avec } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

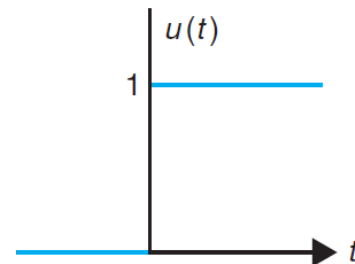


- L'intégrale $u_\tau(t)$ comme $\tau \rightarrow 0$ a une limite du côté gauche de $u_\tau(-\epsilon) \rightarrow 0$ et une limite à droite de $u_\tau(\epsilon) \rightarrow 1$, pour un infinitésimal $\epsilon > 0$, et à $t=0$, il vaut 1/2. Ainsi, la limite est:

$$u(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} u_\tau(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

En ignorant la valeur à $t=0$, nous définissons le signal

de pas unitaire comme : $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



Il est à noter que $u(t)$ est discontinu à $t = 0$. Il a une discontinuité à $t = 0$, et est donc indéfini pour $t = 0$. On peut lui attribuer la valeur 0.5 à $t=0$. C'est une fonction importante qui,

multipliée par une fonction générale $x(t)$, produit une fonction causale $u(t)$. $x(t)$ qui est nulle pour $t < 0$.

- Les $\delta(t)$ et $u(t)$ sont liés comme suit:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Exemple01: Évaluez les fonctions suivantes:

a) $\sin(t) \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\cos(2t) \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\cos^2(t) \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt$
d) $\tan 2t \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right)$ **e)** $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t} \delta(t - 2) dt$

Solution01 :

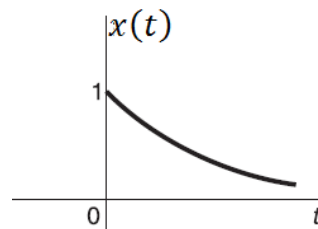
a) $\sin(t) \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(t)|_{t=\pi/6} \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = 0.5 \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$
b) $\cos(2t) \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(2t)|_{t=\pi/4} \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
c) $\cos^2(t) \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \Big|_{t=\pi/2} \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi) \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$
 $= \frac{1}{2}(1 - 1) \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$
d) $\tan(2t) \cdot \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right) = \tan(2t)|_{t=\pi/8} \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right) = \tan \frac{\pi}{4} \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right) = \delta\left(t - \frac{\pi}{8}\right)$
e) $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t} \delta(t - 2) dt = t^2 e^{-t} |_{t=2} = 4e^{-2} = 0.54$

Exemple02:

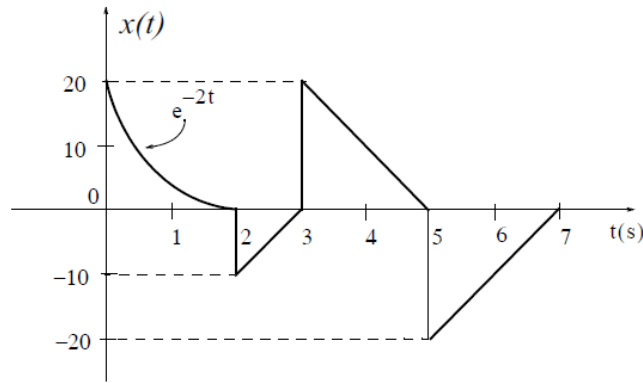
La fonction $x(t) = e^{-t}u(t)$ est une fonction du côté droit et est causale, étant nulle pour $t < 0$.

Causale exponentielle:

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$



Exemple03: Exprimez le signal $x(t)$ indiquée ci-dessous comme une somme des fonctions d'échelons unité pour l'intervalle de temps $0 < t < 7s$.



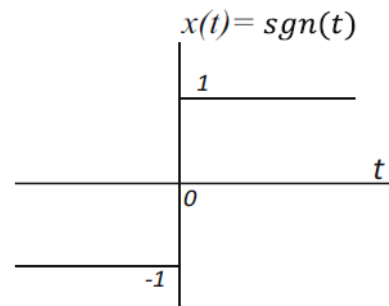
Solution:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-2t}[u(t) - u(t-2)] + (10t-30)[u(t-2) - u(t-3)] \\
 &\quad + (-10t+50)[u(t-3) - u(t-5)] + (10t-70)[u(t-5) - u(t-7)] \\
 x(t) &= e^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t-2) + 10tu(t-2) - 30u(t-2) - 10tu(t-3) + 30u(t-3) \\
 &\quad - 10tu(t-3) + 50u(t-3) + 10tu(t-5) - 50u(t-5) + 10tu(t-5) \\
 &\quad - 70u(t-5) - 10tu(t-7) + 70u(t-7)
 \end{aligned}$$

1.4.2 Fonction signe (signum) :

La fonction signum également appelée fonction de signe est définie comme

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

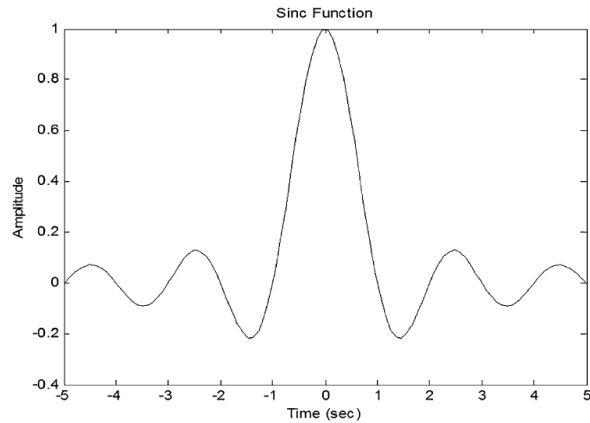


$$y_1 = \text{sgn}[2(t+1)], y_2(t) = 2\text{sgn}[-3(t-2)], y_3(t) = 2\text{sgn}\left[-\frac{1}{3}(t+9)\right]$$

1.4.3 La fonction Sinc :

Le sinus cardinal est une fonction qui apparaît souvent en télécommunications. La définition du sinus cardinal est la suivante :

$$\text{Sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$



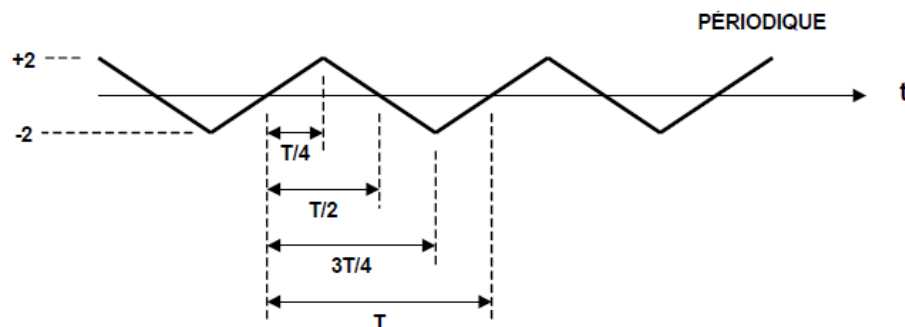
Exercices :

Exercice01

Pour chacun des signaux suivants (tensions en volt exprimées en fonction du temps en seconde), évaluez la valeur moyenne, la puissance moyenne, ainsi que l'énergie totale.

1. $x(t) = 3 \cos\left(400\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(400\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$

2. $y(t)$:



Solution Exercice01

1. On utilisant $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b)$

$$x(t) = 3 \cos\left(400\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(400\pi t - \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \frac{3}{2}\sin\left(800\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

- La valeur moyenne : $\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -1.386 \text{ volts}$

- La puissance moyenne : $\overline{x(t)^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]^2 + \frac{(1.5)^2}{2} = 3.046 \text{ watt}$

- Energie : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$

2. -La valeur moyenne : $\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0 \text{ volts}$

-La puissance moyenne : $\overline{x(t)^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = 2 \left[\frac{1}{T} \int_0^{T/4} \left(\frac{8}{T}t\right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/4}^{T/2} \left(-\frac{8}{T}t + 4\right)^2 dt \right] = \frac{4}{3} \text{ watts}$

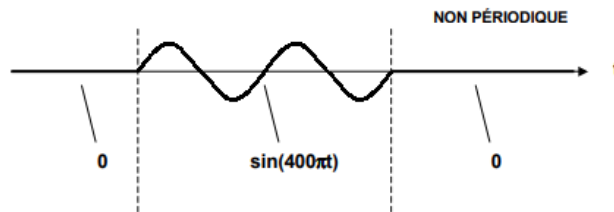
-Energie: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$

Exercice02

Pour chacun des signaux suivants (tensions en volt exprimées en fonction du temps en seconde), évaluez la valeur moyenne, la puissance moyenne, ainsi que l'énergie totale.

1. $x(t) = 3 \cos\left(400\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(400\pi t - \frac{\pi}{8}\right)$

2. $y(t)$:



Solution Exercice02

1. On utilisant $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\sin(a-b) + \frac{1}{2}\sin(a+b)$

$$x(t) = 3 \cos\left(400\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(400\pi t - \frac{\pi}{8}\right) = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \frac{3}{2}\sin\left(800\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

- La valeur moyenne : $\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -1.386 \text{ volts}$

- La puissance moyenne : $\overline{x(t)^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \left[-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]^2 + \frac{(1.5)^2}{2} = 3.046 \text{ watt}$

- Energie : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty$

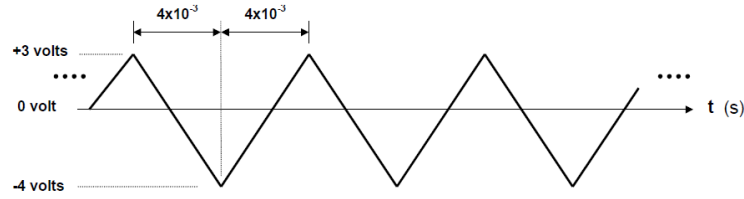
2. - La valeur moyenne : $\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0 \text{ volt}$

- La puissance moyenne : $\overline{x(t)^2} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = 0 \text{ watt}$

- Energie: $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = (1/2)(1)^2 \times 2 \times 0.005 = 5 \times 10^{-3} \text{ joule}$

Exercice03

Soit $x(t)$, le signal périodique suivant :



Évaluez :

1. sa valeur moyenne $x(t)$ en volt;
2. sa puissance moyenne $\overline{x(t)^2}$ en watt;
3. l'amplitude (en volt) de sa composante fondamentale;
4. la puissance (en watt) de sa composante sinusoïdale de fréquence 625 Hz.

Solution Exercice03

1. **Valeur moyenne:** $0.5[+3 - 4] = -0.5 \text{ volt}$

2. **La puissance moyenne**

$$\overline{x(t)^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{-14}{T}t + 3\right) dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T \left(\frac{-14}{T}t - 11\right) dt = \frac{13}{3} \text{ watt}$$

3. **l'amplitude (en volt) de sa composante fondamentale;**

La période : $T = 8 \times 10^{-3} \text{ s} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T} = 125 \text{ Hz} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 250 \text{ Hz}$
 pour un signal périodique on a : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{-14}{T}t + 3\right) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T \left(\frac{-14}{T}t - 11\right) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

l'amplitude de la composante fondamentale est calculée par :

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{14}{\pi^2} \\ \Rightarrow \frac{14}{\pi^2} e^{-jn\omega_0 t} + \frac{14}{\pi^2} e^{-jn\omega_0 t} = \frac{28}{\pi^2} \cos(\omega_0 t)$$

Finalement : Amplitude à 125 Hz est $\frac{28}{\pi^2} = 2.8370 \text{ volt}$

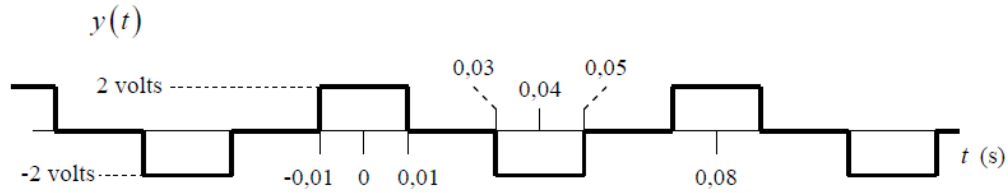
4. **la puissance (en watt) de sa composante sinusoïdale de fréquence 625 Hz.**

$$625 \text{ Hz} = n \times f_0 = n \times 125 \text{ Hz} \Rightarrow n = \frac{625}{125} = 5$$

La puissance (P) à 625 Hz : $P = |C_5|^2 + |C_{-5}|^2 = 2 \times 0.0567^2 = 6.44 \text{ mwatt}$

Exercice04

Soit $y(t)$, un signal périodique représentant une tension (en volt) exprimée en fonction du temps (en seconde).



1. Évaluez $\overline{y(t)^2}$, la puissance moyenne du signal périodique $y(t)$.
2. Trouvez C_n , les coefficients de la série exponentielle de Fourier du signal $y(t)$.
3. Le signal $y(t)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre dont la réponse fréquentielle est :

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{j\omega}{20} & , \quad |\omega| < 30\pi \\ 0 & , \text{ailleurs} \end{cases}$$

Évaluez la puissance moyenne du signal à la sortie du filtre.

Solution Exercice04

1. Évaluation $\overline{y(t)^2}$, la puissance moyenne du signal périodique $y(t)$

$$\overline{y(t)^2} = \frac{1}{0.08} [0.02 \times (+2)^2 + 0.02 \times (-2)^2] = 2 \text{ watt}$$

2. Détermination C_n , les coefficients de la série exponentielle de Fourier du signal $y(t)$
pour un signal périodique on a : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$ avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{0.008} = 25\pi$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{0.08} \int_0^{0.01} (+2) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{0.08} \int_{0.03}^{0.05} (-2) e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{0.08} \int_{0.07}^{0.08} (+2) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$C_n = 0.5 \frac{\sin(n\pi/4)}{(n\pi/4)} [1 - (-1)^n]$$

3. Évaluation la puissance moyenne du signal à la sortie du filtre

La transformée de Fourier $Y(\omega)$ de $y(t)$ est donnée par

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 0.5 \frac{\sin(n\pi/4)}{(n\pi/4)} [1 - (-1)^n] \delta(\omega - n\omega_0)$$

La sortie du filtre est donnée par :

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= H(\omega)Y(\omega) = H(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 0.5 \frac{\sin(n\pi/4)}{(n\pi/4)} [1 - (-1)^n] \delta(\omega - n\omega_0) \\
S(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 0.5 \frac{\sin(n\pi/4)}{(n\pi/4)} [1 - (-1)^n] \delta(\omega - n\omega_0) H(n\omega_0) \\
S(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 0.5 \frac{\sin(n\pi/4)}{(n\pi/4)} [1 - (-1)^n] \delta(\omega - 25\pi n) H(25\pi n)
\end{aligned}$$

La puissance moyenne : $P_{moy} = 2 \times \left| \frac{\sin(\pi/4)}{(\pi/4)} \frac{j25\pi}{20} \right|^2 = 25 \text{ watt}$

Chapitre 02

Analyse de Fourier

1.1 Analyse spectrale des signaux périodiques

1.1.1 Développement en série de Fourier

La décomposition en série de Fourier permet de décomposer un signal en somme de sinusoïdes. On utilise principalement les séries de Fourier dans le cas des signaux périodiques. On rappelle de la théorie du signal qu'un signal $x(t)$ est périodique si

$$x(t) = x(t + T_0) \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \right) \quad \forall t .$$

Elles permettent ainsi de passer facilement du domaine temporel au domaine fréquentiel. Pour pouvoir être décomposable, un signal doit être à vérifier les conditions de convergence des séries de Fourier (Conditions de Dirichlet).

- **Conditions d'existence de la série de Fourier (conditions de Dirichlet):**

Les conditions suffisantes pour une convergence garantie des séries de Fourier sont les conditions de Dirichlet suivantes:

- ✓ $x(t)$ doit être intégrable sur n'importe quel période $\Rightarrow \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)| dt < \infty$
- ✓ $x(t)$ doit avoir un nombre fini de maximums et de minimums durant une période .
- ✓ $x(t)$ doit avoir un nombre fini de discontinuités dans n'importe quelle période .

- **Représentation trigonométrique des séries de Fourier**

Si $x(t)$ est un signal périodique de t , de période $T_0 (= 1/f_0)$, elle peut s'écrire sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdales et cosinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence $f_0 (\omega_0 = 2\pi f_0)$, dite fréquence fondamentale. Soit:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (2.1)$$

où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier. Ils sont déterminées à partir des relations suivantes :

$$a_0 = \overline{x(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \quad (2.2)$$

avec $\overline{x(t)}$ appel valeur moyenne ou composante continue (DC) de $x(t)$

et

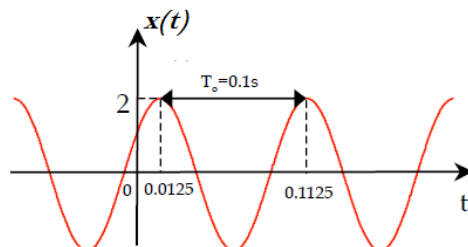
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Remarques :

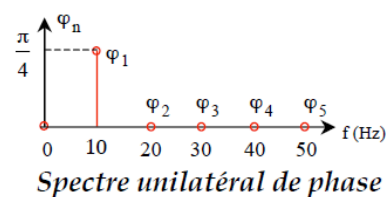
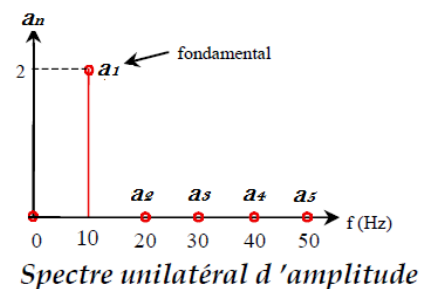
- On appelle le signal de pulsation ω_0 le fondamental.
- On appelle les signaux de pulsation $n.\omega_0$ les harmoniques de rang n .
- La valeur de a_0 ($\overline{x(t)}$) représente la valeur moyenne ou composante continue (DC) de $x(t)$.
- Si $x(t)$ **est pair**, alors $b_n = 0$ pour tout n , laissant une série de cosinus de Fourier uniquement pour $x(t)$ et si $x(t)$ **est impair**, alors $a_n = 0$ pour tout n , ne laissant une série de sinus de Fourier que pour $x(t)$.

Exemple 1.1

Soit un signal sinusoïdal décrit par : $x(t) = 2 \cos(2\pi 10t - \frac{\pi}{4})$ c'est un signal ne contenant qu'un seul harmonique
 Domaine temporel $x(t)$



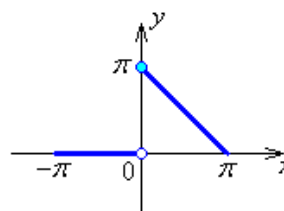
Domaine fréquentiel
 a_n et $b_n = 0$ (signal pair)



Exemple 1.2

Développer en série de Fourier le signal périodique $x(t)$ de période $T_0 = 2\pi$:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi < t < 0) \\ \pi - t & (0 \leq t < +\pi) \end{cases}$$



Solution:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 0 dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) dt = 0 + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{(\pi - t)^2}{-2} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt dt = 0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{n(\pi - t) \sin nt - \cos nt}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt dt = 0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin nt dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{n(\pi - t) \cos nt + \sin nt}{-n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Par conséquent, la série de Fourier pour $x(t)$ est

$$x(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi} \cos nt + \frac{1}{n} \sin nt \right) \quad (-\pi < t < +\pi)$$

Les premières sommes partielles de la série de Fourier de $x(t)$ sont:

$$x_0(t) = \frac{\pi}{4}$$

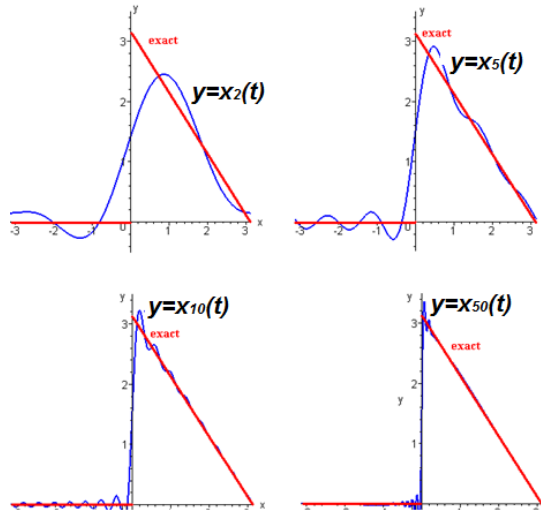
$$x_1(t) = x_0(t) + \frac{2}{\pi} \cos t + \sin t$$

$$x_2(t) = x_1(t) + \frac{1}{2} \sin 2t$$

$$x_3(t) = x_2(t) + \frac{2}{9\pi} \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t$$

.....etc

Les graphiques des sommes partielles successives se rapprochent de $x(t)$ de plus près, sauf au voisinage de toute discontinuité (où un dépassement systématique se produit, le phénomène de Gibbs).

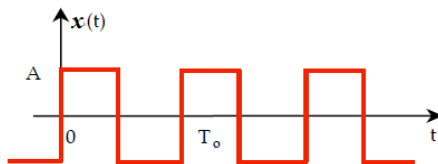


Exemple 1.3

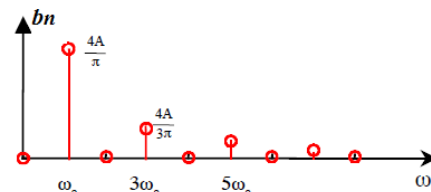
Montrer que le développement en série de Fourier d'un signal créneau s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4A}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\omega_0 t) = \frac{4A}{\pi} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{4A}{3\pi} \cos(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) + \dots$$

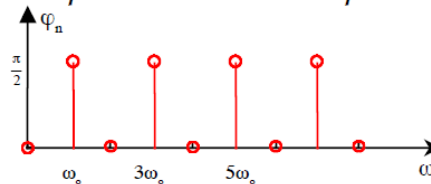
Domaine temporel $x(t)$



Domaine fréquentiel
 b_n et $a_n = 0$ (signal impair)



Spectre unilatéral d'amplitude



Spectre unilatéral de phase

- **Représentation complexe des séries de Fourier exponentielles des signaux périodiques en temps continu**

La décomposition en série de Fourier peut aussi s'écrire en utilisant la notation complexe, nous pouvons donner une forme plus générale de l'expression de ce développement en série de Fourier. Introduisons donc l'écriture complexe de :

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega_0 t) = \frac{(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})}{2j}$$

L'expression de la série de Fourier prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} && \text{équation de synthèse} \\
 x(t) &\xleftrightarrow{S.F.} C_n && (2.4) \\
 C_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt && \text{équation d'analyse}
 \end{aligned}$$

Les C_n sont appelés les coefficients complexes de Fourier. Ils forment la représentation fréquentielle de $x(t)$. Ces coefficients sont généralement complexes et peuvent s'écrire sous forme exponentielle complexe :

$$C_n = |C_n| e^{j\theta_n} \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} \quad (2.5)$$

- ✓ *Spectre d'amplitude de $x(t)$* : tracé de $|C_n|$ en fonction des pulsations
- ✓ *Spectre de phase de $x(t)$* : tracé de θ_n en fonction des pulsations
- ✓ La représentation complexe signifie tout simplement que chaque composante spectrale est sinusoïde ayant une amplitude (module de C_n) et une phase (argument de C_n).

Exemple 1.4

Que sont la fréquence fondamentale et les coefficients de la série de Fourier du signal suivant: $x(t) = 10 \sin(20\pi t) + 2 \cos(40\pi t + \pi/3) + 0.5 \sin(80\pi t + \pi/4)$ (vous n'avez pas besoin de calculer l'intégrale). Illustrez le spectre d'amplitude du signal.

Solution:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 10 \cos(20\pi t - \frac{\pi}{2}) + 2 \cos(40\pi t + \frac{\pi}{3}) + 0.5 \cos(80\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) \\
 &= 0 + 10 \cos(2\pi \times 10 \times t - \frac{\pi}{2}) + 2 \cos(2\pi \times 20 \times t + \frac{\pi}{3}) + 0.5 \cos(2\pi \times 40 \times t - \frac{\pi}{4})
 \end{aligned}$$

La fréquence fondamentale: $f_0 = 10$

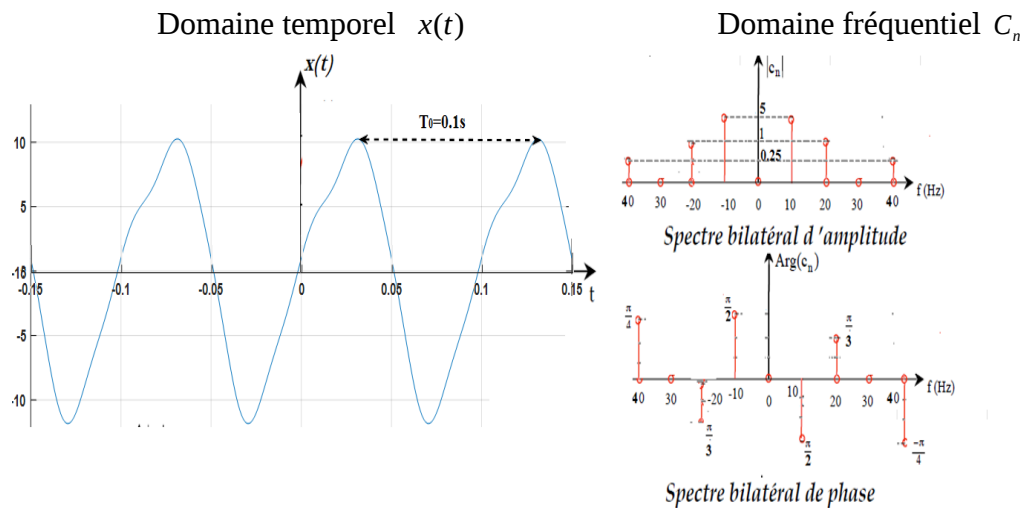
Pour obtenir la représentation bilatérale des séries de Fourier, on peut écrire, en utilisant la formule d'Euler

$$x(t) = 0 + 5e^{-j\pi/2} e^{j2\pi(10)t} + 5e^{j\pi/2} e^{-j2\pi(10)t} + e^{j\pi/3} e^{j2\pi(20)t} + e^{-j\pi/3} e^{-j2\pi(20)t} + \frac{1}{4} e^{-j\pi/4} e^{j2\pi(40)t} + \frac{1}{4} e^{j\pi/4} e^{-j2\pi(40)t}$$

Ainsi, les coefficients des séries de Fourier bilatérales sont les suivants:

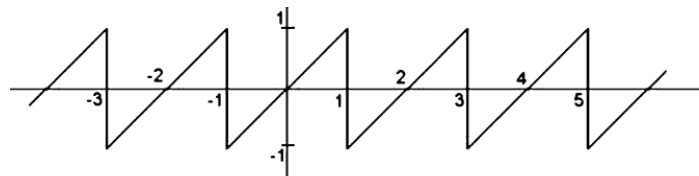
$$C_0 = 0, C_1 = 5e^{-j\pi/2}, C_{-1} = 5e^{j\pi/2}, C_2 = e^{j\pi/3}, C_{-2} = e^{-j\pi/3}, C_4 = \frac{1}{4} e^{-j\pi/4}, C_{-4} = \frac{1}{4} e^{j\pi/4}$$

Le spectre d'amplitude (avec la phase) du signal est le suivant :



Exemple 1.5

Trouvez la série de Fourier du signal périodique illustré à la figure suivante:



Solution: La période est donnée par : $T_0 = 2$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$

Pour $n = 0$ $C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t dt = 0$

Pour $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t e^{-jn\pi t} dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{t}{-jn\pi} e^{-jn\pi t} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{jn\pi} \int_{-1}^1 e^{-jn\pi t} dt \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{t}{-jn\pi} e^{-jn\pi t} \Big|_{-1}^1 - \frac{e^{-jn\pi t}}{(-jn\pi)^2} \Big|_{-1}^1 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{t}{-jn\pi} e^{-jn\pi t} \Big|_{-1}^1 + 0 \right] = -\frac{1}{2} \frac{(e^{-jn\pi} + e^{jn\pi})}{jn\pi}, \text{ puisque } e^{-jn\pi} + e^{jn\pi} = 2(-1)^n,
\end{aligned}$$

Finalement on a $C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{jn\pi} \Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{jn\pi} e^{jn\omega_0 t}$

Tout signal à temps continu $x(t)$ périodique de période T_0 peut s'écrire :

Forme trigonométrique réelle

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n \geq 1$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \forall n$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Forme exponentielle complexe

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| e^{j(n\omega_0 t + \text{Arg}(C_n))}$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_0 t + \text{Arg}(C_n))$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$C_n = |C_n| e^{j\text{Arg}(C_n)}$$

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{et} \quad C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$$

1.1.2 Représentations fréquentielles

Les coefficients C_n représentent les composantes du spectre en fréquence de $x(t)$. En introduisant l'impulsion de Dirac $\delta(t)$, la représentation fréquentielle du signal est formée de pics de Dirac de poids $|C_n|$ réparties sur tout l'axe des fréquences positives et négatives. Il est important de noter que ce spectre $S(f)$ est en général complexe, formé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. L'expression du spectre est la suivante : $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$

La représentation fréquentielle ou le spectre en fréquence $X(\omega)$ du signal $x(t)$ est constitué de la composante continue à la fréquence 0, du fondamental à la fréquence ω_0 (ou harmonique d'ordre 1) et des différents harmoniques aux fréquences $\omega = n\omega_0$. Il est important de remarquer que le spectre d'une fonction périodique, de période T_0 , est discontinu et composé de raies dont l'écart minimum est, sur l'axe des fréquences, ω_0 . Cette représentation complexe du signal distribue donc, dans le domaine fréquentiel, les contributions du signal

symétriquement de part et d'autre de l'origine sur l'axe des fréquences : c'est la représentation spectrale bilatérale $X(\omega)$ (fréquences positives et négatives)

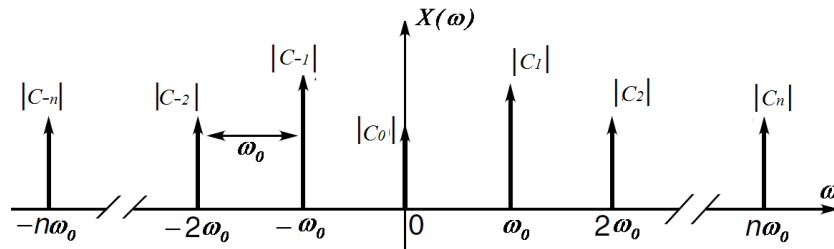


Figure 1.1: Représentation fréquentielle bilatérale d'un signal périodique de période T_0

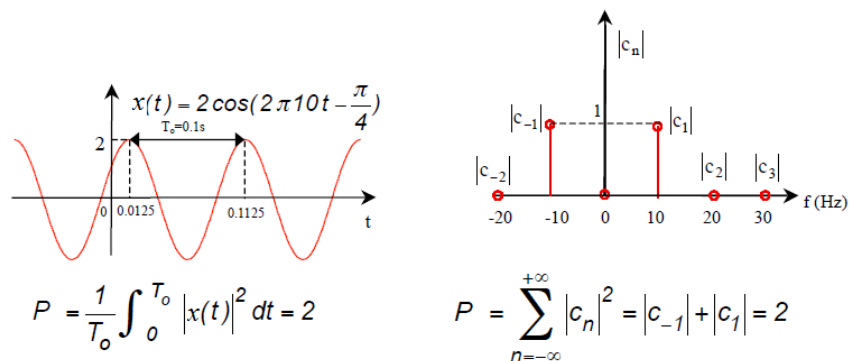
1.1.3 Théorème de Parseval

Signaux périodiques : signaux à énergie infinie mais à puissance moyenne finie.

L'identité de Parseval montre l'égalité du calcul de la puissance moyenne d'un signal périodique de période T_0 à partir de sa représentation dans le domaine temporel ou fréquentiel.

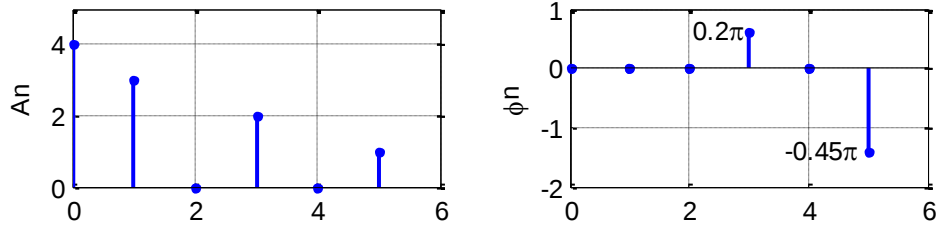
La formule de Parseval est plus facile à établir en utilisant le développement en série de Fourier complexe, donc la puissance moyenne d'un signal périodique :

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = a_0^2 + 0.5 \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.6)$$



Exemple 1.6

Considérons les spectres unilatéraux d'un signal. Trouver l'expression du signal, son spectre bilatéral et sa puissance moyenne.



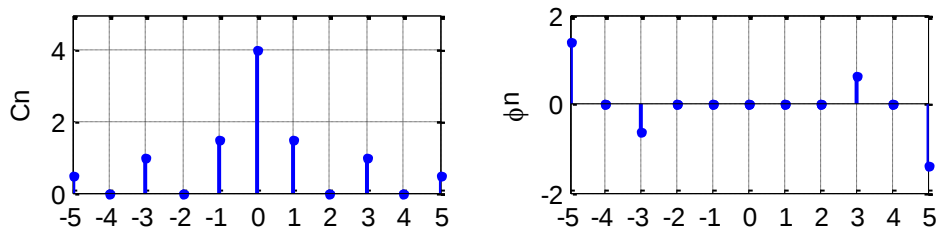
La forme réelle :

$$x(t) = 4 + 3\cos(\omega_0 t) + 2\cos(3\omega_0 t + 0.2\pi) + \cos(5\omega_0 t - 0.45\pi)$$

La forme complexe :

$$x(t) = 4 + 3 \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} + 2 \frac{e^{j(3\omega_0 t + 0.2\pi)} + e^{-j(3\omega_0 t + 0.2\pi)}}{2} + \frac{e^{j(5\omega_0 t - 0.45\pi)} + e^{-j(5\omega_0 t - 0.45\pi)}}{2}$$

$$x(t) = 4 + 3 \frac{e^{j\omega_0 t}}{2} + e^{j0.2\pi} e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j0.45\pi} e^{j5\omega_0 t} + \frac{3e^{-j\omega_0 t}}{2} + e^{-j0.2\pi} e^{-j3\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{+j0.45\pi} e^{-j5\omega_0 t}$$



$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = 4^2 + 2(1.5^2 + 1^2 + 0.5^2) = 23W$$

1.2 Analyse spectrale des signaux non périodiques

1.2.1 Transformée de Fourier

C'est une généralisation de la décomposition de série de Fourier à tous les signaux déterministes. Elle permet d'obtenir une représentation en fréquence (représentation spectrale) de ces signaux. Tout signal périodique de période T_0 présente un spectre discret dont les raies sont espacées de f_0 . Plus la période est grande plus l'espace entre les raies est réduit. Quand la période tend vers l'infini, l'écart fréquentiel tend vers zéro et le spectre devient continu. Lorsque le signal n'est pas périodique, on peut le supposer périodique à l'infini.

Soit $x(t)$ un signal déterministe. Sa transformée de Fourier (TF) est une fonction, généralement complexe, de la variable ω et définie par :

$$x(t) \leftrightarrow TF \{x(t)\} = X(\omega)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Analyse} \quad (2.7)$$

Pour que la transformée de Fourier de $x(t)$ existe et soit réciproque, il suffit que $x(t)$ soit une fonction de carré sommable. Cela signifie que $x(t)$ ainsi que sa transformée de Fourier, sont à énergie finie. Toutes les fonctions existant physiquement vérifient ces conditions parce qu'on les observe sur un temps fini.

Une des propriétés essentielles de la transformation de Fourier est son inversibilité. On peut reconstituer le signal $x(t)$ à partir de son spectre complexe donc la transformée inverse est obtenue par :

$$X(\omega) \leftrightarrow TF^{-1}\{X(\omega)\} = x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Synthèse} \quad (2.8)$$

Ce spectre est une fonction à valeurs complexes, les parties réelles et imaginaires du spectre s'écrivent :

$$\operatorname{Re}\{X(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\{X(\omega)\} = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt \quad (2.9)$$

On donnera souvent le spectre complexe en module et phase. Le module s'écrit :

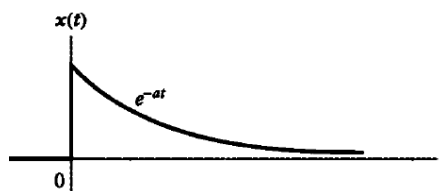
$$|X(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}\{X(\omega)\}^2 + \operatorname{Im}\{X(\omega)\}^2} \quad (2.10)$$

La phase est donnée par :

$$\theta(\omega) = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\frac{\operatorname{Im}\{X(\omega)\}}{\operatorname{Re}\{X(\omega)\}}\right) \quad (2.11)$$

Exemple 1.7

Déterminer la transformée de Fourier de $x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$

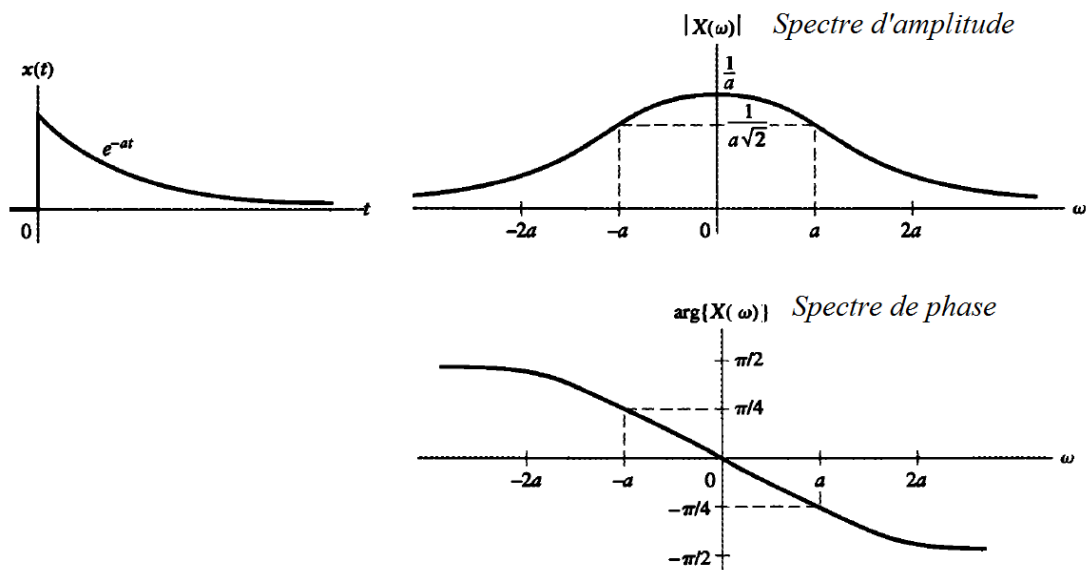


$$X(\omega) = TF\{e^{-at}u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$\text{Spectre d'amplitude : } |X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \quad \text{et} \quad \text{Spectre de phase : } \theta(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Domaine temporel $x(t)$

Domaine fréquentiel $X(\omega)$



1.2.2 Quelques Propriétés

Nous avons une correspondance unique entre le signal $x(t)$, son transformée de Fourier et par conséquent sa représentation $X(\omega)$.

Opération	Donnée $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$
Linéarité	$ax(t) + by(t) \Leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$
Translation en Temps	$x(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Changement d'échelle	$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Modulation (1)	$x(t) \cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$
Modulation (2)	$x(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$
Différentiation	si $x(t) = \frac{d^n g(t)}{dt^n}$, alors $X(\omega) = (j\omega)^n \cdot G(\omega)$
Intégration	si $x(t) = \int_{-\infty}^t g(\alpha) d\alpha$, alors $X(\omega) = \frac{1}{j\omega} G(\omega) + \pi G(0) \delta(\omega)$

Convolution	$g(t) * f(t) \Leftrightarrow G(\omega) \cdot F(\omega), \text{ avec}$ $g(t) * f(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) f(t - \alpha) d\alpha$
Multiplication	$x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$
Dualité	si $g(t) \Leftrightarrow z(\omega)$, alors $z(t) \Leftrightarrow 2\pi g(-\omega)$
Hermitian Symétrie	Si $g(t)$ est une valeur réelle, alors $G(-\omega) = G^*(\omega)$ ($ G(-\omega) = G(\omega) $ and $\angle G(-\omega) = -\angle G(\omega)$)
Conjugation	$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega)$
Théorème de Parseval	$P_{avg} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$

Exemple 1.8

Si la transformée de Fourier de $x(t)$ est $X(\omega)$, alors trouver la transformée de Fourier de $y(t) = x(2t - 3)$

$$x(t) \xrightarrow[\text{entemps}]{\text{décalage}} x(t - 3) \xrightarrow[\text{d'échelle}]{\text{changement}} x(2t - 3)$$

$$X(\omega) \longrightarrow X(\omega)e^{-j3\omega} \longrightarrow \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{3\omega}{2}} \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{2} X\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\frac{3\omega}{2}}$$

1.2.3 Calcul de quelques transformées

Afin de mieux saisir les implications de la TF, calculons les transformées de quelques signaux importants en traitement du signal.

Function name	Représentation temporelle $x(t)$	Représentation spectrale $X(\omega)$
FT	$x(t)$	$X(\omega) = TF \{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$
IFT	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega = F^{-1} \{X(\omega)\}$	$X(\omega)$
Impulse	$\delta(t)$	1
DC	A	$2\pi.A\delta(\omega)$
Cosine	$\cos(\omega_0 t + \theta)$	$\pi [e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0)]$
Sine	$\sin(\omega_0 t + \theta)$	$-j\pi [e^{j\theta} \delta(\omega - \omega_0) - e^{-j\theta} \delta(\omega + \omega_0)]$
Complex Exponential	$\exp(j\omega_0 t)$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
Unit step	$u(t) \equiv \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
Signum	$\text{sgn}(t) \equiv \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$
Linear Decay	$\frac{1}{t}$	$-j\pi \text{sgn}(\omega)$
Impulse Train	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$	$\frac{2\pi}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_s}\right)$
Fourier Series	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$, avec $C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$

1.2.4. Théorème de Parseval

L'énergie E d'un signal $x(t)$ est définie comme la surface sous $|x(t)|^2$. Nous pouvons également déterminer l'énergie du signal à partir de sa transformée de Fourier $X(\omega)$ par le théorème de Parseval. Pour un signal d'énergie finie, l'énergie du signal est identique dans les domaines temporel et fréquentiel.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.12)$$

Exemple 1.9

Trouver l'énergie et vérifier le théorème de Parseval pour le signal $x(t) = e^{-4t}u(t)$

nous avons l'énergie du $x(t)$: $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-8t} dt = \frac{1}{8}$

Nous déterminons maintenant E_x à partir du spectre du signal $X(\omega)$ donné par:

$$X(\omega) = TF\{e^{-4t}u(t)\} = \frac{1}{j\omega + 4}$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{j\omega + 4} \right|^2 d\omega$$

et de l'équation (1,11),

$$= \frac{1}{2\pi \times 4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\omega^2 + 4^2} d\omega = \frac{1}{2\pi \times 4} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{4}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{8}$$

$$\text{Sachant que : } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\omega^2 + a^2} d\omega = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi \quad (\text{si } a > 0)$$

1.2.5. Théorème de Plancherel

La relation très importante entre la transformée de Fourier et le produit de convolution s'énonce sous la forme du théorème suivant :

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple et réciproquement.

Ainsi, pour deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ ayant pour transformées de Fourier respectives $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &\Leftrightarrow X(\omega) \cdot Y(\omega) \\ x(t) \cdot y(t) &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Exercices:

Exercice01:

Soit la fonction

$$x(t) = 2\sin(2000\pi t) + 2\cos(5000\pi t)$$

1. Évaluer la transformée de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$.
2. Quelle est la fréquence fondamentale de $x(t)$?
3. Évaluer les coefficients de séries de Fourier C_n de $x(t)$ avec un intervalle d'analyse de 0.002 sec
4. Que sont les valeurs des coefficients C_n si l'intervalle d'analyse était 0.01 sec?

Solution Exercice01:

1. La transformée de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$.

$$X(\omega) = 2\pi j[\delta(\omega + 2000\pi) - \delta(\omega - 2000\pi)] + 2\pi[\delta(\omega - 5000\pi) + \delta(\omega + 5000\pi)]$$

2. La fréquence fondamentale de $x(t)$ est

- La fréquence fondamentale de $x(t)$ est une fréquence ω_0 dont $\omega_1 = 2000\pi$ et $\omega_2 = 5000\pi$ sont multiples. C'est-à-dire $\omega_1 = k_1\omega_0$ et $\omega_2 = k_2\omega_0$, k_1, k_2 entier
- la fréquence fondamentale de $2\sin(2000\pi t)$ est $\omega_1 = 2000\pi \Rightarrow T_1 = 2\pi/2000\pi = 1/1000$
 - la fréquence fondamentale de $2\cos(5000\pi t)$ est $\omega_2 = 5000\pi \Rightarrow T_2 = 2\pi/5000\pi = 1/2500$
 - la fréquence fondamentale de $x(t)$ est ω_0

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2500}{1000} = \frac{5}{2} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2T_1 = 5T_2 \Rightarrow \omega_0 = 1000\pi \Rightarrow T_0 = 0.002\text{sec}$$

3. Évaluation les coefficients de séries de Fourier C_n de $x(t)$ avec un intervalle d'analyse de $T_0 = 0.002\text{sec}$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0) \text{ avec } \omega_0 = 1000\pi$$

$$= 2\pi j[\delta(\omega + 2000\pi) - \delta(\omega - 2000\pi)] + 2\pi[\delta(\omega - 5000\pi) + \delta(\omega + 5000\pi)]$$

$$\text{avec } C_n = \begin{cases} \mp j, n = \pm 2 \\ 1, n = \pm 5 \\ 0, \text{ autrement} \end{cases}$$

4. Les valeurs des coefficients C_n si l'intervalle d'analyse était 0.01 sec?

$$\left(\begin{array}{l} T = 0.01 \\ \omega_1 = 2000\pi \Rightarrow T_1 = 0.001 \\ \omega_2 = 5000\pi \Rightarrow T_2 = 0.0004 \end{array} \right) \Rightarrow \frac{T}{T_1} = 10 \text{ et } \frac{T}{T_2} = 25$$

$$\text{avec } C_n = \begin{cases} \mp j, n = \pm 10 \\ 1, n = \pm 25 \\ 0, \text{ autrement} \end{cases}$$

Exercice02:

1. Déterminer $X(\omega)$ la transformée de Fourier le signal suivant :

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (u(t) \text{ est l'échelon unité})$$

2. Utilisez les propriétés de la représentation de Fourier (par exemple, différenciation temporelle,

convolution, décalage temporel, décalage de fréquence) pour trouver la transformée de Fourier de :

$$y(t) = 2 \frac{d}{dt} \{e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3)\} \quad *: \text{indique l'opération de convolution}$$

Solution Exercice02:

1. Détermination la transformé de Fourier de $x(t)$

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(\omega) = TF\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt, \text{ converges pour } a > 0$$

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = -\frac{1}{(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

2. Détermination la transformé de Fourier de $y(t)$

$$y(t) = 2 \frac{d}{dt}\{e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3)\}$$

$$Y(\omega) = TF\{y(t)\} = TF\left\{2 \frac{d}{dt}\{e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3)\}\right\}$$

$$= 2TF\left\{\frac{d}{dt}\{e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3)\}\right\}$$

puisque on a par définition :

$$TF\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = j\omega X(\omega) \text{ et } g(t) * f(t) \Leftrightarrow G(\omega) \cdot F(\omega)$$

alors , nous avons $Y(\omega) = 2j\omega \cdot TF\{e^{-4t}u(t)\} \cdot TF\{e^{-t}u(t-3)\}$

$$\text{avec } TF\{e^{-4t}u(t)\} = \frac{1}{4+j\omega} \text{ et}$$

$$TF\{e^{-t}u(t-3)\} = TF\{e^{-3} \cdot e^{+3}e^{-t}u(t-3)\} = e^{-3}TF\{e^{-(t-3)}u(t-3)\}$$

$$TF\{e^{-t}u(t-3)\} = e^{-3} \frac{e^{-j3\omega}}{1+j\omega} \text{ car } [x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega)]$$

$$\text{Finalement : } Y(\omega) = 2j\omega \cdot TF\{e^{-4t}u(t)\} \cdot TF\{e^{-t}u(t-3)\}$$

$$Y(\omega) = \frac{2j\omega \cdot e^{-3} \cdot e^{-j3\omega}}{(4+j\omega)(1+j\omega)}$$

Exercice03:

Soit une sinusoïde tronquée exprimée par :

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \times [u(t+T) - u(t-T)] \quad \text{où } T > 0 \text{ (} u(t) \text{ est l'échelon unité)}$$

1. Trouvez l'expression de $X(\omega)$, la transformée de Fourier de $x(t)$ selon la méthode de votre choix

2. Exprimez $v(t)$ comme la convolution $x(t) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t-2n)$ et Trouvez $V(\omega)$, la transformée

de Fourier de $v(t)$.

Solution Exercice03:

1. Détermination l'expression de $X(\omega)$, la transformée de Fourier de $x(t)$.

$$X(\omega) = TF[x(t)] = TF\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \times [u(t+T) - u(t-T)]\right)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} TF\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right] * TF[u(t+T) - u(t-T)]$$

$$X(\omega) = \frac{j}{2} \left[\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right) - \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right) \right] \times (2T) \frac{\sin(T\omega)}{(T\omega)}$$

$$X(\omega) = Tj \left[\frac{\sin\left(T\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)}{\left(T\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right)} - \frac{\sin\left(T\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right)}{\left(T\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right)} \right]$$

$$X(\omega) = Tj \left[\text{sinc}\left(T\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right)\right) - \text{sinc}\left(T\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right)\right) \right]$$

2. Détermination $v(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - 2n)$ et $V(\omega)$

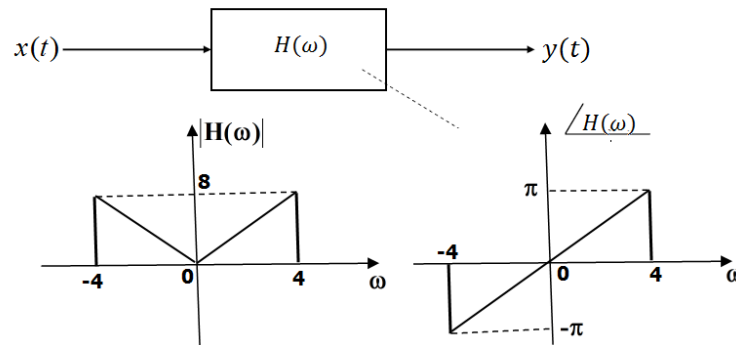
$$v(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - 2n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(t - 2n)$$

$$V(\omega) = X(\omega) \times \frac{2\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$V(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} X(n\pi) \delta(\omega - n\pi)$$

Exercice04

Soit $H(\omega)$, la réponse fréquentielle d'un filtre :



Le signal périodique $x(t) = -5\sin(2t)$ est appliqué à l'entrée du filtre.

1. Détermination $X(\omega)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$.
2. Donnez l'expression du signal $y(t)$ observé à la sortie du filtre.

Solution Exercice04

1. Détermination $X(\omega)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$.

$$X(\omega) = -\frac{5\pi}{j} [\delta(\omega - 2) - \delta(\omega + 2)]$$

2.L'expression exacte du signal $y(t)$ observé à la sortie du filtre.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left(-\frac{5\pi}{j} [\delta(\omega - 2) - \delta(\omega + 2)] \right) \times H(\omega)$$

$$Y(\omega) = -\frac{5\pi}{j} [\delta(\omega - 2)H(2) - \delta(\omega + 2)H(-2)]$$

$$Y(\omega) = -\frac{5\pi}{j} [4\delta(\omega - 2)e^{j\frac{\pi}{2}} - 4\delta(\omega + 2)e^{-j\frac{\pi}{2}}]$$

$$Y(\omega) = -\frac{20\pi}{j} [\delta(\omega - 2)e^{j\frac{\pi}{2}} - \delta(\omega + 2)e^{-j\frac{\pi}{2}}]$$

$$y(t) = -20\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sachant que :

$$20\sin(\omega_0 t + \theta) \xleftrightarrow{\text{TF}} \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0)e^{j\theta} - \delta(\omega + \omega_0)e^{-j\theta}]$$

Méthode 02 :

$$A\sin(\omega_0 t + \theta) \xleftrightarrow{H(\omega)} A|H(\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \theta + \arg[H(\omega_0)])$$

Exercice05

Trouvez la sortie $y(t)$ pour un Système Linéaire Invariant en temps ayant une réponse impulsionnelle $h(t) = 2e^{-|t|}$ en utilisant la transformée de Fourier, lorsque l'entrée est $x(t) = 5\sin(t)$.

Solution Exercice05

Pour résoudre cet exercice, vous devez utiliser la propriété de convolution en domaine de fréquence, qui est valable pour les systèmes linéaires et invariants en temps. Cette propriété indique que la transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Fourier.

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega).H(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{5\pi}{j} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 2e^t e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} 2e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{4}{1 + \omega^2}$$

$$Y(\omega) = X(\omega).H(\omega) = \frac{4}{1 + \omega^2} \cdot \frac{5\pi}{j} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

$$Y(\omega) = \frac{10\pi}{j} [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

$$y(t) = 10\sin(t)$$

Exercice06

Trouvez la sortie $y(t)$ pour un Système Linéaire Invariant en temps ayant une réponse impulsionnelle

$h(t) = 2e^{-|t|}$ en utilisant la transformée de Fourier, lorsque l'entrée est $x(t) = 5 + 5\cos(t)$.

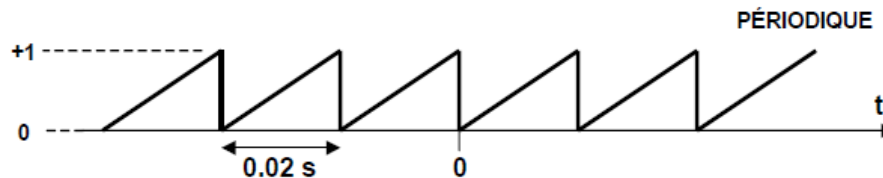
Solution Exercice06

Pour résoudre cet exercice, vous devez utiliser la propriété de convolution en domaine de fréquence, qui est valable pour les systèmes linéaires et invariants en temps. Cette propriété indique que la transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Fourier.

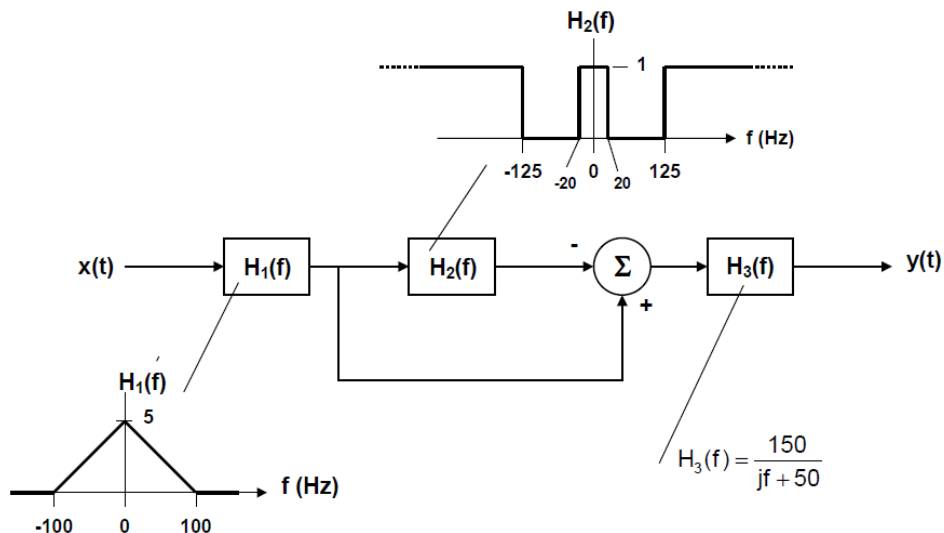
$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \\
 X(\omega) &= 5\pi\delta(\omega) + 5\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] \\
 H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 2e^t e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} 2e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{4}{1 + \omega^2} \\
 Y(\omega) &= X(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{4}{1 + \omega^2} 5\pi\delta(\omega) + \frac{4}{1 + \omega^2} 5\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] \\
 Y(\omega) &= 20\pi\delta(\omega) + 10\pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] \\
 y(t) &= 10 + 10\cos(t)
 \end{aligned}$$

Exercice07

Soit $x(t)$, un signal périodique en dents de scie de fréquence 50 Hz:



Ce signal est appliqué à l'entrée du système suivant :



1. Déterminez $X(f)$, la transformée de Fourier du signal $x(t)$
2. Déterminez $y(t)$, l'expression exacte du signal à la sortie du système .

Solution Exercice07

1. Détermination $X(f)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$

La période est donnée par : $T_0 = 0.02$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 100\pi \Rightarrow f_0 = 50$

Pour $n = 0$ $C_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{t}{T_0} dt = 0.5$

Pour $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{T_0} t e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0^2} \left[\frac{t}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^{T_0} + \frac{1}{jn\omega_0} \int_0^{T_0} e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \frac{1}{T_0^2} \left[\frac{t}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^{T_0} - \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{(-jn\omega_0)^2} \Big|_0^{T_0} \right]$$

$$= \frac{1}{T_0^2} \left[\frac{t}{-jn\omega_0} e^{-jn\omega_0 t} \Big|_0^{T_0} + 0 \right] = \frac{0.5j}{n\pi}, \text{ Finalement on a } C_n = \frac{0.5j}{n\pi}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nf_0) = 0.5\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{0.5j}{n\pi} \delta(f - 50n)$$

2. Détermination $y(t)$, l'expression exacte du signal à la sortie du système .

Sortie de $H_1(f)$: $X(f) \cdot H_1(f) = 2.5\delta(f) + 1.25(j/\pi)\delta(f - 50) + 1.25(-j/\pi)\delta(f + 50)$

Sortie de $H_2(f)$: $2.5\delta(f)$

Entrée de $H_3(f)$: $1.25(j/\pi)\delta(f - 50) + 1.25(-j/\pi)\delta(f + 50)$

qui est la transformée de Fourier du signal : $-0.7958\sin(100\pi t)$

$$y(t) = |H(f=50)| 0.7958 \sin(100\pi t + \text{tg}^{-1}(H(f=50)))$$

$$y(t) = -(9/2)^{1/2} 0.7958 \sin(100\pi t + \text{tg}^{-1}\{-1\}) = -1.688 \sin(100\pi t - \pi/4)$$

Exercice08

Le signal $x(t) = 5\cos(2\pi f_0 t)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre dont la réponse fréquentielle est donnée par l'expression suivante :

$$H(f) = \frac{100}{jf + 100}$$

Le signal $y(t)$ est observé à la sortie du filtre.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de f_0 la puissance moyenne du signal $y(t)$ est-elle inférieure à 2,5 watts ?
2. Pour $f_0 = 90\text{Hz}$, évaluez le délai causé par le filtre.

Solution Exercice08

1. Puissance moyenne à la sortie du filtre :

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{5}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))H(f) = \frac{5}{2}\delta(f - f_0)H(f_0) + \frac{5}{2}\delta(f + f_0)H(f_0)$$

$$\text{Puissance moyenne: } P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \left(\frac{5}{2}\right)^2 2|H(f_0)|^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 2 \left| \frac{100}{jf_0 + 100} \right|^2$$

$$\frac{5^2}{2} \left| \frac{100}{jf_0 + 100} \right|^2 < 2,5$$

$$12,5 \times \frac{10^4}{f_0^2 + 10^4} < 2,5 \quad \text{d'où } f_0 > 200\text{Hz}$$

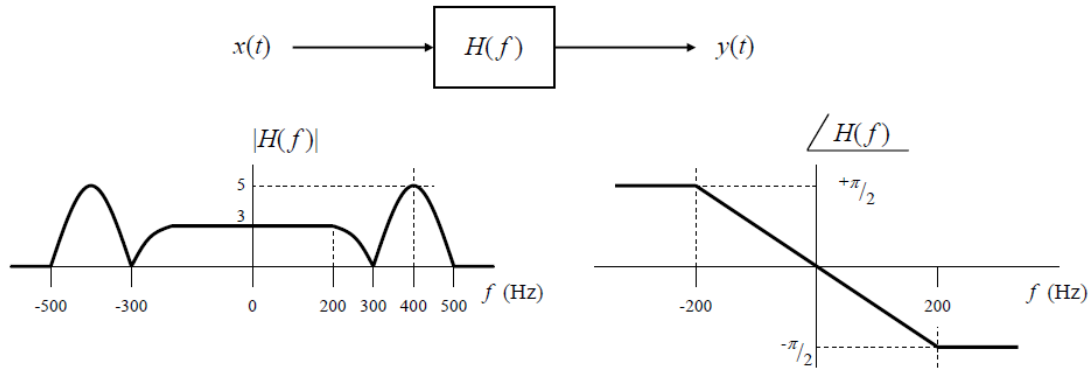
2. Pour $f_0 = 90\text{Hz}$, évaluation le délai causé par le filtre.

$$y(t) = 5|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \angle H(f_0)) = 5|H(f_0)|\cos\left(2\pi f_0 \left[t + \frac{\angle H(f_0)}{2\pi f_0}\right]\right)$$

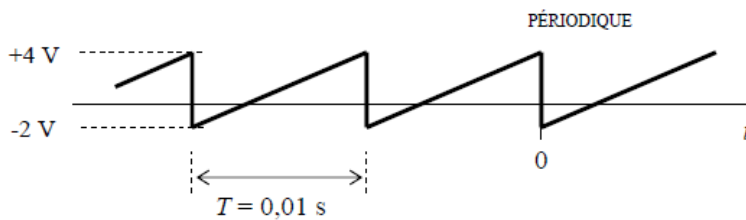
où $\frac{\angle H(f_0)}{2\pi f_0} = \frac{1}{2\pi f_0} \arctan\left(\frac{-90}{100}\right) = -1,3 \times 10^{-3}$
 Le délai est donc de 1,3 ms.

Exercice09

Soit $H(f)$, la réponse fréquentielle d'un filtre :



Le signal périodique $x(t)$ décrit ci-dessous est appliqué à l'entrée du filtre. Notez bien la position de l'instant $t = 0$ sur la figure.



1. Déterminez $X(f)$, la transformée de Fourier du signal $x(t)$
2. Donnez l'expression exacte du signal $y(t)$ observé à la sortie du filtre.

Solution Exercice09

1. Détermination $X(f)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$

La période est donnée par : $T_0 = 0.01$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 200\pi \Rightarrow f_0 = 100$

Pour $n = 0$
$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\frac{2}{T_0/3}t - 2\right) dt = 1$$

Pour $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\frac{6}{T_0} t - 2 \right) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{TF} X_1(\omega) \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega X_1(\omega)$$

$$\text{avec } x_1(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} = -2\delta(t) - 4\delta(t - T_0) + \frac{6}{T_0} \text{Rect}\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$$

$$j\omega X_1(\omega) = -2 - 4e^{-j\omega T_0} + 6 \text{sinc}\left(\omega \frac{T_0}{2}\right) e^{-j\omega \frac{T_0}{2}}, \text{ Finalement on a } C_n = \frac{X_1(n\omega_0)}{T_0} = \frac{3j}{n\pi}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nf_0) = \delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{3j}{n\pi} \delta(f - 100n)$$

2.L'expression exacte du signal $y(t)$ observé à la sortie du filtre.

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left(\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{3j}{n\pi} \delta(f - 100n) \right) \times H(f)$$

$$Y(f) = \delta(f)H(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{3j}{n\pi} \delta(f - 100n)H(100n)$$

$$Y(f) = \delta(f)|H(0)|e^{j\arg(H(0))} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{3j}{n\pi} \delta(f - 100n)|H(100n)|e^{j\arg(H(100n))}$$

$$\begin{aligned} Y(f) &= 3\delta(f) + \frac{3j}{\pi} (\delta(f - 100)|H(100)|e^{j\arg(H(100))}) - \frac{3j}{\pi} (\delta(f + 100)|H(-100)|e^{j\arg(H(-100))}) \\ &+ \frac{3j}{2\pi} (\delta(f - 200)|H(200)|e^{j\arg(H(200))}) - \frac{3j}{2\pi} (\delta(f + 200)|H(-200)|e^{j\arg(H(-200))}) \\ &+ \frac{3j}{4\pi} (\delta(f - 400)|H(400)|e^{j\arg(H(400))}) - \frac{3j}{4\pi} (\delta(f + 400)|H(-400)|e^{j\arg(H(-400))}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(f) &= 3\delta(f) + \frac{9j}{\pi} \delta(f - 100)e^{-j\frac{\pi}{4}} - \frac{9j}{\pi} \delta(f + 100)e^{+j\frac{\pi}{4}} \\ &+ \frac{9j}{2\pi} \delta(f - 200)e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{9j}{2\pi} \delta(f + 200)e^{+j\frac{\pi}{2}} \\ &+ \frac{15j}{4\pi} \delta(f - 400)e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{15j}{4\pi} \delta(f + 400)e^{+j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

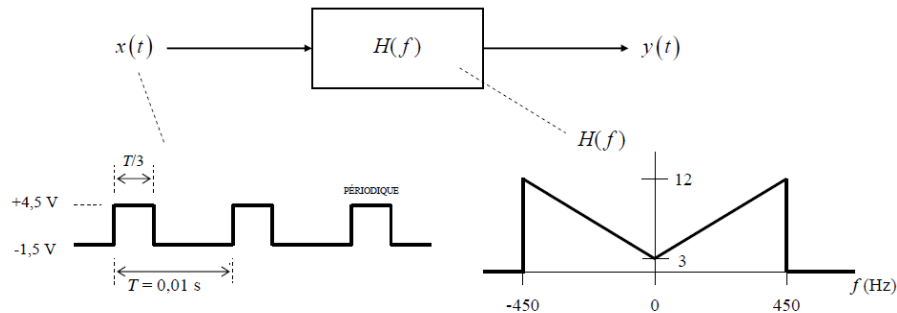
Sachant que :

$$\begin{aligned} \sin(2\pi f_0 t - \theta) &\xleftrightarrow{TF} \frac{e^{-j\theta}}{2j} \delta(f - f_0)e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{e^{+j\theta}}{2j} \delta(f + f_0) \\ \cos(2\pi f_0 t + \theta) &\xleftrightarrow{TF} \frac{e^{+j\theta}}{2} \delta(f - f_0)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \frac{e^{-j\theta}}{2} \delta(f + f_0) \end{aligned}$$

où $y(t) = 3 - 5,73 \sin \left(200\pi t - \frac{\pi}{4} \right) - 2,86 \sin \left(400\pi t - \frac{\pi}{2} \right) - 2,39 \sin \left(800\pi t - \frac{\pi}{2} \right)$

Exercice10

Un signal périodique rectangulaire $x(t)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre dont la réponse fréquentielle est $H(f)$. Le signal $y(t)$ est observé à la sortie du filtre.



1. Déterminez la valeur moyenne $\overline{x(t)}$ (en volt) et la puissance moyenne $\overline{x^2(t)}$ (en watt) du signal $x(t)$.
2. Déterminez $X(f)$, la transformée de Fourier du signal $x(t)$
3. Déterminez la valeur moyenne $\overline{y(t)}$ (en volt) et la puissance moyenne $\overline{y^2(t)}$ (en watt) du signal $y(t)$.

Solution Exercice10

1. Détermination la valeur moyenne $\overline{x(t)}$ (en volt) et la puissance moyenne $\overline{x^2(t)}$ (en watt) du signal $x(t)$.

- Valeur moyenne de $x(t)$: $\overline{x(t)} = \frac{1}{3}(4.5) + \frac{2}{3}(-1.5) = 0.5$ volts
- Puissance moyenne de $x(t)$: $\overline{x^2(t)} = \frac{1}{3}(4.5)^2 + \frac{2}{3}(-1.5)^2 = 8.25$ watts

2. Détermination $X(f)$ la transformée de Fourier du signal $x(t)$

La période est donnée par : $T_0 = 0.01$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 200\pi \Rightarrow f_0 = 100$

Pour $n = 0$
$$C_0 = \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0/3} 4.5 dt + \int_{T_0/3}^{T_0} -1.5 dt \right] = 0.5$$

Pour $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0/3} 4.5 dt - \int_{T_0/3}^{T_0} 1.5 dt \right] e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{TF} X_1(\omega) \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j\omega X_1(\omega)$$

$$\text{avec } x_1(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} = 6\delta(t) - 6\delta(t - \frac{T_0}{3})$$

$$j\omega X_1(\omega) = 6 - 6e^{-j\omega \frac{T_0}{3}}, \text{ Finalement on a } C_n = \frac{X_1(n\omega_0)}{T_0} = \frac{3}{jn\pi} (1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}n})$$

$$C_n = 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{(n\frac{\pi}{3})} = 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nf_0) = 0.5\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(f - 100n)$$

3. La valeur moyenne $\overline{y(t)}$ (en volt), et la puissances moyenne $\overline{y^2(t)}$ (en watt).

$$Y(f) = X(f)H(f) = \left(0.5\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(f - 100n) \right) \times H(f)$$

$$Y(f) = 0.5\delta(f)H(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(f - 100n)H(100n)$$

- Valeur moyenne de $y(t)$: $\overline{y(t)} = 0.5H(0) = 0.5 \times 3 = 1.5 \text{ volts}$

- La puissances moyenne $\overline{y^2(t)}$ (en watt):

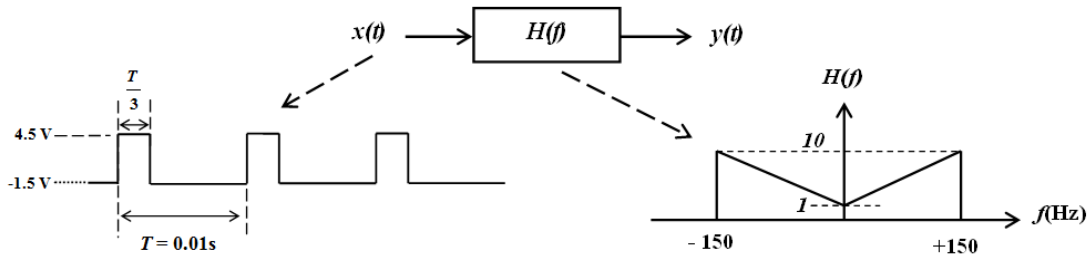
$$Y(f) = 0.5\delta(f)H(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(f - 100n)H(100n)$$

Puissance moyenne de $y(t)$:

$$\begin{aligned} \overline{y^2(t)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \times |H(100n)|^2 \\ &= |C_0|^2 |H(0)|^2 + 2|C_1|^2 |H(1)|^2 + 2|C_2|^2 |H(2)|^2 + 2|C_3|^2 |H(3)|^2 + 2|C_4|^2 |H(5)|^2 \\ &= 0.5^2 \times 3^2 + 2 \left(2 \sin c\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \times (5)^2 + 2 \left(2 \sin c\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \times (7)^2 + 2 \left(2 \sin c\left(\frac{3\pi}{3}\right) \right) \times (9)^2 + 2 \left(2 \sin c\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right) \times (11)^2 \\ \overline{y^2(t)} &= 247.4 \text{ watts} \end{aligned}$$

Exercice11

Un signal périodique rectangulaire $x(t)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre dont la réponse fréquentielle est $H(f)$. Le signal $y(t)$ est observé à la sortie du filtre.



1. Donnez l'expression analytique de $x(t)$ dans une période T .
2. Déterminez la valeur moyenne $\overline{x(t)}$ (en volt) et la puissance moyenne $\overline{x^2(t)}$ (en watt) du signal $x(t)$.
3. Calculez les coefficients exponentiels de série de Fourier C_n du signal d'entrée $x(t)$ puis déterminez l'expression de $X(\omega)$ sa transformée de Fourier.
4. Déterminez l'expression de $Y(\omega)$ la transformée de Fourier du signal de sortie $y(t)$.
5. Déterminez la valeur de puissance moyenne $\overline{y^2(t)}$ (en watt) du signal $y(t)$.

Solution Exercice 11

1. L'expression analytique de $x(t)$ dans une période T .

$$x(t) = \begin{cases} +4.5 & \text{pour } 0 \leq t \leq 0.003 \\ -1.5 & \text{pour } 0.003 \leq t \leq 0.01 \end{cases} \quad \text{avec} \quad T_0 = 0.01s \Rightarrow f_0 = 100\text{Hz}$$

2. Détermination la valeur moyenne $\overline{x(t)}$ (en volt) et la puissance moyenne $\overline{x^2(t)}$ (en watt) du signal $x(t)$.

- Valeur moyenne de $x(t)$: $\overline{x(t)} = \frac{1}{3}(4.5) + \frac{2}{3}(-1.5) = 0.5 \text{ volts}$
- Puissance moyenne de $x(t)$: $\overline{x^2(t)} = \frac{1}{3}(4.5)^2 + \frac{2}{3}(-1.5)^2 = 8.25 \text{ watts}$

3. Les coefficients exponentiels de série de Fourier C_n de $x(t)$ et l'expression de $X(\omega)$:

La période est donnée par : $T_0 = 0.01$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 200\pi \Rightarrow f_0 = 100$

$$\text{Pour } n = 0 \quad C_0 = \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0/3} 4.5 dt + \int_{T_0/3}^{T_0} -1.5 dt \right] = 0.5$$

Pour $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0/3} 4.5 dt - \int_{T_0/3}^{T_0} 1.5 dt \right] e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$x_1(t) \xrightarrow{TF} X_1(\omega) \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} \xrightarrow{TF} j\omega X_1(\omega)$$

$$\text{avec } x_1(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1(t)}{dt} = 6\delta(t) - 6\delta(t - \frac{T_0}{3})$$

$$j\omega X_1(\omega) = 6 - 6e^{-j\omega \frac{T_0}{3}}, \text{ Finalement on a } C_n = \frac{X_1(n\omega_0)}{T_0} = \frac{3}{jn\pi} (1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}n})$$

$$C_n = 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{(n\frac{\pi}{3})} = 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(f - nf_0) = 0.5\delta(f) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(f - 100n)$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0) = 0.5 \times 2\pi \times \delta(\omega) + 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(\omega - 200\pi n)$$

4. L'expression de $Y(\omega)$ la transformée de Fourier du signal de sortie $y(t)$.

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left(0.5 \times 2\pi\delta(\omega) + 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(\omega - 200\pi n) \right) \times H(\omega)$$

$$Y(\omega) = 0.5 \times 2\pi\delta(\omega)H(0) + 2\pi \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} 2e^{-j\frac{\pi}{3}n} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}n) \delta(\omega - 200\pi n)H(200\pi n)$$

$$Y(\omega) = \pi\delta(\omega) + 2\pi \times 2e^{-j\frac{\pi}{3}} \text{sinc}(\frac{\pi}{3}) \delta(\omega - 200\pi)$$

5. La puissance moyenne $\overline{y^2(t)}$ (en watt) du signal $y(t)$.

Puissance moyenne de $y(t)$:

$$\begin{aligned} \overline{y^2(t)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \times |H(200\pi n)|^2 \\ &= |C_0|^2 |H(0)|^2 + 2|C_1|^2 |H(200\pi)|^2 = 0.5^2 \times 1^2 + 2 \left(2 \text{sinc}(\frac{\pi}{3}) \right)^2 \times (7)^2 + \\ \overline{y^2(t)} &= 268.34 \text{ watts} \end{aligned}$$

Exercice12

Soit $x(t)$, un signal périodique exprimé sous forme de série exponentielle de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j200\pi n t} \text{ avec } C_n = \begin{bmatrix} 2 & n=0 \\ 3+j & n=2 \\ 3-j & n=-2 \\ 2.5 & n=\pm 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{bmatrix}$$

On produit le signal $y(t)$ par la multiplication suivante :

$$y(t) = x(t) \cos(400\pi \cdot t)$$

1. Déterminer $X(\omega)$, la transformée de Fourier de $x(t)$.
2. Déterminer $Y(\omega)$, la transformée de Fourier de $y(t)$.
3. Quelle est la valeur moyenne de $y(t)$?
4. Quelle est la l'amplitude de la sinusoïde de fréquence 400 Hz (ou 800π rad/s) contenue dans le signal $y(t)$?

Solution Exercice12

1. Détermination la transformée de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$
 signal périodique : $X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$ avec $\omega_0 = 200\pi$ rad/s

$$X(\omega) = 4\pi\delta(\omega) + (6\pi + j2\pi)\delta(\omega - 400\pi) + (6\pi - j2\pi)\delta(\omega + 400\pi) + 5\pi[\delta(\omega - 800\pi) + \delta(\omega + 800\pi)]$$

2. Détermination la transformée de Fourier $Y(\omega)$ de $y(t)$
 $y(t) = x(t) \cos(400\pi \cdot t)$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * [\pi\delta(\omega - 400\pi) + \pi\delta(\omega + 400\pi)]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega - 400\pi) + X(\omega + 400\pi)]$$

$$Y(\omega) = 6\pi\delta(\omega) + 4.5\pi[\delta(\omega - 400\pi) + \delta(\omega + 400\pi)] + (3\pi - j\pi)[\delta(\omega - 800\pi) + \delta(\omega + 800\pi)] + 2.5\pi[\delta(\omega - 1200\pi) + \delta(\omega + 1200\pi)]$$

3. La valeur moyenne de $y(t)$: $y_{moy} = \frac{1}{2\pi} 6\pi = 3$ volts

4. L'amplitude de la sinusoïde de fréquence 800π rad/s contenue dans le signal $y(t)$

$$\frac{1}{2\pi} \times 2|3\pi \mp j\pi| = 3.16 \text{ volts}$$

Chapitre 3

La transformée de Laplace

3.1 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil mathématique bien adapté pour le calcul de réponses temporelles et pour l'analyse fréquentielle de signaux causaux. La transformée de Laplace présente une méthode très puissante et très utile pour analyser des circuits. La transformation de Laplace fait passer d'une fonction $x(t)$ à valeurs réelles ou complexes d'une variable t réelle non négative à une fonction d'une variable complexe s . Elle permet aussi de représenter des fonctions particulières (distribution de Heaviside, distribution de Dirac, etc.) de manière très élégante. La transformation de Laplace permet de simplifier les calculs de la convolution, très utilisée dans l'analyse de circuits et très utile pour le design de filtres analogiques.

3.1.1 Définition

La transformée de Laplace bilatérale de $x(t)$ est définie par l'expression suivante :

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad (3.1)$$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

où s est une variable complexe. Nous pouvons aussi exprimer comme: $s = \sigma + j\omega$. Notez que la transformée de Fourier est donnée par la même équation, mais avec $s = j\omega$

3.1.2 Existence de la Transformation de Laplace (Region of Convergence ROC)

La région de convergence (ROC) d'une transformée de Laplace consiste en le sous-ensemble de C où $X(s)$ est bien définie au sens l'intégrale impropre converge, alors ROC indique quand la transformation de Laplace de $x(t)$ converge, si

$|X(s)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \right| < \infty$. La transformation employer $s = \sigma + j\omega$ et

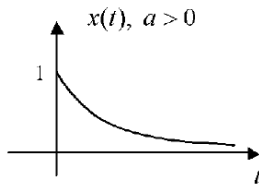
$|e^{j\omega}| = 1$, Laplace existe si :

$$|X(\sigma + j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} dt \right| < \infty \quad (3.2)$$

L'ensemble de valeurs de σ qui satisfait (3.2) est appelé le ROC, qui doit être spécifié avec pour que la transformation de Laplace soit complète.

Exemple:

Déterminer la transformée de Laplace de signal causal : $x(t) = e^{-at}u(t)$ $a > 0$



$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

Cette transformation de Laplace ne converge que pour les valeurs de s dans le demi-plan ouvert à droite de $s = -a$. Ce demi-plan est la région de convergence (ROC) de la transformée de Laplace. Il est décrit à la figure(3.1)

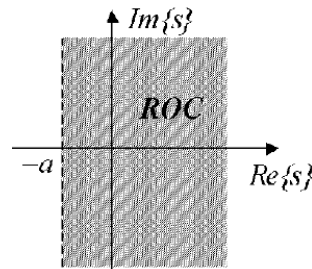
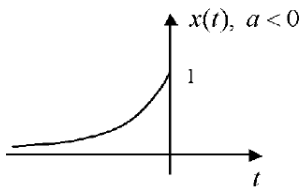


Figure (3.1): Région de convergence de $x(t) = e^{-at}u(t)$

Exemple:

Évaluer la transformée de Laplace de signal anti-causal : $x(t) = -e^{-at}u(-t)$ $a < 0$



$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

Cette transformation de Laplace ne converge que pour les valeurs de s dans le demi-plan ouvert à gauche de $s = -a$. Ce demi-plan est la région de convergence (ROC) de la transformée de Laplace. Il est décrit à la figure(3.2)

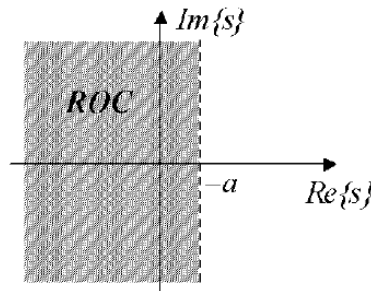
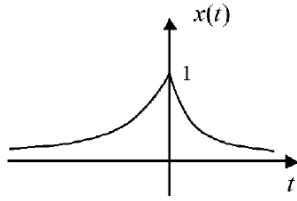


Figure (3.2): Région de convergence de $x(t) = e^{-at}u(-t)$

Exemple:

Évaluer la transformée de Laplace de signal bilatéral : $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t)$



$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} u(t) e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^t u(-t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+2)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{-(s-1)t} dt \\
 &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-1}, \quad \text{Re}\{s\} > -2 \quad \text{et} \quad \text{Re}\{s\} < 1 \\
 &= \frac{-3}{s^2 + s - 2}, \quad -2 < \text{Re}\{s\} < 1
 \end{aligned}$$

Le ROC est une bande verticale entre les parties réelles -2 et 1, comme illustré à la figure (3.3)

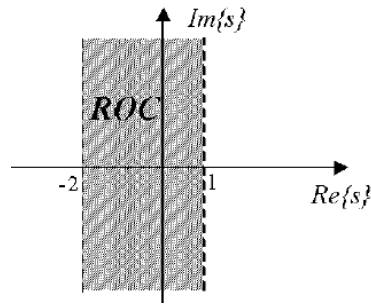


Figure (3.3): Région de convergence de $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^t u(-t)$

Exemple:

Évaluer la transformée de Laplace de signal causal : $x(t) = \sin(\beta t)u(t)$

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \int_0^{+\infty} \sin(\beta t) e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} (e^{+j\beta t} - e^{-j\beta t}) e^{-st} dt \\
 X(s) &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - j\beta} - \frac{1}{s + j\beta} \right] = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}, \quad \text{Re}\{s\} = \sigma > 0
 \end{aligned}$$

3.1.3 Propriétés de la transformée de Laplace :

a) Linéarité

La transformation de Laplace est linéaire si :

$$\begin{aligned}
 x(t) &\xrightarrow{L} X(s) \quad s \in \text{ROC}_x \quad \text{et} \quad y(t) \xrightarrow{L} Y(s) \quad s \in \text{ROC}_y, \text{ alors} \\
 ax(t) + by(t) &\xrightarrow{L} aX(s) + bY(s) \quad \text{avec} \quad \text{ROC}_x \cap \text{ROC}_y
 \end{aligned}$$

Exemple:

Déterminer la transformée de Laplace de la fonction $x(t) = \cos(\omega t)u(t)$. En appliquant la transformée de Laplace et la propriété de linéarité, on a :

$$\begin{aligned}
 L(\cos \omega t u(t)) &= X(s) = L\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2} L(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2} L(e^{-j\omega t}) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0
 \end{aligned}$$

b) Décalage temporel (time shifting)

si $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ $s \in ROC$, alors

$$x(t-t_0) \xrightarrow{L} e^{-t_0 s} X(s), s \in ROC$$

Exemple:

Considérons un système LTI (Linéaire Invariant en Temps) avec une réponse impulsionnelle

$$h(t) = u(t) - u(t-5)$$

$$H(s) = L\{h(t)\} = L\{u(t) - u(t-5)\} = L\{u(t)\} - L\{u(t-5)\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{e^{-5s}}{s}, ROC: \forall s$$

Notez que le ROC est l tout le plan complexe parce que la réponse impulsionnelle est de support fini. Il n'y a pas de pôle à $s = 0$.

c) Translation en fréquence:

La translation dans le domaine de fréquence correspond par une multiplication par un exponentiel dans le domaine du temps.

si $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$ $s \in ROC$, alors

$$e^{s_0 t} x(t) \xrightarrow{L} X(s - s_0), s \in ROC + \text{Re}\{s_0\}$$

Par exemple, nous savons que

$$\cos(\omega t).u(t) \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \text{Re}\{s\} > 0$$

$$\sin(\omega t).u(t) \xrightarrow{L} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{Re}\{s\} > 0$$

Utilisation de la propriété de la translation en fréquence, nous obtenons la transformation de Laplace des fonctions sinus et cosinus amorties comme:

$$e^{-at} \cos(\omega t).u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \text{Re}\{s\} > -a$$

$$e^{-at} \sin(\omega t).u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \text{Re}\{s\} > -a$$

d) Dérivées :

La dérivée première est obtenue par :

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s) - x(0)$$

Généralisation aux dérivées d'ordre n :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{L} s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2} \frac{dx(0)}{dt} \dots \frac{d^{n-1}x(0)}{dt^{n-1}}$$

Par exemple, nous pouvons utiliser cette propriété pour obtenir la transformation de Laplace du sinus à partir de celle du cosinus. Si $x(t) = \cos(\omega t).u(t)$, alors $x(0) = 1$ et $x'(t) = -\omega \sin(\omega t).u(t)$

$$L[\sin(\omega t).u(t)] = -\frac{1}{\omega} L[x'(t)] = -\frac{1}{\omega} [sX(s) + x(0)]$$

$$= -\frac{1}{\omega} \left[s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1 \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e) Changement d' échelle

Le changement d'échelle permet d'établir la relation entre $x(t)$ et $X(s)$ lorsque la variable de temps est multipliée par une constante .

$$\text{si } x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ } s \in \text{ROC} \text{ , alors}$$

$$x(\alpha t) \xrightarrow{L} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{s}{\alpha}\right), s \in \frac{\text{ROC}}{\alpha}$$

Par exemple, nous savons dans l'exemple 3.5 que $\cos \omega t . u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \text{ Re}\{s\} > 0$

Utilisation de la propriété Changement d' échelle ,on peut calculer :

$$\cos 2\omega t . u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{2} \frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + 4\omega^2} \text{ Re}\{s\} > 0$$

f) Théorème de la valeur initiale

On peut déterminer la valeur de la fonction $x(t)$ à l'origine si on connaît la limite à l'infini de sa transformée de Laplace.

$$\text{si } x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ } s \in \text{ROC} \text{ , alors}$$

$$x(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

g) Théorème de la valeur finale

On peut déterminer la valeur de la fonction $x(t)$ à l'infini si on connaît la limite pour $s=0$ de sa transformée de Laplace.

$$\text{si } x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ } s \in \text{ROC} \text{ , alors}$$

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

h) Transformée de Laplace et convolution

$$x(t) \xrightarrow{L} X(s) \text{ et } h(t) \xrightarrow{L} H(s) \text{ , alors}$$

$$x(t) * h(t) \xrightarrow{L} X(s) . H(s)$$

3.2 Quelques exercices

Exercice01: Calculer la transformée de Laplace des fonctions $x(t)$ suivantes:

$$1) \quad x(t) = \delta(t) + 2u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= L\{\delta(t)\} + 2L\{u(t)\} - 3L\{e^{-2t}u(t)\} \\ &= 1 + 2\frac{1}{s} - 3\frac{1}{s+2} = \frac{s^2 + s + 4}{s(s+2)} \end{aligned}$$

$$2) \quad x(t) = t^2 \sin(2t)u(t)$$

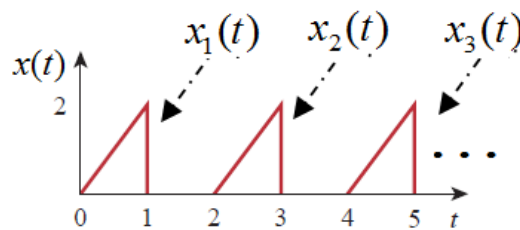
Nous savons que:

$$L[\sin(2t)u(t)] = \frac{2}{s^2 + 2^2} \quad \text{et} \quad L[t^n x(t)] = (-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= L[t^2 \sin(2t)u(t)] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{2}{s^2 + 4} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{-4s}{(s^2 + 4)^2} \right) = \frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3} \end{aligned}$$

Exercice02:

Calculez la transformation de Laplace de la fonction périodique $x(t)$ de la figure suivante:



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + \dots$$

$$\text{avec } x_1(t) = x(t)[u(t) - u(t-1)] = 2t[u(t) - u(t-1)] = 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + 2u(t-1)$$

$$\text{alors } X_1(s) = \frac{2}{s^2} (1 - e^{-s} - se^{-s})$$

$$x(t) = x_1(t) + x_1(t-2)u(t-2) + x_1(t-4)u(t-4) + \dots$$

$$X(s) = X_1(s) + e^{-2s}X_1(s) + e^{-4s}X_1(s) + \dots$$

$$X(s) = X_1(s)[e^{-2s} + e^{-4s} + \dots] = X_1(s) \cdot \frac{1}{(1 - e^{-2s})} = \frac{2}{s^2(1 - e^{-2s})} (1 - e^{-s} - se^{-s})$$

$$X(s) = \frac{X_1(s)}{(1 - e^{-Ts})}$$

La transformation de Laplace d'un signal périodique (T) $x(t)$ est donnée par : $X(s) = \frac{X_1(s)}{(1 - e^{-Ts})}$

3.3. Tableau de quelques transformée de Laplace

Le tableau suivant donne les transformées de Laplace de quelques signaux.

Signal $x(t)$	Transformée $X(s)$	Région de convergence
$\delta(t)$	1	$\forall s$
$u(t)$	$1/s$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$1/s$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$1/s^n$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$1/s^n$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$\delta(t-T)$	e^{-Ts}	$\forall s$

3.4 Transformation de Laplace Inverse

La transformée inverse de Laplace est en général donnée par l'intégrale suivante:

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (3.3)$$

Cette intégrale de contour, où le contour dans le ROC est parallèle à l'axe imaginaire et s'enroule à l'infini du côté qui inclut tous les pôles de $X(s)$ dans le contour, est rarement utilisée car nous traitons principalement de systèmes linéaires et les signaux standard dont les transformations de Laplace se trouvent dans les tables de Laplace.

De façon générale, il faut trouver la transformée inverse d'une fonction qui a la forme suivante :

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (3.4)$$

Les racines du polynôme au dénominateur $D(s)$ sont appelées les **pôles** : ce sont les valeurs de s où la fonction devient infinie. Les racines du polynôme au numérateur $N(s)$ sont appelées les **zéros** : ce sont les valeurs de s où la fonction devient nulle.

On peut représenter les pôles et zéros par un diagramme(plan complexe de Laplace). Ce plan complexe donne de l'information sur le type de système et le type de réponse du système, et peut être une façon rapide d'analyser un système. L'axe des x représente la partie réelle (σ ou $\text{Re}\{s\}$) du pole ou du zéros, et l'axe y représente la partie imaginaire ($j\omega$ ou $\text{im}\{s\}$) du pole ou du zéro.

On peut écrire l'expression de $X(s)$ sous une autre forme :

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.5)$$

où z_i est appelé un zéro de $X(s)$: ce sont les racines du numérateur, noté par **(0)**.

p_i est appelé un pole de $X(s)$: ce sont les racines du dénominateur , noté par **(X)**.

Les pôles en particulier, localisent les frontière de toutes les région de convergences (ROC) possible pour une expression $X(s)$, ces frontière sont des droites parallèle à l'axe imaginaire ($j\omega$) .

les régions de convergences (ROC) formées par ces frontières sont des bandes et demi-plans complexe

Les étapes pour trouver la transformation inverse de Laplace:

1. Décomposer $X(s)$ en fractions simples en utilisant l'expansion en fractions partielles.
 2. Puis trouver la transformée inverse de chaque terme d'après le tableau de transformation de Laplace.
- La technique de décomposition est un peu déferente selon le type de racines au dénominateur : réelles et distinctes, réelles et répétées, ou complexes.

3.4.1 Pôles simples

En supposant que $X(s)$ est une fonction rationnelle propre $\Rightarrow$ Degrés de $D(s) >$ Degrés de $N(s)$ ($n > m$)

Si $X(s)$ n'a que des pôles simples, alors $D(s)$ devient un produit de facteurs, de sorte que

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.6)$$

où $s = p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des pôles simples, et pour $p_i \neq p_j \quad \forall i \neq j$ (c'est-à-dire que les pôles sont distincts) . Nous utilisons une expansion en fraction partielle pour décomposer $X(s)$ de (3.6) comme suit :

$$X(s) = \frac{r_1}{(s - p_1)} + \frac{r_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{r_n}{(s - p_n)} \quad (3.7)$$

Les coefficients de l'expansion $r_1, r_2, \dots, r_n$ sont appelés résidus de $X(s)$.Par la technique des résidus, on procède de la manière suivante : pour déterminer r_i on multiplie les deux membres de l'équation par

$(s - p_i)$ puis on fait tendre $(s \rightarrow p_i)$. On procède de la même manière pour les autres coefficients.

Donc les résidus sont donnée par :

$$r_i = (s - p_i)X(s) \Big|_{s=p_i} \quad (3.8)$$

Enfin sachant que $L^{-1} \left\{ \frac{r_i}{(s - p_i)} \right\} = r_i e^{p_i t} u(t)$, on obtient la solution

$$x(t) = L^{-1} \{ X(s) \} = (r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t} + \dots + r_n e^{p_n t}) u(t) \quad (3.9)$$

3.4.2 Pôles multiple

Supposons que $X(s)$ a un pôle multiple d'ordre k en $(s = p_1)$, pôles. Ensuite, nous pouvons représenter $X(s)$ comme suit :

$$X(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)^k (s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (3.10)$$

p_1 : est un pôle d'ordre k

$p_2, \dots, p_n$ sont des pôles simple d'ordre 1

$$X(s) = \left[\frac{r_{11}}{(s - p_1)^k} + \frac{r_{12}}{(s - p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{r_{1k}}{(s - p_1)} \right] + \frac{r_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{r_n}{(s - p_n)} \quad (3.11)$$

Nous déterminons le coefficient de l'expansion r_{1i} ($i = 1, \dots, k$) à l'aide de l'expression :

$$\begin{aligned} r_{11} &= \lim_{s \rightarrow p_1} \left[(s - p_1)^k X(s) \right] \\ r_{12} &= \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} \left[(s - p_1)^k X(s) \right] \\ &\vdots \\ r_{1k} &= \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s - p_1)^k X(s) \right] \\ r_2 &= \lim_{s \rightarrow p_2} \left[(s - p_2) X(s) \right], \dots, r_n = \lim_{s \rightarrow p_n} \left[(s - p_n) X(s) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Une fois que nous obtenons les valeurs de r_{1i} ($i = 1, \dots, k$) par expansion de fraction partielle, on applique la transformation inverse

$$L^{-1} \left[\frac{1}{(s + a)^n} \right] = \frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!} u(t) \quad (3.13)$$

La transformée de Laplace inverse de $X(s)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= L^{-1}[X(s)] \\
 x(t) &= \left(L^{-1}\left[\frac{r_{11}}{(s-p_1)^k}\right] + L^{-1}\left[\frac{r_{12}}{(s-p_1)^{k-1}}\right] + \dots + L^{-1}\left[\frac{r_{1k}}{(s-p_1)}\right] \right) + L^{-1}\left[\frac{r_2}{(s-p_2)}\right] + \dots + L^{-1}\left[\frac{r_n}{(s-p_n)}\right] \quad (3.14) \\
 x(t) &= \left[\frac{r_{11}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_1 t} + \frac{r_{12}}{(k-2)!} t^{k-2} e^{p_2 t} + \dots + r_{1k} e^{p_1 t} \right] u(t) + (r_2 e^{p_2 t} + \dots + r_n e^{p_n t}) u(t)
 \end{aligned}$$

3.4.3 Exemples:

Exemple 1

Déterminer la transformation inverse de Laplace de $X(s) = \frac{2}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{6}{s^2+4} - \frac{5s}{s^2+25}$

La transformation inverse est donnée par:

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] - L^{-1}\left[\frac{5}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{6}{s^2+4}\right] - L^{-1}\left[\frac{5s}{s^2+25}\right]$$

$$x(t) = (2 - 5e^{-t} + 3\sin(2t) - 5\cos(5t))u(t) \quad \text{pour ROC: } \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

où le tableau de transformation a été consulté pour l'inverse pour chaque terme.

Exemple 2

Trouver la transformée de Laplace inverse $X(s) = \frac{10s^2 + 4}{s(s+1)(s+2)^2}$

$$X(s) = \left[\frac{r_{11}}{(s+2)^2} + \frac{r_{12}}{(s+2)} \right] + \frac{r_2}{s} + \frac{r_3}{(s+1)}$$

$$r_{11} = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)^2 X(s)] = 22$$

$$r_{12} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} [(s+2)^2 X(s)] = 13$$

$$r_2 = \lim_{s \rightarrow 0} [sX(s)] = 1$$

$$r_3 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)X(s)] = -14$$

$$X(s) = \frac{22}{(s+2)^2} + \frac{13}{(s+2)} + \frac{1}{s} + \frac{-14}{(s+1)}$$

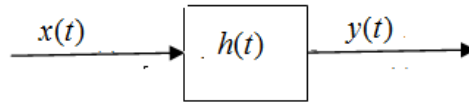
En prenant la transformation inverse de chaque terme, on obtient

$$x(t) = (22te^{-2t} + 13e^{-2t} + 1 - 14e^{-t})u(t) \quad \text{avec ROC: } \operatorname{Re}\{s\} > 0 \quad (\text{système causal})$$

$$x(t) = (-22te^{-2t} - 13e^{-2t} - 1 + 14e^{-t})u(-t) \quad \text{avec ROC: } \operatorname{Re}\{s\} < -2 \quad (\text{système anti-causal})$$

Exemple 3

Un système LTI est décrit par sa fonction du transfert : $H(s) = \frac{-2s^2 - 9s + 11}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$

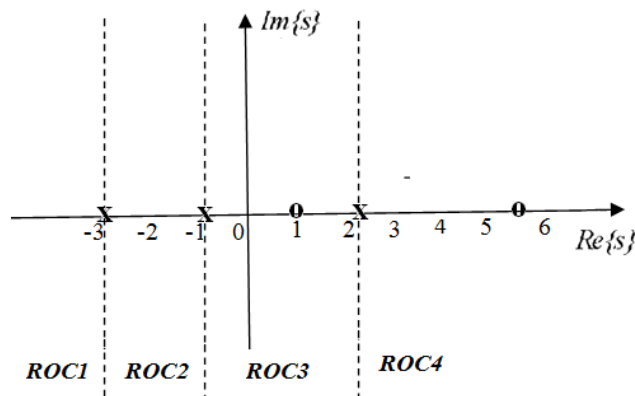


- 1) Indiquer les pôles et les zéros de $H(s)$, et représentez les dans le plan complexe
- 2) Donnez toutes les régions de convergence (ROC) possible de $H(s)$.
- 3) Pour chaque région de convergence donnez l'expression de $h(t)$ la transformée de Laplace inverse de $H(s)$

Solution

$$H(s) = \frac{-2s^2 - 9s + 11}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6} = \frac{-2(s-1)(s-11/2)}{(s+3)(s+1)(s-2)}$$

- 1) zéros: $z_1 = 1, z_2 = 11/2$, pôles: $p_1 = -3, p_2 = -1, p_3 = 2$



- 2) Les régions de convergence possibles:

$$\begin{aligned} \text{ROC1: } & \text{Re}\{s\} < -3 \\ \text{ROC2: } & -3 < \text{Re}\{s\} < -1 \\ \text{ROC3: } & -1 < \text{Re}\{s\} < 2 \\ \text{ROC4: } & \text{Re}\{s\} < 2 \end{aligned}$$

- 3) L'expression de $h(t)$ la transformée de Laplace inverse de $H(s)$

$$H(s) = \frac{-2(s-1)(s-11/2)}{(s+3)(s+1)(s-2)} = \frac{r_1}{(s+3)} + \frac{r_2}{(s+1)} + \frac{r_3}{(s-2)} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \lim_{s \rightarrow -3} [(s+3)H(s)] = 2 \\ r_2 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)H(s)] = -3 \\ r_3 = \lim_{s \rightarrow 2} [(s-2)H(s)] = -1 \end{cases}$$

Finalement :

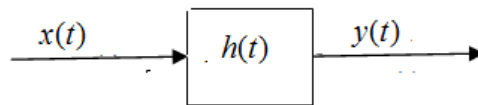
Pour ROC1: $h(t) = (e^{2t} - 2e^{-3t} + 3e^{-t})u(-t)$

Pour ROC2: $h(t) = (e^{2t} - 3e^{-t})u(-t) + 2e^{-3t}u(t)$

Pour ROC3: $h(t) = e^{2t}u(-t) + (2e^{-3t} - 3e^{-t})u(t)$ (Système Stable)

Pour ROC4: $h(t) = (-e^{2t} + 2e^{-3t} - 3e^{-t})u(t)$ (Système Causal)

3.5 Notion de stabilité et causalité d'un système Linéaire invariant (LTI)



$$\text{Domaine Temporelle: } y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

$$\text{Domaine Fréquentielle: } Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$\text{Domaine de Laplace: } Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

- Un système linéaire invariant (LTI) est **stable** si et seulement si la réponse fréquentielle existe $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$, c'est-à-dire que l'axe imaginaire ($j\omega$) est inclus dans la région de convergence (ROC) de sa fonction de transfert $H(s)$.
- Un système linéaire invariant (LTI) de réponse impulsionnelle $h(t)$ est **causal** si et seulement si $\forall t < 0, h(t) = 0 \Rightarrow \text{ROC: } \text{Re}\{s\} > \alpha$ avec α : c'est le plus grand pôle
- Pour un système Linéaire invariant (LTI) causal soit stable il faut et il suffit que tous ses pôles soient de partie réelle strictement négative.

3.6 Filtrage analogique

3.6.1 Définitions

Le filtrage est une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques, qui modifient son spectre de fréquence et/ou sa phase et donc sa forme temporelle. Il peut s'agir soit : d'éliminer ou d'affaiblir des fréquences parasites indésirables et d'isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles. Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert $H(\omega) = V_{out}/V_{in}$ (ou $H(j\omega) = H(s) = V_{out}/V_{in}$) entre la tension d'entrée V_{in} et la tension de sortie V_{out} du filtre. Un filtre est un filtre passif s'il est constitué uniquement d'éléments passifs R, L, et C. On dit qu'il est un filtre actif s'il est constitué d'éléments actifs (tels que transistors et amplificateur opérationnelle AOP) en plus des éléments passifs R, L et C. Les filtres actifs peuvent fournir un gain d'amplificateur en plus de même réponse en fréquence que les filtres

RLC. Les filtres actifs peuvent être associés à des amplificateurs buffer (suiveurs de tension) pour isoler chaque étape du filtre des effets d'impédance de source et de charge.

Les filtres passifs ou actifs sont classés en quatre catégories : passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande. La Figure(3.4) illustre le gabarit du filtre idéal pour chacune de ces catégories.

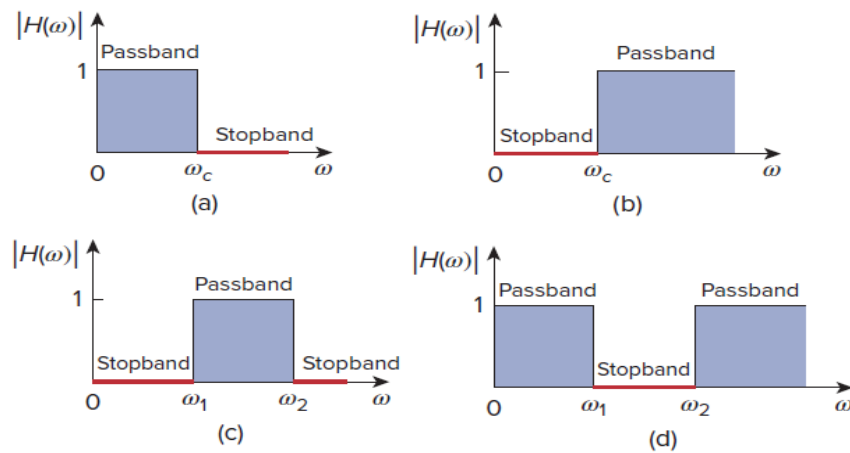


Figure (3.4): Réponse fréquentielle idéale de quatre types de filtres: (a) filtre passe-bas, (b) filtre passe-haut, (c) filtre passe-bande, (d) filtre coupe-bande.

ω_c s'appelle la fréquence de coupure. La bande passante est l'intervalle de fréquence $[0, \omega_c]$. La bande coupée est constituée de toutes les fréquences supérieures à ω_c .

Résumé des caractéristiques des filtres idéaux.

Type de filtre	$ H(0) $	$ H(\infty) $	$ H(\omega_c) $ ou $ H(\omega_0) $
filtre passe-bas	1	0	$1/\sqrt{2}$
filtre passe-haut	0	1	$1/\sqrt{2}$
filtre passe-bande	0	0	1
filtre coupe-bande	1	1	0

ω_c c'est la fréquence de coupure pour les filtres passe-bas et passe-haut; ω_0 est la fréquence centrale des filtres passe-bande et coupe-bande.

3.6.2 Les Filtres passe-bas du premier ordre

Un filtre passe bas laisse passer les basses fréquences de la tension continue DC ($\omega = 0$) à la fréquence de coupure $\omega = \omega_c$ et arrête les fréquences élevées $\omega \gg \omega_c$. La fréquence de coupure ω_c est la fréquence à laquelle la fonction de transfert $H(\omega)$ chute jusqu'à 70,71% de sa valeur maximale (ou de

facteur $1/\sqrt{2}$ ou -3dB ($|H(\omega_c)| = 0.707 H_{Max}$). Elle est également considérée comme la fréquence à laquelle la puissance dissipée dans un circuit est égale à la moitié de sa valeur maximale

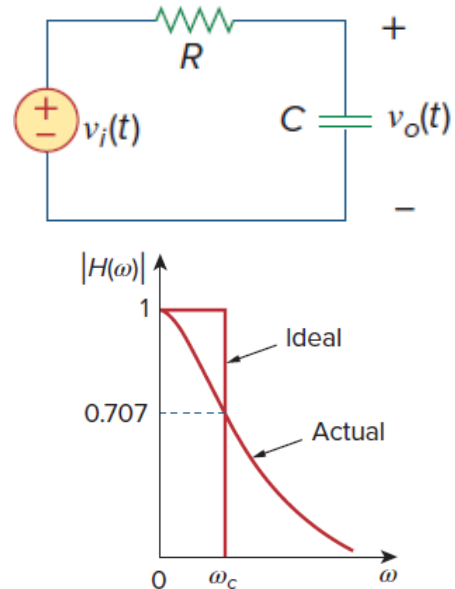
3.6.2.1 Réalisation par un filtre passif

$$H(\omega) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \text{ et } \angle H(\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

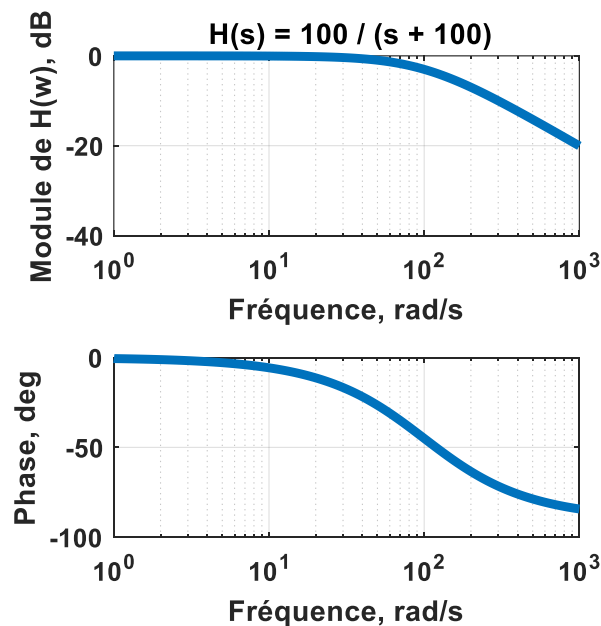
$$|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c RC)^2}} = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$



La forme de la fonction de transfert en dB : $H_{dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c} \right|$

on pose $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$, on obtient :



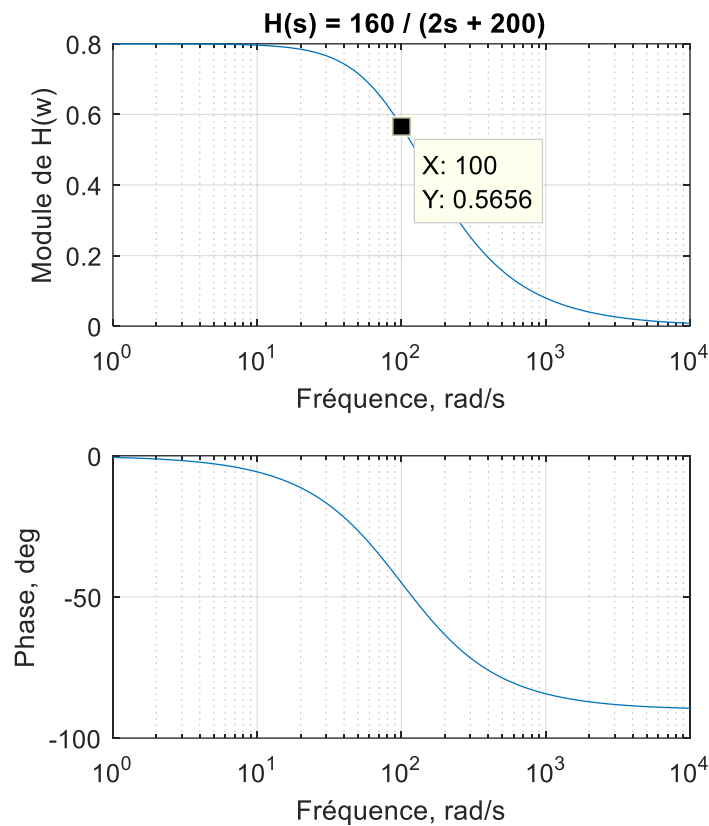
Exemple:

On considère un filtre dont la fonction de transfert est donnée par : $H(s) = \frac{160}{2s + 200}$

- 1) Quelle est la nature du filtre ?
- 2) Quel est le gain maximum?
- 3) Que vaut la fréquence de coupure à -3dB?
- 4) Quelle est la bande passante?

1) C'est un Filtre passe-bas car:

Nous avons : $|H(\omega)| = \left| \frac{160}{2j\omega + 200} \right| = \frac{80}{\sqrt{\omega^2 + 10^4}}$ et $|H(0)| = 0.8$, $|H(\infty)| \rightarrow 0$



2) Le gain maximum est donnée par : $|H_{\max}(0)| = |H(0)| = 0.8$

3) La fréquence de coupure est donnée par :

$$|H(\omega_c)| = \left| \frac{160}{2j\omega_c + 200} \right| = \frac{80}{\sqrt{\omega_c^2 + 10^4}} = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}} = \frac{0.8}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = 100 \text{ rad/s}$$

4) La bande passante : B=100rad/s

3.6.2.2 Réalisation par un filtre actif

$$C_f \rightarrow Z_{Cf} = 1/Cs \quad \& \quad Z_f = Z_{Cf} \parallel R_f \quad \& \quad Z_i = R_i$$

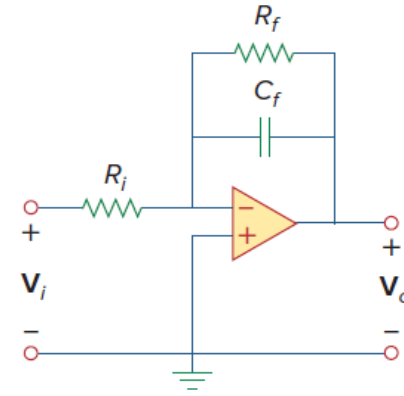
$$H(s) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = -\frac{Z_{Cf}}{Z_i} = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{1 + C_f R_f s}$$

$$H(\omega) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1}{C_f R_f j\omega + 1} = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{R_f/R_i}{\sqrt{1 + (\omega C_f R_f)^2}} \quad \text{et} \quad \angle H(\omega) = \tan^{-1}(\omega C_f R_f)$$

$$|H(\omega_c)| = \frac{R_f/R_i}{\sqrt{1 + (\omega_c C_f R_f)^2}} = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{C_f R_f}$$

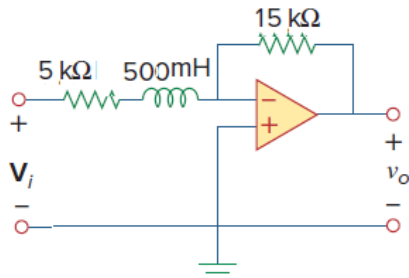
$$H(s) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{1/C_f R_f}{s + 1/C_f R_f} = -\frac{R_f}{R_i} \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$



Nous remarquons que la fonction de transfert de filtre passif est similaire à la fonction de transfert de filtre actif, sauf que là est un gain basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) ou continu DC de $-R_f/R_i$. Aussi, la fréquence de coupure ω_c est $1/C_f R_f$, qui ne dépend pas de R_i . Cela signifie que plusieurs entrées avec différents R_i pourraient être additionnées si nécessaire, et que la fréquence de coupure resterait la même pour chaque entrée.

Exemple:

Trouver la fonction de transfert, le type de filtre et la fréquence de coupure du filtre suivant :



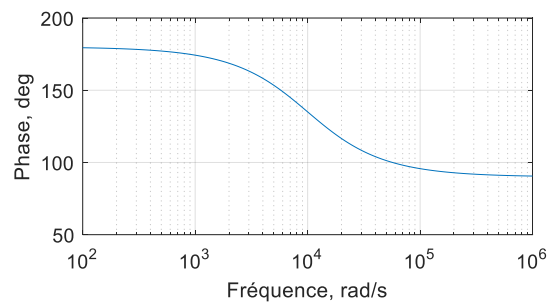
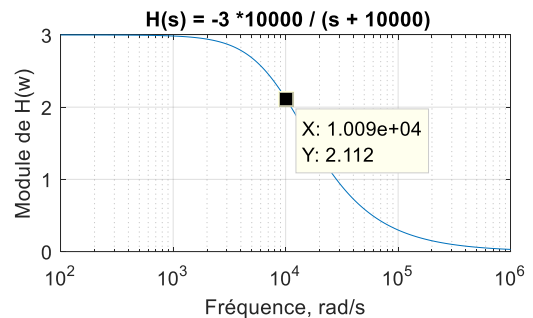
$$H(s) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = -\frac{Z_f}{Z_i} \quad \text{avec} \quad Z_f = 15k\Omega$$

$$Z_i = 5000 + (0.5)s$$

$$H(s) = -\frac{15000}{5000 + 0.5s} = -3 \frac{10000}{s + 10000} = -3 \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

donc la fréquence de coupure : $\omega_c = 10 \text{ krad/s}$ et

c'est un filtre passe-bas



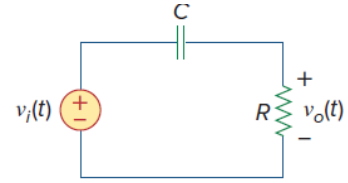
3.6.2 Les Filtre passe-haut du premier ordre

Un filtre passe-haut est conçu pour passer toutes les fréquences au-dessus de sa fréquence de coupure $\omega = \omega_c$.

3.6.2.1 Réalisation par un filtre passif

$$H(\omega) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

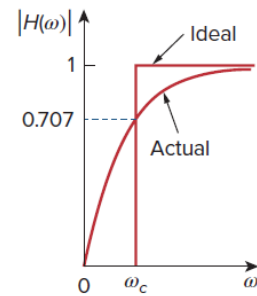
$$|H(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \text{ et } \angle H(\omega) = \pi/2 - \tan^{-1}(\omega RC)$$



Notez que : $|H(0)| = 0$, $|H(\infty)| = 1$

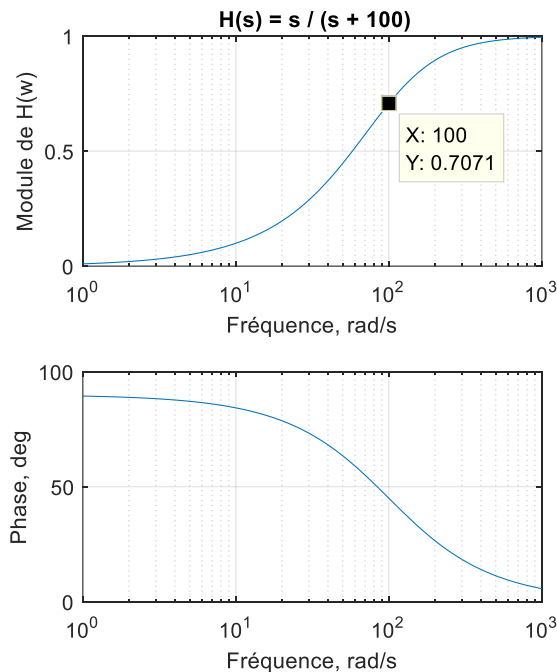
$$|H(\omega_c)| = \frac{\omega_c RC}{\sqrt{1 + (\omega_c RC)^2}} = \frac{|H(\infty)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC} = \frac{s}{s + \omega_c}$$



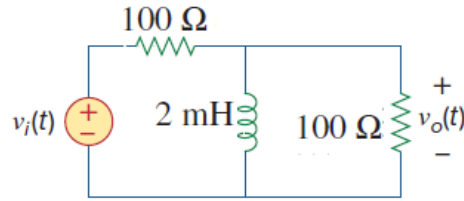
La forme de la fonction de transfert en dB : $H_{dB} = 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{j\omega}{j\omega + \omega_c} \right|$

on pose $\omega_c = 100 \text{ rad/s}$, on obtient :



Exemple:

Pour le circuit suivant :



1) Obtenez la fonction de transfert $H(s) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)}$

2) Identifiez le type de filtre représenté par le circuit et déterminez la fréquence de coupure.

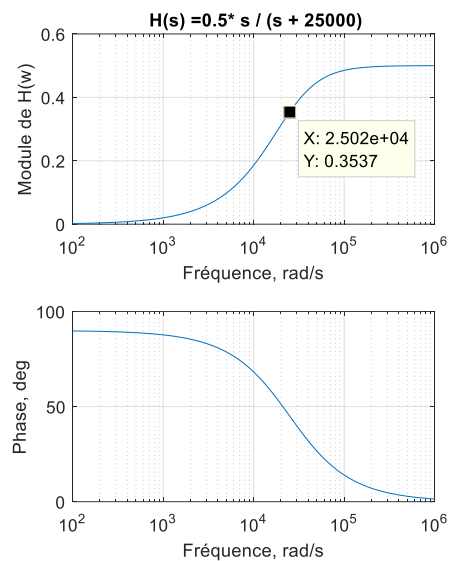
$$L = 2 \times 10^{-3} H \rightarrow Z_L = 2 \times 10^{-3} s \quad \& \quad Z = Z_L \parallel R \quad \& \quad R = 100 \Omega$$

$$H(s) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = \frac{Z}{Z + 100} = 0.5 \frac{s}{s + 25000}$$

$$H(\omega) = 0.5 \frac{j\omega}{j\omega + 25000} = |H(\omega)| e^{j\angle H(\omega)}$$

$$|H(0)| = 0 \quad \& \quad |H(\infty)| = 0.5 \Rightarrow \text{C'est un filtre passe-haut}$$

$$|H(\omega_c)| = 0.5 \left| \frac{j\omega}{j\omega + 25000} \right| = \frac{|H(\infty)|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = 25 \text{krad} / s$$



3.6.2.2 Réalisation par filtre actif

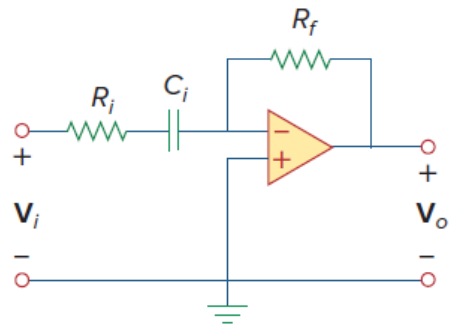
$$C_i \rightarrow Z_c = 1/C_i s \quad \& \quad Z_i = Z_c + R_i \quad \& \quad Z_f = R_f$$

$$H(s) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = -\frac{Z_f}{Z_i} = -\frac{C_i R_f s}{1 + C_i R_i s}$$

$$H(\omega) = -\frac{C_i R_f j\omega}{C_i R_i j\omega + 1} = \frac{C_i R_f \omega}{\sqrt{(C_i R_i \omega)^2 + 1}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(C_i R_i \omega)\right)}$$

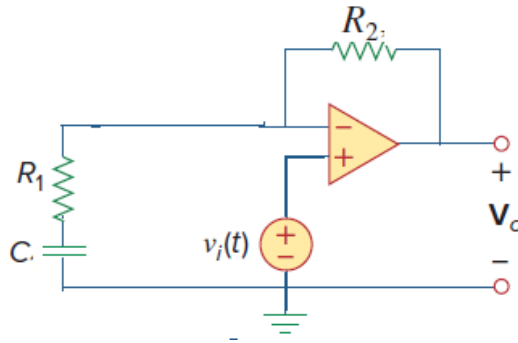
Ceci est similaire à filtre passif passe-haut, sauf que dans les très hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$), le gain a tend vers $-R_f/R_i$. La fréquence de coupure est

$$\omega_c = 1/R_i C_i \text{ et } H(s) = -\frac{R_f}{R_i} \frac{s}{s + \omega_c}$$



Exemple:

Pour le circuit amplificateur opérationnel (AOP) du filtre suivant :



- (a) Obtenez une expression pour $H(\omega) = v_o(t)/v_i(t)$.
- (b) Tracer le module et la phase de $H(\omega)$, étant donné que $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 4k\Omega$ et $C = 1mF$
- (c) De quel type de filtre s'agit-il? Quel est son gain maximum?

(a) D'après la loi des nœuds on a :

$$\frac{v_o}{R_1 + 1/j\omega C} + \frac{v_i - v_o}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{v_o(t)}{v_i(t)} = \frac{1 + j\omega(R_1 + R_2)C}{1 + j\omega R_1 C}$$

(b) Le Module

c

$$|H(0)| = 1 \quad \text{et} \quad |H(\infty)| = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

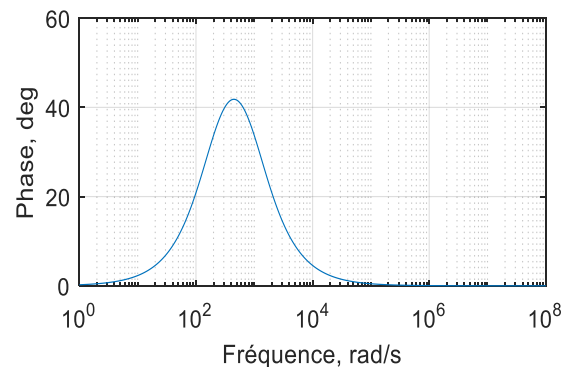
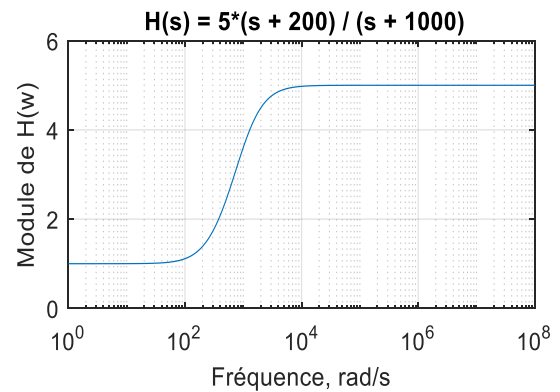
La Phase

$$\angle H(\omega) = \tan^{-1}(\omega(R_1 + R_2)C) - \tan^{-1}(\omega R_1 C)$$

c) pour les valeurs $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 4k\Omega$ et $C = 1mF$

C'est un filtre passe-haut et le gain maximum est

donné par $H_{Max} = 5$



3.6.3 Les filtres de Butterworth..

Les filtres de Butterworth (Maximally Flat) présentent le gain le plus constant possible dans la bande passante. Le carré du module de cette réponse fréquentielle d'ordre N est définie par l'expression :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}} \quad (3.15)$$

Le paramètre ω_c donne la valeur de la variable pour laquelle la fonction prend la valeur $1/\sqrt{2}$. La figure (3.5) représente cette fonction pour diverses valeurs de n .

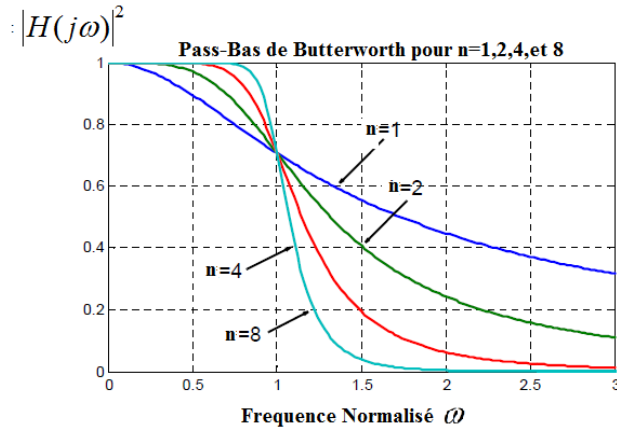


Figure (3.5): Fonction de Butterworth .

Par extension analytique on peut écrire en prenant $\omega_c = 1$:

$$\begin{aligned} |F(\omega)|^2 &= |H(j\omega)|^2 = H(s).H(-s) = \frac{1}{1 + (\omega)^{2N}} \\ &= H(s).H(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + (s^2)^N} \end{aligned}$$

Les pôles de cette fonction sont sur le cercle unité ; par exemple pour n impair on peut écrire :

$$H(s).H(-s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{2N} (s - e^{j\pi \frac{k}{N}})}$$

En affectant à $H(s)$ les pôles qui sont à gauche de l'axe imaginaire afin d'aboutir à un filtre stable, et après regroupement pour obtenir des cellules du premier ou de second ordre à coefficients réels, il vient :

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{1}{s^2 + 2 \cos(\pi \frac{k}{N})s + 1}$$

De la même manière on obtient pour n pair :

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{s^2 + 2 \cos(\pi \frac{(2k-1)}{2N})s + 1}$$

Ordre du filtre:

L'ordre N (L'ordre du filtre N doit être une valeur entière.) se calcule à partir du gabarit du filtre. L'atténuation maximale doit être inférieure à $A_{\max}$ (en dB) dans la bande passante à une certaine pulsation spécifiée ω_p et supérieure à $A_{\min}$ (en dB) dans la bande coupée ou atténuée à une certaine pulsation spécifiée ω_s :

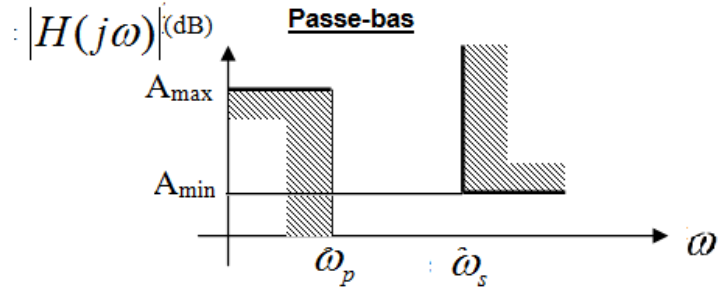


Figure (3.6): Gabarit d'un filtre Passe-bas de Butterworth .

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} -10 \log [|H(\omega_p)|^2] \leq A_{\max} \\ -10 \log [|H(\omega_s)|^2] \geq A_{\min} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H(\omega_p)|^2 \geq 10^{-0.1 A_{\max}} \\ |H(\omega_s)|^2 \leq 10^{-0.1 A_{\min}} \end{cases} \Rightarrow \\
 & \begin{cases} \frac{1}{1 + (\omega_p / \omega_c)^{2N}} \geq 10^{-0.1 A_{\max}} \\ \frac{1}{1 + (\omega_s / \omega_c)^{2N}} \leq 10^{-0.1 A_{\min}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + (\omega_p / \omega_c)^{2N} \leq 10^{0.1 A_{\max}} \\ 1 + (\omega_s / \omega_c)^{2N} \geq 10^{0.1 A_{\min}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\frac{\omega_p}{\omega_c})^{2N} \leq 10^{0.1 A_{\max}} - 1 \\ (\frac{\omega_s}{\omega_c})^{2N} \geq 10^{0.1 A_{\min}} - 1 \end{cases} \\
 & \Rightarrow 2N \log(\frac{\omega_p}{\omega_s}) \geq \log \left[(10^{0.1 A_{\max}} - 1) / (10^{0.1 A_{\min}} - 1) \right] \Rightarrow N \geq \frac{\log_{10} \left[\frac{10^{0.1 A_{\max}} - 1}{10^{0.1 A_{\min}} - 1} \right]}{2 \log_{10}(\frac{\omega_p}{\omega_s})}
 \end{aligned}$$

les pôles du filtre Butterworth sont situés dans un cercle de rayon unité. Nous choisirons donc comme ordre du filtre le premier entier supérieur ou égal à cette valeur de n . Les éléments constitutifs g_k d'un filtre normalisé passe bas de la figure (3.5) se calculent aisément à partir de la formule de récurrence suivante :

$$g_k = 2 \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right) \quad k = 1, \dots, N$$

Exercices:

Exercice01

Pour le système ayant la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{7s^4 - s^2 + 3s - 1}{s^4 - 1}$$

1. Évaluer les pôles et les zéros de $H(s)$.
2. Spécifier les différentes régions de convergences (ROC) possibles de $H(s)$.
3. Évaluer la réponse impulsionnelle en supposant que $h(t)$.
 - i) le système est causal,
 - ii) le système est anti-causal,
 - iii) la réponse impulsionnelle est de deux cotés (Non-Causal).
4. Évaluer la réponse en fréquence $H(\omega)$ du système si elle existe, sinon expliquer pourquoi pas.

Solution Exercice01

1. Les pôles et le zéros de $H(s)$ correspondent respectivement aux valeurs de s pour lesquelles $X(s)$ n'est pas définie et pour lesquelles $H(s)$ s'annule.

Les pôles sont données par :

$$s^4 = 1 = e^{j2\pi k} \text{ i.e } s = e^{j2\pi k/4} = e^{j\pi k/2} \\ \Rightarrow p_1 = 1, p_2 = j, p_3 = -1 \text{ et } p_4 = -j$$

2. Les régions de convergence possibles sont délimitées par les droites parallèles à l'axe imaginaire et passant par les pôles, soit ici les droites $\text{Re}(s) = \sigma = -1$, et $\text{Re}(s) = \sigma = 1$.

Il y a donc trois régions de convergence (ROC) possibles :

$$\text{ROC1: } \text{Re}(s) < -1$$

$$\text{ROC2: } -1 < \text{Re}(s) < 1$$

$$\text{ROC3: } \text{Re}(s) > 1$$

3. La première étape pour trouver $x(t)$ est de décomposer $X(s)$ en fractions partielles. En utilisant les techniques classiques, on trouve :

$$H(s) = \frac{7s^3 - s^2 + 3s - 1}{s^4 - 1} = \frac{2}{(s-1)} + \frac{3}{(s+1)} + \frac{1}{(s-j)} + \frac{1}{(s+j)}$$

i) Pour le système est causal,

ROC3: $\text{Re}(s) = \sigma > 1 \Rightarrow h(t) = (2e^t + 3e^{-t} + 2\cos(t))u(t)$ ($u(t)$ est l'échelon unité)

ii) le système est anti-causal,

$$\text{ROC1: } \text{Re}(s) = \sigma < -1 \Rightarrow h(t) = -(2e^t + 3e^{-t} + 2\cos(t))u(-t)$$

iii) la réponse impulsionnelle est de deux cotés

Nous avons deux cas :

$$-1 < \text{Re}(s) < 0 \Rightarrow h(t) = (-2e^t - 2\cos(t))u(-t) + 3e^{-t}u(t)$$

$$0 < \text{Re}(s) < 1 \Rightarrow h(t) = -2e^t u(-t) + (3e^{-t} + 2\cos(t))u(t)$$

4. La transformée de Fourier $H(j\omega)$ existe en deux cas :

Cas01:

$$\begin{aligned} -1 < \text{Re}(s) < 0 \Rightarrow H(j\omega) &= TF \left[(-2e^t - 2\cos(t))u(-t) + 3e^{-t}u(t) \right] \\ &= \frac{-2}{j\omega - 1} - 2TF \{ \cos(t)u(-t) \} + \frac{3}{j\omega + 1} \end{aligned}$$

Cas02:

$$\begin{aligned} 0 < \text{Re}(s) < 1 \Rightarrow H(j\omega) &= TF \left[-2e^t u(-t) + (3e^{-t} + 2\cos(t))u(t) \right] \\ &= \frac{-2}{j\omega - 1} + 2TF \{ \cos(t)u(t) \} + \frac{3}{j\omega + 1} \end{aligned}$$

avec

$$TF \{ \cos(t) \} = \pi (\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1))$$

$$TF \{ u(t) \} = TF \{ u(-t) \} = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

$$TF \{ \cos(t)u(t) \} = \pi \left[\frac{1}{j(\omega - 1)} + \pi \delta(\omega - 1) \right] + \pi \left[\frac{1}{j(\omega + 1)} + \pi \delta(\omega + 1) \right]$$

Exercice02

Pour le système ayant la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{s}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

1. Évaluer les pôles et les zéros de $H(s)$.
2. Spécifier les différentes régions de convergences (ROC) possibles de $H(s)$.
3. Évaluer la réponse impulsionnelle en supposant que $h(t)$.
 - i) le système est causal,
 - ii) le système est anti-causal,
4. Donner la région de convergence (ROC) pour le système stable.
5. Trouver l'expression de la réponse fréquentielle $H(\omega)$ du filtre.

Solution Exercice02

1. Les pôles et le zéros de $X(s)$ correspondent respectivement aux valeurs de s pour lesquelles $X(s)$ n'est pas définie et pour lesquelles $X(s)$ s'annule.

Les pôles sont données par :

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

$$s^2 + 2s + 2 = 0 \Rightarrow p_1 = -1 - j, p_2 = -1 + j.$$

Le numérateur de $H(s)$ ne dépend pas de s alors $H(s)$ n'a aucun zéros.

2. Les régions de convergence possibles sont délimitées par les droites parallèles à l'axe

imaginaire et passant par les pôles, soit ici les droites $\text{Re}(s) = \sigma = -1$.

Il y a donc deux régions de convergence (ROC) possibles :

$$\text{ROC1 : } \text{Re}(s) < -1$$

$$\text{ROC2 : } \text{Re}(s) > -1$$

3. La première étape pour trouver $x(t)$ est de décomposer $X(s)$ en fractions partielles. En utilisant les techniques classiques, on trouve :

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{-1/2j}{(s+1+j)} + \frac{1/2j}{(s+1-j)}$$

i) Pour le système est causal,

$$\text{ROC2 : } \text{Re}(s) = \sigma > -1 \Rightarrow h(t) = \left(-\frac{1}{2j} e^{-(1+j)t} + \frac{1}{2j} e^{-(1-j)t} \right) u(t) = e^{-t} \sin(t) u(t)$$

ii) le système est anti-causal,

$$\text{ROC1 : } \text{Re}(s) = \sigma < -1 \Rightarrow h(t) = -\left(-\frac{1}{2j} e^{-(1+j)t} + \frac{1}{2j} e^{-(1-j)t} \right) u(-t) = -e^{-t} \sin(t) u(-t)$$

4. La région de convergence (ROC) pour le système stable.

Le système est stable pour la région de convergence (ROC2: $\text{Re}(s) = \sigma > -1$) car l'axe imaginaire ($j\omega$) est inclus dans la région de convergence ROC2

5. L'expression de la réponse fréquentielle $H(\omega)$ du filtre.

Le système est admet une transformée de Fourier pour la région de convergence (ROC2: $\text{Re}(s) = \sigma > -1$) car l'axe imaginaire ($j\omega$) est inclus dans la région de convergence ROC2

$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega + 2}$$

Exercice03

On considère un signal $x(t)$ et on désigne par $X(s)$ la transformée de Laplace de $x(t)$. L'expression analytique de $X(s)$ est la suivante :

$$X(s) = \frac{4s-1}{2s^2-s-1}$$

1. Trouvez les pôles et les zéros de $X(s)$ et représentez-les dans le plan complexe.
2. Déduisez-en toutes les régions de convergence (ROC) possibles de $X(s)$.
3. Pour chaque région de convergence possible, donnez l'expression analytique de $x(t)$.

Solution Exercice03

1. Les pôles et les zéros de $X(s)$ correspondent respectivement aux valeurs de s pour lesquelles $X(s)$ n'est pas définie et pour lesquelles $X(s)$ s'annule. Afin de déterminer ces valeurs, la première étape est de factoriser le numérateur et le dénominateur de $X(s)$ pour effectuer de possibles simplifications (mise de $X(s)$ sous forme irréductible). On a :

$$X(s) = \frac{4s-1}{2s^2-s-1} = \frac{4s-1}{2(s-1)(s+1/2)}$$

On ne peut effectuer aucune simplification.

$X(s)$ présente donc un zéro en $s = 1/4$ et deux pôles en $s = -1/2$ et $s = 1$.

Une représentation des pôles, des zéros et des trois régions de convergence possibles est donnée à la figure 2.

plan complexe:

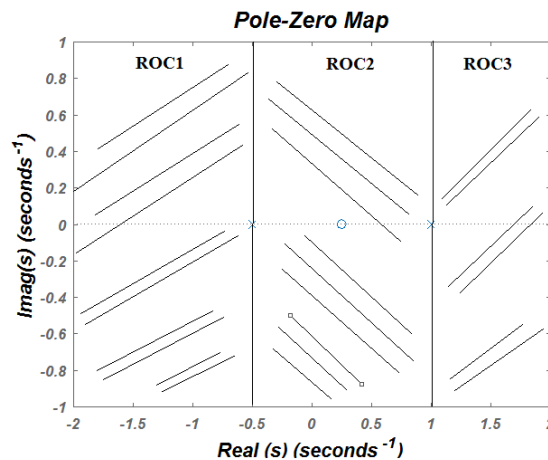


Fig. 2 .Pôles (X), zéros (O) et régions de convergence possibles de $X(s)$.

2. **Les régions de convergence possibles** sont délimitées par les droites parallèles à l'axe imaginaire et passant par les pôles, soit ici les droites $\text{Re}(s) = \sigma = -1/2$, et $\text{Re}(s) = \sigma = 1$.

Il y a donc trois régions de convergence (ROC) possibles :

ROC1 : $\text{Re}(s) \leq \sigma < -1/2$

ROC2 : $-1/2 < \text{Re}(s) < 1$

ROC3 : $\text{Re}(s) > 1$

3. La première étape pour trouver $x(t)$ est de décomposer $X(s)$ en fractions partielles. En utilisant les techniques classiques, on trouve :

$$X(s) = \frac{4s-1}{2s^2-s-1} = \frac{4s-1}{2(s-1)(s+1/2)} = \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1/2)}$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse de termes de la forme $1/(s-a)$, on peut dresser le tableau suivant

ROC1 : $\text{Re}(s) \leq \sigma < -1/2$

$$x(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1/2)} \right) = -e^t u(-t) - e^{-\frac{t}{2}} u(-t)$$

(L^{-1} : Transformée de Laplace inverse)

ROC2 : $-1/2 < \text{Re}(s) < 1$

$$x(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1/2)} \right) = -e^t u(-t) + e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

ROC3 : $\text{Re}(s) > 1$

$$x(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1/2)} \right) = e^t u(t) + e^{-\frac{t}{2}} u(t)$$

Exercice04

Un système linéaire invariant en temps est décrit par sa fonction du transfert :

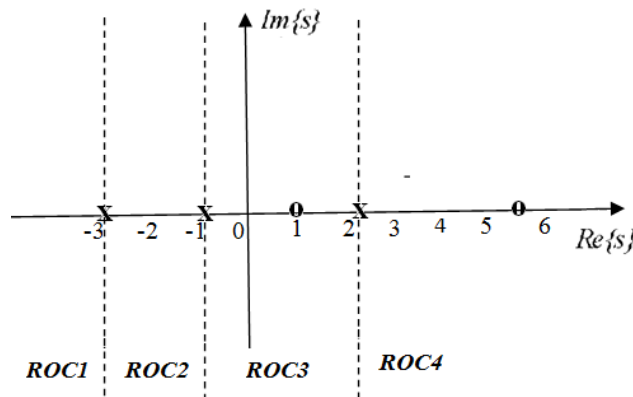
$$H(s) = \frac{-2s^2 - 9s + 11}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$$

1. Déterminer les pôles et les zéros de $H(s)$ et les représenter sur le plan complexe.
2. Identifier les différentes régions de convergence (ROC) possibles pour $H(s)$.
3. Pour chaque région de convergence donnez l'expression de $h(t)$ la transformée de Laplace inverse de $H(s)$.

Solution Exercice04

$$H(s) = \frac{-2s^2 - 9s + 11}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6} = \frac{-2(s-1)(s-11/2)}{(s+3)(s+1)(s-2)}$$

- 1) zéros: $z_1 = 1$, $z_2 = 11/2$, pôles: $p_1 = -3$, $p_2 = -1$, $p_3 = 2$



- 2) Les régions de convergence possibles:

$$ROC1: \quad \text{Re}\{s\} < -3$$

$$ROC2: \quad -3 < \text{Re}\{s\} < -1$$

$$ROC3: \quad -1 < \text{Re}\{s\} < 2$$

$$ROC4: \quad \text{Re}\{s\} < 2$$

- 3) L'expression de $h(t)$ la transformée de Laplace inverse de $H(s)$

$$H(s) = \frac{-2(s-1)(s-11/2)}{(s+3)(s+1)(s-2)} = \frac{r_1}{(s+3)} + \frac{r_2}{(s+1)} + \frac{r_3}{(s-2)} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \lim_{s \rightarrow -3} [(s+3)H(s)] = 2 \\ r_2 = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)H(s)] = -3 \\ r_3 = \lim_{s \rightarrow 2} [(s-2)H(s)] = -1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\text{Pour ROC1: } h(t) = (e^{2t} - 2e^{-3t} + 3e^{-t})u(-t)$$

$$\text{Pour ROC2: } h(t) = (e^{2t} - 3e^{-t})u(-t) + 2e^{-3t}u(t)$$

$$\text{Pour ROC3: } h(t) = e^{2t}u(-t) + (2e^{-3t} - 3e^{-t})u(t) \quad (\text{Système Stable})$$

$$\text{Pour ROC4: } h(t) = (-e^{2t} + 2e^{-3t} - 3e^{-t})u(t) \quad (\text{Système Causal})$$

Exercice05

Un système en temps continu avec une entrée $x(t)$ et une sortie $y(t)$ est décrit par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante pour $t > 0$:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Les conditions initiales sont fixées à zéro, c'est-à-dire $y(0^-) = 0$ et $x(0^-) = 0$, de sorte que le système aura des propriétés de linéarité et de temps invariant. (Remarquez les deux utilisations différentes de "linéaire". Dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, "linéaire" se réfère à "affine" qui est une ligne qui ne passe pas nécessairement par l'origine.)

1. Quelle est la fonction de transfert $H(s)$ du système dans le domaine de Laplace, y compris la région de convergence?
2. Quelle est la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système ?
3. Trouvez la réponse en fréquence $H(\omega)$ du système à partir de la fonction de transfert. Pourquoi la substitution $s = j\omega$ est-elle valide ? .
4. Pour $x(t) = u(t)$, trouvez $X(s)$ et $Y(s)$.
5. À partir de la partie (4), trouvez $y(t)$ en prenant la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$.

Solution Exercice05

1. En utilisant la propriété : $L\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = sX(s)$ pour des conditions initiales nulle, nous obtenons :

$$sY(s) + 2Y(s) = sX(s) \Rightarrow H(s) = \frac{s}{s+2}$$

Comme le système est causale, la région de convergence est : $Re\{s\} > -2$.

2. En utilisant la paire de transformée de Laplace $L\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s+\alpha}$ pour $Re\{s\} > Re\{\alpha\}$. $L\{\delta(t)\} = 1$, pour tous les s , nous obtenons .

$$H(s) = \frac{s}{s+2} = \frac{s+2-2}{s+2} = 1 - \frac{2}{s+2}$$
$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}u(t)$$

3. $H(\omega) = \frac{j\omega}{j\omega+2}$ en remplaçant $s = j\omega$ dans $H(s)$ ci-dessus. Cette substitution est valide car l'axe imaginaire se situe dans la région de convergence de $Re\{s\} > -2$.

4. $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ pour $Re\{s\} > 0$

Nous aurions également pu obtenir la transformée en utilisant $L\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s+\alpha}$ et en remplaçant $\alpha = 0$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s+2}$$

5. En utilisant la paire de transformée de Laplace $L\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \frac{1}{s+\alpha}$ pour nous obtenons $y(t) = e^{-2t}u(t)$.

Chapitre 4: Produit de Convolution

4.1 Systèmes à temps continu

Un système est un bloc (dispositif) représenté par un modèle mathématique de type Entrée/Sortie qui permet de transformer ou déformer un signal quelconque. Il est défini par une fonction de transfert qui décrit la relation entre le signal d'entrée $x(t)$ le signal de sortie $y(t)$. Le système peut représenter un phénomène physique, comme un thermomètre, où l'entrée est un signal électrique et la sortie est la chaleur. Un système peut aussi représenter un réseau de transmission de données, ou un filtre analogique, peut être schématisé comme sur la figure (4.1).



Figure (4.1)- Diagramme général d'un système $S[]$

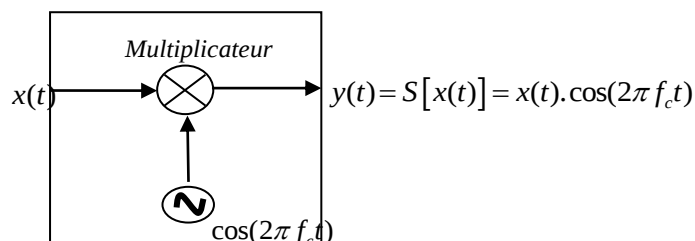
4.1.1. Systèmes linéaires

Un système S est linéaire quand sa réponse à une combinaison linéaire de signaux d'entrée est égale à la même combinaison linéaire des réponses individuelles à chacun des signaux d'entrées, alors on dit que le système $S[]$ est linéaire si on a la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \text{Si } y_i(t) &= S[x_i(t)] \quad 1 \leq i \leq n \\ \text{Alors } \forall \alpha_i \in \mathbb{R}, S\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)\right] &= \sum_{i=1}^n \alpha_i S[x_i(t)] = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(t) \end{aligned} \quad 4.1$$

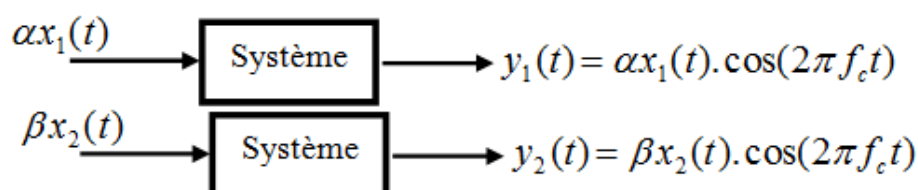
Exemple01:

Soit un système S est défini par:



Démontrer que ce système est linéaire

Nous avons :



$$\begin{aligned}
 y(t) &= S[x(t)] = S[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \\
 &= (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \cdot \cos(2\pi f_c t) \\
 &= (\alpha x_1(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)) + (\beta x_2(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)) \\
 &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)
 \end{aligned}$$

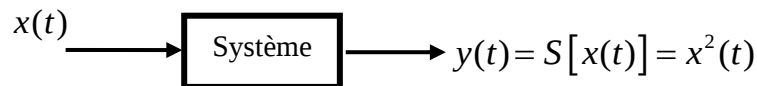
Donc le système est linéaire:



Donc le système est linéaire

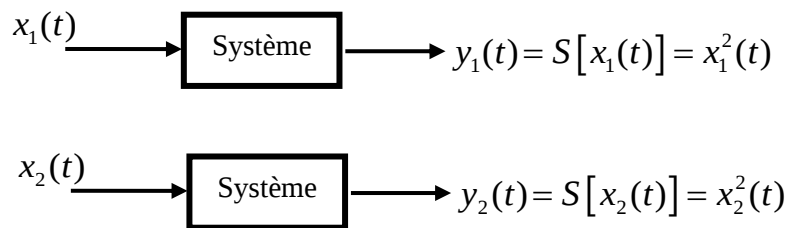
Exemple02:

Soit le système suivant :



Le système est-il linéaire ?

Nous avons :



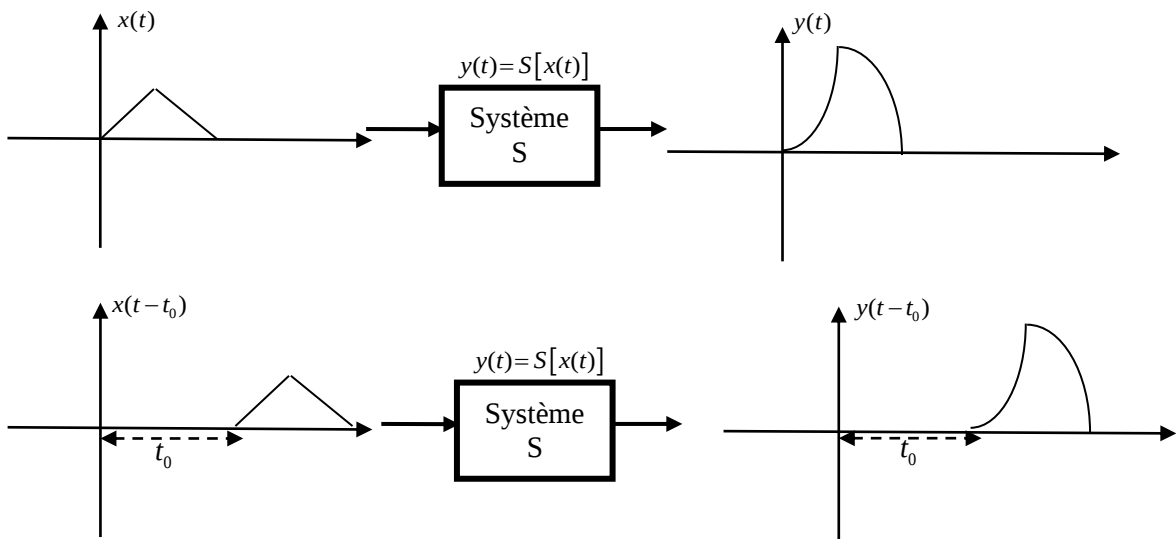
$$\begin{aligned}
 y(t) &= S[x(t)] = S[x_1(t) + x_2(t)] \\
 &= [x_1(t) + x_2(t)]^2 = (x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + 2x_1(t)x_2(t) \\
 &\neq (x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 =
 \end{aligned}$$

Non , le système est non linéaire

4.1.2. Systèmes Invariants (stationnaires)

Un système S est invariant dans le temps (ou stationnaire) quand une translation du signal d'entrée se traduit par la même translation du signal de sortie, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } y(t) = S[x(t)] \\
 &\text{Alors } \forall t_0 \in \mathbb{R}, \quad y(t - t_0) = S[x(t - t_0)]
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$



Exemple01:

Supposons que nous ayons le système avec l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t)$ donnée par:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y(t) = 3x(3t + 3)$$

Déterminez si le système possède chacune des propriétés suivantes: (a) invariant dans le temps, (b) linéaire.

Solution: (a) Supposer que $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ et $x_2(t) = x_1(t - t_0) \rightarrow y_2(t)$

Le système est invariant dans le temps si, pour tout $x_1(t)$ et toute constante réelle t_0 , $y_2(t) = y_1(t - t_0)$. A partir de la définition du système, nous avons

$$y_1(t) = 3x_1(3t + 3)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 3x_2(3t + 3) \\ &= 3x_1(3t + 3 - t_0) \text{ et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t - t_0) &= 3x_1(3(t - t_0) + 3) \\ &= 3x_1(3t - 3t_0 + 3) \end{aligned}$$

Puisque $y_2(t) \neq y_1(t - t_0)$, le système n'est pas invariant dans le temps.

(b) Linéarité : Supposer que

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t) \text{ et } a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow y_3(t)$$

Le système est linéaire si, pour tout $x_1(t)$ et $x_2(t)$, et toutes les constantes complexes a_1 et a_2 , $y_3(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$. A partir de la définition du système, nous avons

$$y_1(t) = 3x_1(3t + 3)$$

$$y_2(t) = 3x_2(3t + 3) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= 3[a_1 x_1(3t + 3) + a_2 x_2(3t + 3)] \\ &= a_1 [3x_1(3t + 3)] + a_2 [3x_2(3t + 3)] \\ &= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t). \end{aligned}$$

Puisque $y_3(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$, le système est linéaire.

4.2. Analyse de systèmes linéaires invariants par d'intégrale de convolution

Considérons un système linéaire invariant (souvent nommé **LTI** : Système Linéaire Invariant en Temps) d'une fonction de transfert $H(s)$.

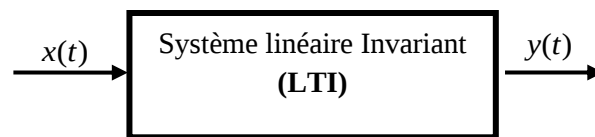


Figure (4.2)- Système linéaire ayant un signal de sortie $y(t) = x(t) * h(t)$

Les transformées de Laplace des signaux d'entrée et de sortie, $x(t)$ et $y(t)$, sont écrit $X(s)$ et $Y(s)$. Ces valeurs sont liées par:

$$Y(s) = X(s).H(s) \quad 4.2$$

La transformation inverse consiste donc à trouver la fonction du temps $h(t)$ correspondant à l'originale d'une fonction $H(s)$, donc $h(t)$ représente la réponse impulsionnelle du système. Si l'entrée dans le système est une impulsion Dirac, on peut écrire: $x(t) = \delta(t)$ puis $X(s) = 1$ et $Y(s) = H(s)$ par conséquent $y(t) = h(t)$

4.2.1 La représentation des signaux en termes d'impulsions

Tout signal peut être exprimé comme une somme d'impulsions unitaires mises à l'échelle et décalées. Nous commençons par considérer une approximation d'impulsion ou d'escalier $\hat{x}(t)$ à un signal continu $x(t)$ illustré sur la figure (4.3a).

D'une manière similaire à celle utilisée dans le cas du temps discret, cette approximation peut être exprimée comme une combinaison linéaire des série d'impulsions d'amplitude variable et décalées dans le temps, comme illustré sur la figure (4.3a-e). Si nous définissons:

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

puis, puisque $\delta_{\Delta}(t)$ a une amplitude unitaire, nous avons l'expression de signal $\hat{x}(t)$ peut être décomposé en une somme d'impulsions pondérées par les valeurs d'entrée. Mathématiquement, on représente ceci par :

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \cdot \Delta \quad 4.3$$

Lorsque Δ approche de zéro, l'approximation $\hat{x}(t)$ devient de mieux en mieux, et la limite est égale à $x(t)$. Pour cela nous avons:

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

Aussi, comme $\Delta \rightarrow 0$, la sommation s'approche d'une intégrale et l'impulsion s'approche de l'impulsion unitaire

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad 4.4$$

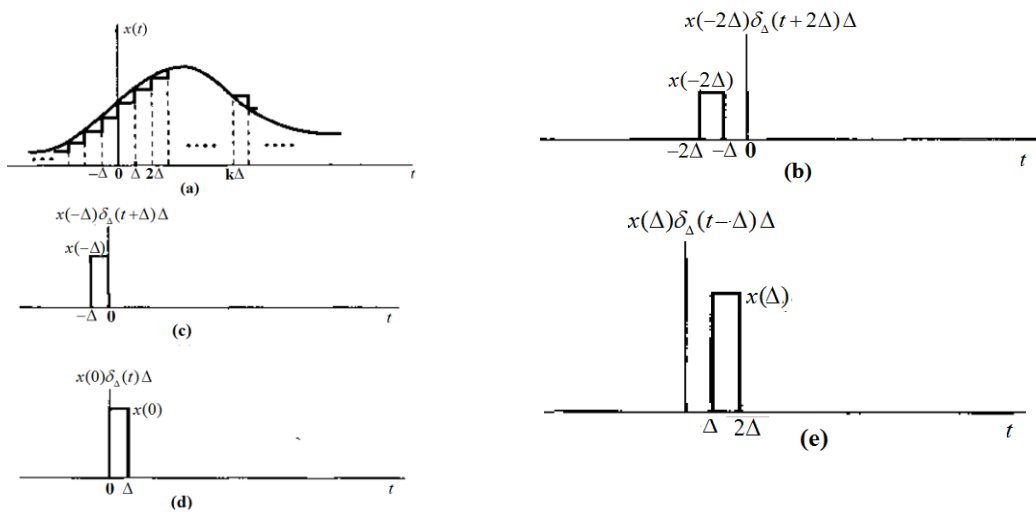
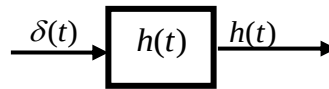


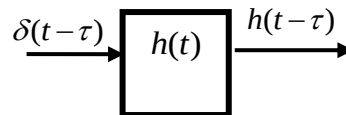
Figure (4.3)- Approximation de l'escalier à un signal à temps continu

4.2.2 Dérivation de la convolution d'un signal continu

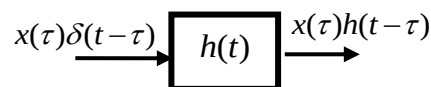
- Si on met une impulsion Dirac $\delta(t)$ en entrée, la sortie sera la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système :



- Si on décale temporellement ce Dirac, on obtient par invariance, la réponse impulsionnelle décalée d'autant :



- Si on affecte à présent, un coefficient multiplicateur à ce Dirac décalé, soit $x(\tau)$, on obtient, par linéarité :



- Il ne reste plus maintenant qu'à superposer une infinité de tels Dirac décalés et coefficients en entrée, soit :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad 4.5$$

4.3. Produit de convolution.

Soient $x(t)$ et $h(t)$ deux signaux définies sur R , à valeurs réelles ou complexes. On nomme convolée de $x(t)$ et $h(t)$, et l'on note $x(t) * h(t)$, le produit de convolution entre $x(t)$ et $h(t)$ est défini mathématiquement par:

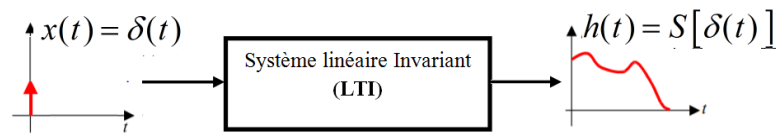
$$\forall t \in R \quad y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \quad 4.6$$

Le produit de convolution représente l'évolution de la valeur de l'aire contenue sous le produit des deux fonctions en fonction du temps. Il exprime la quantité de recouvrement de la fonction $x(t)$ lorsqu'on la déplace sur la fonction $h(t)$.

Ce produit est très utilisé en traitement du signal, notamment pour :

- ✓ Les notions de filtrage,
- ✓ Les techniques d'échantillonnage
- ✓ les différentes techniques de modulation en télécommunications.....
- **La réponse impulsionnelle:**
La réponse impulsionnelle est une caractéristique très importante des systèmes. Si l'entrée à un système est une impulsion de Dirac $\delta(t)$, alors la sortie est appelée la réponse impulsionnelle $h(t)$. On peut démontrer que si on connaît la réponse impulsionnelle, on peut calculer la sortie pour n'importe quelle entrée (pour un système linéaire dans le domaine temporel). La réponse impulsionnelle est donc très importante pour caractériser les systèmes physiques. Il suffit d'envoyer un pulse de

courte durée puis mesurer la réponse pour être capable de trouver la réponse à n'importe quelle entrée.



- **La réponse indicielle**

La réponse indicielle $y(t)$ est la réponse d'un système dont l'entrée est un échelon unitaire $u(t)$. Si nous notons S la transformation qui caractérise l'action du système, nous avons pour la réponse indicielle : $y(t) = S[u(t)]$.

Nous pouvons également relier la réponse indicielle à la réponse impulsionnelle :

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau$$

La réponse indicielle correspond à l'intégrale de la réponse impulsionnelle.

4.4. Propriétés de la convolution.

➤ **Propriété Commutative**

Le produit de convolution est commutative. Autrement dit, pour deux signaux quelconques $x(t)$ et $h(t)$, nous avons

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad 4.7$$

Ainsi, le résultat de l'opération de convolution n'est pas affecté par l'ordre des opérandes.

Démonstration :

Pour commencer, nous développons le côté gauche de (4.5) comme suit:

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

En posant $\alpha = t - \tau$, nous obtenons $\tau = t - \alpha$ et $d\tau = -d\alpha$. En utilisant ce changement de variable, nous pouvons réécrire l'équation précédente comme :

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)(-d\alpha) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha)h(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha \\ &= h(t) * x(t) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé que la convolution est commutative.

➤ **Propriété Associative**

Le produit de convolution est associatif c.-à-d:

$$[x(t) * h(t)] * z(t) = x(t) * [h(t) * z(t)] \quad 4.8$$

En d'autres termes, le résultat de convolution final ne dépend pas de la façon dont les opérations intermédiaires sont regroupées.

Démonstration:

Pour commencer, nous utilisons la définition de l'opération de convolution pour développer le côté gauche de (4.8) comme suit:

$$\begin{aligned} [x(t) * h(t)] * z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(\tau) * h(\tau)] z(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(v) h(\tau - v) dv \right] z(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Maintenant, nous changeons l'ordre d'intégration pour obtenir:

$$[x(t) * h(t)] * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) h(\tau - v) z(t - \tau) dv d\tau$$

Tirer le facteur de $x(v)$ à l'extérieure de l'intégrale

$$[x(t) * h(t)] * z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau - v) z(t - \tau) dv d\tau$$

Ensuite, nous effectuons un changement de variable. Soit $\alpha = \tau - v$ ce qui implique que $\tau = v + \alpha$ et $d\alpha = dv$. Utiliser ce changement de variable, on peut écrire

$$\begin{aligned} [x(t) * h(t)] * z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) z(t - \alpha - v) d\alpha dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) z([t - v] - \alpha) d\alpha \right) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) \cdot [h(\rho) * z(\rho)]_{\rho=t-v} dv \\ &= x(t) * [h(t) * z(t)] \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé que la convolution est associative.

➤ **Distributive par rapport à l'addition.**

L'opération de convolution est distributive. Autrement dit, pour tout signal $x(t)$, $h(t)$ et $z(t)$, nous avons

$$x(t) * [h(t) + z(t)] = [x(t) * h(t)] + [x(t) * z(t)] \quad 4.9$$

Démonstration:

La preuve de cette propriété est relativement simple. En élargissant le côté gauche de (4.9), nous avons:

$$\begin{aligned} x(t) * [h(t) + z(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) [h(t - \tau) + z(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z(t - \tau) d\tau \\ &= [x(t) * h(t)] + [x(t) * z(t)] \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que la convolution est distributive.

➤ **Élément neutre**

L'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est l'**élément neutre** du produit de convolution

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t) \quad 4.10$$

Démonstration:

Supposons que nous ayons un signal arbitraire $x(t)$. A partir de la propriété d'équivalence de la fonction d'impulsion de Dirac, nous pouvons écrire:

$$x(t)\delta(t - \tau) = x(\tau)\delta(t - \tau)$$

Maintenant, intégrons les deux côtés de l'équation précédente par rapport à τ pour obtenir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau$$

Le côté gauche de cette équation peut être encore simplifié comme suit:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - \tau) d\tau &= x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) \end{aligned}$$

on obtient

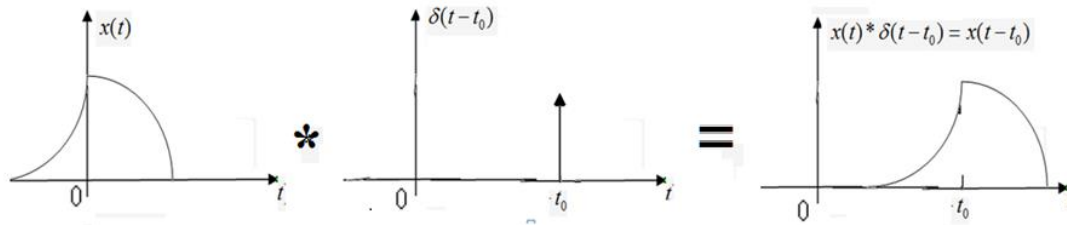
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$

Ainsi, nous avons montré que la convolution d'une fonction $x(t)$ avec l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ donne simplement $x(t)$

➤ **Convolution avec une impulsion de Dirac**

La Convolution d'un signal $x(t)$ par une impulsion de Dirac $\delta(t - t_0)$ positionnée en t_0 revient donc à décaler le signal de t_0 .

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad 4.11$$

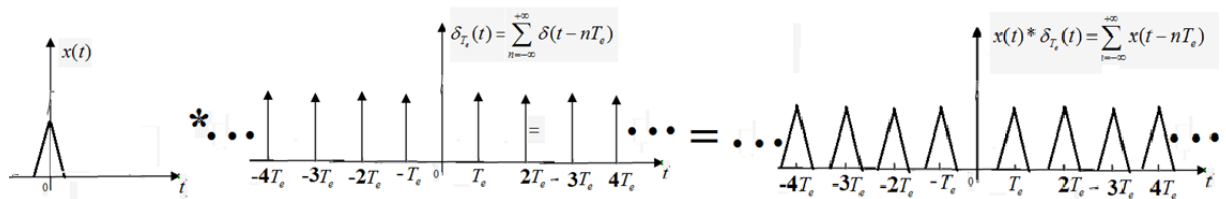


➤ Convolution d'un signal par un peigne de Dirac

On peut déduire du résultat précédent :

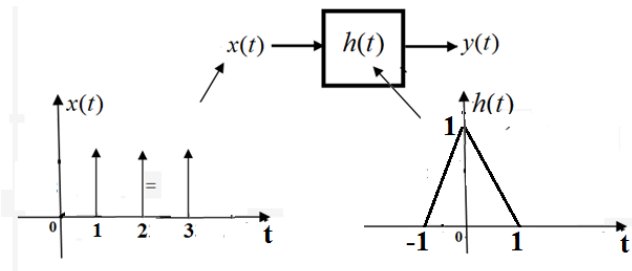
$$\begin{aligned} x(t) * \delta_{T_e}(t) &= x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT_e) \end{aligned} \quad 4.12$$

La convolution d'un signal $x(t)$ par un peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$ revient à périodiser le signal $x(t)$ à la période T_e .



Exemple 01

Considérons un système LTI avec une réponse impulsionnelle $h(t)$ donnée ci-dessous:

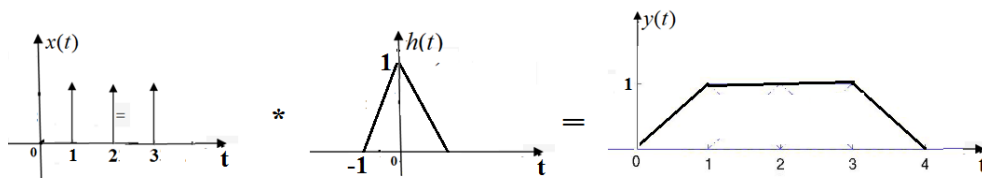
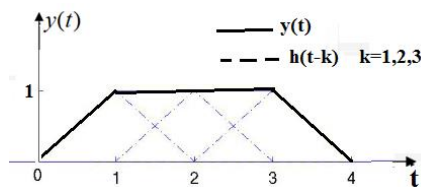


Supposons que l'entrée du système soit: $x(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)$
 Veuillez tracer la sortie du système, $y(t)$.

Solution:

Par les propriétés LTI du système, la sortie est:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = [\delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)] * h(t) \\ &= \delta(t-1) * h(t) + \delta(t-2) * h(t) + \delta(t-3) * h(t) \\ y(t) &= h(t-1) + h(t-2) + h(t-3) \end{aligned}$$



➤ **Décalage dans le temps**

Soit $y(t) = x(t) * h(t)$, le produit de convolution de deux fonctions:

$$\begin{aligned} y(t-t_0) &= x(t-t_0) * h(t) = x(t) * h(t-t_0) \\ x(t-t_1) * h(t-t_2) &= y(t-(t_1+t_2)) \end{aligned} \quad 4.13$$

➤ **Transformée de Fourier d'un produit de convolution**

Le produit de convolution de deux signaux représentés par leurs fonctions temporelles correspond dans le domaine fréquentiel au produit de leurs transformées de Fourier respectives (**Théorème de Plancherel**).

Un important théorème, souvent appelé le théorème de convolution, établit que la transformée de Fourier de la convolution de $x(t)$ et de $h(t)$ est égale au produit des transformées de Fourier de $x(t)$ et de $h(t)$.

Pour deux signaux $x(t)$ et $h(t)$ ayant pour transformées de Fourier respectives $X(\omega)$ et $H(\omega)$, c'est-à-dire en formule :

Considérer $x(t) \xrightarrow{TF} X(\omega)$ et $h(t) \xrightarrow{TF} H(\omega)$

$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &\xrightarrow{TF} X(\omega).H(\omega) \\ x(t).h(t) &\xrightarrow{TF} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * H(\omega) \end{aligned} \quad 4.14$$

Démonstration :

Nous avons : $y(t) = x(t) * h(t)$,et

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t).e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) * h(t)].e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \right].e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau). \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}.e^{+j\omega\tau} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)} dt \right] \end{aligned}$$

On posant: $\alpha = t - \tau \Rightarrow d\alpha = dt$

$$Y(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha)e^{-j\omega\alpha} d\alpha \right] = X(\omega).H(\omega)$$

➤ **Dérivée de convolution**

Considérer $x(t) \xrightarrow{TF} X(\omega)$ et $h(t) \xrightarrow{TF} H(\omega)$ puis $x(t) * h(t) \xrightarrow{TF} X(\omega).H(\omega)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [x(t) * h(t)] &\xrightarrow{TF} j\omega [X(\omega).H(\omega)] = [j\omega X(\omega)].H(\omega) \\ &= X(\omega).[j\omega H(\omega)] \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{d}{dt} (x(t) * h(t)) = \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{dh(t)}{dt} \quad 4.15$$

Deuxième démonstration:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(x(t)*h(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\frac{d}{dt}h(t-\tau)d\tau \\
&= x(t)*\frac{dh(t)}{dt}
\end{aligned}$$

Dériver un produit de convolution revient à dériver l'un de ses termes.

Exemple01:

Soit les deux signaux rectangulaire $x(t)$ et $h(t)$ telle que:

➤ **Convolution des signaux causaux**

Si $x(t)$ et $h(t)$ sont des signaux causaux, en écrivant les inégalités qu'ils vérifient

$$\begin{cases} x(\tau) = 0 & \forall \tau < 0 \\ h(t-\tau) = 0 & \forall \tau > t \end{cases}$$

on obtient une expression simplifiée et très utile de la convolution :

$$x(t)*h(t) = \int_0^t x(\tau).h(t-\tau)d\tau \quad 4.16$$

➤ **Convolution des signaux périodiques**

Pour deux signaux périodiques réels $x(t)$ et $h(t)$ de période T_0 , on définit la convolution de la manière suivante :

$$x(t)*h(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau).h(t-\tau)d\tau \quad 4.17$$

4.4. Interprétation graphique de la produit de convolution:

Une interprétation graphique de la convolution est un outil important pour comprendre l'implémentation de la convolution comme outil de calcul. La convolution entre deux signaux

$$x(t) \text{ et } h(t) \text{ s'écrit : } x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

- Considérons deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$. La variable indépendante de l'intégration est τ . On peut alors esquisser $x(\tau)$ et $h(\tau)$, on obtient $h(-\tau)$ par symétrie de $h(\tau)$ par rapport à l'axe des ordonnées.
- Le signal $h(t-\tau)$ est simplement le signal initial $h(\tau)$, inversé dans le temps pour donner $h(-\tau)$, puis translaté de t sur l'axe des abscisses.
- Le calcul de la convolution consiste donc à calculer la surface du produit $x(\tau).h(t-\tau)$

- En calculant alors l'ensemble des surfaces obtenues en faisant « glisser » $h(t - \tau)$, c'est-à-dire pour tous les décalages de t .

Exemple: Calculer la convolution $y(t) = x(t) * h(t)$ où

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad h(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution:

- Nous commençons par tracer les signaux $x(\tau)$ et $h(\tau)$ comme le montrent les figures 4.3 (a) et (b), respectivement.
- Ensuite, nous procédons à la détermination de la version inversée et décalée dans le temps de $h(\tau)$.
- Nous pouvons accomplir cela en deux étapes. Tout d'abord, nous inversons le temps $h(\tau)$ pour obtenir $h(-\tau)$ comme le montre la figure 4.3 (c). Deuxièmement, nous décalons dans le temps le signal résultant de t à obtenir $h(t - \tau)$ comme le montre la figure 4.3 (d).
- À ce stade, nous sommes prêts à commencer à considérer le calcul de l'intégrale de convolution. Pour chaque valeur possible de t , il faut multiplier $x(\tau)$ par $h(t - \tau)$ et intégrer le produit résultant par rapport à τ . En raison de la forme de $x(\tau)$ et $h(\tau)$, nous pouvons diviser ce processus en un petit nombre de cas. Ces cas sont représentés par les scénarios illustrés aux figures 4.3 (e) à (h).

Premièrement, nous considérons le cas de $t < 0$. D'après la figure 4.3 (e), nous pouvons voir que :

$$\text{pour } t < 0 : y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = 0$$

Deuxièmement, nous considérons le cas de $0 \leq t < 1$. D'après la figure 4.3 (f), nous pouvons voir que :

$$\begin{aligned} \text{pour } 0 \leq t < 1 : y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t (t - \tau)d\tau \\ &= \left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2 \right]_0^t = \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

Troisièmement, nous considérons le cas de $1 \leq t < 2$. D'après la figure 4.3 (g), nous pouvons voir que :

$$\text{pour } 1 \leq t < 2: \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-1}^1 (t-\tau)d\tau$$

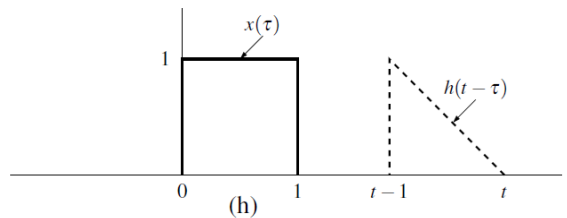
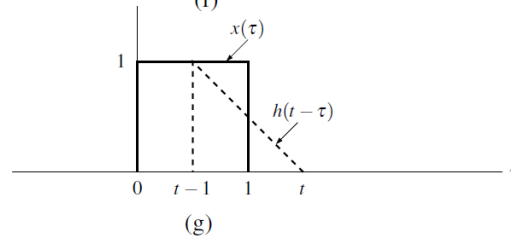
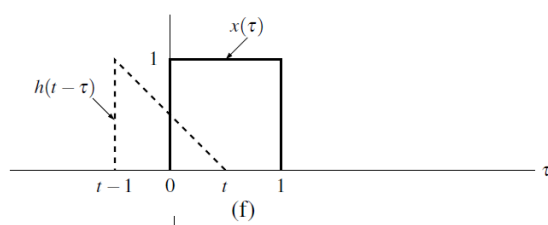
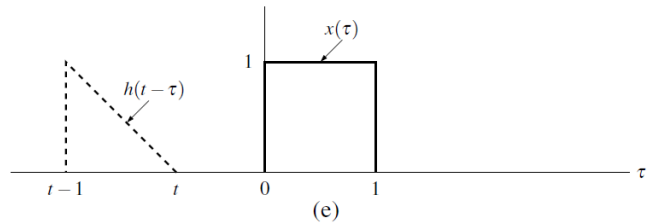
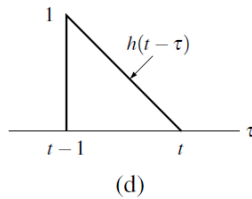
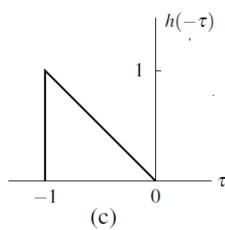
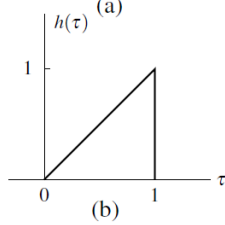
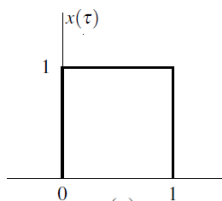
$$= \left[t\tau - \frac{1}{2}\tau^2 \right]_{t-1}^1 = -\frac{1}{2}t^2 + t$$

Quatrièmement, nous considérons le cas de $t \geq 2$. D'après la figure 3.2 (h), nous pouvons voir que

$$\text{pour } t \geq 2: \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

En combinant les résultats précédents , nous avons:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ -\frac{1}{2}t^2 + t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$



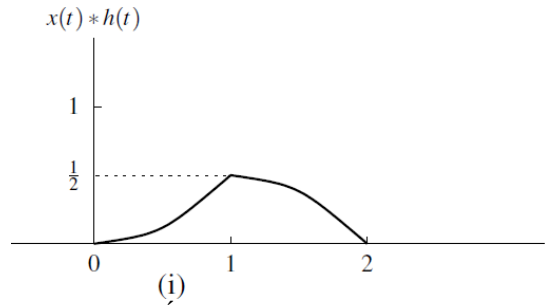


Figure (4.3)- Évaluation de l'intégrale de convolution

- Le résultat du produit de convolution $y(t) = x(t) * h(t)$ est tracé sur la figure 4.3 (i).

4.5.Causalité d'un système

Un système linéaire invariant temps(LTI) est dit **causal** (ou non anticipatoire), si la sortie ne dépend que des valeurs de l'entrée précédant la sortie. En d'autres termes, la réponse ne peut prendre naissance avant que n'ait été appliquée l'excitation. Rappelons qu'un système est causal si sa sortie $y(t)$ à un instant quelconque t_0 ne dépend que de son entrée $x(t)$ pour $t \leq t_0$. Supposons que nous ayons le système LTI avec l'entrée $x(t)$, la sortie $y(t)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$. La valeur de la sortie $y(t)$ pour $t = t_0$ est donnée par

$$\begin{aligned}
 y(t_0) &= [x(t) * h(t)]_{t=t_0} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \Big|_{t=t_0} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau + \int_{t_0}^{+\infty} x(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Pour que l'expression de $y(t_0)$ dans (4.18) ne dépende pas de $x(t)$ pour $t > t_0$, nous devons avoir $h(t) = 0$ pour $t < 0$ (c'est-à-dire que $h(t)$ est un signal causal). Dans ce cas, (4.18) simplifie $y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} x(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau$.

Dans ces conditions, il est clair que la réponse impulsionnelle $h(t)$ est causal c'est-à-dire:

$$(\text{Système LTI est causal}) \Rightarrow (\forall t < 0 \quad h(t) = 0)$$

Exemple01:

Supposons que nous ayons le système LTI avec une réponse impulsionnelle $h(t)$ donnée par:

$$h(t) = e^{-at} u(t),$$

où a est une constante réelle. Déterminez si ce système est causal.

Solution: Clairement, $h(t) = 0$ pour $t < 0$ (en raison du facteur $u(t)$ dans l'expression de $h(t)$). Par conséquent, le système est causal.

Exemple02:

Supposons que nous ayons le système LTI avec une réponse impulsionnelle $h(t)$ donnée par :

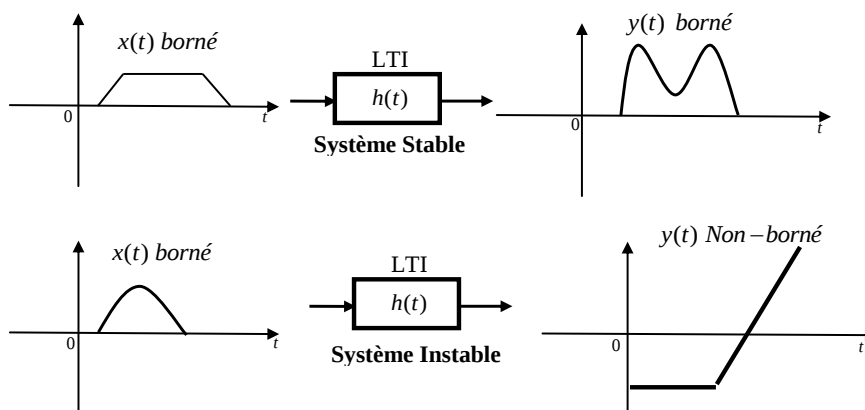
$$h(t) = \delta(t + 5)$$

Déterminez si ce système est causal.

Solution: A partir de la définition de $\delta(t)$, on peut facilement déduire que $h(t) = 0$ sauf en $t = -5$, donc, le système n'est pas causal (anti-causal).

4.6. Stabilité d'un système

Un système linéaire invariant temps (LTI) est **stable** si et seulement si à toute signal d'entrée $x(t)$ bornée correspond une signal de sortie $y(t)$ bornée. On parle de stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output)



Si le signal d'entrée $x(t)$ est borné, $|x(\tau)| \leq \alpha$, $\forall \tau$ et

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) \cdot h(t - \tau)| d\tau \\ &\leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t - \tau)| d\tau, \end{aligned}$$

et la sortie est bornée si le système est stable, c'est-à-dire : la réponse impulsionnelle $h(t)$ est fini. Le critère de stabilité s'énonce ainsi : La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire soit stable est que :

$$(\text{Système LTI est stable}) \Rightarrow \left(\left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \right| < \infty \text{ ou } \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0 \right)$$

Un système linéaire invariant (LTI) est physiquement **réalisable** s'il est causal et stable.

Exemple01:

Considérons le système LTI avec réponse impulsionnelle $h(t) = e^{\alpha t}u(t)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Déterminez si ce système est stable.

Solution: Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\alpha\tau}u(\tau)| d\tau = \int_0^{+\infty} |e^{\alpha\tau}| d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau} \Big|_0^{+\infty} = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha < 0 \\ \infty & \text{si } \alpha \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, le système est stable si et seulement si $\alpha < 0$

4.5.Exemples:

Exemple 01:

Calculer analytiquement l'intégrale de convolution des deux signaux suivants :

$$x(t) = e^{2t}u(t) \quad \text{et} \quad h(t) = u(t)$$

Solution:

Puisque $x(t)$ et $h(t)$ sont des fonctions relativement simples, nous allons résoudre ce problème sans l'aide de graphiques. En utilisant la définition de l'opération de convolution, nous pouvons écrire:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau}u(\tau)u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau}u(\tau)u(t-\tau) d\tau = 0 \quad \text{pour } \tau < 0 \text{ ou } \tau > t$$

$$y(t) = \int_0^t e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \quad \text{pour } \tau \geq 0 \text{ ou } \tau \leq t$$

Ainsi, nous avons:

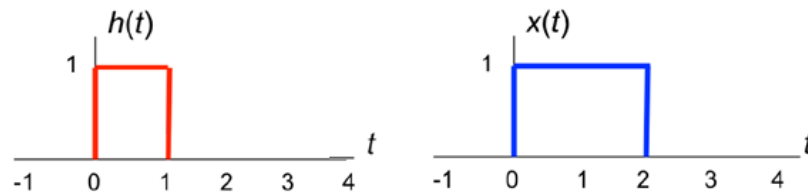
$$y(t) = \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) & t > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exemple 02:

Soit les deux signaux rectangulaire $x(t)$ et $h(t)$ telle que: $x(t) = \text{Rect}_2(t-1)$ et $h(t) = \text{Rect}_1(t-0.5)$

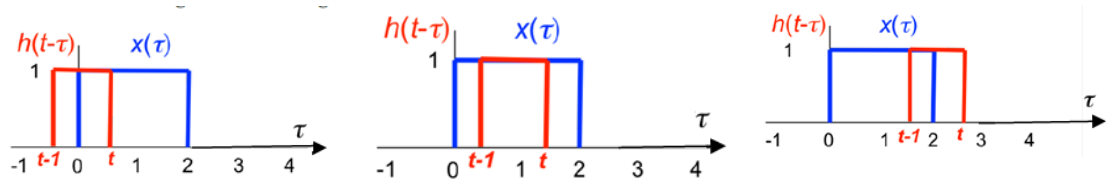
- i) Faire une représentation graphique de $x(t)$ et $h(t)$.
- ii) Déterminer le produit de convolution par la méthode graphique $y(t) = x(t) * h(t)$
- ii) Représenter le signal $y(t)$.

i)



ii)

- Formule de convolution: $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- La convolution de deux signaux causaux donne un résultat causal.



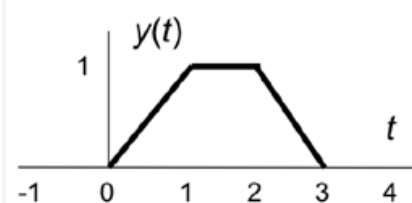
$$0 < t \leq 1: \int_0^t 1.d\tau = t$$

$$1 < t \leq 2: \int_{t-1}^2 1.d\tau = 1$$

$$2 < t \leq 3: \int_{t-2}^2 1.d\tau = 3-t$$

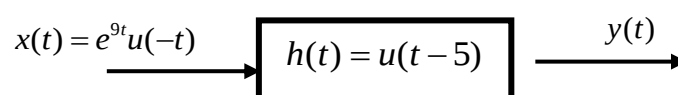
iii) Le résultat finale est donné par :

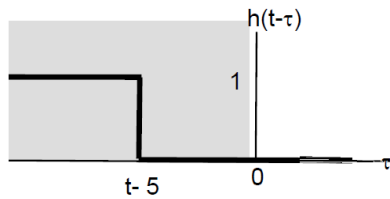
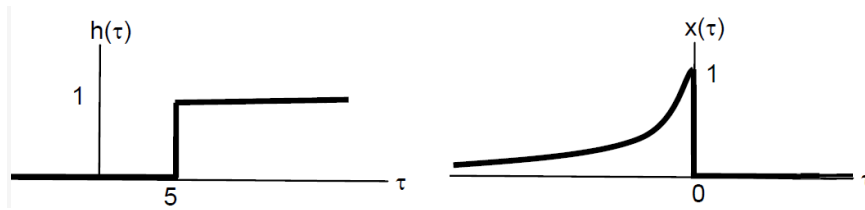
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \leq 2 \\ 3-t & 2 < t \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Exemple 03:

Trouvez $y(t)$ pour le système Linéaire invariant en temps (LTI) décrit par:





Pour intervalle 01:

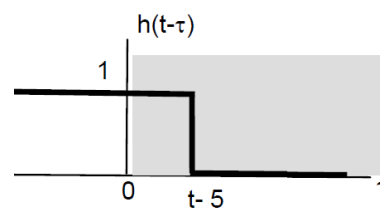
$$t-5 \leq 0 \Rightarrow t \leq 5: y(t) = \int_{-\infty}^{t-5} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t-5} e^{9\tau} d\tau = \frac{1}{9} e^{9(t-5)}$$

Finalement:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

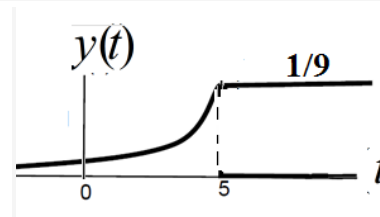
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{9} e^{9(t-5)} & t \leq 5 \\ \frac{1}{9} & t > 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Pour intervalle 02:

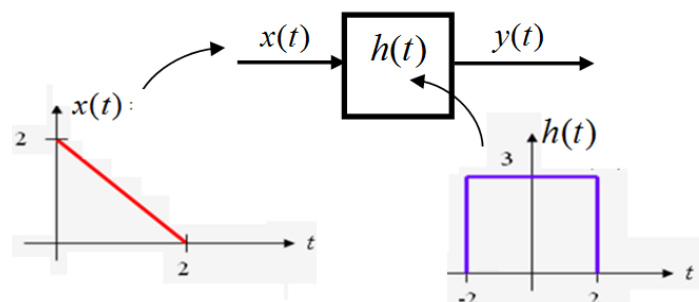
$$t-5 > 0 \Rightarrow t > 5: y(t) = \int_{-\infty}^0 x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{9\tau} d\tau = \frac{1}{9}$$



Exemple 04:

Considérons le système linéaire et invariant en temps (LTI) suivant :



1) Donner l'expression analytique de $x(t)$ et $h(t)$

2) Déterminer le produit de convolution par la méthode graphique $y(t) = x(t) * h(t)$

$$1) \quad x(t) = \begin{cases} -t+2 & 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad h(t) = \begin{cases} 3 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

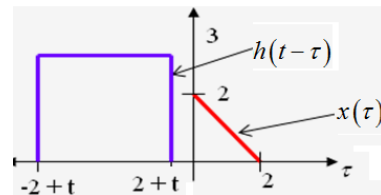
2)

- ✓ Remplacez t par τ dans $x(t)$ et $h(t)$
- ✓ Choisissez de retourner et de faire glisser $h(t)$ car il est plus simple et symétrique
- ✓ La convolution peut être divisée en 5 parties:

I. $t < -2$

- Deux fonctions ne se chevauchent pas
- L'aire sous le produit des fonctions est nulle

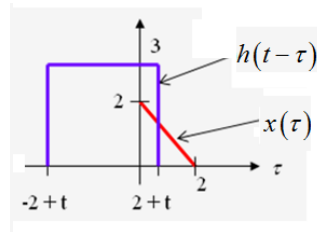
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$



II. $-2 \leq t < 0$

- Une partie de $h(t-\tau)$ chevauche une partie de $x(\tau)$
- La zone sous le produit des fonctions est

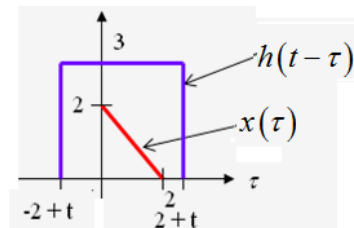
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{2+t} 3(-\tau+2)d\tau = 3 \left(-\frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right) \Big|_0^{2+t} \\ &= -\frac{3(2+t)^2}{2} + 6(2+t) = -\frac{3t^2}{2} + 6 \end{aligned}$$



III. $0 \leq t < 2$

- Ici, $h(t-\tau)$ chevauche complètement $x(\tau)$
- La zone sous le produit est juste

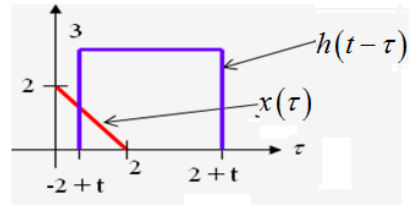
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^2 3(-\tau+2)d\tau = 3 \left(-\frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right) \Big|_0^2 = 6 \end{aligned}$$



IV. $2 \leq t < 4$

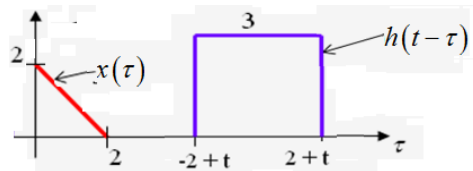
- Une partie de $h(t-\tau)$ et $x(\tau)$ se chevauchent

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-2+t}^2 3(-\tau+2)d\tau = 3 \left(-\frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right) \Big|_{-2+t}^2 \\ &= \frac{3}{2}t^2 - 12t + 24 \end{aligned}$$



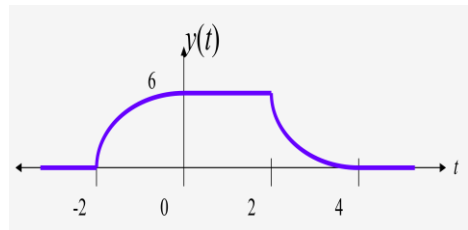
V. $t \geq 4$

- $h(t-\tau)$ et $x(\tau)$ ne se chevauchent pas
- La surface sous leur produit est nulle
- $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$



Le produit de convolution s'exprime sous la forme:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0 & t < -2 \\ -\frac{3}{2}t^2 + 6 & -2 \leq t < 0 \\ 6 & 0 \leq t < 2 \\ \frac{3}{2}t^2 - 12t + 24 & 2 \leq t < 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}$$



Exemple 05:

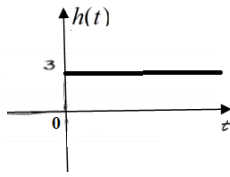
On considère les deux signaux suivants $x(t)$ et $h(t)$ définis comme suit:

$$x(t) = \cos(2\pi t)(u(t) - u(t-1)) \quad \text{et} \quad h(t) = 3u(t)$$

- 1) Représentez les signaux $h(t)$ et $x(t)$
- 2) Calculez le produit de convolution $y(t) = x(t) * h(t)$
- 3) Tracer le signal $y(t)$

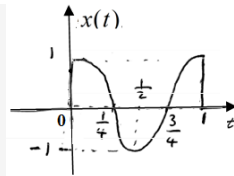
Solution:

1) $h(t) = 3u(t)$

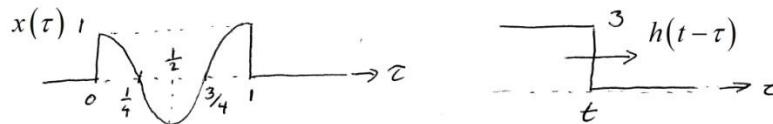


$$x(t) = \cos(2\pi t)(u(t) - u(t-1))$$

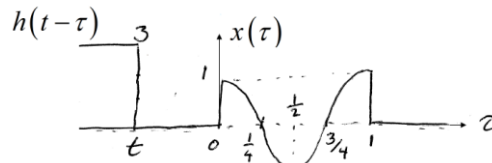
$$\omega_0 = 2\pi \text{ et } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1$$



2) $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau$

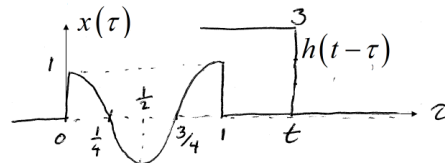


si $t < 0$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau = 0$$

si $t > 1$

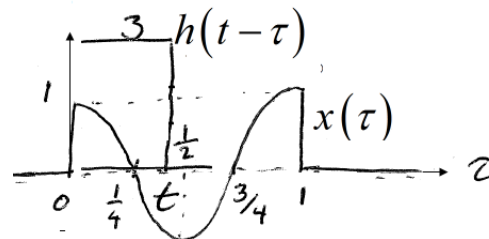


$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^1 3\cos(2\pi\tau) d\tau$$

$$= \frac{3}{2\pi} \sin(2\pi\tau) \Big|_0^1 = 0$$

si $0 \leq t \leq 1$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t 3\cos(2\pi\tau) d\tau$$

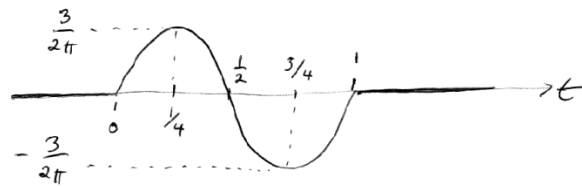
$$= \frac{3}{2\pi} \sin(2\pi\tau) \Big|_0^t = \frac{3}{2\pi} \sin(2\pi t)$$

Finalement:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

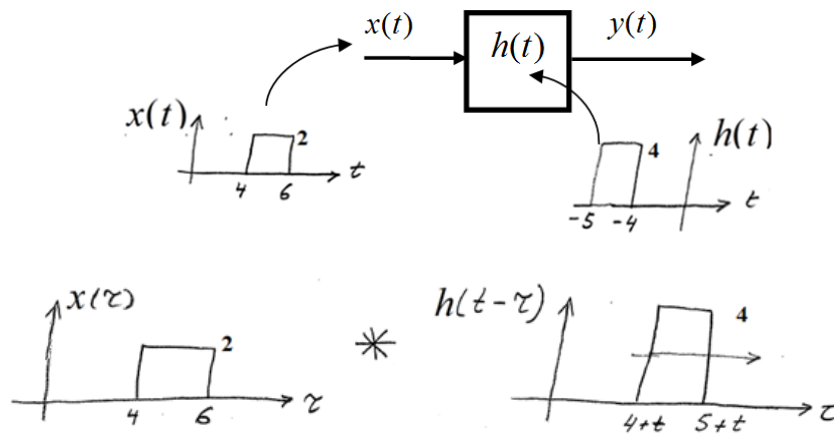
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{3}{2\pi} \sin(2\pi t)$$

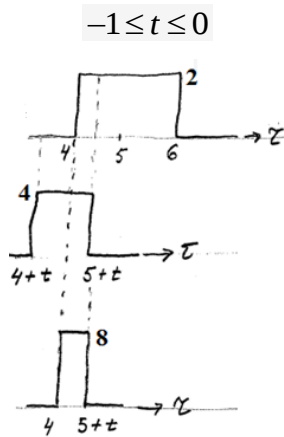


Exemple 06:

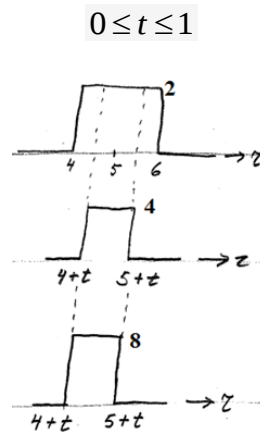
Déterminer le produit de convolution par la méthode graphique pour un système linéaire et invariant en temps (LTI) définis comme suit :



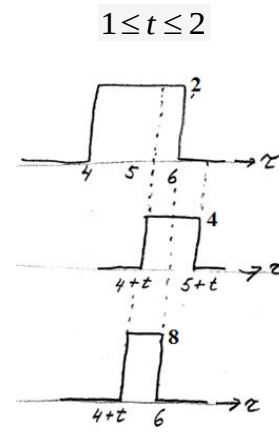
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} (5+t) < 4 \Rightarrow t < -1 \\ (4+t) > 6 \Rightarrow t > 2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_4^{5+t} 4 \times 2 d\tau = 8(t+1) \end{aligned}$$



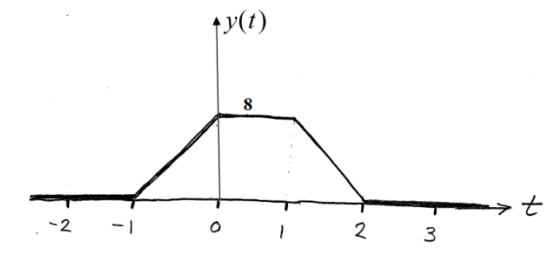
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{4+t}^{5+t} 4 \times 2 d\tau = 8 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{4+t}^6 4 \times 2 d\tau = 8(-t+2) \end{aligned}$$

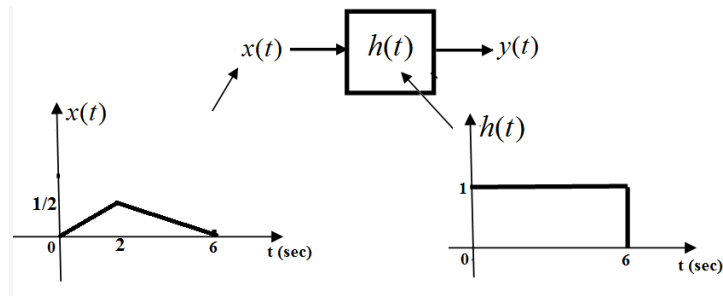
Finalement:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \begin{cases} 8(t+1) & -1 \leq t \leq 0 \\ 8 & 0 \leq t \leq 1 \\ 8(-t+2) & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \end{aligned}$$



Exemple 07:

Considérons le système linéaire et invariant en temps (LTI) suivant :



Calculer la sortie pour $t = 2$

Solution:

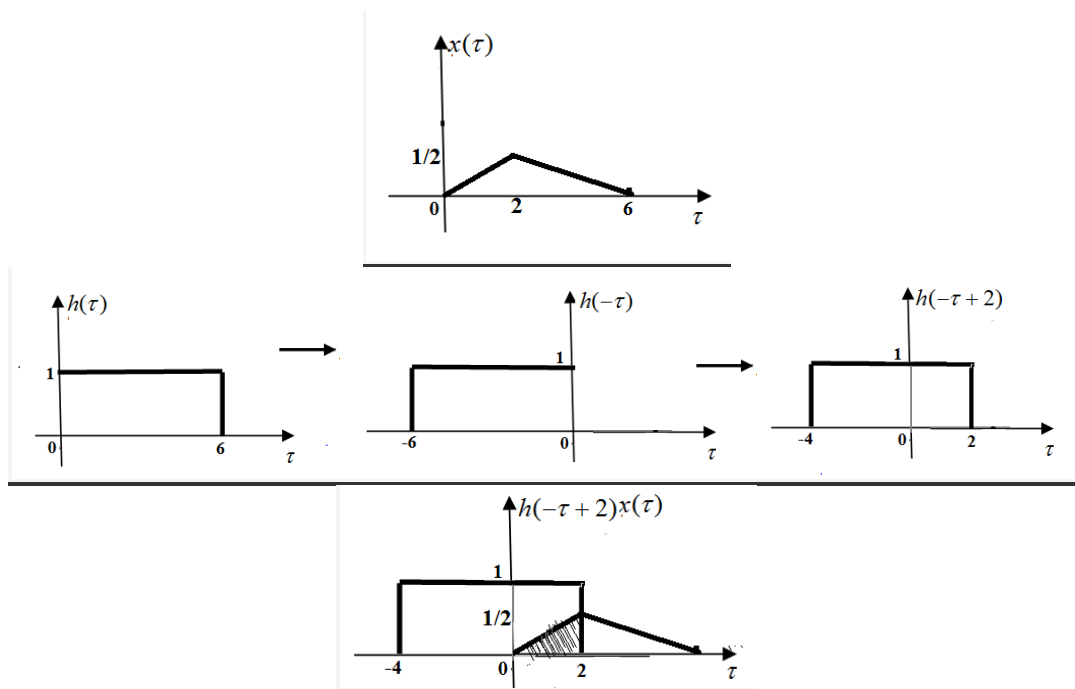
pour LTI système ,nous avons :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

pour $t = 2$

$$y(2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(2-\tau)d\tau$$



$$y(2) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(2-\tau)d\tau = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercices:

Exercice01:

Trouvez la convolution des signaux $x(t) = 2e^{-2t}u(t)$ et $h(t) = u(t)$ en utilisant la transformée de Fourier

Solution Exercice01:

pour trouver la convolution des signaux $x(t)$ et $h(t)$ en utilisant la transformée de Fourier, nous trouvons d'abord la transformée de Fourier de chaque signal, puis nous les multiplions ensemble, et enfin nous prenons la transformée de Fourier inverse du produit pour obtenir la convolution des deux signaux dans le domaine temporel.

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega).H(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{2}{2+j\omega} \text{ et } H(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$Y(\omega) = X(\omega).H(\omega) = \frac{2}{2+j\omega} [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}] = \frac{2}{(2+j\omega)j\omega} + \frac{2\pi\delta(\omega)}{(2+j\omega)}$$

$$\text{sachant que } y(t) = x(t) * h(t) = \text{TF}^{-1} \left\{ \frac{2}{(2+j\omega)j\omega} + \frac{2\pi\delta(\omega)}{(2+j\omega)} \right\} = \text{TF}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{(2+j\omega)} + \pi\delta(\omega) \right\}$$

$$\text{alors } y(t) = \text{TF}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{(2+j\omega)} + \pi\delta(\omega) \right\}$$

$$y(t) = 0.5\text{sgn}(t) + e^{-2t}u(t) + 0.5$$

$$\text{avec } \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Exercice02:

1. Déterminer $X(\omega)$ la transformée de Fourier le signal suivant :

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad (u(t) \text{ est l'échelon unité})$$

2. Utilisez les propriétés de la représentation de Fourier (par exemple, différenciation temporelle, convolution, décalage temporel, décalage de fréquence) pour trouver la transformée de Fourier de :

$$y(t) = 2 \frac{d}{dt} \{ e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3) \} \quad *: \text{indique l'opération de convolution}$$

Solution Exercice02:

1. Détermination la transformé de Fourier de $x(t)$

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(\omega) = \text{TF}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt, \text{ converges pour } a > 0$$

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = -\frac{1}{(a+j\omega)}e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

2. Détermination la transformé de Fourier de $y(t)$

$$y(t) = 2 \frac{d}{dt} \{e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3)\}$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= TF\{y(t)\} = TF\left\{2 \frac{d}{dt} \{e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3)\}\right\} \\ &= 2TF\left\{\frac{d}{dt} \{e^{-4t}u(t) * e^{-t}u(t-3)\}\right\} \end{aligned}$$

puisque on a par définition :

$$TF\left[\frac{d}{dt}x(t)\right] = j\omega X(\omega) \quad \text{et} \quad g(t) * f(t) \Leftrightarrow G(\omega) \cdot F(\omega)$$

$$\text{alors, nous avons} \quad Y(\omega) = 2j\omega \cdot TF\{e^{-4t}u(t)\} \cdot TF\{e^{-t}u(t-3)\}$$

$$\text{avec} \quad TF\{e^{-4t}u(t)\} = \frac{1}{4+j\omega} \quad \text{et}$$

$$TF\{e^{-t}u(t-3)\} = TF\{e^{-3} \cdot e^{+3}e^{-t}u(t-3)\} = e^{-3}TF\{e^{-(t-3)}u(t-3)\}$$

$$TF\{e^{-t}u(t-3)\} = e^{-3} \frac{e^{-j3\omega}}{1+j\omega} \quad \text{car} \quad [x(t-t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega)]$$

$$\text{Finalement : } Y(\omega) = 2j\omega \cdot TF\{e^{-4t}u(t)\} \cdot TF\{e^{-t}u(t-3)\}$$

$$Y(\omega) = \frac{2j\omega \cdot e^{-3} \cdot e^{-j3\omega}}{(4+j\omega)(1+j\omega)}$$

Exercice03:

La réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant en temps (LTI) est $h(t) = e^{-2(t+1)}u(t+1)$.
 Trouvez la sortie $y(t)$ si l'entrée est $x(t) = e^{-|t|}$. ($u(t)$ est l'échelon unité)

Solution Exercice03:

Pour trouver la sortie $y(t)$ du système LTI si l'entrée est $x(t) = e^{-|t|}$, vous pouvez utiliser la formule

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\tau|} e^{-2(t-\tau+1)} u(t-\tau+1) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{-\tau} e^{-2(t-\tau+1)} u(t-\tau+1) d\tau + \int_0^{+\infty} e^{\tau} e^{-2(t-\tau+1)} u(t-\tau+1) d\tau$$

$$y(t) = e^{-2t-2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{3\tau} u(t-\tau+1) d\tau + \int_0^{+\infty} e^{\tau} u(t-\tau+1) d\tau \right]$$

Pour $\tau = t+1 < 0 \Rightarrow t < -1$

$$y(t) = e^{-2t-2} \int_{-\infty}^0 e^{3\tau} u(t-\tau+1) d\tau = e^{-2t-2} \int_{-\infty}^{t+1} e^{3\tau} d\tau = \frac{e^{t+1}}{3}$$

Pour $\tau = t+1 > 0 \Rightarrow t > -1$

$$y(t) = e^{-2t-2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{3\tau} u(t-\tau+1) d\tau + \int_0^{+\infty} e^{\tau} u(t-\tau+1) d\tau \right] = e^{-2t-2} \left[\int_{-\infty}^0 e^{3\tau} d\tau + \int_0^{t+1} e^{\tau} d\tau \right]$$

$$y(t) = e^{-(t+1)} - \frac{2e^{-2(t+1)}}{3}$$

Finalement , on obtient : $y(t) = \begin{cases} \frac{e^{t+1}}{3} & \text{si } t < -1 \\ e^{-(t+1)} - \frac{2e^{-2(t+1)}}{3} & \text{si } t > -1 \end{cases}$

Chapitre 5

Corrélation des signaux

5.1 Introduction

La corrélation est une opération mathématique fondamentale en traitement du signal qui permet de quantifier la similitude ou le degré de correspondance entre deux signaux. Elle est largement utilisée pour la détection de motifs, la synchronisation des signaux, l'analyse des séries temporelles, et dans diverses applications scientifiques et techniques. Ce chapitre couvre en détail les notions de cross-corrélation et d'auto-corrélation, ainsi que leurs propriétés et applications. La corrélation est une opération qui consiste à comparer deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ pour en déterminer le degré de ressemblance à différents décalages temporels τ . Contrairement à la convolution, qui est utilisée pour évaluer la réponse d'un système à un signal d'entrée, la corrélation vise à mesurer la similarité entre deux signaux. Elle est notamment utile pour :

- Détecter la présence d'un signal noyé dans le bruit.
- Mesurer des délais temporels entre deux signaux.
- Estimer des distances (par exemple dans les systèmes de sonar et de radar).
- Analyser la redondance ou la périodicité dans un signal unique.

Dans un système de communication, par exemple, la corrélation permet d'évaluer si le signal reçu $y(t)$ correspond bien au signal de référence $x(t)$, en déterminant le décalage optimal qui maximise la correspondance.

5.2 .Opération de Corrélation

5.2.1 Définition

Les fonctions de corrélation traduisent la similitude d'un signal ou de deux signaux au niveau de la forme et de la position en fonction du retard entre les signaux. Le but de la corrélation est de mesurer le degré de ressemblance de ces signaux et d'extraire des informations qui, dans une large mesure, dépendent de l'application considérée. La corrélation est utilisée dans les radars, les sonars, les communications numériques, la détection de signaux noyés dans du bruit, la mesure de temps de transmission.....

5.2.2 Corrélation pour les signaux à énergie finie

Pour des signaux d'énergie finie, on définit :

La fonction d'inter-corrélation de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est définie par :

$$R_{xy}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \quad (5.1)$$

La fonction d'autocorrélation d'un signal $x(t)$ (lorsque $x(t) = y(t)$) est définie par :

$$R_{xx}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad (5.2)$$

Dans ce cas, si $\tau = 0 \Rightarrow R_{xx}(0) \equiv \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = E_x \Rightarrow$ L'énergie de signal $x(t)$

5.2.3 Corrélation pour les signaux à puissance moyenne finie

La corrélation est une mesure fondamentale pour analyser les relations temporelles ou statistiques entre les signaux. Lorsqu'il s'agit de signaux à puissance moyenne finie, la notion de fonction d'auto-corrélation et de fonction de corrélation croisée joue un rôle central. Ces concepts sont utilisés pour évaluer les similarités entre les signaux ou leurs composantes sur différentes échelles de temps.

1. Autocorrélation pour un signal à puissance moyenne finie

Un signal à puissance moyenne finie est un signal pour lequel la puissance moyenne est bien définie et reste finie, c'est-à-dire :

- Intercorrélation :

$$R_{xy}(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y^*(t - \tau) dt \quad (5.3)$$

Cette fonction permet d'identifier le décalage temporel optimal τ qui maximise la corrélation entre les deux signaux.

Propriétés $R_{xy}(\tau)$

- En général $R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$

- Autocorrélation :

$$R_{xx}(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x^*(t - \tau) dt \quad (5.4)$$

Dans ce cas, si $\tau = 0 \Rightarrow R_{xx}(0) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = P_{\text{moy}} \Rightarrow$ La puissance moyenne de signal $x(t)$

L'inégalité de Schwartz permet d'écrire : $|R_{xx}(\tau)| \leq |R_{xx}(0)|$.

L'auto-corrélation est maximale lorsque le retard est nul, donc le ressemblance est maximale en absence de décalage.

Exemple 1.11

Déterminez la fonction d'Autocorrélation pour le signal $x(t) = e^{-3t}u(t)$

$$R_{xx}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3t} u(t) e^{-3(t-\tau)} u(t - \tau) dt = e^{3\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-6t} u(t) u(t - \tau) dt$$

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} e^{3\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-6t} dt = \frac{1}{6} e^{-3\tau} & \text{avec } \tau \geq 0 \\ e^{3\tau} \int_0^{+\infty} e^{-6t} dt = \frac{1}{6} e^{3\tau} & \text{avec } \tau < 0 \end{cases} \Rightarrow R_{xx}(\tau) = \frac{1}{6} e^{-3|\tau|}$$

5.3 Densités spectrale d'énergie et de puissance

. Le théorème de Parseval nous permet d'écrire : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

ou $X(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$

On définit la densité spectrale d'énergie est comme la densité d'énergie par unité de fréquence

$$S_x(\omega) \equiv |X(\omega)|^2 \quad (5.5)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal $x(t)$ est définie comme unité de fréquence

$$S_x(\omega) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(\omega)|^2 \quad (5.6)$$

5.4 Théorème de Wiener Kintchine

On appelle densité spectrale de puissance (pour les signaux de puissance moyenne finie) ou densité spectrale d'énergie (pour les signaux d'énergie finie) la transformée de Fourier des fonctions de corrélation. Soit la fonction d'autocorrélation d'un signal déterministe d'énergie

$$\text{finie: } R_{xx}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt.$$

La relation suivante constitue le théorème de Wiener Kintchine :

$$S_x(\omega) \equiv TF \{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (5.7)$$

Le théorème de Wiener-Khintchine établit une relation fondamentale entre la fonction d'autocorrélation d'un signal et sa densité spectrale. Il est particulièrement utilisé dans l'analyse des signaux stationnaires en théorie des probabilités et en traitement du signal.

5.4.2 Relation entre auto-corrélation et la densité spectrale d'énergie

La densité spectrale de puissance (pour un signal stationnaire à puissance moyenne finie) ou la densité spectrale d'énergie (pour un signal à énergie finie) est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation du signal. Cette densité spectrale décrit la répartition de l'énergie (ou de la puissance) d'un signal en fonction de la fréquence.

Soit un signal déterministe $x(t)$ d'énergie finie. La fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(\tau)$ est donnée par :

$$R_{xx}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt$$

où τ est le décalage temporel.

La densité spectrale d'énergie $S_{xx}(\omega)$ est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(\tau)$:

$$S_x(\omega) \equiv TF \{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Inversement, la fonction d'auto-corrélation peut être obtenue à partir de la densité spectrale en effectuant la transformée de Fourier inverse :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Ces relations montrent que $R_{xx}(\tau)$ et $S_{xx}(\omega)$ forment une paire de transformées de Fourier.

- **Applications du théorème de Wiener-Khintchine**

- a) **Analyse spectrale** : Permet d'étudier la distribution en fréquence de l'énergie ou de la puissance d'un signal à partir de son auto-corrélation.
- b) **Traitement du signal** : Sert à concevoir des filtres adaptés ou à analyser les propriétés des signaux bruités.
- c) **Systèmes de communication** : Utile pour caractériser les processus aléatoires dans les canaux de transmission et optimiser la détection du signal.
- d) **Traitement d'images et séries temporelles** : Appliqué pour l'analyse statistique et le filtrage.

- **Extension aux processus aléatoires stationnaires**

Dans le cas de processus aléatoires stationnaires, la définition reste similaire. La densité spectrale de puissance $S_{xx}(\omega)$ est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$, qui correspond à l'espérance mathématique :

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)]$$

où E désigne l'espérance.

- **Importance**

Le théorème de Wiener-Khintchine établit un lien direct entre les domaines temporel et fréquentiel. Il fournit un outil puissant pour comprendre et manipuler les signaux dans de nombreux domaines scientifiques et d'ingénierie, notamment en télécommunications, en analyse audio, et dans les systèmes à signaux aléatoires.

Exercices :

Exercice01

Soit le signal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

1. Montrez que $x(t)$ est un signal d'énergie.
2. Trouver l'expression du spectre de densité d'énergie $S_x(\omega)$ de $x(t)$.
3. Évaluer l'énergie normalisée contenu dans les fréquences intérieure à 1 rad/s.
4. Évaluer la fonction d'auto-corrélation $R_{xx}(\tau)$ de $x(t)$.
5. Retrouver l'expression du spectre de densité d'énergie à partir de $R_{xx}(\tau)$.

Solution Exercice01

1. Energie totale du signal est : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$. qui est une valeur finie, c'est donc un signal d'énergie.

2. La transformée de Fourier de $e^{-t}u(t)$ est $X(\omega) = TF[x(t)] = \frac{1}{1+j\omega}$

$$\text{La densité spectrale d'énergie : } S_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{1+j\omega} \right|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}$$

4. l'énergie normalisée (intérieure à 1 rad/s):

$$E_x(0,1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} [\tan^{-1}(\omega)]_{-1}^{+1} = 0.25$$

5. Energie sous 1Hz (2π rad/s) : $E_x(0,1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} [\tan^{-1}(\omega)]_{-2\pi}^{+2\pi} = 0.45$

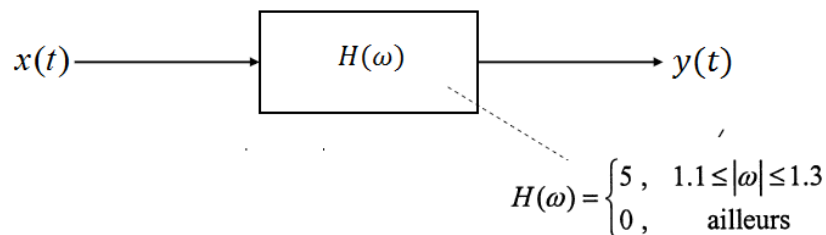
$$4. R_{xx}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t) e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) dt = \begin{cases} e^{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt & \text{pour } \tau < 0 \\ 0 \\ e^{\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-2t} dt & \text{pour } \tau \geq 0 \end{cases} = 0.5e^{\tau}u(-\tau) + 0.5e^{-\tau}u(\tau)$$

5. Le spectre de densité d'énergie est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation:

$$\begin{aligned} TF\{R_{xx}(\tau)\} &= TF\{0.5e^{\tau}u(-\tau) + 0.5e^{-\tau}u(\tau)\} = TF\{0.5e^{\tau}u(-\tau)\} + TF\{0.5e^{-\tau}u(\tau)\} \\ &= 0.5/(1-j\omega) + 0.5/(1+j\omega) = 1/(1+\omega^2) \end{aligned}$$

Exercice02

Soit le signal $x(t) = e^{-7t}u(t)$. Ce signal est appliqué à l'entrée du filtre suivant:



1. Déterminez $S_x(\omega)$, le spectre de densité d'énergie de $x(t)$

2. Déterminez $S_y(\omega)$, le spectre de densité d'énergie du signal $y(t)$ à la sortie du filtre

Solution Exercice02

1. Détermination $S_x(\omega)$, le spectre de densité d'énergie de $x(t)$

$$S_x(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad \text{et} \quad X(\omega) = TF[x(t)] = TF[e^{-7t}u(t)] = \frac{1}{7 + j\omega}$$

$$S_x(\omega) = \left| \frac{1}{7 + j\omega} \right|^2 = \frac{1}{49 + \omega^2}$$

2. Détermination $S_y(\omega)$, le spectre de densité d'énergie du signal $y(t)$ à la sortie du filtre

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) = \begin{cases} \frac{25}{\omega^2 + 49} & \text{si } 1.1 \leq |\omega| \leq 1.3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exercice03

Un signal $x(t)$ a la fonction d'auto-corrélation

$$R_{xx}(t) = e^{-|t|}, \quad -\infty < t < +\infty$$

1. Évaluer sa densité spectrale d'énergie $S_{xx}(\omega)$.
2. Évaluer l'énergie totale de $x(t)$.
3. Le signal $x(t)$ est appliqué à l'entrée d'un filtre ayant la réponse en fréquence

$$H(\omega) = \begin{cases} A & , \quad 2 \leq |\omega| \leq 4 \\ 0 & , \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

Évaluer l'énergie totale de la sortie $y(t)$ du filtre.

Solution Exercice03

1. Évaluation la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(\omega)$.

$$S_{xx}(\omega) = TF\{R_{xx}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-j\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} d\omega = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

2. Évaluation l'énergie totale de $x(t)$.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (\text{avec } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tan^{-1}(\omega) d\omega)$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi = 1 \text{ Joule}$$

3. Évaluation l'énergie totale de la sortie $y(t)$ du filtre.

l'énergie totale de la sortie $y(t)$ du filtre:

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \Rightarrow |Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \left[\int_{-4}^{-2} S_x(\omega) d\omega + \int_2^4 S_x(\omega) d\omega \right] = \frac{A^2}{\pi} \left(\tan(\omega) \Big|_{-4}^{-2} + \tan(\omega) \Big|_2^4 \right) = 0.1393 A^2$$

Exercice04

Soient deux signaux définis par les expressions analytiques suivantes :

$x(t) = e^{2t}[u(t+5) - u(t-5)]$ et $h(t) = u(5-t)$ ($u(t)$ est l'échelon unité)

1. Représenté graphiquement $x(t)$ et $h(t)$
2. Évaluer la convolution entre $x(t)$ et $h(t)$
3. Évaluer l'inter corrélation entre $x(t)$ et $h(t)$

Solution Exercice04

1. Représentation graphique de $x(t)$ et $h(t)$



2. Convolution :

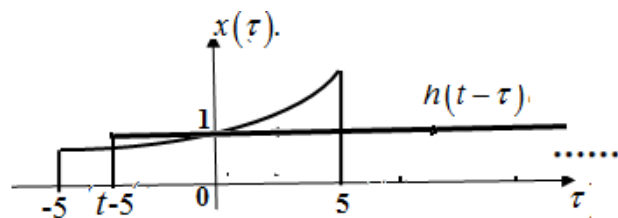
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-5}^5 x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-5}^5 e^{2\tau} d\tau = \frac{e^{10} - e^{-10}}{2}$$

avec $t-5 < -5$, i.e $t < 0$

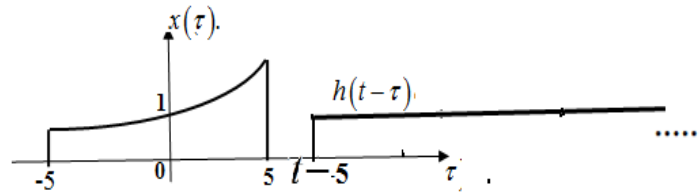
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{t-5}^5 e^{2\tau} \cdot d\tau = \frac{e^{10} - e^{2(t-5)}}{2}$$

avec $-5 < t-5 < 5$, i.e $0 < t < 10$



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

$= 0$ avec $t-5 > 5$ et $t > 10$

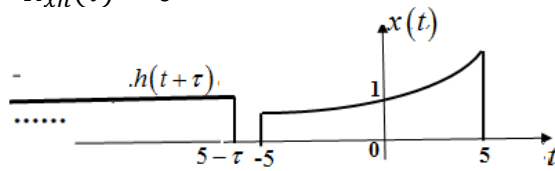


$$y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} \frac{e^{10} - e^{-10}}{2} & \text{si } t < 0 \\ \frac{e^{10} - e^{2(t-5)}}{2} & \text{si } 0 < t < 10 \\ 0 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

3. Corrélation :

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot u(5 - t - \tau) dt$$

pour $5 - \tau < -5$, i.e $\tau > 10$
 $R_{xh}(\tau) = 0$

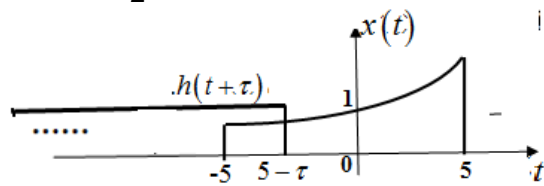


$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot u(5 - t - \tau) dt$$

pour $-5 < 5 - \tau < 5$, i.e $0 < \tau < 10$

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-5}^{5-\tau} e^{2t} \cdot dt = \frac{e^{2(5-\tau)} - e^{-10}}{2}$$

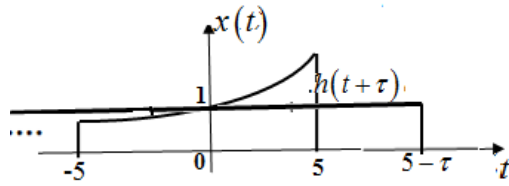
$$R_{xh}(\tau) = \frac{e^{-10} e^{-2\tau} - e^{-10}}{2}$$



$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot u(5 - t - \tau) dt$$

pour $5 < 5 - \tau$, i.e $\tau < 0$

$$R_{xh}(\tau) = \int_{-5}^5 e^{2t} \cdot dt = \frac{e^{10} - e^{-10}}{2}$$



$$R_{xh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot h(t + \tau) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau > 10 \\ \frac{e^{-10}e^{-2\tau} - e^{-10}}{2} & \text{si } 0 < \tau < 10 \\ \frac{e^{10} - e^{-10}}{2} & \text{si } \tau < 0 \end{cases}$$

Exercice05

Soit le signal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

1. Montrez que $x(t)$ est un signal d'énergie.
2. Trouver l'expression du spectre de densité d'énergie $S_x(\omega)$ de $x(t)$.
3. Évaluer l'énergie normalisée contenu dans les fréquences intérieure à 1 rad/s.
4. Évaluer la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$ de $x(t)$.
5. Retrouver l'expression du spectre de densité d'énergie à partir de $R_{xx}(\tau)$.

Solution Exercice05

1. Energie totale du signal est : $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$, qui est une valeur finie, c'est donc un signal d'énergie.

2. La transformée de Fourier de $e^{-t}u(t)$ est $X(\omega) = TF[x(t)] = \frac{1}{1 + j\omega}$

La densité spectrale d'énergie : $S_x(\omega) = |X(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{1 + j\omega} \right|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$

4. l'énergie normalisée (intérieure à 1 rad/s): $E_x(0,1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} [\tan^{-1}(\omega)]_{-1}^{+1} = 0.25$

5. Energie sous 1Hz (2π rad/s) : $E_x(0,1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} [\tan^{-1}(\omega)]_{-2\pi}^{+2\pi} = 0.45$

$$4. R_{xx}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}u(t) e^{-(t-\tau)}u(t-\tau) dt = \begin{cases} e^{\tau} \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt & \text{pour } \tau < 0 \\ 0 & \\ e^{\tau} \int_{\tau}^{+\infty} e^{-2t} dt & \text{pour } \tau \geq 0 \end{cases} = 0.5e^{\tau}u(-\tau) + 0.5e^{-\tau}u(\tau)$$

5. Le spectre de densité d'énergie est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation:

$$TF\{R_{xx}(\tau)\} = TF\{0.5e^{\tau}u(-\tau) + 0.5e^{-\tau}u(\tau)\} = TF\{0.5e^{\tau}u(-\tau)\} + TF\{0.5e^{-\tau}u(\tau)\} \\ = 0.5/(1 - j\omega) + 0.5/(1 + j\omega) = 1/(1 + \omega^2)$$

Conclusion

Ce polycopié a été conçu pour fournir une introduction rigoureuse et structurée à la **"Théorie du Signal"**, une discipline fondamentale dans les télécommunications et les systèmes de traitement de l'information. À travers les cinq chapitres présentés, les concepts essentiels ont été progressivement développés, offrant ainsi aux étudiants une base solide pour comprendre les principes qui régissent l'analyse et le traitement des signaux.

Les notions abordées, allant de la classification des signaux et des transformations mathématiques à des outils tels que la convolution et la corrélation, permettent non seulement de poser les bases théoriques, mais également de faire le lien avec des applications concrètes en télécommunications, comme la modulation, la filtration, et l'analyse fréquentielle.

Au-delà de la simple assimilation des concepts, ce document vise également à développer une intuition pratique et une capacité d'analyse critique chez les étudiants. Ces compétences sont indispensables pour aborder les défis technologiques modernes, que ce soit dans la conception de systèmes de communication, le traitement de données numériques, ou l'analyse des processus aléatoires.

En plus de transmettre des connaissances fondamentales, ce document vise à développer chez les étudiants une intuition pratique et une capacité d'analyse critique. Ces compétences sont cruciales pour relever les défis des technologies modernes, notamment dans la conception de systèmes de communication, le traitement des données numériques, ou encore l'analyse des processus aléatoires, éléments essentiels dans un environnement technologique en constante évolution.

En conclusion, la Théorie du Signal représente une pierre angulaire pour les ingénieurs en télécommunications et en traitement de l'information. Nous espérons que ce polycopié constituera un outil précieux pour les étudiants, les aidant non seulement à maîtriser les outils fondamentaux, mais également à s'engager avec passion dans l'exploration et l'approfondissement de cette discipline essentielle et dynamique.

Références bibliographiques

- [01] Corinthios, M. (2018). Signals, Systems, Transforms, and Digital Signal Processing with MATLAB. CRC Press. ISBN: 978-1138045982
- [02] S. Haykin, "Signals and systems", John Wiley & sons, 2ed, 2003
- [03] A. V. Oppenheim, "Signals and systems", Prentice-Hall, 2004
- [04] Mori Yvon, "Signaux aléatoires et processus stochastiques", Lavoisier, 2014
- [05] Sundararajan, D. (2023). Signals and Systems – A Practical Approach (2nd Ed.). Switzerland, Springer
- [06] M. Bellanger, "Traitement numérique du signal : Théorie et pratique", 8e édition, Dunod, 2006.
- [07] J. M. Brossier, "Signal et Communications Numériques, Collection Traitement de Signal", Hermès, Paris, 1997
- [08] M. KUNT, "Traitement Numérique des Signaux", Dunod, Paris, 1981
- [09] N. Hermann, "Probabilités de l'ingénieur : variables aléatoires et simulations Bouleau", 2002
- [10] Proakis, J. G., & Manolakis, D. G. (2007). Digital Signal Processing – Principles, Algorithms, and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [11] Mitra, S. K. (2011). Digital Signal Processing – A Computer-Based Approach. New York: McGraw Hill