MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Dr Moulay Tahar De Saida

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

Département des Sciences Economiques

Polycopié de Cours "Mathématiques I"

Niveau:$1^{ère}$ Année Licence Socle Commun S.E.G.C

Semestre: 01

Présenté par: Boutlilis Mokhtaria

Année Universitaire 2019-2020

Table des Matières

Chapitre 1

Éléments de la théorie des ensembles

1.1 Ensembles

1.1.1 Définitions

Définition. Un ensemble est une collection d'objets. Les objets d'un ensemble sont encore appelés éléments de cet ensemble.

Exemple

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.
2. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
3. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
4. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Remarque. On convient qu'il existe un ensemble ne contenant aucun élément qu'on appellera l'ensemble vide. On le notera par $\emptyset$ (ou par $\{\ \}$).

Notation. Soit **A** un ensemble et **a** un élément de **A.**

a $\in$ **A** <u>se lit</u> : **"a"** appartient à **"A ".**

Définition. Soient **A** et **B** deux ensembles non vides, **B** est dit sous ensemble de **A** ou que **B** est inclus dans **A**, et on note **B** $\subset$ **A**, si tous les éléments de **B** appartiennent à **A**. Dans le cas contraire, on note **B** $\not\subset$**A**.

Exemple

1. $\mathbf{B = \{0, 2, 7\}}$ est inclus dans $\mathbf{A = \{7, 2, 5, -1, -4, 0\}}$.
2. $\{\frac{-1}{2}, 4, \frac{3}{5}\}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ constitué des **3** éléments $\frac{-1}{2}$,**4**, $\frac{3}{5}$.
3. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0\} \subset \mathbb{R}$.
5. $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} \subset \mathbb{R}$.

Proposition. Deux ensembles **A** et **B** sont égaux (noté **A=B**) si et seulement si **A** $\subset$ **B** et **B** $\subset$ **A**.

Remarque. En pratique, on démontrera très souvent une égalité de deux ensembles par cette double inclusion.

Définition $\mathcal{P}$**(E).** Soit **E** un ensemble, on note $\mathcal{P}$**(E)** l'ensemble de toutes les parties de **E.**

Remarque

1. Ainsi $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.
2. Plus généralement $F \subset E$ se réécrit $F \in \mathcal{P}(E)$. On prendra garde à ne pas confondre les notions d'appartenance et d'inclusion.

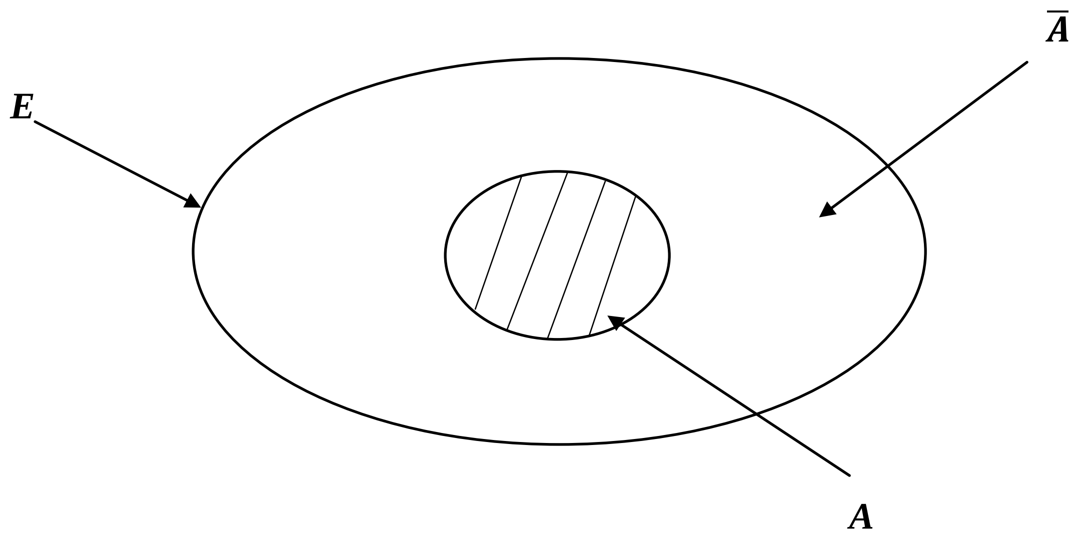
$$A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E) \quad \text{et} \quad x \in E \Leftrightarrow \{x\} \subset E \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(E).$$

Exemple. Soit $\mathbf{E} = \{2,3\}$ alors $\mathcal{P}(\mathbf{E}) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$

1.1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition. ***Complémentaire.***

Soient **E** un ensemble et **A** une partie de **E**. On appelle complémentaire de **A** dans **E** et on note $\overline{A}$, ou **E\A**, ou encore $\mathbf{C_E A}$, l'ensemble $\overline{A} = \{x \in E \setminus x \notin A\}$.



Remarque.

1. Si **A** est une partie à la fois de **E** et de **F**, ses complémentaires respectivement dans **E** et **F** ne sont pas a priori égaux.
2. Cette définition se généralise à deux ensembles quelconques par **: B – A**, qui se lit **B** moins **A** (ou **B\A** qui se lit **B** privé de **A**), qui est l'ensemble $\{x \in B \,/\, x \notin A\}$.

Exemple.

Si **A= [-1,1]** et **B= [0,2],** alors **B – A =]1, 2].**

Proposition. Soit **E** un ensemble, les règles élémentaires sur les complémentaires dans **E** sont :

- $\overline{\emptyset} = \mathbf{E}$ et $\overline{E} = \emptyset$.
- Pour toute partie **A** de **E**, $\overline{\overline{A}} = \mathbf{A}$.
- Pour toutes parties **A** et **B** de **E**, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Définition. Intersection / Union.

Soient **E** un ensemble et **A** et **B** deux parties de **E**.

1. On appelle intersection de **A** et **B** l'ensemble
$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ et } \mathbf{x} \in \mathbf{B}\}.$$
2. On appelle réunion de **A** et **B** l'ensemble
$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ ou } \mathbf{x} \in \mathbf{B}\}.$$

A et **B** sont dits disjoints si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.

Plus généralement, si **I** est un ensemble d'indices, $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ une famille de parties de **E**, nous pouvons définir :

1. La réunion des $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$; $\bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \mid \exists\, \mathbf{i} \in \mathbf{I} \text{ tel que } \mathbf{x} \in \mathbf{A}_i\}$.
2. L'intersection des $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$; $\bigcap_{i \in I} \mathbf{A}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{E} \mid \forall\, \mathbf{i} \in \mathbf{I}, \mathbf{x} \in \mathbf{A}_i\}$.

En particulier, pour des ensembles définis par des propriétés caractérisant les éléments, l'union se traduit par un **"ou"** et l'intersection par un **"et "**.

Remarques.

1. L'ordre d'apparition des parties n'a pas d'importance: $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$.
2. Pour tous **A** et **B**, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ et $\mathbf{A} \subset \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.
3. $\mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$ et $\mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}$.

4. Si **C** est également une partie de **E**, on a :

$$\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}) \cap \boldsymbol{B}.$$

On note plus simplement : $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$. De même pour la réunion.

Proposition. Pour toutes parties **A, B** et **C** d'un ensemble **E**, on a :

1. $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$ et $\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$ (lois de Morgan).
2. $\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$ (Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion).
3. $\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C})$ (Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection).

Exemple. Soit **E** un ensemble, **A** et **B** deux parties de **E** avec **B ⊂ A**. Alors

$(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}}) \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{A} \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cup \emptyset = \boldsymbol{A}$, donc il n'y a pas égalité dès que $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.

1.1.3 Produit cartésien

Définition. Produit cartésien de deux ensembles.

Soient **E** et **F** deux ensembles. On appelle produit cartésien de **E** et **F**, et on note **E × F**, l'ensemble des couples $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ où **x ∈ E** et **y ∈ F** <u>et on écrit:</u>

$$\mathbf{E} \times \mathbf{F} = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \ \boldsymbol{et} \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F} \right\}.$$

Lorsque **E=F**, noté $\boldsymbol{E}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}$.

Remarque.

1. L'ordre compte dans un couple : les couples $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ sont distincts, sauf si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Ainsi, il ne faudra pas confondre les ensembles **E × F** et **F × E** (sauf si **E = F**).

2. La définition se généralise aux **n**-uplets : $\mathbf{E_1}, \ldots, \mathbf{E_n}$ étant **n** ensembles, on note $\mathbf{E_1} \times \ldots \times \mathbf{E_n}$ l'ensemble des **n**-uplets $(\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n})$ où, pour tout $\mathbf{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$, $\boldsymbol{x_i} \in \boldsymbol{E_i}$.

1.2 Applications

1.2.1 Définitions

Définition. Application.

On définit une **application** $\boldsymbol{f}$ en donnant un ensemble **E** dit de départ, un ensemble **F** dit d'arrivée et, pour tout **x** élément de **E**, un unique élément de **F** noté $\boldsymbol{f(x)}$ et appelé **image** de **x** par f. $\boldsymbol{x}$ est alors appelé un **antécédent** par $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{f(x)}$.
L'ensemble des applications de **E** dans **F** est noté $\mathfrak{F}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.

Remarques.

1. Plus formellement, une application est un triplet **(E, F,Γ)** où **E** et **F** sont deux ensembles et où **Γ** est une partie de **E x F** (appelée graphe de $\boldsymbol{f}$), telle que, pour tout $\boldsymbol{x \in E}$, il existe un et un seul $\boldsymbol{y \in F}$ vérifiant $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{\Gamma}$. Cet unique $\boldsymbol{y}$ est alors noté $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.
2. Pour indiquer que $\boldsymbol{f}$ est une application de **E** dans **F,**

   on écrit $\boldsymbol{f} : \begin{cases} \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F} \\ \\ \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \end{cases}$ ou $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{F}$.

   $ou\ encore\ \boldsymbol{E} \overset{\boldsymbol{f}}{\to} \boldsymbol{F}.$

3. Soit $\boldsymbol{f}$ une application de **E** dans **F.** Tout élément de **E** a une unique Image; en revanche un élément de **F** peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents par $\boldsymbol{f}$.
4. La courbe **Γ** est le graphe d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et

seulement si toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en au plus un point.

Définition. Image d'une partie par une application.

Soit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ une application, $\boldsymbol{A}$ une partie de $\boldsymbol{E}$.

On définit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ comme étant l'ensemble des valeurs prises par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ lorsque "**a**" parcourt **A**. on a donc :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \left\{ \boldsymbol{y} \, \epsilon \boldsymbol{F} \;/\; \exists \boldsymbol{a} \, \epsilon \, \boldsymbol{A} \; avec \; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \right\}.$$

Plus souvent, on note tout simplement $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \left\{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{a} \, \epsilon \, \boldsymbol{A}\right\}$.

Exemple. On peut définir l'ensemble des entiers impairs par :

$\left\{\boldsymbol{2k} + \boldsymbol{1}, \boldsymbol{k} \, \epsilon \, \mathbb{N}\right\}$, (c'est par exemple, l'image de $\mathbb{N}$ par l'application

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par ; $\forall \, \boldsymbol{x} \, \epsilon \, \mathbb{R}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x} + \boldsymbol{1}$).

Définition. Application Identité.

Soit **E** un ensemble, On définit l'application identité $\boldsymbol{Id_E}$ de **E** par :

$$\boldsymbol{Id_E} : \begin{cases} \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E} \\ \\ \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x} \end{cases}$$

1.2.2 Opérations sur les applications

Définition. Restriction / Prolongement.

Soient $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{F}$ des ensembles tels que $\boldsymbol{E_1} \subset \boldsymbol{E_2}$, $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{E_1} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E_2} \longrightarrow \boldsymbol{F}$

deux applications. On suppose que, pour tout $\boldsymbol{x} \, \epsilon \, \boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$. On dit alors que $\boldsymbol{g}$ est la restriction de $\boldsymbol{f}$ à $\mathbf{E_1}$, que l'on note $\boldsymbol{g = f_{\backslash E_1}}$ et $\boldsymbol{f}$ un prolongement de $\boldsymbol{g}$ à $\mathbf{E_2}$.

Exemple. Soit $\boldsymbol{g}: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{g(x) = \frac{sin(x)}{x}}$ pour $\boldsymbol{x \neq 0}$. Alors un prolongement $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de $\boldsymbol{g}$ est une application qui vérifie

$\forall\ \boldsymbol{x\ \neq 0, f(x) = \frac{sin(x)}{x}}$ et $\boldsymbol{f(0)}$ est un réel quelconque. Si l'on veut en plus que $\boldsymbol{f}$ soit continue en $\mathbf{0}$, il faudra imposer que $\boldsymbol{f(0) = 1}$.

Définition*. *Composée de deux applications.

Soient $\mathbf{E, F, G}$ des ensemble, $\mathbf{F_1}$ une partie de $\mathbf{F}$, $\boldsymbol{f: E \longrightarrow F}$ et $\boldsymbol{g: F_1 \longrightarrow G}$

des applications. Si $\boldsymbol{f}$ ne prend que des valeurs dans $\mathbf{F_1}$, c'est-à-dire $\forall\ \boldsymbol{x \in E,}$ $\boldsymbol{f(x) \in F_1}$, on définit la composée de $\boldsymbol{f}$ et de $\boldsymbol{g}$ (ou de $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{g}$), notée $\boldsymbol{g \circ f}$, comme étant l'application

$$\boldsymbol{g \circ f}: \begin{cases} \boldsymbol{E \longrightarrow G} \\ \boldsymbol{x \longmapsto g[f(x)]} \end{cases}$$

Exemple.

Si $\boldsymbol{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto e^x} \end{cases}$ et $\boldsymbol{g}: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto \sqrt{x}} \end{cases}$, comme $\boldsymbol{f(x)} > 0$ *pour tout réel* $\boldsymbol{x}$,

on peut définir $\boldsymbol{g \circ f,}$ et on a $\boldsymbol{g \circ f}: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto \sqrt{e^x}} \end{cases}$

Proposition. Soient $\mathbf{E, F}$ des ensembles et $\boldsymbol{f : E \longrightarrow F}$ une application. Alors $\boldsymbol{Id_E \circ f = f\ et\ f \circ Id_E = f}$.

Proposition. La composition est associative: Soient $\mathbf{E, F, G, H}$ des ensembles et $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{F} \longrightarrow \boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{h} : \boldsymbol{g} \longrightarrow \boldsymbol{H}$ des applications, alors :

$(\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g}) \circ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{h} \circ (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$ (que l'on note alors plus simplement $\boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$).

1.2.3 Injectivité, surjectivité, Bijectivité

Définition. Application Injective.

On dit qu'une application $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ est injective si tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$ a au plus un antécédent par $\boldsymbol{f}$ dans $\mathbf{E}$, autrement dit si :

Pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, l'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a au plus une solution $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$,

Ce qui revient à :

$$\text{Pour tout } (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \in \boldsymbol{E}^2, \ \big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2}) \implies \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}\big),$$

Ou en contraposant :

$$\text{Pour tout } (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \in \boldsymbol{E}^2, \ \big(\boldsymbol{x_1} \neq \boldsymbol{x_2} \implies \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})\big).$$

Remarque. Soit $\boldsymbol{\Gamma}$ le graphe d'une application $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $\boldsymbol{f}$ est injective si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe $\boldsymbol{\Gamma}$ en au plus un point.

Exemple.

1. $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$ est injective.
2. $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_-$ est injective.

Définition. Application surjective.

On dit qu'une application $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ est surjective si tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$ a au moins un antécédent par $\boldsymbol{f}$ dans $\mathbf{E}$, autrement dit si :

Pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, il existe $\mathbf{x} \in \boldsymbol{E}$ tel que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

En terme d'équation, cela revient à :

Pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, l'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a au moins une solution $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

Remarque. Soit $\boldsymbol{\Gamma}$ le graphe d'une application $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $\boldsymbol{f}$ est surjective si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe $\boldsymbol{\Gamma}$ en au moins un point.

Exemples.

1. $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ n'est pas surjective, car $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\mathbf{1}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+$ est surjective (si $\boldsymbol{y}$ est positif, on a $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\sqrt{\boldsymbol{y}})$).

Définition. Application bijective.

On dit qu'une application $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{y}$ admet un et un seul antécédent par $\boldsymbol{f}$: Pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, il existe un unique $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ tel que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

En terme d'équation, cela revient à :

Pour tout $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, l'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a exactement une et une seule solution $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

Définition. Application réciproque d'une bijection.

Soit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ une application bijective, on appelle application réciproque de f, et on note $\boldsymbol{f}^{-\mathbf{1}}$, l'application de **F** dans **E** qui à $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$ associe l'unique antécédent par $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{y}$ par $\boldsymbol{f}$, c'est-à-dire l'unique solution $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ de l'équation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Ainsi, pour $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{F}$, on a $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{f}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$.

Exemples.

1. $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \boldsymbol{x \longmapsto x^2} \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \boldsymbol{x \longmapsto \sqrt{x}} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ \boldsymbol{x \longmapsto e^x} \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto \ln(x)} \end{cases}$

Théorème.

Une application $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$ est bijective si et seulement s'il existe une application $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{F} \longrightarrow \boldsymbol{E}$ telle que : $\boldsymbol{f \circ g = Id_F \ et \ g \circ f = Id_E}$ **.**

Le cas échéant, l'application **g** est unique, c'est $\boldsymbol{g = f^{-1}}$.

En particulier $\boldsymbol{f^{-1}}$ est elle-même bijective, d'application réciproque

$$\boldsymbol{(f^{-1})^{-1} = f}.$$

Corollaire. Soient $\boldsymbol{f : E \longrightarrow F}$, $\boldsymbol{g : F \longrightarrow G}$ des applications bijectives. Alors $\boldsymbol{g \circ f}$ est bijective et son application réciproque est

$$\boldsymbol{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}.$$

Démonstration.

On a $\boldsymbol{(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_F \circ g^{-1}}$

$$\boldsymbol{= g \circ g^{-1} = Id_G} \quad \underline{\underline{\boldsymbol{et}}}$$

$$\boldsymbol{(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ Id_F \circ f}$$

$$\boldsymbol{= f^{-1} \circ f = Id_E}.$$

Donc $\boldsymbol{g \circ f}$ est bijective de réciproque $\boldsymbol{f^{-1} \circ g^{-1}}$.

Remarque. Soit $\boldsymbol{f}$ une bijection, on appelle alors souvent " bijection réciproque de $\boldsymbol{f}$" l'application réciproque de $\boldsymbol{f}$, puisqu'elle est aussi bijective.

1.3 Exercices d'application

***Exercice 01*:** On désigne par $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux ensembles:

$\boldsymbol{A} =\{ \boldsymbol{x} / \boldsymbol{x}$ est un article rendu hors de France$\}$,

$\boldsymbol{B} =\{\boldsymbol{y} / \boldsymbol{y}$ est un article fabriqué par la machine $\mathbf{M}\}$,

le référentiel $\mathbf{R}$ étant l'ensemble des articles produits par une entreprise $\boldsymbol{E}$.

1. Que signifient
   $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$
   $\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$
   $\overline{\boldsymbol{A}}$ **?**
2. Démontrer les relations :
   $\boldsymbol{C_R}(\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{B}}) \cup (\overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) = \overline{\boldsymbol{A}}.$
   $\boldsymbol{C_R}(\boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{B}}) \cap (\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}) = \overline{\boldsymbol{A}}.$

Donnez leur signification.

***Exercice 02*:** Soit $\boldsymbol{E}$ un ensemble et $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux sous ensemble de $\boldsymbol{E}$.

Montrer que : $\boldsymbol{C_E}\ \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C_E}\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C_E}\boldsymbol{B}$

$\boldsymbol{C_E}\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C_E}\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C_E}\boldsymbol{B}$

***Exercice 03*:** Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C},$ trois ensembles non vides, montrer que:

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \cap (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}).$

$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \cup (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}).$

Si $\boldsymbol{A}$ est un sous ensemble de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{C}$ un sous ensemble de $\boldsymbol{F}$, a-t-on l'identité suivante:

$$\boldsymbol{C_{E\times F}}\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{C_E}\ \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C_F}\ \boldsymbol{C}.$$

***Exercice 04*:** On donne les ensembles suivants:

$\boldsymbol{A} = \{$Amiens, Bruxelles, Chartres, Dijon, Epinal$\}$

$\boldsymbol{B} = \{$Amiens, Chartres, Epinal$\}$

$\boldsymbol{C} = \{$Chartres, Dijon, Epinal$\}$

1. $\boldsymbol{A}$ étant le référentiel, calculer : $\overline{\boldsymbol{C}}, \overline{\boldsymbol{B}}, \overline{\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}}$ et $\overline{\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}}$ et donner leur signification.
2. Vérifier sur $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ les lois de Morgan.
3. Calculer les quatre sous-ensembles de $\boldsymbol{A}$:
   $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \cap \overline{\boldsymbol{B}},\quad \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{C}} \cap \boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{d} = \overline{\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}}$

et donner leur signification.

Déterminer la réunion de ces quatre sous-ensembles. Que remarquez-vous ?

le résultat trouvé est-il vrai pour deux sous-ensembles quelconques d'un ensemble donné, ou est-il dû à un choix particulier des sous-ensembles $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$**?** démontrez-le.

***Exercice 05*:** Soit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$, et $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux sous-ensembles de $\boldsymbol{F}$.

Montrer que : $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{A}) \cap \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B})$

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{A}) \cup \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B})$$

Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des sous ensembles de $\boldsymbol{E}$, a-t-on les identités suivantes:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) \cup \boldsymbol{f}(\boldsymbol{B}),\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) \cap \boldsymbol{f}(\boldsymbol{B}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}).$$

A quelles conditions ces identités sont-elles vraies pour tous $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$**?**

***Exercice 06*:** Soit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{F}$, montrer que si $\boldsymbol{f}$ est surjective, alors

$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B})\right)=\boldsymbol{B}$ pour tout $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{F}$, mais si $\boldsymbol{f}$ n'est pas surjective il existe des parties $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{F}$ telles que $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{B})\right)\neq\boldsymbol{B}$.

De même si $\boldsymbol{f}$ est injective alors $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}))=\boldsymbol{A}$, pour tout $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{E}$, et si $\boldsymbol{f}$ n'est pas injective, il existe alors des parties $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{E}$ telles que $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}))\neq\boldsymbol{A}$.

<u>Exercices 07</u>**:** Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (auquel cas déterminer la bijection réciproque) :

1. $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}\longmapsto\boldsymbol{2k+1}\in\mathbb{N}^*$.
2. $\boldsymbol{g}:\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\setminus\{\boldsymbol{3}\}\longmapsto\frac{\boldsymbol{2+x}}{\boldsymbol{3-x}}\in\mathbb{R}\setminus\{\boldsymbol{-1}\}$.
3. $\boldsymbol{h}:\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\longmapsto\sqrt{\boldsymbol{x^2+x+1}}\in\mathbb{R}$.
4. $\boldsymbol{K}:\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\longmapsto\frac{\boldsymbol{e^x-1}}{\boldsymbol{e^x+1}}\in\mathbb{R}$.
5. $\boldsymbol{L}:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}\longmapsto(\boldsymbol{x+3y},\boldsymbol{x+y})\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$.

<u>Exercice 08</u>**:** Soit $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{E}\longrightarrow\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{g}:\boldsymbol{F}\longrightarrow\boldsymbol{G}$ deux applications.

Démontrer que :

1. Si $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont injectives, alors $\boldsymbol{gof}$ aussi.
2. Si $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont surjectives, alors $\boldsymbol{gof}$ aussi.
3. Si $\boldsymbol{gof}$ est injective, alors $\boldsymbol{f}$ aussi.
4. Si $\boldsymbol{gof}$ est surjective, alors $\boldsymbol{g}$ aussi.
5. Si $\boldsymbol{f}$ est bijective, alors $\boldsymbol{g}$ est injective si et seulement si $\boldsymbol{gof}$ l'est.
6. Si $\boldsymbol{f}$ est bijective, alors $\boldsymbol{g}$ est surjective si et seulement si $\boldsymbol{gof}$ l'est.

<u>Exercice 09</u>**:** Soient $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{E}\longrightarrow\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{g}:\boldsymbol{F}\longmapsto\boldsymbol{G}$ deux applications.

i) Montrer que si $\boldsymbol{gof}$ est injective et $\boldsymbol{f}$ est surjective alors $\boldsymbol{g}$ est injective.

ii) Montrer que si $\boldsymbol{gof}$ est surjective et $\boldsymbol{g}$ est injective alors $\boldsymbol{f}$ est surjective.

<u>Exercice 10</u>**:** Soi $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E}$ une application telle que $\boldsymbol{f o f o f} = \boldsymbol{f}$.

Montrer que $\boldsymbol{f}$ est injective si et seulement si $\boldsymbol{f}$ est surjective.

Chapitre 2

Suites Et Séries Numériques

2.1 Suites Réelles

2.1.1 Définition d'une suite réelle

Définition. Suite réelle.

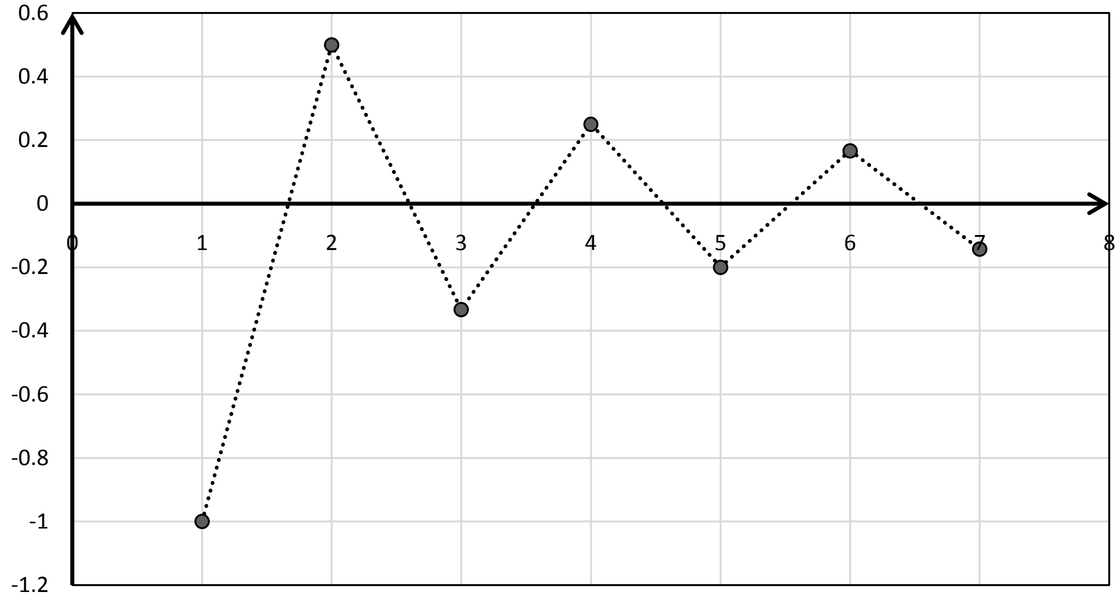
On appelle suite réelle toute fonction $\boldsymbol{U}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$**,** l'image de $\boldsymbol{n}$ par $\boldsymbol{U}$ sera notée $\boldsymbol{U_n}$ (plutôt que $\boldsymbol{U(n)}$) et appelée terme d'indice $\boldsymbol{n}$ de la suite $\boldsymbol{U}$.

La suite $\boldsymbol{U}$ sera également notée $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$.

Remarque. On définit également les suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$: ce sont les fonctions $\boldsymbol{U}$ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$. Une telle suite $\boldsymbol{U}$ est également notée $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*}$ ou $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\geq \mathbf{1}}$**.**

Plus généralement, on peut définir une suite à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$. il s'agit d'une fonction de $[\![\boldsymbol{n_0}, +\infty [\![$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple. U= $\left(\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}\right)_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*}$ est ne suite réelle indexée par $\mathbb{N}^*$.



Representation des premiers termes de la suite.

2.1.2 **Modes de définition d'une suite**

On peut définir une suite de différentes manières:

Suites définies explicitement. On définit une suite $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ explicitement lorsqu'on donne, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, l'expression de $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$.

Exemple. On définit les suites $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$, $(\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ explicitement en posant pour tout entier naturel n :

$$\boldsymbol{U_n} = \begin{cases} \ln(2\boldsymbol{n}+1) & , si\ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{10} \\ \boldsymbol{e^n} & , si\ \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{9} \end{cases} , \boldsymbol{V_n} = \begin{cases} \boldsymbol{2^n} & si\ n\ est\ pair \\ \boldsymbol{3^n} & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Suites définies par une relation de récurrence. On définit une suite $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ par une relation de récurrence lorsqu'on donne la valeur du premier terme ou des premiers termes de la suite, et l 'expression de $\boldsymbol{U_n}$ en fonction du terme précédent ou des termes précédents.

Exemple. On définit la suite $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ par:

$\boldsymbol{U_0 = 1}$ et $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{U_{n+1} = \frac{1}{2}\, U_n + 1.}$

Il revient au même de poser $\boldsymbol{U_0 = 1}$ et $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$: $\boldsymbol{U_n = \frac{1}{2} U_{n-1} + 1.}$ On dit que $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre $\boldsymbol{1}$ (chaque terme est défini en fonction du précédent).

Théorème. Suites arithmétiques et géométriques.

Soit $\boldsymbol{a}$ un réel et $\boldsymbol{U = U_{n \geq n_0}}$ une suite réelle.

1. Si pour tout $\boldsymbol{n \geq n_0}$, $\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + a}$, alors on dit que U est une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{a}$ et on a :

$$\forall\, \boldsymbol{n \geq n_0}\,, \boldsymbol{U_n = U_{n_0} + (n - n_0)a}.$$

2. Si pour tout $\boldsymbol{n \geq n_0}$, $\boldsymbol{U_{n+1} = aU_n}$, alors on dit que $\boldsymbol{U}$ est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{a}$ et on a:

$$\forall\, \boldsymbol{n \geq n_0}, \boldsymbol{U_n = U_{n_0}.\, a^{n-n_0}}.$$

2.1.3 Propriétés générales des suites réelles

Définition. **Sens de variation d'une suite**.

Une suite réelle $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ est dite:

- Constante lorsqu'il existe $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{U_n = a}$.
- Croissante lorsque : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{U_{n+1} \geq U_n}$.
- Décroissante lorsque : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{U_{n+1} \leq U_n}$.
- Strictement croissante lorsque : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{U_{n+1} > U_n}$.
- Strictement décroissante lorsque : $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : \boldsymbol{U_{n+1} < U_n}$.
- Monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

- Strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Méthode. Déterminer le sens de variation d'une suite.

Pour déterminer le sens de variation d'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut :

- Étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.
- Lorsque la suite ne s'annule pas, comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ avec $\mathbf{1}$ en faisant attention au signe de U_n.
- Lorsque la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donné explicitement sous la forme $U_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$, étudier le sens de variation de la fonction f.

Exemples d'application.

1. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n^2}$.

   $Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*, on\ a$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} \ = \frac{n^3+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\,.$$

   On obtient donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n > 0$ et on en déduit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $V_0 = -1\ et\ \forall\, n \in \mathbb{N}$,
   $V_{n+1} \ = V_n\,.\exp(n^2 + 1)$.
   On montre facilement par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, V_n < 0$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ona:

   $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \exp(n^2 + 1)$. Or $n^2 + 1 > 0$ donc $\frac{V_{n+1}}{V_n} > 1$.

   On en déduit que: $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} < V_n$ (car $V_n < 0$) et dont que

$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = n.e^{-n}$.
   On pose : $\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = x.e^{-x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f^{'}(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. D'où le tableau de variations de f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

Ainsi, f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) > f(n+1)$ c'est-à-dire $W_n > W_{n+1}$. Par conséquence, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

Définition. Suite Majorée, Minorée, Bornée.

Une suite $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est dite:

- **<u>Majorée</u>** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$,
- **<u>Minorée</u>** lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$,
- **<u>Bornée</u>** lorsqu'elle est simultanément majorée et minorée.

Proposition. Soit $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite réelle. $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|U_n|)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est majorée.

Démonstration. • Supposons $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ bornée.

Alors il existe deux réels $m\ et\ M$ tels que : $m \leq U_n \leq M$.

Posons $A = \max(|m|, |M|)$. $On\ a\ |M| \leq A\ donc\ M \leq A, et$

$$|m| \leq A \; donc \; -A \leq m.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-A \leq U_n \leq A$, soit $|U_n| \leq A$. Donc $(|U_n|)_{n\in \mathbb{N}}$ est majorée.

• Supposons $(|U_n|)_{n\in \mathbb{N}}$ majorée. Alors il existe un réelle M tel que:

$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq M.$

Autrement dit: $\forall n \; \mathbb{N}, -M \leq U_n \leq M.$ Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exemple.

La suite de terme général $U_n = \sin(\sqrt{n})$ est bornée car:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\sin(\sqrt{n})\right| \leq 1.$$

2.1.4 Suites Convergentes

Définition. Propriété vraie à partir d'un certain rang.

On dit qu'une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une propriété **P** à partir d'un certain rang, ou pour n assez quand, lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que **P** soit vérifiée par tous les termes $U_n \; pour \; n \geq n_0$.

Exemple. La suite $U = \left(\frac{3}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $U_n \in \left]0, 1\right[$ à partir d'un certain rang en effet, pour tout $n \geq 4,$ on a $0 < \frac{3}{n} < 1.$

Définition. intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On appelle intervalle Ouvert de $\mathbb{R}$ tout intervalle de la forme $]a, b[$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition. Suite Convergente.

• Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et ℓ un réel, on dit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite lorsque $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une des conditions équivalentes suivantes:

(i) Tout intervalle **I** ouvert contenant $\boldsymbol{\ell}$ contient les $\boldsymbol{U_n}$ pour tous les $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, sauf un nombre fini.

(ii) Pour tout intervalle **I** ouvert contenant $\boldsymbol{\ell}$,on a $\boldsymbol{U_n} \in \mathbf{I}$ à partir d'un certain rang.

(iii) Pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$, on a $|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\ell}| < \boldsymbol{\varepsilon}$ à partir d'un certain rang.

• Si une suite admet une limite $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle converge, sinon qu'elle diverge. Déterminer la nature d'une suite signifie déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Remarques.

1. On admettra l'équivalence entre les trois définitions. Toutefois, on peut remarquer que : $|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\ell}| < \varepsilon \Leftrightarrow \boldsymbol{U_n} \in]\boldsymbol{\ell} - \varepsilon, \boldsymbol{\ell} + \varepsilon[$:
   ainsi dans la définition (iii) on se restreint aux intervalles **I** de la forme **I**$=]\boldsymbol{\ell} - \varepsilon, \boldsymbol{\ell} + \varepsilon[$.
2. Dans **(iii)** on peut remplacer $|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\ell}| < \varepsilon$ $\boldsymbol{par}$ $|\boldsymbol{U_n} - \boldsymbol{\ell}| \leq \varepsilon$: on obtient une définition équivalente.

Théorème. Unicité de la limite.

Si une suite **U**$= (\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}$, alors celle-ci est unique.

On dit alors que $\boldsymbol{\ell}$ est la limite de $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ et on note $\boldsymbol{\ell} = \lim_{\boldsymbol{n} \to +\infty} \boldsymbol{U_n}$ ou $\boldsymbol{\ell} = \lim \mathbf{U}$ ou $\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[\boldsymbol{n} \to +\infty]{} \boldsymbol{\ell}$.

Démonstration.

On raisonne par l 'absurde : supposons qu'une suite $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ admette deux limites différentes $\boldsymbol{\ell}$ et $\boldsymbol{\ell'}$, avec $\boldsymbol{\ell} < \boldsymbol{\ell'}$.

Posons $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}'}{\mathbf{2}}$. $\boldsymbol{m}$ est le milieu du segment $[\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\ell}']$ et on a: $\boldsymbol{\ell} < \boldsymbol{m} < \boldsymbol{\ell}'$.

On considère les intervalles disjoints $\boldsymbol{I} =]-\infty, \boldsymbol{m}[$ et $\boldsymbol{I'} =]\boldsymbol{m}, +\infty[$.

$\mathbf{I}$ est un intervalle ouvert contenant $\boldsymbol{\ell}$ et $\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boldsymbol{\ell}$ donc par définition de la limite, on a $\boldsymbol{U_n} \in \mathbf{I}$ à partir d'un certain rang.

De même, $\boldsymbol{I'}$ est un intervalle ouvert contenant $\boldsymbol{\ell'}$et $\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boldsymbol{\ell'}$ donc $\boldsymbol{U_n} \in \boldsymbol{I'}$ à partir d'un certain rang.

Ces deux conclusions sont contradictoires puisque $\boldsymbol{I}\ et\ I'$ sont disjoints, donc si une suite admet une limite réelle, celle-ci est unique.

Théorème. Exemples fondamentaux de suites convergentes.

- Toute suite constante converge : si pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{a}$ alors $\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boldsymbol{a}$.
- Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un réel strictement positif, alors $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^{\alpha}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$.
- Soit $\boldsymbol{a} \in]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$, alors $\boldsymbol{a^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$.

Démonstration.

• La convergence des suites constantes est évidente.

• Soit $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$, notons que pour tout $\varepsilon > 0$, on a:

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^{\alpha}}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\varepsilon} < \boldsymbol{n^{\alpha}} \Leftrightarrow (\varepsilon)^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)} < \boldsymbol{n}.$$

Ainsi pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ et pour tout $\boldsymbol{n} > (\varepsilon)^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$, on a $\mathbf{0} \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^{\alpha}}} < \varepsilon$, soit

$\left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^{\alpha}}}\right| < \varepsilon$, autrement dit, $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^{\alpha}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$.

• Soit $\boldsymbol{a} \in]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$, si $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ alors : $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{a^n} = \mathbf{0}$ donc $\boldsymbol{a^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$.

Supposons par la suite $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$. Notons que pour tout $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$, on a:

$|a^n| < \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbf{n}\ \ln|a| < \ln(\mathcal{E}) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\mathcal{E})}{\ln|a|}$ Car $\ln|a| < 0$.

Ainsi pour tout $\boldsymbol{\mathcal{E}} > \mathbf{0}$ et pour tout $n > \frac{\ln(\mathcal{E})}{\ln|a|}$, on a $|a^n| < \mathcal{E}$, autrement dit, $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$. ∎

Le résultat suivant permet de déterminer la nature d'une suite $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle, en étudiant séparément les suites $(U_{2n})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$.

Proposition. Soient $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\boldsymbol{\ell}$ un nombre réel. On a l'équivalence suivante:

$(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ Converge vers $\boldsymbol{\ell} \Leftrightarrow (U_{2n})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

Exemples.

1. On définit $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ par : $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ si **n** est pair, et $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ si **n** est impair.

   $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$, donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$ d'où

   $U_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$.

   $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$ Donc $\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$, donc $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$ d'où

   $U_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$. Par conséquent $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{0}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = (-1)^n$.
   On a $V_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{1}$ mais $V_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\mathbf{1}$ donc $(V_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ diverge.

Définition. Limite par valeurs supérieures/inférieures.

Soit **U** = $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel $\boldsymbol{\ell}$. si à partir d'un certain rang, on a $U_n > l$ (respectivement, $U_n < \boldsymbol{\ell}$), on dit que **U** tend vers $\boldsymbol{\ell}$ par valeurs supérieures (respectivement inferieures) et on note $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^+$ (respectivement $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^-$).

Exemple.

On a $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ et $2-\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^-$.

2.1.5 Propriétés des suites Convergentes

Théorème. Opérations algébriques.

On suppose que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et que $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, Alors :

1. $U_n + V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a+b$ et $U_n - V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a-b$.
2. $U_n.V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a.b$.
3. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\,.\,U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\,.\,a$.
4. Si $a \neq 0$ alors $\frac{1}{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a}$ et $\frac{V_n}{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b}{a}$.

Démonstration.

On démontre ici à titre d'exemple le cas de la somme.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, donc par définition de la limite, il existe deux entiers n_1 *et* n_2 tels que :

- Pour tout $n \geq n_1$, $|U_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, c'est-à-dire $a - \frac{\varepsilon}{2} < U_n < a + \frac{\varepsilon}{2}$.
- Pour tout $n \geq n_2$, $|V_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, c'est-à-dire $b - \frac{\varepsilon}{2} < V_n < b + \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a:

$\boldsymbol{a+b-\varepsilon<\mathrm{U_n}+V_n<a+b+\varepsilon}$ C'est-à-dire:

$|(\boldsymbol{U_n+V_n})-(\boldsymbol{a+b})|<\varepsilon$. Par conséquent $\boldsymbol{U_n+V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a+b}$. ∎

Exemple. Montrons que la suite de terme général $\boldsymbol{U_n=\frac{5n^3+6n^2+1}{n^3+3n}}$ Converge et donnons sa limite .

Pour tout $\boldsymbol{n}$ non nul, on a : $\boldsymbol{U_n=\frac{5+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{3}{n^2}}}$. Or $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\boldsymbol{\frac{1}{n^3}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$ donc $\boldsymbol{5+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 5}$ et de plus $\boldsymbol{1+\frac{3}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ donc $\boldsymbol{U_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} 5}$.

Théorème: Compatibilité avec la relation d'ordre.

Soients $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que :

- **(i)** $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ **et** $(\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ convergent,
- **(ii)** À partir d'un certain rang $\boldsymbol{U_n\leq V_n}$,

alors $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} U_n \leq \lim_{n\to+\infty} V_n}$.

Démonstration.

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ les limites respectives de $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\boldsymbol{a\ >\ b}$.

On a $\boldsymbol{V_n-U_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a}$. Or $\boldsymbol{b-a<0}$ donc $]-\infty,\boldsymbol{0}[$, qui est un intervalle ouvert contenant $\boldsymbol{b-a}$, contient tous les $\boldsymbol{V_n-U_n}$ sauf un nombre fini. C'est absurde car tous les $\boldsymbol{V_n-U_n}$ sont positifs à partir d'un certain rang. ∎

Théorème. Composition des limites. Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux réels, $\boldsymbol{I}$ un intervalle contenant $\boldsymbol{a}$ ou admettant $\boldsymbol{a}$ pour borne, $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\boldsymbol{I}$.

Si $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ alors $f(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

Exemples.

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc par composition

   $\cos\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

2. Supposons que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Comme $e^x \xrightarrow[x\to\ell]{} e^\ell$, on en déduit par

   composition que $e^{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\ell$.

2.1.6 Théorèmes de convergence

Théorème. Théorème d'encadrement.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et ℓ un

Nombre réel. On suppose que:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite ℓ,

(ii) à partir d'un certain rang: $a_n \leq U_n \leq b_n$,

alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Démonstration.

Soit n_1 un entier naturel tel que : $\forall\, n \geq n_1$, $a_n \leq U_n \leq b_n$.

Soit I un intervalle ouvert quelconque contenant ℓ.

On a : $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc il existe deux entiers naturels n_2 et n_3 tels que:

- *Pour tout* $n \geq n_2$, $a_n \in I$.

- *Pour tout* $\boldsymbol{n \geq n_3}$ *,* $\boldsymbol{b_n} \in \boldsymbol{I}$.

Donc pour tout $\boldsymbol{n \geq \max(n_1, n_2, n_3)}$, on a $\boldsymbol{u_n} \in \boldsymbol{I}$. D'où $\boldsymbol{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$. ■

Théorème. Limite monotone.

Si une suite réelle $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée alors elle converge et sa limite $\boldsymbol{\ell}$ vérifie : $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_n} \leq \boldsymbol{\ell}$.

Si une suite réelle $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée alors elle converge et sa limite $\boldsymbol{\ell}$ vérifie : $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_n} \geq \boldsymbol{\ell}$.

Démonstration.

Étudions le cas d'une suite $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ croissante majorée. Posons $\mathbf{A}$ l'ensemble des valeurs prises par $\boldsymbol{U}$: $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{U_n}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\}$. $\boldsymbol{U}$ est majorée donc $\mathbf{A}$ également. En outre $\mathbf{A} \neq \emptyset$. Donc $\mathbf{A}$ admet une borne supérieure, que l'on note $\boldsymbol{\ell}$.

Montrons alors que $\boldsymbol{U}$ converge vers $\boldsymbol{\ell}$.

On sait déjà que: pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{U_n} \leq \boldsymbol{\ell}$, car $\boldsymbol{\ell}$ est un majorant de $\mathbf{A}$.

Soit $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ un intervalle ouvert quelconque contenant $\boldsymbol{\ell}$: on a $\mathbf{a} < \boldsymbol{\ell} < \boldsymbol{b}$.

Comme $\boldsymbol{\ell}$ est le plus petit des majorants de $\mathbf{A}$, alors $\boldsymbol{a}$ n'est pas un majorant de $\mathbf{A}$ donc il existe $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ tel que : $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{U_{n_0}} \leq \boldsymbol{\ell}$. Or $\mathbf{U}$ est croissante, donc pour tout $\mathbf{n} > \mathbf{n_0}$, $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{U_{n_0}} \leq \boldsymbol{U_n} \leq \boldsymbol{\ell}$ et a fortiori $\boldsymbol{U_n} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$. Ainsi $\mathbf{U}$ converge vers $\boldsymbol{\ell}$. ■

Définitions. Suites Adjacentes.

Deux suites $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ et $(\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes lorsque:

1. $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. La suite $(\boldsymbol{V_n} - \boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{0}$.

Exemple. Les suites $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ de termes généraux $\boldsymbol{U_n = -\frac{1}{n}}$ et $\boldsymbol{V_n = \frac{1}{n^2}}$ sont adjacentes.

Théorème. Si deux suites sont adjacentes alors elles sont convergentes et de mêmes limites.

Proposition. Soient $(\boldsymbol{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\boldsymbol{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes avec $(\boldsymbol{U_n})_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(\boldsymbol{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante. On note $\boldsymbol{\ell}$ leur limite commune. Alors:

(i) $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_n < \ell \leq V_n}$.

(ii) $\boldsymbol{\frac{U_n+V_n}{2}}$ est une valeur approchée de $\boldsymbol{\ell}$ à $\boldsymbol{\frac{V_n-U_n}{2}}$ près.

Démonstration.

(i) Soit $\boldsymbol{n}$ un entier naturel quelconque. Pour tout $\boldsymbol{P \geq n}$, on a :

$\boldsymbol{U_n \leq U_p}$ *et* $\boldsymbol{V_n \geq V_p}$. Par passage à la limite quand $\boldsymbol{P \longrightarrow +\infty}$, il vient : $\boldsymbol{U_n \leq \ell}$ *et* $\boldsymbol{V_n \geq \ell}$.

(ii) $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_n \leq \ell \leq V_n}$ donc

$\boldsymbol{U_n - \frac{U_n+V_n}{2} \leq \ell - \frac{(U_n+V_n)}{2} \leq V_n - \frac{U_n+V_n}{2}}$. D'où

$\boldsymbol{-\frac{V_n-U_n}{2} \leq \ell - \frac{U_n+V_n}{2} \leq \frac{V_n-U_n}{2}}$, et donc : $\boldsymbol{\left|\ell - \frac{U_n+V_n}{2}\right| \leq \frac{V_n-U_n}{2}}$.

Cela signifie bien que $\boldsymbol{\frac{U_n+V_n}{2}}$ est une valeur approché de $\boldsymbol{\ell}$ à $\boldsymbol{\frac{(V_n-U_n)}{2}}$ prés. ■

2.1.7 Limites Infinies

Définition. Ensemble $\overline{\mathbb{R}}$.

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Définition. suite admettant $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite.

Soit $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que:

(i) $\boldsymbol{U}$ tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}$, on a à partir d'un certain rang $\boldsymbol{U_n} \geq \boldsymbol{A}$.

On note alors $\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{U_n} = +\infty$ ou $\lim \boldsymbol{U} = +\infty$ ou

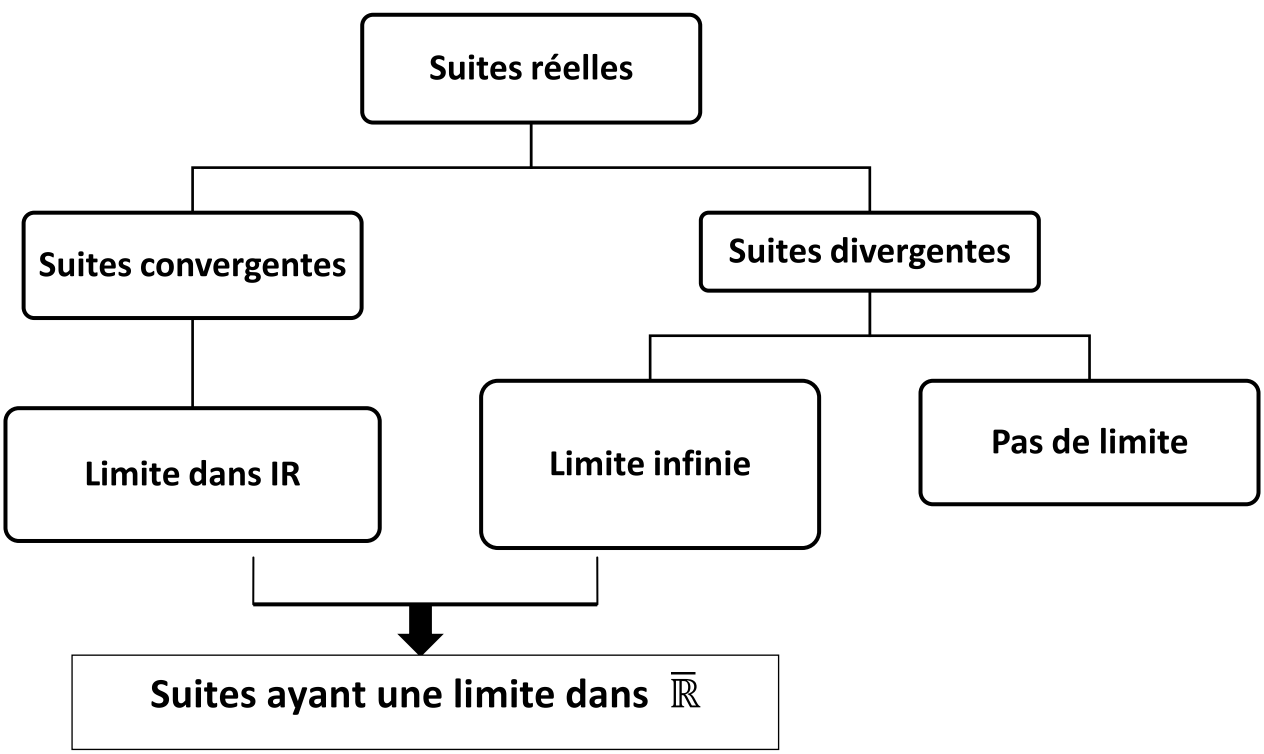
$$\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

(ii) **U** tend vers $-\infty$ lorsque, pour tout $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}$**,** on a à partir d'un certain rang $\boldsymbol{U_n} \leq \boldsymbol{A}$.

On note alors $\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{U_n} = -\infty$ ou $\lim \boldsymbol{U} = -\infty$ ou

$$\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty.$$

Une suite admettant $+\infty$ $ou - \infty$ pour limite est une suite divergente.



Théorème. Exemples fondamentaux de suites admettant $+\infty$ pour limite.

- Soit α un réel strictement positif, alors $n^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Soit $a \in]\, 1, +\infty\, [$, alors $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration.

- Soit $\alpha > 0$. Pour tout $A \leq 0$, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n^{\alpha} \geq A$.

  Par ailleurs, pour tout $A > 0$, on a : $\forall\, n \geq A^{\frac{1}{\alpha}},\ n^{\alpha} \geq A$.

  Pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $n^{\alpha} \geq A$ à partir d'un certain rang, donc:

  $n^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

- Soit $a \in]\, 1, +\infty\, [$. Pour tout $A \leq 0$, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}, a^n \geq A$.

  Pour tout $A > 0$ notons que,

$$a^n \geq A \Leftrightarrow n\ln(a) \geq \ln(A) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(A)}{\ln(a)}.$$

  Ainsi pour tout $A > 0$ et pour tout $n \geq \frac{\ln(A)}{\ln(a)}$, on a $a^n \geq A$.

  Pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a $a^n \geq A$ à partir d'un certain rang, donc

  $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. ■

Proposition. Toute suite réelle admettant $+\infty$ (repectivement $-\infty$) pour limite est non majorée (respectivement non minorée).

Démonstration.

Supposons que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée revient à démontrer que, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n_0} > M$.

Soit $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}$, posons $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} + \mathbf{1}$, par définition de $\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[\boldsymbol{n}\to+\infty]{} +\infty$**,** il existe $\boldsymbol{n_0}$ tel que : $\forall\, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{U_n} \geq \boldsymbol{A}$. En particulier $\boldsymbol{U_{n_0}} > \boldsymbol{M}$. Donc $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est non majorée. ■

2.1.7 Propriétés des suites admettant une limite infinie

Opérations Algébriques.

Théorème. Soient $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ et $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles admettant des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. Les tableaux qui suivent indiquent les limites éventuelles de la somme, la différence, le produit, l'inverse ou le quotient de $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$, sauf dans certains cas notés **F.I** (Forme indéterminée) où l 'on ne sait

pas conclure a priori si la suite admet une limite ou non, et si la limite éventuelle est finie ou infinie.

Remarque. Dans le cas d'une forme indéterminée, seule une étude spécifique permet de conclure.

<u>Limite de $\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{U_n}$</u>

$\boldsymbol{\lambda}$ \ $\boldsymbol{Lim\ U}$	$-\infty$	$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\boldsymbol{\lambda} < 0$	$+\infty$	$\boldsymbol{\lambda\, a}$	$-\infty$
$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\boldsymbol{\lambda} > 0$	$-\infty$	$\boldsymbol{\lambda\, a}$	$+\infty$

Limite éventuelle de $U_n + V_n$

$LimU$ \ $Lim\,V$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I$
$a \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	$F.I$	$+\infty$	$+\infty$

Limite éventuelle de $U_n - V_n$

$LimU$ \ $Lim\,V$	$-\infty$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$F.I$	$-\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$a - b$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$

Limite éventuelle de $U_n.V_n$

$LimU$ \ $Lim\,V$	$-\infty$	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$	$-\infty$	$-\infty$
$a < 0$	$+\infty$	$a.b$	0	$a.b$	$-\infty$
$a = 0$	$F.I$	0	0	0	$F.I$
$a > 0$	$-\infty$	$a.b$	0	$a.b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I$	$+\infty$	$+\infty$

<u>Limite de</u> : $\frac{1}{V_n}$

$\lim V$	$-\infty$	0^-	$b \in \mathbb{R}*$	0^+	$+\infty$
$\lim\left(\frac{1}{V}\right)$	0^-	$-\infty$	$\frac{1}{b}$	$+\infty$	0^+

<u>Limite éventuelle de</u>: $\frac{U_n}{V_n}$

$Lim\ U$ \ $Lim\ V$	$-\infty$	$b < 0$	0^-	0^+	$b > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$F.I$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I$
$a < 0$	0^+	$\frac{a}{b}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{a}{b}$	0^-
0	0	0	$F.I$	$F.I$	0	0
$a > 0$	0^-	$\frac{a}{b}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{a}{b}$	0^+
$+\infty$	$F.I$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$

Exemple. On étudie ici dans différents cas $U_n - V_n$ lorsque $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (forme indéterminée "$+\infty - \infty$").

- Soit $a \in \mathbb{R}$, Si $U_n = a + n$ et $V_n = n$, on a $U_n - V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$:

  on peut donc avoir convergence vers un réel quelconque.

- Si $U_n = n^2$ et $\boldsymbol{V_n = n}$ alors $\boldsymbol{U_n - V_n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$. Or

$\boldsymbol{n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$ et $\boldsymbol{1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$ donc $\boldsymbol{U_n - V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$: on peut donc avoir

divergence vers $+\infty$ (en échangeant les valeurs de $\boldsymbol{U_n}$ et $\boldsymbol{V_n}$, on aurait

divergence vers $-\infty$**).**

- Si $\boldsymbol{U_n = n + (-1)^n}$ et $\boldsymbol{V_n = n}$ on a $\boldsymbol{U_n - V_n = (-1)^n}$: ici $\boldsymbol{U_n - V_n}$ diverge et n'a pas de limite.

Théorème. Composition des limites.

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, $\boldsymbol{I}$ un intervalle contenant $\boldsymbol{a}$ ou admettant $\boldsymbol{a}$ pour borne, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\boldsymbol{I}$.

Si $\boldsymbol{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a}$ et $\boldsymbol{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b}$ alors $\boldsymbol{f(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b}$.

Exemple. $\boldsymbol{n^2 + 3n} \longrightarrow +\infty, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \boldsymbol{n^2 + 3n} > 0$ et $\boldsymbol{\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$ donc par composition $\boldsymbol{\ln(n^2 + 3n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

2.1.9 Théorèmes montrant qu'une suite admet une limite infinie

Théorème. Théorème de comparaison.

Soient $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ et $(\boldsymbol{V_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\boldsymbol{U_n \leq V_n}$ à partir d'un certain rang.

(i) Si $\boldsymbol{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$ alors $\boldsymbol{V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.

(ii) Si $\boldsymbol{V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}$ alors $\boldsymbol{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}$.

Démonstration. Étudions le cas où $\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Pour tout réel $\boldsymbol{A}$, il existe $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{U_n} \geq \boldsymbol{A}$.Or il existe $\boldsymbol{n_1}$ tel que:

$\forall \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{U_n} \leq \boldsymbol{V_n}$. Donc: $\forall \boldsymbol{n} \geq \max(\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{n_1}), \boldsymbol{V_n} \geq \boldsymbol{A}$.

Autrement dit, pour tout réel $\mathbf{A}$, on a $\boldsymbol{V_n} \geq \boldsymbol{A}$ à partir d'un certain rang : donc $\boldsymbol{V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. ∎

Exemples.

1. Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{n} + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \geq \boldsymbol{n} - \mathbf{1}, or\ \boldsymbol{n} - \mathbf{1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

   donc $\boldsymbol{n} + (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2. Pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, on a $\boldsymbol{n}\,! = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})!\ , or\ (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})! \geq \mathbf{1}$, donc

   $\boldsymbol{n}! \geq \boldsymbol{n}$, d'où $\boldsymbol{n}! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Théorème. Soit $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration.

Étudions le cas où $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée.

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}$. Comme $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée par $\boldsymbol{A}$, il existe $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ tel que $\boldsymbol{U_{n_0}} > \boldsymbol{A}$. Or $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est croissante donc, pour tout $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{n_0}$, on a :

$\boldsymbol{U_n} \geq \boldsymbol{U_{n_0}} > \boldsymbol{A}$. Ainsi $\boldsymbol{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. ∎

Remarque. On en déduit que toute suite monotone admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple une suite croissante est soit majorée et donc convergente, soit non majorée et admet donc $+\infty$ pour limite.

2.1.10 Suites arithmético-géométriques

Définition.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = a \,.\, U_n + b$.

Remarque. Deux cas particuliers.

$a = 1$: La suite est arithmétique de raison $\mathbf{b}$.

$b = 0$: La suite est géométrique de raison $\mathbf{a}$.

Étude d'une suite arithmético-géométrique.

Si $a = 1$: la suite est arithmétique: $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nb$

Si $a \neq 0$:

- Introduire le réel λ solution de $\lambda = a\,\lambda + b$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{b}{1-a}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, retrancher terme à terme les égalités suivantes:

$$\begin{cases} U_{n+1} = a\,U_n + b \\ \lambda = a\,\lambda + b \end{cases}$$

on obtient $U_{n+1} - \lambda = a(U_n - \lambda)$.

- En remarquant alors que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $V_n = U_n - \lambda$ pour tout entier $\mathbf{n}$, est géométrique, en déduire l'expression de V_n.
- En déduire enfin l'expression explicite de U_n.

Exemple d'application. Donnons une expression explicite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n + 3$:

- Soit $\lambda = -3$, la solution de $\lambda = 2\lambda + 3$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 3 \\ \lambda = 2\lambda + 3 \end{cases} \Longrightarrow \quad U_{n+1} - \lambda = 2(U_n - \lambda)$$

- Ainsi la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par: $V_n = U_n + 3$ pour tout entier **n**, est géométrique, de raison 2 et de premier terme $V_0 = U_0 + 3 = 4$.
- Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = 4 \times 2^n$ et $U_n = 2^{n+2} - 3$.

2.1.11 Relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Définition. Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre deux s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n.$$

On appelle (E): $r^2 = a.r + b$ **équation caractéristique** de la suite.

Théorème. Avec les notations de la définition, soit Δ le discriminant de (E).

- Si $\Delta > 0$, (E) admet deux racines réelles distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une racine double réelle $r \in \mathbb{R}$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = (\alpha + \beta n)r^n$.
- Si $\Delta < 0$, (E) admet deux racines complexes conjuguées $\rho.e^{\pm i\theta} \in \mathbb{C}$. Alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)).$$

Exemple. Donnons une expression explicite de la suite réelle $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $V_0 = 1, V_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, V_{n+2} = 4V_{n+1} - 4V_n$.
Equation caractéristique: $r^2 - 4r + 4 = 0$.
L'équation admet 2 pour racine double.

Ainsi $\exists(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^{2}, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{V_n} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{n})\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$.
Avec les données initiales, on obtient :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{V_0} = \mathbf{1} \\ \\ \mathbf{2}(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{V_1} = -\mathbf{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\beta} = -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

Enfin, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{V_n} = \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{n}\right)\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$.

2.1.12 Relation de récurrence du type $U_{n+1} = f(U_n)$

Définition. Point fixe.

Soit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle **point fixe** de $\boldsymbol{f}$ sur **I** tout nombre $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{I}$ vérifiant $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})$.

Théorème. Soinet **I** un intervalle, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \boldsymbol{I}$ et $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de **I** vérifiant, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_{n+1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U_n})$.
Si $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{\ell} \in \boldsymbol{I}$ et si $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{\ell}$ srola $\boldsymbol{\ell}$ est un point fixe de $\boldsymbol{f}$.

Remarques.

1. C'est le seul résultat à connaitre sur les suites définie par: $\boldsymbol{U_{n+1}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U_n})$.
2. Supposons par exemple que $\boldsymbol{I} =]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[$ et que $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\boldsymbol{I}$, si $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite $\boldsymbol{\ell}$ est dans $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. Soit $\boldsymbol{\ell} \in \{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$, soit $\boldsymbol{\ell} \in]\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}[$ et alors $\boldsymbol{\ell}$ est un point fixe de $\boldsymbol{f}$. Ainsi, lorsque $\boldsymbol{f}$ est continue sur **I**, la limite éventuelle de $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ à tse chercher parmi les points fixes de $\boldsymbol{f}$ ou les bornes de **I** non incluses dans **I**.

Exemple. Soit $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ vérifiant$\forall n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{U_{n+1}} = \mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{U_n}} - \boldsymbol{U_n} - \mathbf{2}$.
Comme $\boldsymbol{x} \longrightarrow \mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} - \mathbf{2}$ est continue sur $\mathbb{R}_{+}$, si $(\boldsymbol{U_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est solution de $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}\sqrt{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x} - \mathbf{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$. La seule limite finie possible est **1**.

2.2 Séries Numériques

2.2.1 Définitions

Définition. Série, somme partielle. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on appelle **série de terme général** $U_n, n \geq 0$, la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ où:

$$S_p = U_0 + U_1 + \cdots + U_p = \sum_{n=0}^{p} U_n .$$

S_p est appelée **somme partielle d'ordre p** de la série.
La série de terme général $U_n, n \geq 0$ est notée $\sum U_n$.

Remarque. L'indice initial n'est pas forcément $n = 0$ mais peut être un entier quelconque: par exemple, on peut considérer la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$,parfois notée abusivement $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

Exemples.

1. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = n$. La série de terme général U_n est la suite de terme général $S_p = \sum_{k=0}^{p} k = \frac{p(p+1)}{2}$.

2. La suite définie par $S_p = \sum_{n=0}^{p} n^p$ n'est pas une série car le terme général n^p dépend aussi de **p**.

Proposition. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum U_n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $U_n = S_n - S_{n-1}$.

2.2.2 Convergence, Somme et Reste

Définition. Si la suite $(S_p)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles d'une série $\sum U_n$ possède une limite finie, on dit que la série $\sum U_n$ est convergente.

La limite de cette suite est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et est appelée **somme de la série**:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} U_n.$$

Si une série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Remarques.

1. La nature (convergente ou divergente) d'une série n'est pas changée si on modifie un nombre fini de termes de la série.
2. Il faut manipuler la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ avec prudence, elle ne désigne pas une somme au sens usuel du terme, mais une limite, celle des sommes partielles.

Exemple. La série de terme général $U_n = n$ diverge car la suite de ses sommes partielles diverge vers $+\infty$.

Définition. série télescopique.

On appelle série télescopique toute série de terme général $U_n = V_{n+1} - V_n$ où $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle; en d'autre termes, toute série dont le terme général est la différence de deux termes consécutifs d'une suite donnée.

Proposition. La somme partielle d'ordre **p** de la série télescopique

$\sum(V_{n+1} - V_n)$ vérifie: $S_p = \sum_{k=0}^{p}(V_{k+1} - V_k) = V_{p+1} - V_0$.

La série télescopique $\sum(V_{n+1} - V_n)$ converge si et seulement si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exemple.

Soit $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, en multipliant par la quantité conjuguée on obtient $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Or $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série

$\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sum U_n$ diverge.

Définition. Reste d'une série convergente. Si la série $\sum U_n$ converge, on appelle reste d'ordre p de cette série la quantité :

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} U_n = S - S_p,$$

où S est la somme de la série et S_p la somme partielle.

Exemple.

Considérons la série de terme général $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$.

Montrons qu'elle converge et donnons l'expression de son reste d'ordre p.

Pour $n \geq 1$, $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc

$$S_p = \sum_{k=1}^{p} U_k = 1 - \frac{1}{p+1} \longrightarrow 1.$$ La série converge et $R_p = \frac{1}{p+1}$.

Proposition . Soit $\sum U_n$ une série convergente, alors la suite de ses restes tend vers 0.

Proposition. condition nécessaire de convergence.

Si la série $\sum U_n$ converge, alors la suite (U_n) converge vers 0.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = S_n - S_{n-1}$. Or la série $\sum U_n$ converge, alors il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $\lim S_n = \lim S_{n-1} = S$; ainsi, $\lim U_n = S - S = 0$. ■

Théorème.

- Si $\sum \boldsymbol{U_n}$ et $\sum \boldsymbol{V_n}$ sont deux séries convergentes alors $\sum(\boldsymbol{U_n} + \boldsymbol{V_n})$ est une série convergente de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\boldsymbol{U_n} + \boldsymbol{V_n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \boldsymbol{U_n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \boldsymbol{V_n} .$$

- Si $\sum \boldsymbol{U_n}$ est une série convergente alors pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\sum \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{U_n}$ est une série convergente de somme:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda.\boldsymbol{U_n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \boldsymbol{U_n}.$$

2.2.3 **Séries à termes positifs.**

Définition. Série à termes positifs.

Une série $\sum \boldsymbol{U_n}$ est dite à terme positifs si pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ on a :

$\boldsymbol{U_n} \geq \mathbf{0}$ **.**

Remarque. les résultats de convergence des séries à terme positifs restent valables même si un nombre fini de terme ne sont pas positifs, i.e. à partir d'un certain rang, $\boldsymbol{U_n} \geq \mathbf{0}$.

Théorème. C.N.S de convergence des séries à termes positifs.

Soit $\sum \boldsymbol{U_n}$ une eirés à termes positifs, alors**:** $\sum \boldsymbol{U_n}$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Démonstration.

Pour tout $\boldsymbol{n \geq 1, S_n - S_{n-1} = U_n \geq 0}$, donc la suite $(\boldsymbol{S_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ est croissante. Il y a deux cas:

- Soit la suite est majorée, alors le théorème de limite monotone donne que la suite admet une limite réelle.
- Soit la suite n'est pas majorée, alors $\boldsymbol{\lim S_n = +\infty}$.

Ainsi, la série converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. ■

Théorème. Théorème de comparaison des séries à termes positifs.

Soient $\sum \boldsymbol{U_n}$ et $\sum \boldsymbol{V_n}$ deux séries à termes positifs telles que :

1. À partir d'un certain rang $\boldsymbol{U_n \leq V_n}$, alors :
   - **a.** Si $\sum \boldsymbol{V_n}$ converge alors $\sum \boldsymbol{U_n}$ converge.
   - **b.** Si $\sum \boldsymbol{U_n}$ diverge alors $\sum \boldsymbol{V_n}$ diverge.

2. $\boldsymbol{U_n = o(V_n)}$ alors on conclut comme précédemment.

3. $\boldsymbol{U_n \sim V_n}$ alors les deux séries sont de même nature.

Démonstration.

1. Sans perdre en généralité, on considère que pour tout $\boldsymbol{n \geq 0}$ on a $\boldsymbol{U_n \leq V_n}$ et donc

$$\sum_{n=0}^{p} U_n \leq \sum_{n=0}^{p} V_n.$$

(a) Si la série à termes positifs $\sum V_n$ converge alors ses sommes partielles sont majorées. Il existe donc $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $p \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{p} U_n \leq \sum_{n=0}^{p} V_n \leq \mathbf{M}.$$

Ainsi les sommes partielles de $\sum U_n$ sont majorées, comme $\sum U_n$ est à termes positifs, $\sum U_n$ converge.

(b) C'est la contraposée du résultat précédent.

2. Il existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que:
$\forall n \geq n_1, U_n = \alpha_n . V_n.$
La définitions de $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (pour $\varepsilon = 1$) donne : il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, $-1 \leq \alpha_n \leq 1$.
Pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, $U_n \leq V_n$ ce qui nous ramène à la situation précédente.

3. Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et $n_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour
$n \geq n_1, U_n = a_n . V_n.$
La définition de $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$(pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$) donne : il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2$, $|a_n - 1| \leq \frac{1}{2}$.
Pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, $\frac{1}{2} V_n \leq U_n \leq \frac{3}{2} V_n$. Une démarche similaire à celle du **1**. permet de conclure. ∎

Exemple.

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en effet, pour tout $n \geq 2$

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ et } \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Ainsi $\sum \frac{1}{(n-1)n}$ converge et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge aussi.

2.2.4 Séries à termes quelconques, convergence absolue

Définition. série absolument convergente.

La série $\sum U_n$ est dite absolument convergente lorsque la série $\sum |U_n|$ converge.

Exemple.

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorème. Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration.

- En préliminaire, on remarque que toute suite peut être considérée comme la différence de deux suites à termes positifs :

$$U_n = U_n^+ - U_n^- \text{ avec } U_n^+ = \frac{U_n + |U_n|}{2} \text{ et } U_n^- = \frac{|U_n| - U_n}{2}$$

En particulier, $|U_n| = U_n^+ + U_n^-$ et donc $0 \leq U_n^+ \leq |U_n|$ et

$0 \leq U_n^- \leq |U_n|$.

- **Si** $\sum |U_n|$ Converge alors le théorème de comparaison donne que $\sum U_n^+$ et $\sum U_n^-$ convergent.

  La série $\sum U_n$ est la différence de deux séries qui convergent, donc elle converge. ■

2.2.5 Séries géométriques et exponentielles

Définition. Série géométrique.

Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{R}\ et\ \mathbf{n_0} \in \mathbb{N}$, on appelle série géométrique de raison $\mathbf{x}$ et de rang initial $\mathbf{n_0}$, la série de terme général $\mathbf{x^n}$, pour $\mathbf{n} \geq \mathbf{n_0}$.

Exemple. Les séries $\sum \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}\ et\ \sum(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}$ sont de type géométrique de raison respective $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ et - \mathbf{1}$.

Théorème. une série géométrique de raison $\mathbf{x}$ converge si et seulement si $|\mathbf{x}| < 1$. On a alors:

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{x^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}}\ et\ pour\ tout\ \mathbf{n_0} \in \mathbb{N}, \sum_{\mathbf{n=n_0}}^{+\infty} \frac{\mathbf{x^{n_0}}}{\mathbf{1-x}}\ .$$

Démonstration.

Si $|\mathbf{x}| \geq \mathbf{1}$, alors le terme général ne tend pas vers $\mathbf{0}$ donc la série diverge.

Soit $\mathbf{x} \in]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$ et $\mathbf{p} > \mathbf{n_0}$ donc $\lim \mathbf{x^p} = \mathbf{0}$ et :

$$\mathbf{S_p} = \sum_{\mathbf{n=n_0}}^{\mathbf{p}} \mathbf{x^n} = \mathbf{x^{n_0}} \frac{\mathbf{1 - x^{p-n_0+1}}}{\mathbf{1-x}} \xrightarrow[\mathbf{p}\to+\infty]{} \frac{\mathbf{x^{n_0}}}{\mathbf{1-x}}\ . \qquad \blacksquare$$

Définitions. Série dérivée d'une série géométrique.

Soit $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$, la dérivée d'ordre $\mathbf{k}$ de $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x^n}$ est $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{n(n-1)} \ldots \ldots (\mathbf{n-k+1})\mathbf{x^{n-k}}$. On appelle série dérivée d'une série géométrique toute série de la forme :

$\sum \mathbf{n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}}$, $\mathbf{n \geq k}$, où $\mathbf{x}$ est un nombre réel.

Exemple.

La série $\sum \mathbf{n(n-1)3^{n-2}}$ est du type série dérivée d'une série géométrique de raison $\mathbf{3}$.

Théorème. Soit $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$, la série $\sum \mathbf{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)x^{n-1}}$, $\mathbf{n \geq k}$ converge si et seulement si $|\mathbf{x}| < 1$ et sa somme vaut:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}} = \frac{\mathbf{k!}}{\mathbf{(1-x)^{k+1}}}.$$

Abusivement formulé par :

$$\sum_{\mathbf{n=k}}^{+\infty} (\mathbf{x^n})^{(\mathbf{k})} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}}\right)^{(\mathbf{k})}.$$

Démonstration.

Restriction au cas où $\mathbf{n = 2}$:
si $|\mathbf{x}| \geq \mathbf{1}$, le terme général ne tend pas vers $\mathbf{0}$ donc la série diverge. Soit

$\mathbf{x} \in]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$ **et** $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\mathbf{S_p(x)} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\mathbf{p}} \mathbf{x^n} = \frac{\mathbf{1-x^{p+1}}}{\mathbf{1-x}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}} - \frac{\mathbf{x^{p+1}}}{\mathbf{1-x}}$$

Dérivons $\mathbf{2}$ fois cette égalité sur $]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$:

$$\sum \mathbf{S_p^{(2)}(x)} = \sum_{\mathbf{n=2}}^{\mathbf{p}} \mathbf{n(n-1)x^{n-2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(1-x)^3}} - \left(\frac{\mathbf{x^{p+1}}}{\mathbf{1-x}}\right)^{(\mathbf{2})}.$$

Il reste à montrer que $\left(\frac{\mathbf{x^{p+1}}}{\mathbf{1-x}}\right)^{(\mathbf{2})} \longrightarrow \mathbf{0}$ quand $\mathbf{p} \longrightarrow +\infty$.

La formule de Leibniz donne:

$$\left(\frac{\mathbf{x^{p+1}}}{\mathbf{1-x}}\right)^{(2)} = \binom{2}{0}\frac{\mathbf{(p+1)px^{p-1}}}{\mathbf{(1-x)}} + \binom{2}{1}\frac{\mathbf{(p+1)x^{p}}}{\mathbf{(1-x)^2}} + \binom{2}{2}\frac{\mathbf{2.x^{p+1}}}{\mathbf{(1-x)^3}}$$

Or, pour $\mathbf{p \longrightarrow +\infty}$**,** on a $\mathbf{p^2.x^p \longrightarrow 0}$, $\mathbf{p.x^p \longrightarrow 0}$ **et** $\mathbf{x^p \longrightarrow 0}$ car la croissance comparée donne pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^*, \mathbf{x^p = o\left(\frac{1}{p^k}\right)}$ car

$\mathbf{x} \in]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$**.**

Ainsi, en tant que combinaison linéaire de suite de limite nulle,
$\mathbf{S_p^{(2)}(x)} \xrightarrow[\mathbf{p \longrightarrow +\infty}]{} \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(1-x)^3}}\right)$**.**

Conclusion. la série $\sum \mathbf{n(n-1)x^{n-2}}, \mathbf{n \geq 2}$ converge si et seulement si $|\mathbf{x}| < 1$ *et* a pour somme $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(1-x)^3}}$. ■

Exemple.

Soit la série $\sum \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{3^{n-1}}}$, pour tout $\mathbf{n \geq 1}$, et de type dérivée d'une série géométrique de raison $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \in]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[$, donc elle converge et sa somme est $\frac{\mathbf{1}}{\left(\mathbf{1-\frac{1}{3}}\right)^{\mathbf{2}}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$.

Remarque. deux cas particuliers, avec $|\mathbf{x}| < 1$:

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \mathbf{n.x^{n-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(1-X)^2}} \text{ et } \sum_{\mathbf{n=2}}^{+\infty} \mathbf{n(n-1)x^{n-2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(1-X)^3}}.$$

Exemple.

Dans le cadre des probabilités, lors du calcul de la variance d'une variable aléatoire de loi géométrique, nous sommes amenés à considérer la série

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{n^2.x^{n-1}}, \text{pour } \mathbf{n \geq 1} \textbf{ et } |\mathbf{x}| < 1.$$

Or $\mathbf{n^2 = n(n-1) + n}$. Donc

$$\sum_{n=1}^{p} n^2 . x^{n-1} = x \sum_{n=2}^{p} n(n-1) . x^{n-2} + \sum_{n=1}^{p} n . x^{n-2}$$

$$\xrightarrow[p\to+\infty]{} x \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} .$$

Ainsi la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 . x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$.

Corollaire. Formule du binôme négatif.

Soient $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{x} \in]-1,1[$ alors la série $\sum \binom{n}{k} x^{n-k}, n \geq k$ converge et:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} .$$

Exemple.

$\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc d'après la formule du binôme négatif, la série $\sum \binom{n}{3} \frac{1}{2^{n-3}}$, pour $\mathbf{n \geq 3}$ **,** converge et sa somme vaut $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 8$.

Définition. Série exponentielle. On appelle série exponentielle toute série de terme général $\frac{a^n}{n!}$, $n \geq 0$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exemple. Les séries $\sum \frac{1}{2^n n!}$ et $\sum \frac{1}{n!}$ Sont de type exponentielel.

Théorème. La série exponentielle $\sum \frac{a^n}{n!}$ **,** $\mathbf{n \geq 0}$, converge vers $\exp(a)$ pour tout réel a:

$$\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} = \mathbf{exp}(\boldsymbol{a}).$$

Démonstration.

La fonction **exp** est de class $\mathbf{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$. Soient $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, utilisons l'inégalité de Taylor_Lagrange à l'ordre $\boldsymbol{n}$ entre 0 et $\boldsymbol{a}$:

$$\left| \mathbf{e}^{\boldsymbol{a}} - \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} \right| \leq \frac{|\boldsymbol{a}|^{\mathbf{n}+\mathbf{1}}}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \mathbf{Max}\left\{ |\,\mathbf{exp}^{(\mathbf{n}+\mathbf{1})}(\mathbf{t})|, \mathbf{t} \text{ entre } \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{a} \right\}$$

$$\leq \frac{|\boldsymbol{a}|^{\mathbf{n}+\mathbf{1}}}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!}\ \mathbf{e}^{|\boldsymbol{a}|}$$

Car $\mathbf{exp}^{(\mathbf{n}+\mathbf{1})} = \mathbf{exp}$ et

$\mathbf{Max}\left\{\mathbf{exp}(\mathbf{t})\,;\mathbf{t} \text{ entre } \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{a}\right\} \leq \mathbf{Max}\left\{\mathbf{exp}(\mathbf{t})\,;\mathbf{t} \in [-|\boldsymbol{a}|\,,|\boldsymbol{a}|\,]\right\}$**.**

Or $\boldsymbol{a}$ est fixé; par croissance comparée, on a $|\boldsymbol{a}|^{\mathbf{n}+\mathbf{1}} = \mathbf{o}\big((\mathbf{n}+\mathbf{1})!\big)$.

Ainsi, $\lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \frac{|\boldsymbol{a}|^{\mathbf{n}+\mathbf{1}}}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})\,!} \mathbf{e}^{|\boldsymbol{a}|} = \mathbf{0}$. et le théorème d'encadrement donne

$$\lim_{\mathbf{n}\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\boldsymbol{a}^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{a}}. \qquad \blacksquare$$

Exemple. La série $\sum \frac{3^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$, pour $\mathrm{n} \geq 2$, et de type exponentielle donc elle converge et, en tenant compte des termes manquant d'indices 0 et 1, sa somme est $\mathbf{e}^{3} - \mathbf{1} - \mathbf{3} = \mathbf{e}^{3} - \mathbf{4}$**.**

2.2.6 **Séries de Riemann**

Définition. On appelle série de Riemann tout série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}}$, $n \geq 1$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème.

la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples.

1. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ Diverge : c'est une série de Riemann pour $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

2. $\sum \frac{1}{n\sqrt[6]{n}}$ Converge : c'est une série de Riemann pour $\alpha = \frac{7}{6} > 1$.

2.3 Les Exemples Pratiques En Économie

2.3.1 Suite arithmétique

Exemple 01.

- Le prix d'un objet augmente de **10€** par an, soit P_n le prix à l'année n, on a : $P_n = P_0 + 10n$.

Exemple 02.

Pour un forage on creuse **1** mètre le premier jour et comme cela devient de plus en plus difficile **5** centimètre de moins chaque jour.

• Combien a-t-on creusé au bout de **10** jours?

Le dixième jour on a creusé $1 - 9 \times 0,05 = 0,55$ donc en tout

$1 + \cdots + 0,55 = \frac{10(1+0,55)}{2} = 5 \times 1,55 = 7,75$ en dix jours.

2.3.2 Suite géométrique

Exemple 01. • Le prix d'un objet augmente de $\mathbf{10\%}$ par an. Soit $\boldsymbol{P_n}$ le prix à l'année $\boldsymbol{n}$, on a $\boldsymbol{P_{n+1} = P_n + 10\%P_n = P_n(1 + 10\%) = P_n.1,1}$. C'est donc une suite géométrique de raison $\mathbf{1,1}$, d'où $\boldsymbol{P_n = P_0.(1,1)^n}$.

• Un placement $\boldsymbol{C_0}$ intérêt composé au taux $\boldsymbol{t}$ par période $\boldsymbol{(t}$ est donné en $\mathbf{\%}$, par exemple $\mathbf{3\% = 0,03).}$ On cherche ce qu'il devient au bout de $\boldsymbol{n}$ periodes.

On a: $\boldsymbol{C_1 = C_0 + t\,.\,C_0 = C_0\,(1 + t)}$. En général: $\boldsymbol{C_n = C_{n-1} + t.C_{n-1} = C_{n-1}(1 + t).}$

$\boldsymbol{C_n}$ est une suite géométrique de raison $\boldsymbol{1 + t}$ **(**avec l'exemple $\mathbf{1,03)}$ et de premier terme $\boldsymbol{C_0.}$ On a: $\mathbf{C_n = C_0(1 + t)^n}$. Par exemple si $\mathbf{t}$ est un taux annuel au bout de **10** ans on a $\mathbf{C_{10} = C_0.(1,03)^{10} = C_0.1,344\ .}$

Exemple 02.

Dans la bonne ville de Schmurz, l'abonnement annuel aux transports en commun coûtait **200** Zlourks en l'an **2000**, mais augmente de $\mathbf{3\%}$ chaque année. Si on note $\mathbf{U_n}$ la valeur de l'abonnement annuel à l'année $\mathbf{2000 + n}$, la suite $(\mathbf{U_n})$ est une suite géométrique de raison $\mathbf{q = 1,03}$ et de premier terme $\mathbf{U_0 = 200}$, en effet:

$\mathbf{U_{n+1} = U_n + \frac{3U_n}{100} = U_n.(1 + 0,03).}$ Ainsi, le tarif de l'abonnement pour **2010** sera de $\mathbf{U_{10} = 200.1,03^{10} \simeq 268,8\ Zlourks.}$ Un habitant ayant reçu à Glourz entre **2000** et **2010** inclus **(**Soit **11** années au total**)** et ayant pris son abonnement tous les ans aura payé au total

$$\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{k=10}} \mathbf{U_k = 200.\frac{(1 - (1,03)^{11})}{1 - 1,03} \simeq 2561,67\ Zlourks}.$$

2.3.3 Série géométrique

Exemples.

- Formule de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique:

$$\boldsymbol{a + a\mathrm{k} + a\mathrm{k}^2 + \cdots + \cdots + \cdots + a\mathrm{k}^{\mathrm{n}-1} = a\,\frac{(1-\mathrm{k}^{\mathrm{n}})}{1-\mathrm{k}}}\ \ (\mathbf{k} \neq \mathbf{1}).$$

- Formule de la somme d'une série géométrique:

$$\boldsymbol{a + a\mathrm{k} + a\mathrm{k}^2 + \cdots + a\mathrm{k}^{\mathrm{n}-1} + \cdots = \frac{a}{1-\mathrm{k}}}\ \textbf{si}\ |\mathbf{k}| < 1.$$

- Une estimation groussière des réserves totales de pétrole et de gaz sous le plateau continental Norvégien au début de l'année **1999** était de **13** milliards $\mathbf{(13 \times 10^9)}$ de tonnes **(**ou équivalent pétrole**)**. On a extrait cette année-là environ **250** millions $\mathbf{(250 \times 10^6})$ de tonnes.
  - (a) Dans l'hypothèse où l'extraction va se maintenir à ce niveau constant, quand les réserves seront-elles épuisées **?**
  - (b) Si l'extraction est réduite de $\mathbf{2\%}$ chaque année à partir de début **1999**, combien de temps vont durer les réserves **?**

Solution.

(a) Le nombre d'années pendant lesquelles la réserve va tenir est donné simplement par :

$$\mathbf{\frac{13.10^9}{250.10^6} = 52}.$$

La réserve sera donc épuisée vers **2051**.

(b) En **1999**, on a extrait $\boldsymbol{a = 250.10^6}$. En ***2000,*** $\boldsymbol{a - \frac{2a}{100} = a.98}$.

En $\mathbf{2001}$, on a extrait $\boldsymbol{a.0,98^2}$, etc. De cette façon, si on continue à extraire sans fin, la quantité totale extraite sera donnée par la somme :

$$\boldsymbol{a + a.0,98 + a.(0,98)^2 + \cdots + a.(0.98)^{n-1} + \cdots}.$$

La valeur de cette série géométrique de raison $\boldsymbol{k = 0,98}$ est égale à:

$$\boldsymbol{S = \frac{a}{1 - 0,98} = 50a}.$$

Or, $\boldsymbol{a = 250.10^6}$. D'où $\boldsymbol{S = (50).(250).(10^6) = 12,5.10^9}$, ce qui est inférieur à $\boldsymbol{13.10^9}$. La réserve ne serait donc jamais épuisée. Il y resterait $\mathbf{500}$ millions $\boldsymbol{(= 0,5.10^9)}$ de tonnes.

2.4 Exercices d'application

Exercice 01: En utilisant la définition de la limite, montrer que les suites définies par:

$$(1)\ \mathbf{U_n = \frac{n+1}{n+3}} \qquad (2)\ \mathbf{U_n = \frac{n^2-5n}{n^3+7n^2+1}} \qquad (3)\ \mathbf{U_n = \sqrt[n]{a}}, \mathbf{a} > 1, n \in \mathbb{N}^*$$

$(4)\ \mathbf{U_n = \frac{(-1)^n}{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, $(5)\ \mathbf{U_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ Convergent respectivement vers: $\mathbf{1, 0, 1, 0, \frac{1}{3}}$.

Exercice 02: En utilisant la définition des limites infinies, montrer que les suites définies par:

1. $\mathbf{U_n = 2^{(n)^{\frac{1}{2}}}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbf{U_n = n^2 + 5n + 7}$.
3. $\mathbf{U_n = p^n}, \mathbf{p} > 1$.
4. $\mathbf{U_n = \log(\log n)}, \mathbf{n} > 2$

ont une limite infinie quand $\mathbf{n}$ tend vers l'infini.

Exercice 03: Étudier la convergence des suites réelles dont le terme général est :

$$(1)\ \mathbf{U_n = a^n}\ (\mathbf{a} \in \mathbb{R}) \qquad (2)\ \mathbf{U_n = (-1)^n \frac{(n+1)}{n}} \qquad (3)\ \mathbf{U_n = \frac{a^n}{n!}}(\mathbf{a} \in \mathbb{R})$$

$$(4)\ \mathbf{U_n = \sqrt[n]{n}, n \geq 2} \quad (5)\ \mathbf{U_n = \frac{\ln n}{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^* \qquad (6)\ \mathbf{U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k}}}\ .$$

Exercice 04: Soit $(\mathbf{U_n})_\mathbf{n}$ une suite réelle définie par:

$$\mathbf{U_n = \frac{2n+7}{n+4}}, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $(\mathbf{U_n})$ est croissante et majorée par $\mathbf{2}$.
2. Montrer en utilisant la définition de la limite, que $(\mathbf{U_n})$ converge vers $\mathbf{2}$.

Exercice 05: On considère les $\mathbf{2}$ suites réelles:

$$\mathbf{U_n} = \sum_{\mathbf{p=0}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}!} \qquad et \qquad \mathbf{V_n} = \mathbf{U_n} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}!}\ \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que les $\mathbf{2}$ suites sont adjacentes.
2. Donner un majorant et un minorant pour les deux suites.

Exercice 06 : Montrer que chacune des suites suivantes est monotone.

Donner un majorant et un minorant, quand ils existent, pour chacune d'elles.

1. $\mathbf{U_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}!}$.
2. $\mathbf{V_n} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^2}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}$ $\left(\text{Utiliser : } \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n(n-1)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$.
3. $\mathbf{W_n} = \mathbf{k^n}\ (\mathbf{k} > 1)$.
4. $\mathbf{X_n} = \frac{\mathbf{k^n}}{\mathbf{n}!}, (\mathbf{0} < k < 1)$.
5. $\mathbf{Y_n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+2}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2n}}, \mathbf{n} > 0$.
6. $\mathbf{Z_n} = \frac{\mathbf{t_1+t_2+\cdots+t_n}}{\mathbf{n}}$ **o**ù $(\mathbf{t_n})$ est une suite monotone.

***Exercices 07*:** On considère la suite $(\mathbf{U_n})$ définie par:

$$\begin{cases} \mathbf{U_0} = \mathbf{1} \\ \mathbf{U_{n+1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{U_n} + \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2U_n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathbf{U_n} > 0$ pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$.
2. On suppose que la suite $(\mathbf{U_n})$ est convergente. Quelle est la valeur $\boldsymbol{\ell}$ de sa limite ?
3. Montrer que $\mathbf{U_n} - \boldsymbol{\ell} > \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$. **(**Remplacer $\boldsymbol{\ell}$ par sa valeur**).**
4. En déduire que $(\mathbf{U_n})$ est décroissante.
5. Conclure.

<u>Exercice 08</u>: Soit $(\mathbf{U_n})$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, la suite définie par :

$$\begin{cases} \mathbf{U_n = 2 - \dfrac{1}{U_{n-1}}} & , \forall \mathbf{n} \geq \mathbf{1} \\ \mathbf{U_0 = 2} \end{cases}$$

1. Calculer U_1, U_2, U_3.
2. Montrer par récurrence que $\mathbf{U_n} > 1$, $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite $(\mathbf{U_n})$ est monotone.
4. La suite $(\mathbf{U_n})_\mathbf{n}$ est-elle convergente ? Si oui déterminer sa limite.

<u>Exercice 09</u>: Une suite arithmétique de $\mathbf{11}$ termes a pour terme médian $\mathbf{36}$ et pour raison $\mathbf{6}$.

1. Ecrire le premier et le dernier terme.
2. Calculer la somme de cette progression arithmétique.

<u>Exercice 10</u>: Soit la suite numérique $(\mathbf{U_n})$ définie par:

$$\mathbf{U_0 = 0} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{U_n = \frac{1}{2} U_{n-1} + 1} \quad , \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*.$$

Soit la suite $(\mathbf{V_n})$ définie par: $\mathbf{V_n = U_n + a} \qquad (\mathbf{a} \in \mathbb{R})$.

1. Déterminer $\boldsymbol{a}$ pour que $(\mathbf{V_n})$ soit une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
2. Calculer la limite de $(\mathbf{U_n})$ et la limite de $(\mathbf{V_n})$.

Exercice 11: Une grandeur subit une croissance régulière et double tous les dix ans.

1) Par quel coefficient de croissance cette grandeur sera-t-elle multipliée au bout d'un siècle ?
2) A quel taux d'accroissement moyen annuel correspond ce doublement en $\mathbf{10}$ ans ?
3) Le taux moyen d'accroissement annuel de la production industrielle en France jusqu'en **1973** était d'environ $\mathbf{6\%}$. En combien de temps la production industrielle doublait-elle ?

Exercice 12: Donner la nature des séries de terme général:

1. $\mathbf{U_n = \frac{n}{2^{n-1}}}$, pour $\mathbf{n \geq 1}$,
2. $\mathbf{U_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{5^{n-3}}}$, pour $\mathbf{n \geq 3}$,
3. $\mathbf{U_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n!}}$.

Exercice 13: Calculer la somme des séries de terme général:

1. $\mathbf{U_n = \frac{n+2}{3^{n-1}}}$, pour $\mathbf{n \geq 2}$,
2. $\mathbf{U_n = \frac{n^2-4}{5^n}}$, pour $\mathbf{n \geq 1}$,
3. $\mathbf{U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}}$.

Exercice 14: Soit $(\mathbf{U_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\mathbf{U_0} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ et, pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$: $\mathbf{U_{n+1} = U_n - U_n^2}$.

1. Montrer que $(\mathbf{U_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $\mathbf{0}$.
2. Etablir la convergence de la série de terme général $\mathbf{U_n^2}$ et calculer sa somme.

3. A l'aide des sommes partielles, montrer que la série de terme général $\mathbf{ln}\,\frac{\mathbf{U_{n+1}}}{\mathbf{U_n}}$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série $\sum U_n$.

Chapitre 03

Fonctions réelles d'une variable réelle (limites et continuité)

3.1 Généralités

3.1.1 Fonction numérique, foncion réelle d'une variable réelle

Définition. On appelle fonction numérique sur un ensemble $\mathbf{E}$ toute application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbb{R}$, Si $\mathbf{E}$ est lui-même une partie de $\mathbb{R}$, on dit que $\boldsymbol{f}$ est une fonction numérique d'une variable réelle, ou encore, une fonction réelle d'une variable réelle. On notera l'application $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \mathbb{R}\ ou\ \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$: l'image de $\mathbf{x}$ par $\boldsymbol{f}$.

$\boldsymbol{D_f}$: l'ensemble de définition de la fonction $\boldsymbol{f}$.

$\mathfrak{F}(\mathbf{E}, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions de $\mathbf{E}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemples.

(1) $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{x}-\mathbf{1})^2}$ est une fonction réelle d'une variable réelle dont $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R} - \{\mathbf{1}\}$.

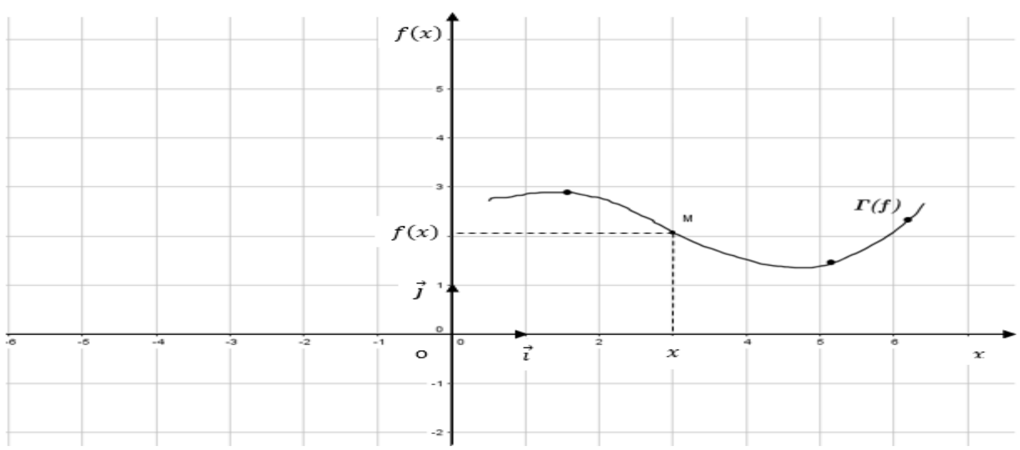
(2) $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ est une fonction réelle d'une variable réelle dont $\boldsymbol{D_f} = \mathbb{R}^*$.

3.1.2 Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle

Le graphe $\boldsymbol{\Gamma(f)}$ d'une fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\boldsymbol{\Gamma(f)} = \left\{(\mathbf{x}, \boldsymbol{f}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathbf{E}\right\}.$$

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé on peut associe à chaque couple $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ un point noté $\mathbf{M}$.



Tel que: $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$. L'ensemble de ces points $\mathbf{M}$ $(pour\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E})$ est appelé representation graphique (ou également graphe) de la fonction $\boldsymbol{f}$.

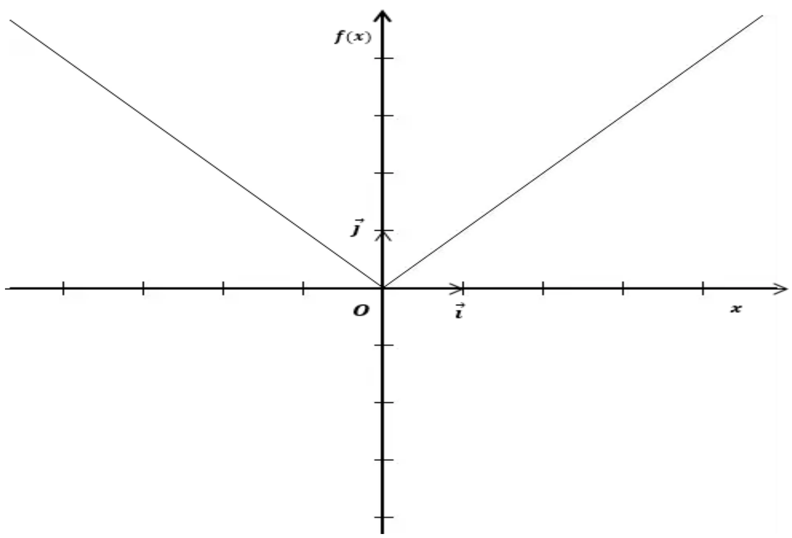
$\Gamma(f)$**:** est le graphe de la fonction $\boldsymbol{f}$.

Exemple.

$\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|.$

Le graphe de $\boldsymbol{f}$ dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(\boldsymbol{o}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ est définie par la figure suivante:



Proposition. Si $\boldsymbol{f}$ une fonction réelle d'une variable réelle bijective, alors le graphe de la fonction réciproque $\boldsymbol{f}^{-1}$ est la figure symétrique à $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{f})$ par rapport à la première bissectrice de repère du plan.

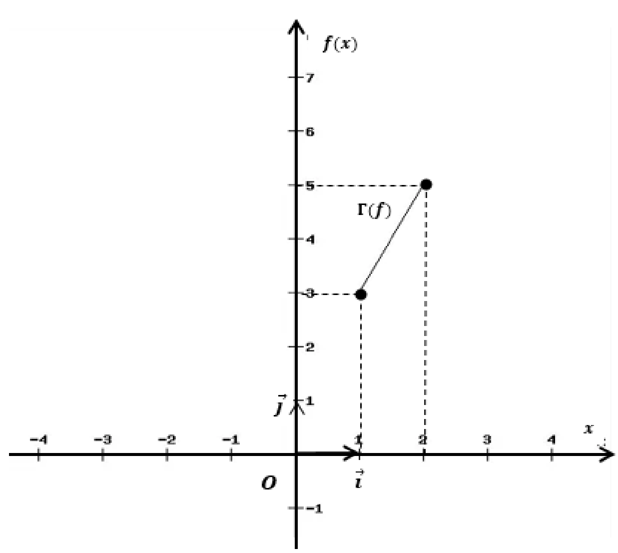
Exemple.

$\boldsymbol{f}: [\mathbf{1}, \mathbf{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$

$\boldsymbol{f}: [\mathbf{1}, \mathbf{2}] \longrightarrow [\mathbf{3}, \mathbf{5}]$

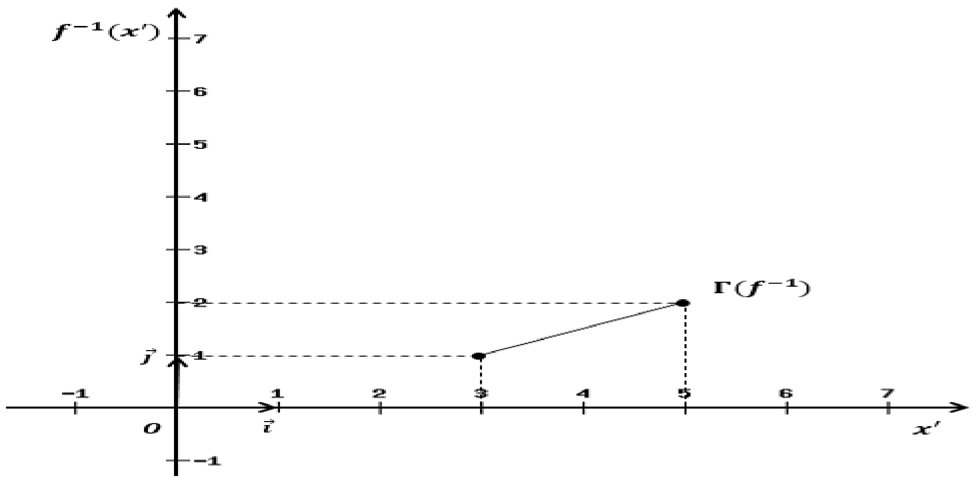
$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$



$$f^{-1}: [3,5] \longrightarrow [1,2]$$

$$x' \longmapsto f^{-1}(x') = x = \frac{x' - 1}{2} \; / \; x' = 2x + 1$$

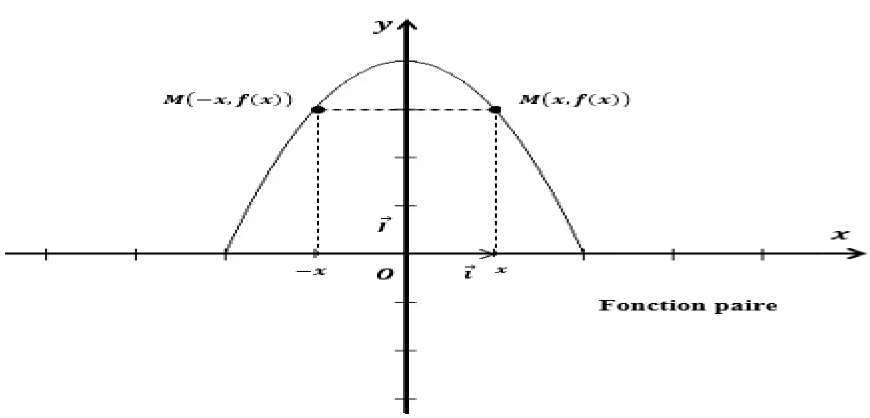
f est bijective et le graphe de f^{-1} est alors obtenu à partir de $\Gamma(f)$ de la figure précédente en prenant la figure symétrique à cette dernière par rapport à la première bissectrice.

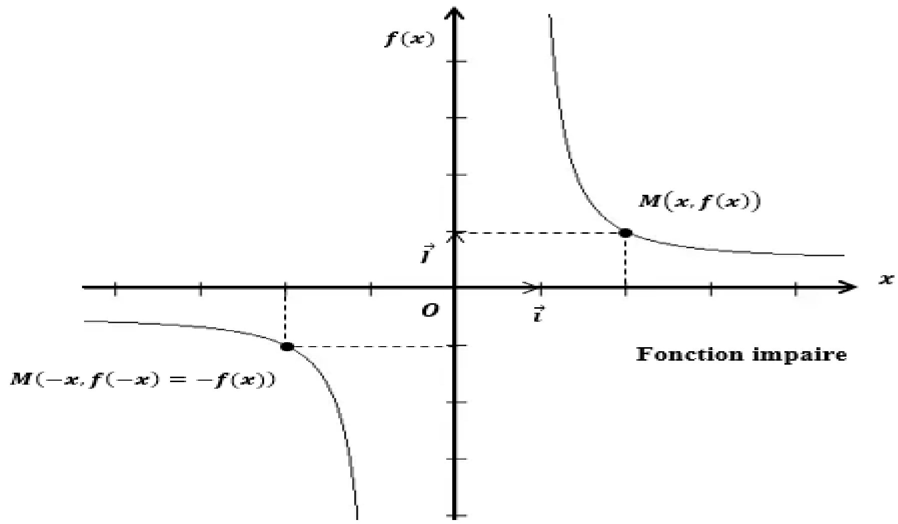


3.1.3 Fonctions paire, impaire, périodique

Définition. Fonction paire, Fonction impaire.

Soit $D \subset \mathbb{R}$, une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **paire** (resp. **impaire)** lorsque, pour tout $x \in D$, on a: $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).





Exemple.

(1) Les fonctions **cosinus** et $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ sont paires.

(2) Les fonctions **sinus** et $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^3$ sont impaires.

Proposition. Si f est une fonction impaire définie en $\mathbf{0}$ alors $f(0) = 0$.

***Définition.* Fonction périodique.** Soient $D \subset \mathbb{R}$ et **T>0.** Une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique de période T lorsque:

i. L'ensemble D vérifie: $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \in D \Leftrightarrow x + T \in D.$

ii. Pour tout $x \in D$, on a : $f(x + T) = f(x).$

Une fonction f est dite **périodique** lorsqu'il existe $T > 0$ tel que f soit périodique de période T.

Proposition. Si $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ est periodique de période T, alors pour tout $x \in D$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a: $x + nT \in D$ et $f(x + nT) = f(x).$

Exemple.

1. Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont périodiques de période 2π.
2. La fonction **tangente** est périodique de période π.

3.1.4 Fonctions monotones

Définition. Soit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

On dit que la fonction $\boldsymbol{f}$ est:

- **Croissante sur I** lorsque**:** $\forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{I}^2, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.
- **Strictement croissante sur I** lorsque**:**
$$\forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{I}^2, \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}).$$
- **Décroissante sur I** lorsque**:** $\forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{I}^2, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.
- **Strictement décroissante ;** $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{I}^2, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.
- **Constante ;** $\forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{I}^2, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$**.**
- **Monotone sur I** lorsqu'elle est croissante sur **I** ou décroissante sur **I.**
- **Strictement monotone sur I** lorsqu'elle est strictement croissante sur **I** ou strictement décroissante sur **I**.

3.1.5 Fonction majorée, minorée, bornée sur un Intervalle

Une fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite:

- **Majorée sur I** lorsqu'il existe $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}\ , \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{M}$.
- **Minorée sur I** lorsqu'il existe **m** $\in \mathbb{R}$ tel que: $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}\ , \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{m}$.
- **Bornée sur I** lorsqu'elle est minorée et majorée sur **I**.

Proposition. $\boldsymbol{f}$ est bornée si et seulement si $|\boldsymbol{f}|$ est majorée.

Définition. Bornes d'une fonction sur un intervalle.

Soit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Si la fonction $\boldsymbol{f}$ est majorée sur **I**, l'ensemble $\boldsymbol{f(I)}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il possède donc une borne supérieure appelée **borne supérieure de $\boldsymbol{f}$ sur I** et notée

$$\operatorname*{\mathbf{Sup}}_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{f}.$$

- Si la fonction $\boldsymbol{f}$ est minorée sur **I**, l'ensemble $\boldsymbol{f(I)}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Il possède donc une borne inférieure appellée **borne inférieure de $\boldsymbol{f}$ sur I** et notée

$$\operatorname*{\mathbf{Inf}}_{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{f}.$$

Exemple. La fonction:

$$\boldsymbol{f}: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} \longmapsto \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

admet $\mathbf{0}$ pour borne inférieure sur $\mathbb{R}_+^*$: on note donc

$$\operatorname*{\mathbf{inf}}_{]\mathbf{0},+\infty[} \boldsymbol{f} = \mathbf{0}.$$

En revanche, $\boldsymbol{f}$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle n'admet donc pas de borne supérieure sur cet intervalle.

3.1.6 Opérations algébriques sur les fonctions

Sur l'ensemble $\mathfrak{F}(\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit les opérations suivantes:
$\forall\, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}.$

1. $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} : \boldsymbol{x} \longmapsto (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$
2. $\boldsymbol{f}.\boldsymbol{g} : \boldsymbol{x} \longmapsto (\boldsymbol{f}.\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).$
3. $\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \longmapsto (\boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$

4. Si $\forall\, x \in E \subset \mathbb{R}, f(x) \neq 0, \frac{1}{f} : x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$,

Et on peut définir : $\frac{1}{f} : x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$; avec $D_{\frac{1}{f}} = \left\{ x \in D_f \ / \ f(x) \neq 0 \right\}$.

• On a la relation d'ordre " $\leq$ " Sur l'ensemble $\mathfrak{F}(E \subset \mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par:

$$f \leq g \iff \forall x \in E, f(x) \leq g(x)$$

et on note: $f < g \iff \forall x \in E, f(x) < g(x)$.

3.1.7 Applications Economiques sur les fonctions

Exemple 01. Le coût total de production en dollars de x unités d'un produit est donné par: $C(x) = 100x\sqrt{x} + 500$,

où x prend des valeurs entières non négatives.

1. Calculez le coût de production de 16 unités , puis de a unités.
2. De combien s'accroit le coût de production si la quantité produite a est augmentée d'une unité ?

Solution. Le coût de production de 16 unités s'obtient en substituant 16 à x dans la formule de $C(x)$.

$$C(16) = 100.\left(16\sqrt{16}\right) + 500 = (100).(16).(4) + 500 = 6900.$$

De même, le coût de production de a unités est donné par:

$C(a) = 100.a\sqrt{a} + 500$, et le coût de production de $a + 1$ unités par $C(a+1)$. Le coût du production s'est donc accru de:

$$C(a+1) - C(a) = 100(a+1)\sqrt{a+1} + 500 - 100a\sqrt{a} - 500$$

$$= 100\left[(a+1)\sqrt{a+1} - a\sqrt{a}\,\right].$$

Exemple 02. Supposons que le coût de production de $\boldsymbol{x}$ unités d'un bien soit donné par : $\boldsymbol{C(x) = A.x\sqrt{x} + B}$ **(** $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des constantes**)**.

Déterminez le coût de production de $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{10}$ et $\boldsymbol{x + h}$ unités.

Solution. Produire **0** unité coûte $\boldsymbol{C(0) = A \times 0 \times \sqrt{0} + B = 0 + B = B}$. (Le paramètre $\boldsymbol{B}$ représente tout simplement les coûts fixes. Ce sont les coûts qui doivent être payés, que l'on produise ou non, comme une redevance annuelle pourun chauffeur de taxi). De même, $\boldsymbol{C(10) = A.10.\sqrt{10} + B}$. Enfin, en remplaçant $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{x + h}$ dans la formule donnée, il vient

$$\boldsymbol{C(x + h) = A(x + h)\sqrt{x + h} + B}.$$

Exemple 03. La fonction de consommation. En théorie macroéconomique Keynésienne, les dépenses totales $\boldsymbol{C}$ de consommation en biens et services sont supposées être une fonction du revenu national $\boldsymbol{y}$, ce qui s'écrit

$$\boldsymbol{C = f(y)}.$$

Dans plusieurs modèles proposés par R.F. Kahn, disciple de Keynes, la fonction de consommation est supposée être de la forme: $\boldsymbol{C = a + by}$.

La pente $\boldsymbol{b}$ est appelée propension marginale à consommer. Si $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{y}$ sont exprimés en milliards de dollars, le nombre $\boldsymbol{b}$ indique de combien s'accroît dans cette unité la consommation lorsque le revenu national augmente de $\boldsymbol{1}$ milliard de dollars.

En accord avec les idées de Kahn, ce nombre $\boldsymbol{b}$ est compris normalement entre $\boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{1}$. Dans une étude sur l'économie américaine des années **1929-1941**,T.Haavelmo estimait la fonction de consommation donnée par

$$\boldsymbol{C = 95,05 + 0,712y}.$$

La propension marginale à consommer est ici égale à $\boldsymbol{0,712}$.

3.2 Limite D'une Fonction

3.2.1 Limite en un point

Définition.

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un voisinage d'un point $\boldsymbol{x_0}$ de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction $\boldsymbol{f}$ tend vers "$\boldsymbol{\ell}$" quand $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x_0}$ et on notera

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell},$$

si et seulement si:

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \exists\, \boldsymbol{\alpha} > 0 \;/\; \forall\, \boldsymbol{x}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}| < \boldsymbol{\varepsilon}\,.$$

Théorème. Unicité de la limite.

Si $\boldsymbol{f}$ admet une limite au point $\boldsymbol{x_0}$, cette limite est unique.

Preuve.

Supposons que la fonction $\boldsymbol{f}$, définie dans un voisinage $\boldsymbol{V}$ de $\boldsymbol{x_0}$ (sauf peut- être en $\boldsymbol{x_0}$), admette deux limites $\boldsymbol{\ell}$ et $\boldsymbol{\ell'}$ au point $\boldsymbol{x_0}$ **.** Soit $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$. Alors par hypothèse,

$$\exists\, \boldsymbol{\eta_1} > 0, \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\eta_1} \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}| < \boldsymbol{\varepsilon},$$

$$\exists\, \boldsymbol{\eta_2} > 0, \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\eta_2} \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell'}| < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Il en résulte, en posant $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{inf}(\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2})$,

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \eta \Rightarrow |\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}'| < |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}| + |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}'| < \boldsymbol{2}\, \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Donc $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell'}$**, car** $\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\ell'}$ sont deux nombres fixes et $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ arbitraire.

3.2.2 Limite à droite, limite à gauche

Définition. Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur le domaine $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{x_0}$ un point quelconque, on dit que la fonction $\boldsymbol{f}$ est:

- Définie à droite de $\boldsymbol{x_0}$, s'il existe $\boldsymbol{\alpha} > 0$, tel que: $]\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\alpha}[\subset \boldsymbol{D}$.
- Définie à gauche de $\boldsymbol{x_0}$, s'il existe $\boldsymbol{\alpha} > 0$, tel que: $]\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x_0}[\subset \boldsymbol{D}$.

Définition.

- On dit que $\boldsymbol{f}$ admet "$\boldsymbol{\ell}$" pour une limite à droite si elle est définie à droite de $\boldsymbol{x_0}$ et si:

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \exists\, \boldsymbol{\alpha} > 0 \,/\, \forall\, \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x_0} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\alpha}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\alpha} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}| < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

On écrit:

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x \longrightarrow x_0^{+}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell} \ ou \lim_{x \longrightarrow x_0 + 0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{\ell}.$$

- On dit que $\boldsymbol{f}$ admet "$\boldsymbol{\ell}'$" pour une limité à cuaghe si elle est définie à gauche de $\boldsymbol{x_0}$ et si:

$$\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \exists\, \boldsymbol{\alpha} > 0 / \forall\, \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{x_0}: |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\alpha} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}'| < \boldsymbol{\varepsilon}.$$

On écrit:

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x \longrightarrow x_0^{-}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell}' \ ou \lim_{x \longrightarrow x_0 - 0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{\ell}'.$$

Il est clair que:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell} \Longleftrightarrow \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\ell}\,.$$

Exemple. Pour $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty.$

Remarque.

La limite de la fonction f quand $x \longrightarrow x_0$ (resp. la limite à droite, la limite à gauche au x_0) ne dépend pas de la valeur de f au point x_0.

Proposition. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, définie sur un voisinage de x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ existe, alors f est localement bornée (bornée dans un voisinage de x_0) au sens où:

$$\exists M > 0, \exists\, \alpha > 0\,, \forall\, x: |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x)| \leq M.$$

Preuve. Par définition si: $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell;$ alors:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0\,, \forall\, x: |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ainsi pour $\varepsilon_0 > 0$ fixé, il existe α_0 tel que:

$\forall x: |x - x_0| < \alpha_0 \Longrightarrow \ell - \varepsilon_0 < f(x) < l + \varepsilon_0$

donc pour $\mathbf{M} = |\ell| + \varepsilon_0,$ on a:

$\forall\, x : |x - x_0| < \alpha_0 \Longrightarrow |f(x)| < |\ell + \varepsilon_0| \leq |\ell| + |\varepsilon_0| = |\ell| + \varepsilon_0 = M$

ce qui termine la preuve de cette proposition. ■

3.2.3 Cas où x devient infini

Par définition l'expression $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ signifie

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, A > 0 \,/\, \forall\, x: x > A \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

De la même façon $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$ signifiera

$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0, \exists\, \boldsymbol{A} > 0 \;/\; \forall\, \boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} < -\boldsymbol{A} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}| < \boldsymbol{\varepsilon}.$

Exemple.

$\boldsymbol{f}:]\mathbf{0}, +\infty[\; \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}\ car:\ \forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0, Pour\ x > \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}} \Longrightarrow$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\ell}| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{0}| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right| = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} < \varepsilon \left(\exists\, \boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)$$

3.2.4 Limite Infinie

Soit $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$, on posera par définition:

- $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = +\infty \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{A} > 0, \exists\, \boldsymbol{\eta} > 0 / |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\eta} \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{A}$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\infty \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{A} > 0, \exists\, \boldsymbol{\eta} > 0 / |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \boldsymbol{\eta} \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < -\boldsymbol{A}$.

Si $\boldsymbol{x_0} = +\infty$ ou $\boldsymbol{x_0} = -\infty$, on posera:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = +\infty \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{A} > 0, \exists\, B > 0 /\ \boldsymbol{x} > B \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{A}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = +\infty \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{A} > 0, \exists\, B > 0 /\ \boldsymbol{x} < -B \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{A}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\infty \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{A} > 0, \exists\, B > 0 /\ \boldsymbol{x} > B \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < -A$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = -\infty \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{A} > 0, \exists\, B > 0 /\ \boldsymbol{x} < -B \Longrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < -A$.

Remarque. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \pm\infty$ alors $\boldsymbol{f}$ n'est pas localement bornée.

3.2.5 Opérations sur les limites

Définition. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{I}$, et $\boldsymbol{\lambda}$ un nombre réel. On définit la somme de $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$, le produit de $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ et le produit de $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{\lambda}$, de la façon suivante :

$$\boldsymbol{f+g}:\begin{cases}\boldsymbol{I}\longrightarrow\mathbb{R}\\ \boldsymbol{x}\longmapsto\boldsymbol{f(x)+g(x)}\end{cases},\ \boldsymbol{f.g}:\begin{cases}\boldsymbol{I}\longrightarrow\mathbb{R}\\ \boldsymbol{x}\longmapsto\boldsymbol{f(x).g(x)}\end{cases},\ \boldsymbol{\lambda f}:\begin{cases}\boldsymbol{I}\longrightarrow\mathbb{R}\\ \boldsymbol{x}\longmapsto\boldsymbol{\lambda f(x)}\end{cases}.$$

Lorsque $\boldsymbol{g}$ ne s'annule pas sur $\mathbf{I}$, on définit également le quotient de $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{g}$:

$$\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}:\begin{cases}\boldsymbol{I}\longrightarrow\mathbb{R}\\ \boldsymbol{x}\longmapsto\dfrac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}}\end{cases}.$$

Théorème. Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies sur $\mathbf{I}$ et admettant des limites en $\boldsymbol{x_0}\in\overline{\boldsymbol{I}}$ et soit $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$. Les tableaux qui suivent indiquent les limites éventuelles de la somme, la différence, le produit, l'inverse ou le quotient de $\boldsymbol{f}$et $\boldsymbol{g}$, sauf dans certains cas notés **F.I** (Forme indéterminée) où l'on ne sait pas conclure a priori si la fonction admet une limite ou non, et si la limite éventuelle est finie ou infinie.

<u>Limite de $\boldsymbol{\lambda f}$ en x_0</u>

$\boldsymbol{\lambda}$ \ $\boldsymbol{Lim\ f}$	$-\infty$	$\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$\boldsymbol{\lambda}<0$	$+\infty$	$\boldsymbol{\lambda\,\ell}$	$-\infty$
$\boldsymbol{\lambda=0}$	**0**	**0**	**0**
$\boldsymbol{\lambda}>0$	$-\infty$	$\boldsymbol{\lambda\,\ell}$	$+\infty$

Limite éventuelle de $f+g$ en x_0

$Lim f$ \ $Lim\ g$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I.$
$\ell \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$F.I.$	$+\infty$	$+\infty$

Limite éventuelle de $f-g$ en x_0

$Lim f$ \ $Lim\ g$	$-\infty$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$F.I.$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$\ell - \ell'$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I.$

Limite éventuelle de $f.g$ en x_0

$Lim f$ \ $Lim\ g$	$-\infty$	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I.$	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$\ell.\ell'$	0	$\ell.\ell'$	$-\infty$
$\ell = 0$	$F.I.$	0	0	0	$F.I.$
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell.\ell'$	0	$\ell.\ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I.$	$+\infty$	$+\infty$

Limite de f/g en x_0

$\lim g$	$-\infty$	0^-	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	0^+	$+\infty$
$\lim\left(\frac{1}{g}\right)$	0^-	$-\infty$	$\frac{1}{\ell'}$	$+\infty$	0^+

Limite éventuelle de f/g en x_0

Lim f \ *Lim g*	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$F.I.$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$F.I.$
$\ell < 0$	0^+	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^-
0	0	0	$F.I.$	$F.I.$	0	0
$\ell > 0$	0^-	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	$F.I.$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I.$

Démonstration.

À titre d'exemple, montrons que si $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell'$ où $(x_0, \ell, \ell') \in \mathbb{R}^3$ alors $f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Soit ε un réel strictement positif quelconque. On a $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, donc par définition de

$\boldsymbol{f(x)} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \boldsymbol{\ell}$, il existe $\boldsymbol{\alpha} > 0$ tel que:

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \cap [\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\alpha}], \boldsymbol{\ell} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \leq \boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{\ell} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}.$$

De même, il existe $\boldsymbol{\beta} > 0$ tel que:

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \cap [\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\beta}], \boldsymbol{\ell}' - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \leq \boldsymbol{g(x)} \leq \boldsymbol{\ell}' + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}.$$

En posant $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{min}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, on obtient: $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \cap [\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\gamma}]$,

$$\boldsymbol{\ell} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \leq \boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{\ell} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \; et \; \boldsymbol{\ell}' - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2} \leq \boldsymbol{g(x)} \leq \boldsymbol{\ell}' + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}.$$

dont on déduit par somme :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \cap [\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{\gamma}], \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}' - \boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{f(x)} + \boldsymbol{g(x)} \leq \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}' + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

On obtient bien: $\boldsymbol{f(x)} + \boldsymbol{g(x)} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\ell}'$. ■

3.2.6 Composition des limites

Théorème. Soient $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}, \boldsymbol{J} \subset \mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{f(I)} \subset \boldsymbol{g}, \boldsymbol{g} : \boldsymbol{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x_0} \in \overline{\boldsymbol{I}}$. Si $\boldsymbol{f}$ a une limite $\boldsymbol{a} \in \overline{\mathbb{R}}$ en $\boldsymbol{x_0}$ et si $\boldsymbol{g}$ a une limite $\boldsymbol{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ en $\boldsymbol{a}$, alors $\boldsymbol{gof}$ admet $\boldsymbol{b}$ pour limite en $\boldsymbol{x_0}$:

$$\boldsymbol{f(x)} \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \boldsymbol{a} \; et \; \boldsymbol{g(y)} \underset{y \longrightarrow a}{\longrightarrow} \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f(x)}\big) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} \boldsymbol{b}.$$

Démonstration.

À titre d'exemple montrons que si $\boldsymbol{f(x)} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{a}$ où $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ et si $\boldsymbol{g(y)} \underset{y \longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$ alors $\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f(x)}\big) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Soit $\boldsymbol{B}$ un réel quelconque. Par définition de $\boldsymbol{g(y)} \underset{y \longrightarrow a}{\longrightarrow} -\infty$, il existe $\boldsymbol{\alpha} > 0$ tel que: $\forall\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{J} \cap [\boldsymbol{a} - \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\alpha}],\; \boldsymbol{g(y)} \leq \boldsymbol{B}$.

Or par définition $\boldsymbol{f(x)} \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} \boldsymbol{a}$, il existe $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\forall\, x \in I \cap [A, +\infty[, a - \alpha \leq f(x) \leq a + \alpha.$$

Comme $\boldsymbol{f}$ est à valeurs dans $\boldsymbol{J}$, on en déduit que:

$$\forall\, x \in I \cap [A, +\infty[\,, g\big(f(x)\big) \leq B.$$

On obtient bien: $g\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\longrightarrow+\infty]{} -\infty$.

3.2.7 Limites et Inégalités

Théorème. Comptabilité avec la relation d'ordre.

Soient $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$. On suppose que:

(i) f et g ont des limites finies en x_0.

(ii) $\forall\, x \in I, f(x) \leq g(x)$.

Alors $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$.

Démonstration.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{I}$ admettant x_0 pour limite.

On a donc $f(U_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ et $g(U_n) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, f(U_n) \leq g(U_n)$, donc le théorème de passage à la limite pour les suites donne:

On a donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(U_n) \leq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} g(U_n)$,

c'est-à-dire

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x\longrightarrow x_0} g(x). \qquad \blacksquare$$

Théorème. Existence d'une limite par encadrement.

Soient $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ trois fonctions définies sur $\mathbf{I}$ et $\boldsymbol{x_0} \in \bar{\boldsymbol{I}}$. On suppose que:

(i) $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ ont une même limite finie $\boldsymbol{\ell}$ en $\boldsymbol{x_0}$,

(ii) $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$,

alors $\boldsymbol{h}$ admet $\boldsymbol{\ell}$ pour limite en $\boldsymbol{x_0}$.

Exemple.

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right|$. Montrons que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \leftarrow \mathbf{0}}{\longrightarrow} \mathbf{1}$.

Solution. Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^*$, on a: $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} - \mathbf{1} < \left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right| \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$.

- Pour tout $\boldsymbol{x} > 0$, on a donc: $\mathbf{1} - \boldsymbol{x} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{1}$. Or $\mathbf{1} - \boldsymbol{x} \underset{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}}{\longrightarrow} \mathbf{1}$ donc par encadrement, on en déduit que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}^+}{\longrightarrow} \mathbf{1}$.
- Pour tout $\boldsymbol{x} < 0$, on a donc: $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < 1 - \boldsymbol{x}$. Donc par encadrement, il vient $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}^-}{\longrightarrow} \mathbf{1}$.

$\boldsymbol{f}$ admet donc $\mathbf{1}$ pour limite à droite et à gauche en $\mathbf{0}$. $\boldsymbol{f}$ n'était pas définie en $\mathbf{0}$, on en déduit que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}}{\longrightarrow} \mathbf{1}$.

Théorème. Théorème de comparaison. Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies sur $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{x_0} \in \bar{\boldsymbol{I}}$.

- Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}}{\longrightarrow} +\infty$ et si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ alors $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}}{\longrightarrow} -\infty$ et si $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ alors $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}}{\longrightarrow} -\infty$.

3.2.8 Théorème de la limite monotone

Théorème. Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction croissante sur $\boldsymbol{I} =]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ où

$-\infty \leq \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \leq +\infty$.

- Si f est majorée sur I, alors f admet une limite finie en b; sinon $f(x) \underset{x \to b}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si f est minorée sur I, alors f admet une limite finie en a; sinon $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$.
- En tout $x_0 \in]a, b[, f$ admet une limite finie à gauche et à droite, et on a: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x)$.

On a des résultats analogues si f est décroissante sur $]a, b[$.

Exemple. $f: x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, f est définie sur $\mathbb{R}_+$, elle est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et majorée par le nombre 1 sur $\mathbb{R}_+$. Donc f admet une limite finie sur $\mathbb{R}_+$et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

3.2.9 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Notations De Landau

Soit f, g deux fonctions définies au voisinage du point x_0 de $\mathbb{R}$.

Définition.

- On dit que f est négligeable devant g, au voisinage de x_0, et l'on écrit $f = o(g)$ si

$$\forall \mathcal{E} > 0, \exists \delta > 0;\ \forall x\ (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|).$$

- On dit que f est dominée par g, au voisinage de x_0, et l'on écrit $f = O(g)$, si

$$\exists K > 0, \exists \delta > 0, \forall x\ (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x)| \leq K.|g(x)|)\ .$$

Les symboles **"o", "O"** s'appellent notations de Landau.

Il est claire que :

Si $\boldsymbol{f}$ est négligeable devant $\boldsymbol{g}$ quand $\boldsymbol{x}$ tend vers $\boldsymbol{x_0}$, alors $\boldsymbol{f}$ est dominée par $\boldsymbol{g}$ au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$.

Les deux définitions restent valables quand $\boldsymbol{x_0} = \pm\infty$, dans le sens que**:**

Définition. Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies sur un intervalle $]\boldsymbol{a}, +\infty[$. On posera par définition:

- $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{g})$ lorsque $\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{\mathcal{E}} > \boldsymbol{0}, \exists \boldsymbol{\delta} > 0,$
$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} > \boldsymbol{\delta} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{\mathcal{E}}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|),$$
- $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{g})$ lorsque $\boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{K} > 0, \exists\ \boldsymbol{\delta} > 0,$
$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} > \boldsymbol{\delta} \Longrightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{K}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|).$$

De façon analogue, on définit les relations $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{g}), \boldsymbol{f} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{g})$ pour $\boldsymbol{x} \longrightarrow -\infty$.

Remarque.

Si dans un voisinage de $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{g}$ ne s'annule pas alors on voit que:

• $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{g})$; quand $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x_0} \Leftrightarrow \lim\limits_{\boldsymbol{x}\longrightarrow \boldsymbol{x_0}} \dfrac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0},$

• $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{g})$ quand $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x_0} \Leftrightarrow$ le rapport $\dfrac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ est bornée au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$.

donc:

• $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\longrightarrow \boldsymbol{x_0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow\ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}(\boldsymbol{1})$ quand $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x_0}$

et:

• $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{1}) \Leftrightarrow \boldsymbol{f}$ est bornée au voisinage de $\boldsymbol{x_0}$.

Exemples.

Pour $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{0}$, on a**:**

$x^2 = o(x)$, $\quad x\sin(x) = O(x^2)$,

$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $\quad x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3 = o(\tan x)$.

Pour $x \longrightarrow +\infty$:

$x^2 = O(x^3)$, $\quad x.\sin(x) = O(x)$,

$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, $\quad x^2\sin\frac{1}{x} + x^3 = o(x^4)$.

Définition. **Fonctions équivalentes.** Soient f et g deux fonctions définies sur I et x_0 de $\overline{I}$. On dit que la fonction f **est équivalente à** g **au voisinage de** x_0, lorsqu'il existe une fonction $h: I \to \mathbb{R}$ admettant $\mathbf{1}$ pour limite en x_0 et telle que $\forall x \in I$, $f(x) = g(x)h(x)$. On note alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g.$$

Remarque. S'il existe un voisinage de x_0 ou la fonction g ne s'annule pas alors:

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple. **<u>Au voisinage de 0</u>:**

- $\sin(x) \sim_0 x$, • $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, • $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$, • $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$, • $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

- Polynômes: soit $P(x) = a_q x^q + \cdots + a_p x^p$ avec $q \leq p$, $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$ alors: $P(x) \underset{0}{\sim} a_q x^q$.
- $x^4 + x^2 - x \underset{0}{\sim} - x$.

<u>Au voisinage de</u> $+\infty$:

- $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$,
- $P(x) = a_q x^q + \cdots + q_p x^p$ avec $q \leq p, a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$ alors: $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_p x^p$.
- $x^5 - 3x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^5$

Proposition. La relation " $\backsim$ " est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de x_0.

Proposition. Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage x_0, sauf peut être en x_0. Supposons que $f \sim g$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Théorème. Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 des fonctions définies dans un voisinage x_0, sauf peut etre en x_0. Supposons que $f_1 \sim f_2 \ et \ g_1 \sim g_2$.

(1) $f_1 g_1 \underset{x_0}{\sim} f_2 g_2$.

(2) Si g_1 et g_2 ne s'annulent pas, alors $f_1/g_1 \underset{x_0}{\sim} f_2/g_2$.

(3) Si f_1 et f_2 ne s'annulent pas, alors $1/f_1 \underset{x_0}{\sim} 1/f_2$.

Remarque. La relation "$\sim$" n'est pas compatible avec l'addition.

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{x_0}{\sim} g_2 \nRightarrow f_1 + g_1 \underset{x_0}{\sim} f_2 + g_2$.

Exemple.

Au voisinage de 0:

$$\underbrace{\cos(x)}_{f_1} \underset{0}{\sim} \underbrace{1+2x}_{f_2}, \quad \underbrace{-1}_{g_1} \underset{0}{\sim} \underbrace{-1}_{g_2}$$

$$f_1 + g_1 = \cos(x) + (-1) = \cos(x) - 1 \underset{0}{\nsim} 2x + 1 - 1 = 2x.$$

$f_1 + g_1 \underset{0}{\nsim} f_2 + g_2$ au voisinage de $\mathbf{0}$.

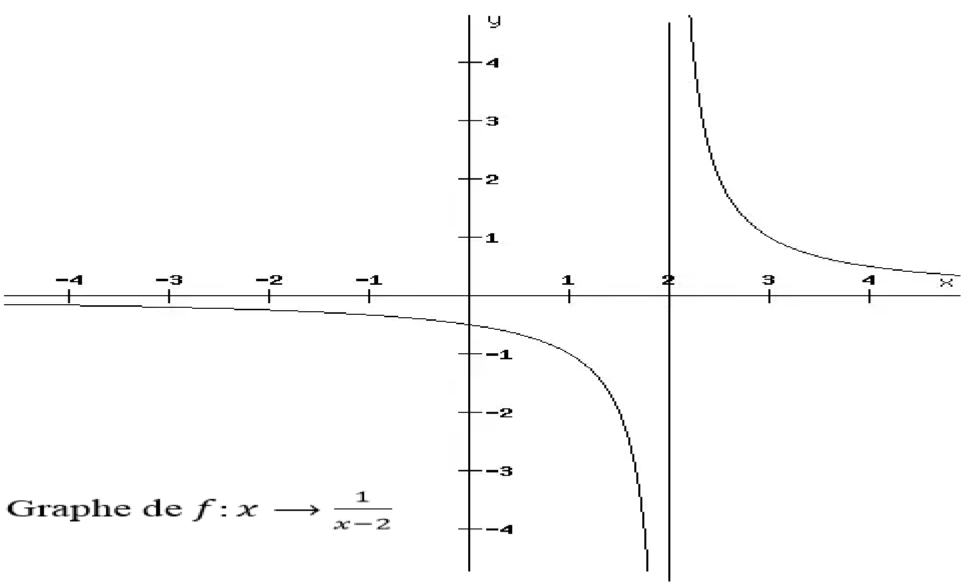
3.2.10 Branches infinies des courbes

Soinet $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et C_f la courbe représentative de f.

Définition. **Asymptote en $x_0 \in \mathbb{R}$.**

On suppose que f admet $\pm\infty$ pour limite en x_0. On dit alors que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote** à C_f en x_0.

Exemple. f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par: $f(x) = \frac{1}{x-2}$, possède une asymptote d'équation $x = 2$.



Graphe de $f: x \longrightarrow \frac{1}{x-2}$

Définition. Asymptote en $\pm\infty$.

On suppose que $\boldsymbol{f}$ est définie au voisinage de $+\infty$. S'il existe $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\boldsymbol{f(x) - ax - b}$ tend vers $\boldsymbol{0}$ en $+\infty$, alors on dit que la droite d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ est asymptote à $\boldsymbol{C_f}$ en $+\infty$. On définit de même une asymptote à $\boldsymbol{C_f}$ en $-\infty$.

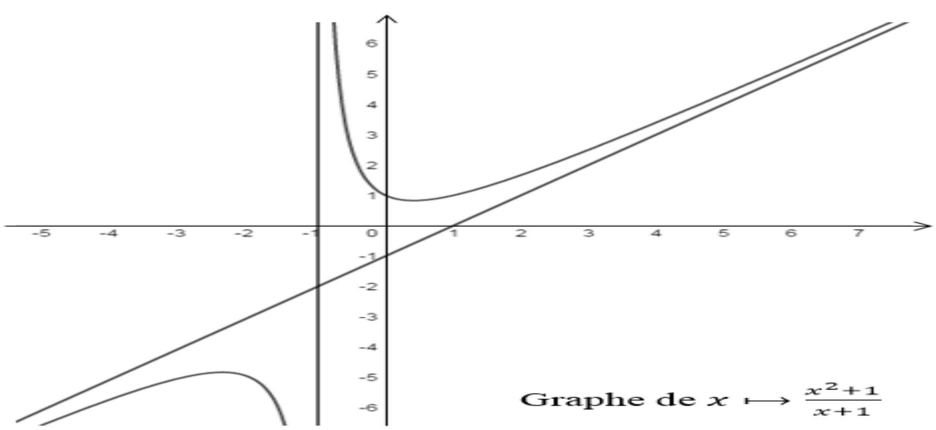
Remarques.

- En particulier, si $\lim\limits_{+\infty} \boldsymbol{f = b}$ où $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ alors la droite $\boldsymbol{y = b}$ est asymptote à $\boldsymbol{C_f}$ en $+\infty$.
- La position de $\boldsymbol{C_f}$ par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $\boldsymbol{f(x) - ax - b}$ (Positif: au-dessus ; négatif : en dessous).

Exemple. On définie $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R} - \{-\boldsymbol{1}\}$ par $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2+1}}{\boldsymbol{x+1}}$.

Alors $\forall\ \boldsymbol{x} \neq\ -\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2-1+2}}{\boldsymbol{x+1}} = \boldsymbol{x - 1} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x+1}}$ **.**

Or $\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x+1}} \xrightarrow[\boldsymbol{x}\longrightarrow\pm\infty]{} \boldsymbol{0}$ donc la droite $\boldsymbol{D}$ d'équation $\boldsymbol{y = x - 1}$ est asymptote à $\boldsymbol{C_f}$ en $+\infty$ et $-\infty$. $\boldsymbol{C_f}$ est au-dessus de son asymptote en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$**.** Par ailleurs la droite d'équation $\boldsymbol{x = -1}$ est asymptote à $\boldsymbol{C_f}$ en $-\boldsymbol{1}$.



Définition. Branche parabolique en $\pm\infty$.

On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$ et que f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$.

1. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, on dit que C_f présente une **branche parabolique de direction verticale**,

2. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que C_f présente une **branche parabolique de direction horizontale**,

3. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ et si $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x) - a.x)) = \pm\infty$, on dit que C_f présente une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = a.x$.

On définit de même les branches paraboliques au voisinage de $-\infty$.

3.3 Fonctions Continues

3.3.1 Continuité en un point

Définition.

1. Soit une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

C'est-à-dire si

$$\forall\, \mathcal{E} > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, x \in I: |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < E.$$

On a défini la notion de limite à droite et de limite à gauche en un point x_0.
De façon analogue on dira que:

2. $\boldsymbol{f}$ est continue à droite en $\boldsymbol{x_0}$ si

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0),$$

C'est-à-dire si

$$\forall\, \mathcal{E} > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, x : 0 \leq x - x_0 < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

3. De même, on dira que $\boldsymbol{f}$ est continue à gauche en x_0 si

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0),$$

C'est-à-dire si

$$\forall\, \mathcal{E} > 0, \exists\, \eta > 0, \forall\, x : 0 \leq x_0 - x < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Proposition.

Une fonction $\boldsymbol{f}$ définie dans un voisinage de $\boldsymbol{x_0}$ est continue au point $\boldsymbol{x_0}$, si et seulement si $\boldsymbol{f}$ est continue à droite et à gauche de $\boldsymbol{x_0}$.

$$(f \text{ continue en } x_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Théorème. continuité des fonctions usuelles.

Les fonctions polynomiales et rationnelles, la valeur absolue, les fonctions trigonométriques, le logarithme, l'exponentielle et les fonctions $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x^{\alpha}}$ où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Exemple.

1. Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction réelle définie par : $f(x) = \begin{cases} 2x + 1\ , & si\ x \geq 0. \\ x - 1\ , & si\ x < 0. \end{cases}$

$\boldsymbol{f}$ n'est pas continue en $\boldsymbol{x_0 = 0}$ car:

- $\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} (2x + 1) = 1,$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x - 1) = -1$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$.

2. La fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} x & , \ si\ x \geq 1. \\ 2x - 1 & , \ si\ x < 1. \end{cases}$ est continue en $x_0 = 1$,

car:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$,
- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x - 1) = 1$,

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = f(1) = 1$.

3.3.2 Fonctions continues sur un intervalle

Définition. Fonction continue sur un intervalle.

On dit qu'une fonction $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I lorsqu'elle est continue en tout point de I.

Théorème. Opérations algébriques.

Soient f et g deux fonctions continues sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $f + g$ et $\lambda . f$ sont continués sur I.
- Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Théorème. Composition. Soit $J \subset \mathbb{R}$. Si f est une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset J$, et si g est une fonction continue sur J, alors gof est continue sur I.

Théorème. Continuité des fonctions usuelles. Les fonctions polynomiales et rationnelles, la valeur absolue, le logarithme, l'exponentielle, les fonctions trigonométriques et les fonctions $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ où $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$, sont continues sur leur ensemble de définition.

Théorème. Théorème des valeurs intermédiaires. Soit $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Alors, pour tout réel $\boldsymbol{c}$ compris entre $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$, il existe $\boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tel que**:** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{c}$.

Si de plus la fonction $\boldsymbol{f}$ est strictement monotone alors on sait qu'il existe **un unique**

$\boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tel que**:** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{c}$.

Cas particulier. Si $\boldsymbol{f}$ est continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$et si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) < 0$.

Alors $\exists\ \boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{0}$.

Exemple. Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par**:** $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{5}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$.

Montrer que l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ admet au moins une solution dans $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Solution.

1. $\boldsymbol{f}$ est continue sur $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ car $\boldsymbol{f}$ est un polynôme,

2. On a $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = -\mathbf{1}$, $\boldsymbol{f}(\mathbf{0}).\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}.(-\mathbf{1}) = -\mathbf{1} < 0$,
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists\ \boldsymbol{x_0} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \text{ let que } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \mathbf{0}.$$

Définition. Segment.

On appelle ***segment*** tout intervalle de la forme **[a , b],** où **(a ,b)∊** $\mathbb{R}^2$.

Définition. Fonction atteignant ses bornes. Soit $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Si $\boldsymbol{f}$ est majorée sur $\boldsymbol{I}$ et s'il existe $\boldsymbol{x}_{\mathbf{M}} \in \boldsymbol{I}$ tel que:

$$f(x_M) = \sup_I f,$$

on dit que f **atteint sa borne supérieure sur I** ou encore que f admet un **maximum sur I**. On note alors:

$$\max_I f = \sup_I f = f(x_M).$$

- Si f est minorée sur I et s'il existe $x_m \in I$ tel que:

$$f(x_m) = \inf_I f,$$

on dit que f **atteint sa borne inférieure sur I** ou encore que f admet un **minimum sur I**. On note alors:

$$\min_I f = \inf_I f = f(x_m).$$

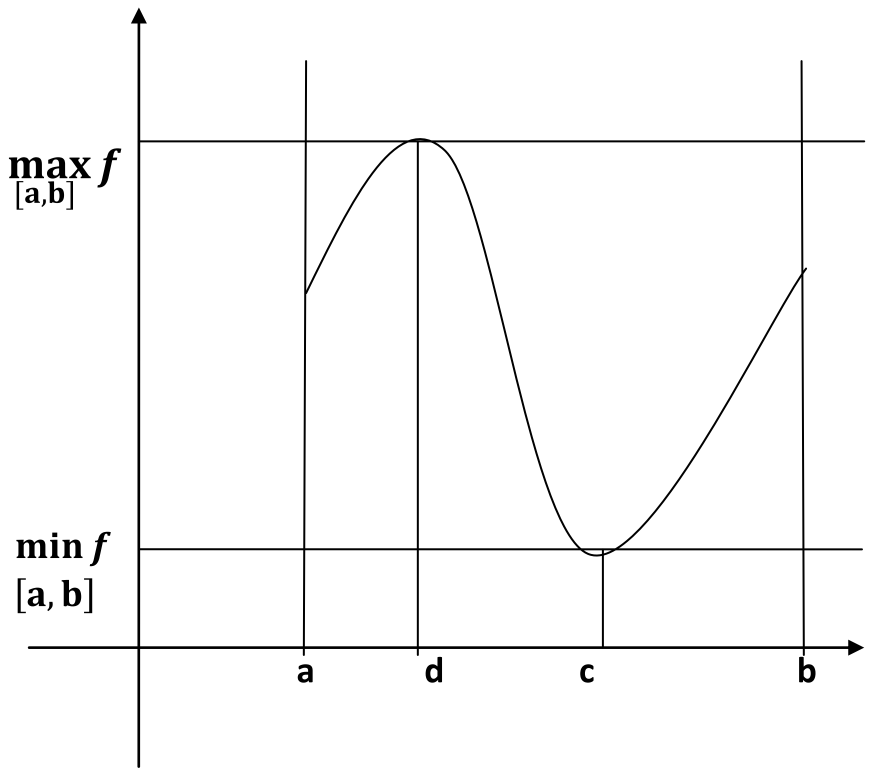
Exemple. Soit $f: x \in [1, +\infty[\longmapsto \frac{1}{x}$. Alors f admet 1 pour borne superieure et 0 pour borne inferieure sur $[1, +\infty[$. Elle atteint sa borne supérieure:

$$f(1) = \max_{[1,+\infty[} f,$$

mais elle n'atteint pas sa borne inferieure car: $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) \neq 0$. En particulier, f est minorée mais n'admet pas de minimum.

Théorème. Image d'un segment par une fonction continue. Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ alors $f([a, b])$ est un segment. En particulier $\boldsymbol{f}$ est bornée sur $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ et atteint ses bornes, autrement dit il existe $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ et $\boldsymbol{d} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ tels que:

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{c}) = \min_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \boldsymbol{f} \;\; \text{e}t \;\; \boldsymbol{f}(\mathbf{d}) = \max_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \boldsymbol{f}.$$



3.3.3 Prolongement par continuité

Définition. Soient $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{x_0}$ un réel de $\overline{\boldsymbol{I}} \setminus \boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{f}$ admet une limite $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}$ au point $\boldsymbol{x_0}$, alors on peut prolonger $\boldsymbol{f}$ en une fonction continue en $\boldsymbol{x_0}$ en posant:

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}\,(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}; \\ \boldsymbol{\ell} \quad , & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}; \end{cases}$$

on dit alors que $\boldsymbol{f}$ se prolonge par continuité en $\boldsymbol{x_0}$ et la fonction $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ est appelée prolongement par continuité de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$.

Remarques.

1. Par abus de notation, la fonction prolongée par continuité $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ est souvent encore notée $\boldsymbol{f}$.
2. D'après l'unicité de la limite, si $\boldsymbol{f}$ admet un prolongement par continuité en $\boldsymbol{x_0}$, alors celui-ci est unique.

Exemple.

Posons, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}; \mathbf{2}\}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{4}}{\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}}$.

Pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}; \mathbf{2}\}$, on a :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})}{(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})} = \frac{\boldsymbol{x} + \mathbf{2}}{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}.$$

Donc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \xrightarrow[\boldsymbol{x} \to \mathbf{2}]{} \mathbf{4}$ et $\boldsymbol{f}$ se prolonge par continuité en $\mathbf{2}$ en posant $\boldsymbol{f}(\mathbf{2}) = \mathbf{4}$.

En revanche, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \xrightarrow[\boldsymbol{x} \to \mathbf{1}^+]{} +\infty$ et $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \xrightarrow[\boldsymbol{x} \to \mathbf{1}^-]{} -\infty$, donc $\boldsymbol{f}$ ne se prolonge pas par continuité en $\mathbf{1}$.

3.4 Exercices D'application

<u>Exercice 01</u>: Cherchez les domaines de définition des fonctions:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$.

c) $h(x) = \frac{x^3-x-1}{x-1}$.

<u>Exercice 02</u>: le coût de production de x unités d'un bien est donné par

$$C(x) = 100 + 4x + 2x^2.$$

1. Calculer $C(0), C(100)$ et $C(101) - C(100)$.
2. cherchez l'expression de $C(x+1) - C(x)$ et expliquer la signification de cette différence.

<u>Exercice 03</u>: Cherchez des équations des droites suivantes :

a) d_1 passe par $(-2, 3)$ et sa pente vaut -3.

b) d_2 passe par les points de coordonnées $(-3, 5)$ et $(2, 7)$.

c) d_3 passe par les points de coordonnées (a, b) et $(2a, 3b)$ (on suppose $a \neq 0$).

<u>Exercice 04</u>: En utilisant la définition de la limite. Montrer que :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ax^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{a + 3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = +\infty$.

Exercice 05: pour chaque des fonctions suivantes, déterminer la limite éventuelle en x_0:

a) $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{\sin(x)}$; $x_0 = 0$.

b) $g(x) = 2x + \dfrac{\sqrt{9x^2}}{x}$; $x_0 = 0$.

c) $h(x) = x^a \left|\dfrac{1}{x}\right|$; limite à droite en 0 en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 06: Déterminer les limites, quand $x \longrightarrow \pm\infty$, de la fonction

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - ax.$$

Exercice 07: Démontrer qu'au voisinage de 0, on a:

a) $\sin(2x) \sim 2x$.
b) $\cos(2x) \sim 1$.
c) $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 08: Déterminer au voisinage de 0, un équivalent de:

a) $x\sqrt{x-1} - x$.
b) $\sqrt{12x - x^2}$.
c) $\cos[\sin x]$.

Exercice 09: Soit la fonction $f: x \longmapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$

a) Quel est l'ensemble de définition de f?

b) Déterminer les limites et branches infinies en $-\mathbf{1}, +\infty$ et $-\infty$.

<u>Exercice 10</u>: Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer à l'aide d'équivalents la limite en $\boldsymbol{x_0}$:

a) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}}} - \sqrt[3]{x};\ x_0 = +\infty},$

b) $\boldsymbol{g(x) = (x+1)\sin\left(\frac{2x}{x^2+3}\right);\ x_0 = +\infty}.$

<u>Exercice 11</u>: pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est continue en $\boldsymbol{x_0}$:

$$\textbf{a)}\ \boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\sqrt{x}} & ;\ \boldsymbol{si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{\dfrac{x^2}{x^2 - x}} & ;\ \boldsymbol{si\ x} < 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{en\ x_0 = 0},$$

$$\textbf{b)}\ \boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{1}{x}} & ;\boldsymbol{si\ x \neq 0} \\ \boldsymbol{0} & ;\boldsymbol{si\ x = 0} \end{cases} \quad \boldsymbol{en\ x_0 = 0}.$$

<u>Exercice 12</u>: soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ définies pour tout $\boldsymbol{x}$ par:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 - 1} & ;\ \boldsymbol{si\ x \leq 0} \\ \boldsymbol{-x^2} & ;\ \boldsymbol{si\ x} > 0 \end{cases} \quad \textbf{et} \quad \boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{3x - 2} & ;\ \boldsymbol{si\ x \leq 2} \\ \boldsymbol{-x + 6} & ;\ \boldsymbol{si\ x} > 2 \end{cases}$$

Tracez le graphique de chaque fonction. La fonction $\boldsymbol{f}$ est-elle continue en $\boldsymbol{x = 0}$**?**

la fonction **g** est-elle continue en $\boldsymbol{x = 2}$**?**

<u>Exercice 13</u>: Étudier la continuité des fonctions suivantes au point $\boldsymbol{x_0}$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x + |x|}{x}\ , x_0 = 2}; \qquad \boldsymbol{f(x) = x + E(x)\ , x_0 = 1};$$

$$f(x) = 1 + 3xE(x) - 2\big(E(x)\big)^2, \qquad x_0 = 2.$$

Exercice 14: Déterminez les valeurs de x en lesquelles chacune des fonctions suivantes est continue:

a) $x^5 + 4x$ b) $\dfrac{x}{1-x}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ d) $\dfrac{x}{x^2+1}$

e) $\dfrac{x^8 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x - 2}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x^7}{(x+2)^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 15: lesquelles, parmi les fonctions suivantes, sont vrai semblablement des fonctions continues du temps ?

a) Le prix de l'once d'or sur le marché de l'or de Zurich.
b) La taille d'un enfant qui grandit.
c) L'altitude d'un avion au-dessus du niveau de la mer.
d) La distance parcourue par une voiture.

Exercice 16: Étudier dans chacun des cas suivants si la fonction f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$:

1. $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1}{|x|}}$.
2. $f : x \longmapsto \dfrac{\left(1 - \cos\sqrt{|x|}\right)}{|x|}$.
3. $f : x \longmapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
4. $f : x \longmapsto \cos(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

<u>Exercice 17</u>: Soit la fonction suivante:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \in]-\infty, \mathbf{2}] \\ \boldsymbol{a} - \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \in]\mathbf{2}, \mathbf{4}] \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{x} \in]\mathbf{4}, +\infty[\end{cases}$$

Trouver $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ pour que $\boldsymbol{f}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 18</u>: Montrer que les équations suivantes possèdent au moins une solutions dans $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$.

$$\boldsymbol{x^5 - 2x^2 = 3} \qquad , avec\ \ \boldsymbol{a = 1}, \qquad \boldsymbol{b = 2}.$$

$$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{3}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \qquad , avec\ \ \boldsymbol{a} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \qquad \boldsymbol{b = 2}.$$

<u>Exercice 19</u>: Soit $\boldsymbol{f}$ une application de $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ dans lui-même telle que

$$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]: |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_2})| < |\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|.$$

1. Montrer que $\boldsymbol{f}$ est continue.
2. En déduire que l'équation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ admet une solution unique.

Chapitre 04

Fonctions d'une variable réelle (Dérivabilité)

4.1 Définitions, Propriétés.

4.1.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition. Soit $\boldsymbol{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$**,** $\boldsymbol{x_0}$ un point de **I,** $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. On dit que $\boldsymbol{f}$ est dérivable au point $\boldsymbol{x_0}$ si la limite (finie)

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Cette limite qui est alors unique, est appelée dérivée de $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{x_0}$ et notée $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})$.

On utilise parfois les notations suivantes pour désigner la dérivée de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$:

$$Df(x_0), \qquad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} \left(o\text{ù } y = f(x)\right).$$

Remarque. La définition précédente permet d'écrire

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \longrightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

d'où l'écriture équivalente de la dérivabilité de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\,[f'(x_0)+\varepsilon(x)]\,,\quad \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0.$$

En pratique, on pose $h=x-x_0$ pour ramener le travail sur la limite en 0:

Proposition.

Avec les notations de la définition, f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existe qui est notée } f'(x_0).$$

Exemples.

1. Si f est constante sur I, alors f est dérivable en tout $x_0\in I$ et $f'(x_0)=0$.

En effet, $\forall x_0\in I, \forall x\in I$ avec $x\neq x_0$, alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{0}{x-x_0}=0\xrightarrow[x\to x_0]{}0.$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors $f: x\longmapsto x^n$ est dérivable en tout $x_0\in\mathbb{R}$ et $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$.

En effet, $\forall x_0\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}$ avec $x\neq x_0$, on a:

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}=\sum_{k=0}^{n-1}x^k(x_0)^{n-1-k}\xrightarrow[x\to x_0]{}n(x_0)^{n-1}.$$

3. La fonction racine carrée est dérivable en tout $x_0>0$ et

$$\left(\sqrt{x_0}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

En effet, $\forall x_0\in\mathbb{R}_+^*$, $h\in[-x_0,+\infty[$, alors

$$\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}\underset{0}{\sim}\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}\right).$$

4.1.2 Dérivée à droite, dérivée à gauche.

Définition.

Si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite (finie) à droite (resp. à gauche), on dit que f dérivable à droite (resp. à gauche) au point x_0, ettec limite est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de f au point x_0 et notée:

$$f'_d(x_0)=f'(x_0+0)\ \left(resp. f'_g(x_0)=f'(x_0-0)\right).$$

Exemple.

Considérons $g: x \longmapsto |x|$ en 0. Si $x>0$, $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{x}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$

Donc g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0)=-1$. De même, g est dérivable à gauche en 0 et $g'_d(0)=-1.$

Proposition.

On suppose que f est définie sur un ensemble contenant un intervalle de la forme $]x_0-\mathcal{E}, x_0+\mathcal{E}[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0)=f'_g(x_0).$

Exemples.

1. La fonction valeur absolue n'est dérivable à l'origine (la dérivée à droite en 0 n'est pas égale à la dérivée à gauche en 0).
2. Déterminons $a\in\mathbb{R}$, tel que la fonction $f: x \longmapsto \begin{cases} x & si\ x<0 \\ \sin(ax) & si\ \ x\geq 0\end{cases}$

Soit dérivable en $\mathbf{0}$.

- Pour $\boldsymbol{x} < 0$, $\lim\limits_{\substack{< \\ \boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{x} - \mathbf{0}} = \mathbf{1}$, donc $\boldsymbol{f}$ est dérivable à gauche en $\mathbf{0}$ et

$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{g}}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.

- Pour $\boldsymbol{x} > 0$, $\lim\limits_{\substack{> \\ \boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{x} - \mathbf{0}} = \boldsymbol{a}$, donc $\boldsymbol{f}$ est dérivable à droite en $\mathbf{0}$ et

$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{d}}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{a}$. Enfin $\boldsymbol{f}$ est dérivable en $\mathbf{0}$ si et seulement si $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$.

Proposition. Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Remarque. La réciproque de cette proposition est inexacte.

Exemple.

Soit $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$

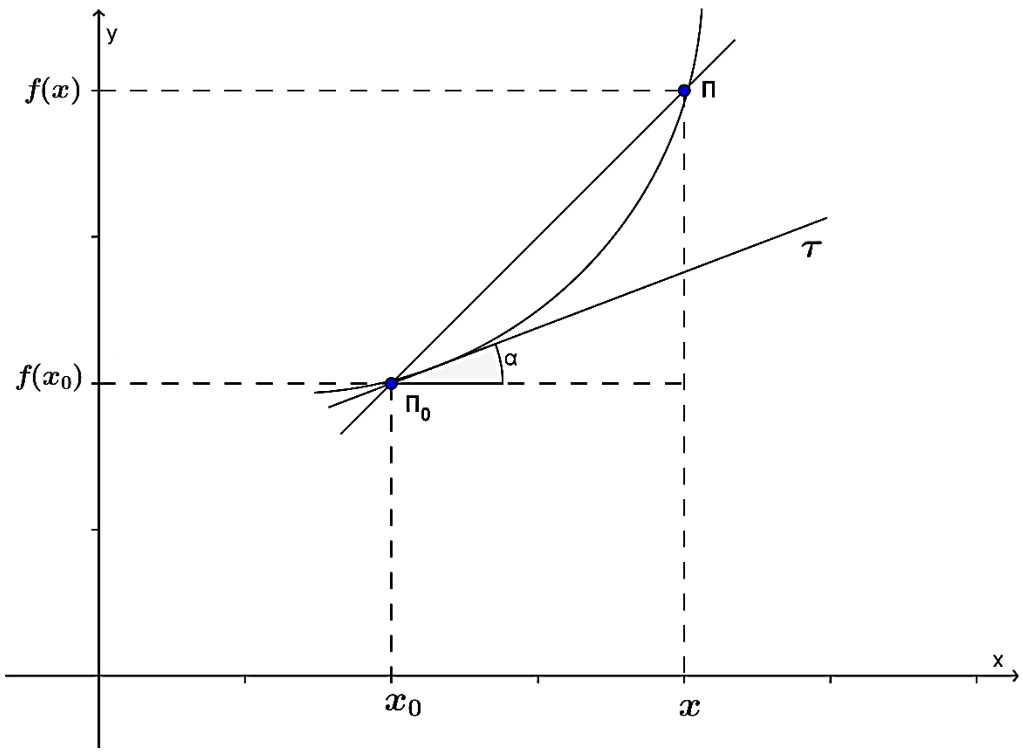
$$\boldsymbol{x} \longmapsto |\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} & si \quad x \geq 0 \\ -\boldsymbol{x} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Pour $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$

$\lim\limits_{\substack{> \\ \boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\substack{< \\ \boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

$\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{f}$ n'est pas dérivable en $\boldsymbol{x_0}$ d'après l'exemple précédent.

4.1.3 Interprétation géométrique.



La notion de tangente au graphe d'une fonction (d'une ou plusieurs variables réelles) peut être rigoureusement définie à partir de la notion d'ensemble contingent. Pour éviter la considération de problèmes géométriques dans $\mathbb{R}^2$, on adoptera la définition suivante :

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable en $\boldsymbol{x_0}$, la droite d'équation:

$$\boldsymbol{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

S'appelle tangente au graphe de $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{(x_0, f(x_0))}$.

L'interprétation géométrique du rapport $\frac{\boldsymbol{f(x)-f(x_0)}}{\boldsymbol{x-x_0}}$ (pente de $\boldsymbol{M_0}\mathbf{M}$).

Montre ≪intuitivement≫ que la dérivée de $\boldsymbol{f}$ au point $\boldsymbol{x_0}$ est égale à la pente de la tangente au point $\boldsymbol{M_0}$ d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$. Si $\boldsymbol{\alpha}$ désigne l'angle formé par l'axe $\boldsymbol{Ox}$ et la tangente en $\boldsymbol{M_0}$, on a donc

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}(\alpha).$$

Les dérivées à gauche et à droite s'interprètent également en considérant les demi-tangentes à gauche et à droite du point M_0; si elles ne sont pas égales, le graphe de f présente alors un point anguleux en M_0.

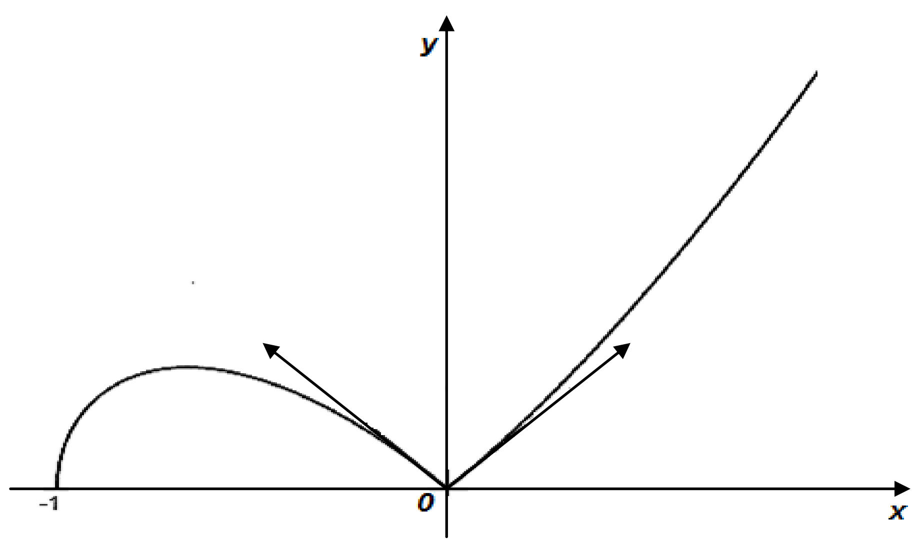
Exemple.

Soit la fonction $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x^3 + x^2}$ définie sur **[-1, +∞ [**. Pour étudier l'existence de la dérivée à l'origine, écrivons $f(x) = |x|\sqrt{1+x}$. On a alors

Si $x \in]0, +\infty[$, $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \sqrt{1+x} = 1$;

Si $x \in [-1, 0[$, $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} -\sqrt{1+x} = -1.$

Au point $\mathbf{0}$, les dérivées à gauche et à droite sont respectivement égales à **-1** et **1** et par conséquent, f n'y est pas dérivable. D'après l'interprétation géométrique, à l'origine, les deux arcs du graphe de f sont respectivement tangents à la première et à la deuxième bissectrice.



4.1.4 Les Taux De Variation

La dérivée d'une fonction en un point particulier a été définie comme la pente de la tangente à la courbe en ce point. Les économistes donnent à la dérivée plusieurs interprétations importantes, à commencer par le taux de variation d'une variable économique.

On suppose qu'une grandeur $\boldsymbol{y}$ est liée à une grandeur $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{y = f(x).}$ Lorsque $\boldsymbol{x}$ prend la valeur $\boldsymbol{a}$, la valeur de la fonction est $\boldsymbol{f(a)}$. On décide de changer $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{a+h}$. La nouvelle valeur de $\boldsymbol{y}$ est $\boldsymbol{f(a+h).}$

À la suite de la variation de $\boldsymbol{x}$, de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{a+h}$, la fonction, elle, a varié de

$\boldsymbol{f(a+h)-f(a)}$. La variation de $\boldsymbol{y}$ par unité de variation de $\boldsymbol{x}$ porte un nom particulier, il s'agit du taux moyen de variation de $\boldsymbol{f}$ sur l'intervalle qui s'étend de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{a+h}$. Ce taux est égal à : $\boldsymbol{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$.

La dérivée de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$, obtenue en prenant la limite de ce quotient lorseque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\boldsymbol{0}$, reçoit dès lors la dénomination suivante.

Le taux de variation instantané de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ est $\boldsymbol{f'(a).}$

Ce concept très important est présent chaque fois qu'on étudie des grandeurs qui varient.

Il est parfois intéressant d'étudier le rapport $\boldsymbol{\frac{f'(a)}{f(a)}}$, dont l'interprétation est la suivante

Le taux de variation relatif de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ est $\boldsymbol{\frac{f'(a)}{f(a)}}$**.**

On rencontre souvent les taux de variation relatifs en économie. Ils sont aussi appelés **taux de variation proportionnels.** Ils s'expriment habituellement en pourcentage par unité de temps, par exemple, pourcentage par an (ou per annum, pour ceux qui pensent que le latin est encore une langue utile). Souvent, on dira d'une variable qui croît de, mettons $\mathbf{3\%}$ l'an, qu'elle a un taux de variation relatif de $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{100}}$ chaque année.

Exemple 01.

Soit $\boldsymbol{N(t)}$ l'effectif d'une population (qu'il s'agisse d'hommes, d'animaux, de plantes) au moment $\boldsymbol{t}$. Si $\boldsymbol{t}$ prend la valeur $\boldsymbol{t+h}$, l'effectif varie de $\boldsymbol{N(t+h)-N(t)}$ individus. Par conséquent,

$$\frac{\boldsymbol{N(t+h)-N(t)}}{\boldsymbol{h}}$$

est le taux moyen de variation. En prenant la limite lorsque $\boldsymbol{h}$ tend vers $\mathbf{0}$, on obtient comme taux de variation de la population à l'instant $\boldsymbol{t}$**:**

$$\boldsymbol{N}'(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{dN}}{\boldsymbol{dt}}.$$

Par exemple *la* formule $\boldsymbol{P = 6,4t + 641}$ a servi (bien mal) de modèle pour estimer la population européenne (en millions) $\boldsymbol{t}$ années après $\mathbf{1960}$. Selon cette formule, le taux de variation est $\boldsymbol{dP/dt = 6,4}$ millions par an, le même quel que soit $\boldsymbol{t}$.

Exemple 02.

Soit $\boldsymbol{K(t)}$ le stock en capital d'une économie au moment $\boldsymbol{t}$. Le taux de variation $\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{t})$ de $\boldsymbol{K(t)}$ est appelé **taux d'investissement** au moment $\boldsymbol{t}$. Il est habituellement noté $\boldsymbol{I(t)}$**.** Donc

$$\boldsymbol{K}'(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{t}).$$

Exemple 03. Considérons une entreprise qui produit un bien en quantité $\boldsymbol{x}$ pendant une certaine période et soit $\boldsymbol{C(x)}$ le coût de production. La dérivée $\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{x})$ est appelée **coût marginal** en $\boldsymbol{x}$. Conformément à la définition, il est égal à

$$\boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{h}} \qquad (\textbf{Coût marginal}). \dots\dots\dots (1)$$

Quand $\boldsymbol{h}$ est petit en valeur absolue, le taux de variation moyen en est une valeur approchée

$$\boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{h})}{\boldsymbol{h}} . \dots\dots\dots\dots..(2)$$

Donc, pour $\boldsymbol{h}$ petit, le **surcoût** $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ induit par la production de $\boldsymbol{h}$ unités supplémentaires peut être approché par la fonction du premier degré $\boldsymbol{hC}^{'}(\boldsymbol{x})$**,** le produit du coût marginal et du nombre supplémentaire d'unités produites. Cela est valide même quand $\boldsymbol{h} < 0$**,** ce qui veut dire qu'une diminution du nombre d'unités produites abaisse le coût, à condition que $\boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{x}) > 0$.

Remarque 01. Le cas $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{1}$ dans **(2)** rend le coût marginal à peu près égale à

$$\boldsymbol{C}^{'}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \dots\dots\dots (3)$$

Il est approximativement égal au surcoût $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$, c'est-à-dire au coût additionnel engendré par la production d'une unité supplémentaire lorsque la quantité produite est au niveau $\boldsymbol{x}$. Dans les livres d'économie élémentaire, le coût marginal est souvent défini comme la différence $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ à défaut des notions de calcul différentiel adéquates.

Remarque 02. Des économistes emploient souvent le terme ≪**marginal**≫ pour indiquer une dérivée. Citons deux exemples parmi tous ceux que nous allons rencontrer, la **propension marginale à consommer** est la dérivée de la fonction de consommation par rapport au revenu, la **productivité marginale** de travail est la dérivée de la fonction de production par rapport à la variable travail.

4.1.5 Dérivée sur un intervalle. Fonction Dérivée

Définition. Une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ est dite dérivable sur $\boldsymbol{I}$ si elle est dérivable en tout point de $\boldsymbol{I}$. L'application $\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R} : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}^{'}(\boldsymbol{x})$ est

appelée fonction dérivée ou tout simplement dérivée de la fonction f et notée f'.
[On utilise aussi les notations Df, $\frac{Df}{dx}$ ou y' si l'on écrit $y = f(x)$].

Théorème. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

4.1.6 Les dérivées d'ordre supérieur

Définition. • Si la fonction f' admet à son tour une fonction dérivée, celle-ci est dite **dérivée seconde** ou **dérivée d'ordre 2** de f et est notée f'' (on dira que f' est la dérivée première de f).

• Plus généralement, on définit par récurrence les dérivées successives de f: La dérivée n-ième ou dérivée d'ordre n de f, notée $f^{(n)}$, est la dérivée de la fonction $x \longmapsto f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

[On utilise aussi les notations $D_n f$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $y^{(n)}$ si l'on **écrit** $y = f(x)$, pour $f^{(n)}$].

• On conviendra que la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même

$$f^{(0)} = f.$$

Exemple. Calculez toutes les dérivées jusqu'à l'ordre 4 de

$$f(x) = 3x^{-1} + 6x^3 - x^2 \qquad (x \neq 0).$$

Solution. les dérivations successives donnent

$$f'(x) = -3x^{-2} + 18x^2 - 2x,$$

$$f''(x) = 6x^{-3} + 36x - 2,$$

$$f'''(x) = 18x^{-4} + 36,$$

$f^{(4)}(x) = 72x^{-5}$.

4.1.7 Fonctions de classe C^n.

Définition.

• Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'une fonction f définie sur l'intervalle $\mathbf{I}$ est de classe C^n ou n fois continûment dérivable si elle est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $C^{(n)}(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I

• On dit qu'une fonction est de classe C^∞ si elle est indéfiniment dérivable sur I (c'est-à-dire si $f^{(n)}$ existe pour tout n). On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

Remarques.

1. $C(I) = \mathrm{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.

2. $C^n(I) \subset C^{n-1}(I)$ et $C^\infty(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(I)$.

4.1.8 Opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Si les fonctions $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en x_0, alors

- $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, αf est dérivable en x_0 et l'on a en ce point $(\alpha f)' = \alpha f'$;
- $f + g$ est dérivable en x_0 et l'on a en ce point $(f+g)' = f' + g'$;
- fg est dérivable en x_0 et l'on a en ce point $(fg)' = f'g + fg'$;
- Si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et l'on a en ce point

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Preuve.

Les deux premières propriétés, exprimant que l'application $f \longrightarrow f'$ est linéaire, sont immédiates en appliquant les théorèmes sur les limites en un point. Pour la dérivée du produit en un point x_0, écrivons :

$$\frac{f(x).g(x) - f(x_0).g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Lorsque $x \longrightarrow x_0$, $g(x) \longrightarrow g(x_0)$ car g est continue puisque dérivable en x_0 ; donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) \rightarrow f'(x_0).g(x_0) \text{et}$$

$$f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0)g'(x_0)$$

La dérivée de fg au point x_0 est donc:

$$f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0).$$

Pour étudier la dérivée de $\frac{f}{g}$, il suffit d'étudier la dérivée de $\frac{1}{g}$ et d'appliquer le résultat sur la dérivée d'un produit.

Soit x_0 un point de l'intervalle où $\frac{1}{g}$ est définie et où $g(x_0) \neq 0$. On a lorsque

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \frac{-1}{g(x)g(x_0)}.\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2} \text{ lorsque } x \rightarrow x_0 \text{ ;}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{g}} \text{ est donc dérivable et l'on a } \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{g}}\right)' = -\frac{\boldsymbol{g}'}{\boldsymbol{g}^{\mathbf{2}}}.$$

Il résulte des deux premières propriétés que l'ensemble des fonctions dérivables en $\boldsymbol{x_0}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues en $\boldsymbol{x_0}$.

Corollaire. Un polynôme est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et une fraction rationelle est dérivable en tout point de son domaine de définition.

Exemples. (La dérivée d'une somme, d'une différences et d'un produit).

1. Calculez $\left(\boldsymbol{3x^8} + \frac{\boldsymbol{x^{100}}}{\boldsymbol{100}}\right)'$.

Solution. $\left(\boldsymbol{3x^8} + \frac{\boldsymbol{x^{100}}}{\boldsymbol{100}}\right)' = (\boldsymbol{3x^8})' + \left(\frac{\boldsymbol{x^{100}}}{\boldsymbol{100}}\right)' = \boldsymbol{24x^7} + \boldsymbol{x^{99}}$.

2. **Exemple économique.**

$\boldsymbol{C(x)}$ désigne le coût de production de $\boldsymbol{x}$ unités d'un bien pendant une période donnée. Si $\boldsymbol{R(x)}$ désigne la recette issue de la vente de ces $\boldsymbol{x}$ unités, la fonction de profit est la différence entre les fonctions recette et coût $\boldsymbol{\pi(x) = R(x) - C(x)}$. donc

$\boldsymbol{\pi'(x) = R'(x) - C'(x)}$. En particulier, $\boldsymbol{\pi'(x) = 0}$ quand $\boldsymbol{R'(x) = C'(x)}$.

Autrement dit, ***le profit marginal est nul quand la recette marginale est égale au coût marginal.***

3. Calculez $\boldsymbol{h'(x)}$ pour la fonction $\boldsymbol{h(x) = (x^3 - x)(5x^4 + x^2)}$.

Solution.

$$\boldsymbol{h'(x) = (x^3 - x)'(5x^4 + x^2) + (x^3 - x)(5x^4 + x^2)}$$

$$= (3x^2 - 1)(5x^4 + x^2) + (x^3 - x)(20x^3 + 2x)$$

$$= 35x^6 - 20x^4 - 3x^2.$$

Exemples. (la dérivée d'un Quotient)

1. Calculer $F'(x)$ pour la fonction $F(x) = \frac{3x-5}{x-2}$.

$$F'(x) = \frac{(3x-5)'(x-2) - (x-2)'(3x-5)}{(x-2)^2}$$

$$F'(x) = \frac{3(x-2) - (3x-5)}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x + 5}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

2. Exemple Economique. Soit $C(x)$ le coût total de production de x unités d'un bien. Le quotient $\frac{C(x)}{x}$ est le coût moyen de production quand x unités sont produites. Calculez une expression de $\frac{d}{dx}\left[\frac{C(x)}{x}\right] = \left(\frac{C(x)}{x}\right)'$.

Solution.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{C(x)}{x}\right] = \frac{C'(x).x - C(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(C'(x) - \frac{C(x)}{x}\right).$$

On remarque que le coût marginal $C'(x)$ dépasse le coût moyen $\frac{C(x)}{x}$ si et seulement si le coût moyen augmente avec l'augmentation de la production. (Une analogie : l'entrée d'un nouveau joueur dans une équipe de basketball a pour effet d'élever la taille moyenne de l'équipe si et seulement si il est plus grand que cette taille moyenne).

Théorème.

Si $f: \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I, $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur J et $f(I) \subset J$, alors $\boldsymbol{gof}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et:

$$(\boldsymbol{gof})' = (\boldsymbol{g}'\boldsymbol{of}) \times \boldsymbol{f}'.$$

Exemple.

Calculez la dérivée de $\boldsymbol{F(x) = f\big(g(x)\big)}$ en $\boldsymbol{x_0 = -3}$ si $\boldsymbol{f(u) = u^3}$ et $\boldsymbol{g(x) = 2 - x^2}$.

Solution. Ici $\boldsymbol{f'(u) = 3u^2}$ et $\boldsymbol{g'(x) = -2x}$. D'où,

$$\boldsymbol{F'(-3) = f'\big(g(-3)\big) \times g'(-3).}$$

On calcule $\boldsymbol{g(-3) = 2 - (3)^2 = 2 - 9 = -7}$, $\boldsymbol{g'(-3) = 6}$ et enfin $\boldsymbol{f'\big(g(-3)\big) = f'(-7) = 3 \times (-7)^2 = 3 \times 49 = 147.}$

Puis on substitue ces valeurs dans l'expression demandée

$$\boldsymbol{F'(-3) = f'\big(g(-3)\big) \times g'(-3) = 147 \times 6 = 882}.$$

Théorème. Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue et bijective d'un intervalle $\mathbf{I}$ sur un intervalle $\boldsymbol{J}$.

Si $\boldsymbol{f}$ est dérivable au point $\boldsymbol{x_0}$ et $\boldsymbol{f'(x_0) \neq 0}$ alors $\boldsymbol{f^{-1}}$ est dérivable au point $\boldsymbol{y_0 = f(x_0)}$ et on a:

$$\boldsymbol{(f^{-1})'[f(x_0)] = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'of^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]} = \frac{1}{f'(x_0)}}.$$

Exemple. Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie pour tout $\boldsymbol{x}$ par l'expression

$$\boldsymbol{f(x) = x^5 + 3x^3 + 6x - 3.}$$

Montrez que $\boldsymbol{f}$ admet une fonction réciproque $\boldsymbol{f^{-1}}$, calculez $\boldsymbol{(f^{-1})'(7).}$

Solution.

• La dérivée de $\boldsymbol{f(x)}$ est $\boldsymbol{f^{'}(x) = 5x^4 + 9x^2 + 6}$.

À cause de ses puissances paires additionnées, $\boldsymbol{f^{'}(x)} > 0$ pour tout $\boldsymbol{x}$. Par conséquent, $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante et donc aussi injective. Elle admet une fonction réciproque $\boldsymbol{f^{-1}}$**.**

• On calcule $\boldsymbol{(f^{-1})^{'}(7)}$:

$\boldsymbol{x_0 = 1}$ et $\boldsymbol{y_0 = f(1) = 7}$, $\boldsymbol{f^{'}(1) = 20}$**,** $\boldsymbol{(f^{-1})^{'}(7) = \frac{1}{f^{'}(1)} = \frac{1}{20}}$. Notez que la valeur exacte de $\boldsymbol{(f^{-1})^{'}(7)}$ est connue alors que l'expression de $\boldsymbol{f^{-1}}$ ne l'est pas.

Dérivées usuelles. Les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition à l'exception de $\boldsymbol{x \longrightarrow x^{\alpha}}$ avec $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ où une étude spécifique en $\boldsymbol{0}$ est parfois nécessaire.

Pour le deuxième tableau, on considère la fonction $\boldsymbol{u}$ dérivable est les compositions bien définies.

$f(x)$	$f'(x)$
$a \in \mathbb{R}$	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$f(u(x))$	$u'(x)f'(u(x))$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$(u(x))^{\alpha}$	$\alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x).Sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x).Cos(u(x))$
$\tan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$

4.2 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables.

4.2.1 Théorème de Rolle.

Théorème. Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Preuve. Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est trivial: $\forall x \in [a, b]: f'^{(x)} = 0$.

Si f n'est pas constante, étant continue sur $[a, b]$, elle y est bornée et l'on peut supposer l'une ou moins des bornes, la borne supérieure $\mathbf{M}$ par exemple, distincte de $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$. Il existe alors un point $\boldsymbol{c} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tel que $\boldsymbol{f(c)} = \mathbf{M}$.

La valeur $\boldsymbol{f(c)}$ est donc un maximum local et, puisque $\boldsymbol{f'(c)}$ existe, on a

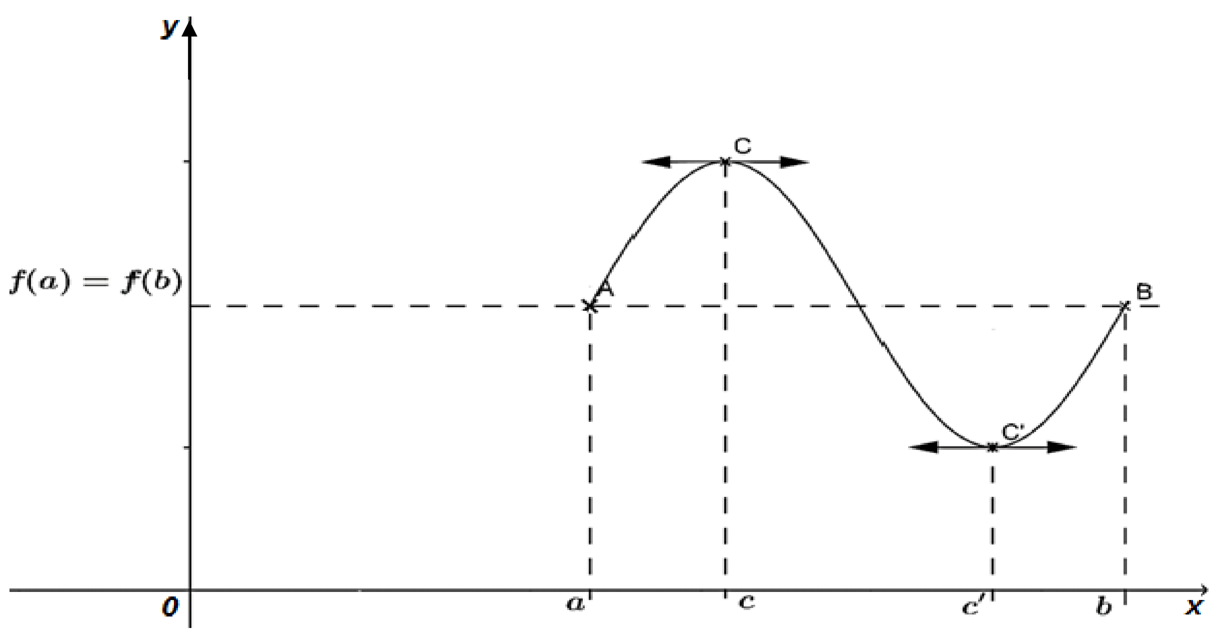
$$\boldsymbol{f'(c) = 0.}$$

Cas particulier. Si $\boldsymbol{f(a) = f(b) = 0}$ le théorème de Rolle s'énonce:

entre deux zéro de la fonction $\boldsymbol{f}$ dérivable, il existe au moins un zéro de la fonction dérivée $\boldsymbol{f'}$.

Interprétation géométrique.

Géométriquement, le théorème dit que sur la partie **AB** correspondant à l'intervalle $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ du graphe de $\boldsymbol{f}$, il existe au moins un point **C,** distinct de **A** en **B**, pour lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite **AB**.

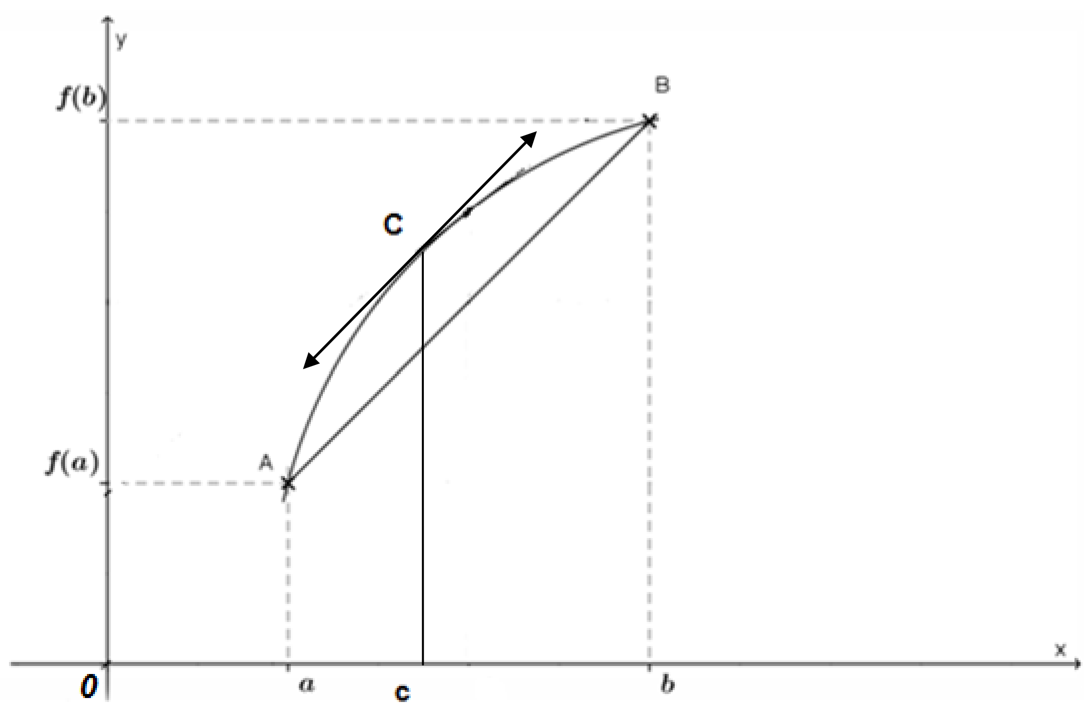


Exemple.

$x \longmapsto (x-1)(x-2)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle s'annule en 1 et 2, le théorème de Rolle nous permet de dire que sa dérivée s'annule sur $]1,2[$.

4.2.2 Théorème des accroissements finis.

C'est un corollaire du théorème de Rolle. L'interprétation géométrique du théorème suggère une généralisation: si on considère une fonction f continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$ mais ne vérifiant pas



nécessairement la condition $f(a)=f(b)$, il existe un point $\mathbf{C}$ du graphe de f où la tangente est paralléle à la droite passant par $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$.

Plus exactement:

Théorème. Théorème des accroissements finis.

Soit $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et dérivable sur $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$. Alors il existe $\boldsymbol{c} \in\,]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tel que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \quad (\text{formule des accroissements finis}).$$

Preuve.

Posons $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - \dfrac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$.

$\boldsymbol{\varphi}$ est continue dans $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, dérivable dans $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ et $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{b}) = \mathbf{0}$, le théoreme de Rolle implique l'existence d'un point $\boldsymbol{c} \in\,]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ tel que:

$$\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) - \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}} = \mathbf{0},$$

Ce qui s'écrit

$$(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

Théorème. Inégalité des accroissements finis.

Soient $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle $\mathbf{I}$ et $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{I}^{\mathbf{2}}$.

- Si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ et s'il existe $\boldsymbol{m}$ et $\mathbf{M} \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $\boldsymbol{x} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$,

  $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{M}$, alors:

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \leq \mathbf{M}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

- S'il existe $\boldsymbol{k} \geq \mathbf{0}$ tel que, pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$, $|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{k}$, alors:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})| \leq \boldsymbol{k}|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|.$$

Théorème. Monotonie des fonctions dérivables. Soient $\boldsymbol{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\boldsymbol{I}$, alors :

1. $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$.
2. $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur $\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) \leq \mathbf{0}$.
3. $\boldsymbol{f}$ est strictement croissante sur $\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) > 0$.
4. $\boldsymbol{f}$ est strictement décroissante sur $\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) < 0$.
5. $\boldsymbol{f}$ est constante sur $\boldsymbol{I} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

Exemple. La fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle y est dérivable et sa dérivée $\boldsymbol{x} \longmapsto \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

4.2.3 La règle de l'hôpital.

Théorème. la règle de l'hôpital pour les formes $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $]\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}[$ qui contient $\boldsymbol{a}$, sauf peut-être en $\boldsymbol{a}$, et que :

$$\lim_{x \to a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x \to a} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

$$\text{Ou} \lim_{x \to a} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \lim_{x \to a} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \pm\infty.$$

Si $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$ pour tout $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ dans $]\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}[$ et si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{\ell}$ alors

$$\lim_{x \to a} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})} = \lim_{x \to a} \frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{\ell}.$$

Ce résultat est valable que $\boldsymbol{\ell}$ soit fini, $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple. Calculez $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{0}{0}\qquad (\text{F.I.})$$

En appliquant la règle de l'hôpital on aura:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{1}=3.$$

4.3 Extremum D'une Fonction

4.3.1 Extremum local

Définition. Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. On dit que f admet dans I un **maximum local** (resp. **minimum local**) au point x_0 s'il existe un intervalle $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset I, (\alpha>0)$, tel que :

$$\forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[: f(x)\leq f(x_0)\ \ \left(\text{resp.} f(x)\geq f(x_0)\right).$$

On dit que f admet un **extremum local** en x_0 si f admet en x_0 un maximum local ou un minimum local.

Remarques.

- Si les inégalités sont vraies pour tout $x \in I$, on parle de maximum ou minimum global sur I.
- Tout extremum global est un extremum local, mais la réciproque est fausse.

Une condition nécessaire d'existence d'un extremum pour les fonctions dérivables est donnée par le théorème suivant :

Théorème. Si $\boldsymbol{f}$ a un extremum au point $\boldsymbol{x_0}$ et si $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})$ existe, alors $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}) = \mathbf{0}$.

Preuve. Supposons qu'il s'agisse d'un maximum. L'existence de $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0})$ entraîne l'existence et l'égalité des dérivées à gauche et à droite $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x_0})$ et $\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x_0})$. Comme $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})$ pour tout $\boldsymbol{x}$ appartenant à un intervalle contenant $\boldsymbol{x_0}$, on a alors:

$$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\substack{> \\ \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}}} \frac{\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\right)}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}} \leq \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x_0}) = \lim_{\substack{< \\ \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}}} \frac{\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\right)}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}} \geq \mathbf{0},$$

d'où $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{f}'_{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x_0})$ est à la fois $\geq \mathbf{0}$ **et** $\leq \mathbf{0}$ **,** donc nulle.

Remarques.

- La réciproque est fausse ; si en un point $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{f}$ n'a pas nécessairement un maximum local ou un minimum local. C'est le cas, par exemple, de la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}$ au point $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$.
- Une fonction peut présenter un extremum en $\boldsymbol{x_0}$, sans être dérivable en $\boldsymbol{x_0}$: la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto |\boldsymbol{x}|$ présente un minimum au point $\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$ alors qu'elle n'est pas dérivable en ce point.

4.3.2 Des Tests Simples Pour Les Points Extrêmes

Théorème. Test De La Dérivée Première / Extrema Locaux.

Soit $\boldsymbol{f}$ est une fonction dérivable sur $\mathbf{I}$ et soit $\boldsymbol{x_0}$ un point intérieur de $\mathbf{I}$ tel que $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}) = \mathbf{0}$ alors:

(a) Si $f'(x) \geq 0$ sur un certain intervalle $]a, x_0[$ à gauche de x_0 et $f'(x) \leq 0$ sur un certain intervalle $]x_0, b[$ à droite de x_0, alors $x = x_0$ est l'abscisse d'un maximum local de f.

(b) Si $f'(x) \leq 0$ sur un certain intervalle $]a, x_0[$ à gauche de x_0 et $f'(x) \geq 0$ sur un certain intervalle $]x_0, b[$ à droite de x_0, alors $x = x_0$ est l'abscisse d'un minimum local de f.

(c) Si $f'(x) > 0$ à la fois sur un certain intervalle $]a, x_0[$ à gauche de x_0 et sur un certain intervalle $]x_0, b[$ à droite de x_0, alors $x = x_0$ n'est pas l'abscisse d'un extremum local de f. La même conclusion vaut dans le cas $f'(x) < 0$ des deux côtés de x_0.

Exemple.

Déterminez les abscisses des extrema locaux de

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

Solution. Comme

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)\,,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } x = 2$$

$$\Leftrightarrow f'(-1) = 0 \text{ et } f'(2) = 0.$$

Voici le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$\frac{1}{2}(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\frown$		$\smile$		

De ce tableau de signes, il ressort que $\boldsymbol{f}$ admet un maximum local en $\boldsymbol{x_0 = -1}$ et un minimum local en $\boldsymbol{x_0 = 2}$.

Théorème. Test De La Dérivée Seconde.

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle **I**, et soit $\boldsymbol{x_0}$ un point intérieur de **I.**

(a) $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ **et** $\boldsymbol{f''(x_0)} < 0 \Longrightarrow \boldsymbol{f}$ admet un maximum local en $\boldsymbol{x = x_0}$**.**

(b) $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ **et** $\boldsymbol{f''(x_0)} > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{f}$ admet un minimum local en $\boldsymbol{x = x_0}$**.**

Démonstration. Démontrons la partie **(a)** où, par hypothèse, $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ et $\boldsymbol{f''(x_0)} < 0$. En tant que dérivée de $\boldsymbol{f'(x)}$ calculée en $\boldsymbol{x_0}$,

$$\boldsymbol{f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h}}.$$

Comme $\boldsymbol{f''(x_0)} < 0$, $\boldsymbol{\frac{f'(x_0+h)}{h}} < 0$ pour $|\boldsymbol{h}|$ suffisamment petit.

En particulier, si $\boldsymbol{h}$ est un nombre strictement positif petit, $\boldsymbol{f'(x_0+h)} < 0$ et $\boldsymbol{f'}$ est négative sur un petit intervalle à droite de x_0. De même, f' est positive sur un certain intervalle à gauche de x_0. Dès lors, f présente un maximum local en x_0.

La partie **(b)** se démontre de la même manière.

Exemple 01. Déterminez les abscisses des extrema locaux de

$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ à l'aide du test de la dérivée seconde.

Solution.

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } x = 2$$

$$\Leftrightarrow f'(-1) = 0 \text{ et } f'(2) = 0$$

.

On calcule alors $f''(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ qui en $x = -1$ vaut $f''(-1) = -1 < 0$ et en $x = 2$ vaut $f''(2) = 1 > 0$. D'après le théorème précédent f admet en $x = -1$ un maximum local et en $x = 2$ un minimum local.

Exemple 02. (exemple économique). Une entreprise produit et vend Q unités d'un bien au prix **P(Q) = 102-2Q** et la production et la vente de Q unités coûtent $C(Q) = 2Q + \frac{1}{2}Q^2$.

Le profit résulte de la différence entre la recette et le coût

$$\pi(Q) = Q\mathrm{P}(Q) - C(Q) = Q(102 - 2\mathrm{Q}) - \left(2Q + \frac{1}{2}Q^2\right)$$

$$= 100Q - \frac{5}{2}Q^2.$$

Déterminer la valeur de $\boldsymbol{Q}$ qui rend le profit maximal ainsi que la valeur de ce profit maximal.

Solution.

Pour que le profit soit maximal en une certaine valeur $\boldsymbol{Q^*}$, il faut:

$$\boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{Q^*}) = \boldsymbol{0} \text{ et } \boldsymbol{\pi}''(\boldsymbol{Q^*}) < \boldsymbol{0}.$$

Soit $\boldsymbol{\pi}'(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{-5Q + 100 = 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{Q^* = 20}$.

On calcule alors $\boldsymbol{\pi}''(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{-5}$ qui en $\boldsymbol{Q^* = 20}$ vaut $\boldsymbol{\pi}''(\boldsymbol{20}) = \boldsymbol{-5 < 0}$

et $\boldsymbol{\pi(Q^*) = \pi(20) = 1000}$.

On conclut que $\boldsymbol{Q^* = 20}$ est le niveau de production cherché et le profit maximal s'élève à $\boldsymbol{1000}$.

4.4 Exercices D'application

Exercice 01:

En utilisant la définition de la dérivation, calculer les dérivées suivantes :

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x^n, \qquad h(x) = \sin(x).$$

Exercice 02: En utilisant la définition, calculer la dérivée de: au point

$f(x) = x^2 - 4x + 5$ au point $x_0 = 2.$

Exercice 03 : Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes:

$$f(x) = x|x|, \qquad g(x) = \frac{x^2}{1 + |x|}, \qquad h(x) = \frac{1}{1 + |x|}.$$

Exercice 04: Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leurs domaines de définitions.

$$f(x) = x(x^2 + 1), \quad g(x) = (2x^3 - 4x^2 + 5)^4, \quad h(x) = x(x - 1)(x + 1).$$

$$G(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 3}, \qquad \varphi(x) = \frac{x^4}{(1 + x)^4}, \qquad F(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2},$$

$$k(x) = \sqrt{6x^2 + 7x - 1}.$$

Exercice 05: Calculez la dérivée première et la dérivée seconde.

a) $f(x) = 2x - 5,$ b) $g(x) = x^5 - x^{-5},$ c) $h(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{5^2}{2},$

d) $G(x) = (3x^2 + 3)(2x^2 - 4),$ e) $\varphi(x) = \sqrt{x^5 + 3x^2 + 7}.$

$f)\ F(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}}$.

Exercice 06: Écrivez une équation de la tangente à la courbe représentative des fonctions:

a) $f(x) = -3x^2$ en $x = 1$, **b)** $g(x) = \sqrt{x} - x^2$ en $x = 4$,

$c)\ h(x) = \dfrac{x^2 - x^3}{x+3}$ en $x = 1$.

Exercice 07: Soit $A(x)$ le coût en euros de la construction d'une maison dont la surface habitable est de x mètres carrés.

- Que signifie $A'(100) = 250$?

Exercice 08: Soit $C(Q)$ le coût de production de Q unités par mois d'un bien. Donnez une interprétation de $C'(1000) = 25$. On suppose que le prix unitaire obtenu est de 30 et que la production courante mensuelle est de 1000.Serait-il profitable d'accroître la production ?

Exercice 09: Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1-x}\ , \qquad g(x) = \frac{x^2}{2+x}\ , \qquad h(x) = \sin(x).$$

Exercice 10 : Calculez la dérivée des fonctions dans l'expression desquelles a, b, p et q sont des constantes:

a) $h(L) = (L^a + b)^p$,
b) $C(Q) = a\,Q + b\,Q^2$,

c) $\boldsymbol{P(x) = \left(ax^{\frac{1}{q}} + b\right)^{q}}$.

Exercice 11:

Si le coût total $(\boldsymbol{CT})$ d'une entreprise est donné par:

$$\boldsymbol{CT = CF + CV = 5000 + 1000q - 500q^2 + \frac{2}{3}q^3}.$$

Où $\boldsymbol{CF}$ désigne le coût fixe qui est indépendant de $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{CV}$ le coût variable, lequel dépend de $\boldsymbol{q}$.

1. Trouver la fonction du coût marginal.
2. Trouver une expression pour la pente de la courbe du coût marginal.
3. Trouver la fonction du coût total moyen.
4. A quelle valeur de $\boldsymbol{q}$ le coût marginal est-il égal au coût variable moyen ?

Exercice 12 :

Une entreprise en situation de monopole confronte une courbe de demande de la forme:

$$\boldsymbol{p = 100 - 2q}.$$

1. Déterminer la fonction du revenu marginal.
2. Etablir la relation entre les pentes des courbes de revenu marginal et moyen.
3. A quel prix le revenu marginal s'annule-t-il ?

Exercice 13:

1. Calculer la dérivée de $\boldsymbol{x \longmapsto (x^2 + 1)\sin(x)}$.
2. Montrer que l'équation $\boldsymbol{(x^2 + 1)\cos(x) + 2x\sin(x) = 0}$ admet au moins une solution dans $\boldsymbol{[0, \pi]}$.

Exercice 14:

(1) Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction de classe $\boldsymbol{C^2}$ sur $]\mathbf{0},\mathbf{1}[$ s'annulant en $\mathbf{3}$ points de $]\mathbf{0},\mathbf{1}[$. Montrer qu'il existe un point $\boldsymbol{x_0}$ de $]\mathbf{0},\mathbf{1}[$ tel que $\boldsymbol{f''}(\boldsymbol{x_0})=\mathbf{0}$.

(2) Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ et $\boldsymbol{f}$ une fonction de classe $\boldsymbol{C^n}$ sur $]\mathbf{0},\mathbf{1}[$ s'annulant en $\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ points de $]\mathbf{0},\mathbf{1}[$.
Montrer qu'il existe un point $\boldsymbol{x_0}$ de $]\mathbf{0},\mathbf{1}[$ tel que $\boldsymbol{f^{(n)}}(\boldsymbol{x_0})=\mathbf{0}$.

Exercice 15: Soit $\boldsymbol{a} \in]\mathbf{0},\mathbf{1}[$. Montrer à l'aide des accroissements finis que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{(n+1)^{1-a}} \leq (n+1)^a - n^a \leq \frac{a}{n^{1-a}}.$$

En déduire l'équivalent suivant :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1-a}} \sim \frac{n^a}{a}.$$

Exercice 16: Utilisez la règle de l'Hôpital pour calculer les limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{3x^2-27}{x-3}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4x^3+6x^2-8x+8}{x^3-3x^2+4}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2\sqrt{1+x+x^2}-2-x}$.

Exercice 17: Cherchez le maximum et le minimum et tracez le graphique de :

$$f(x) = 4x^2 - 40x + 80\ ; \qquad x \in [0, 8].$$

Exercice 18: Cherchez le maximum et le minimum de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = -2x + 1, [0, 3]$ **b**) $f(x) = x^3 - 3x + 8, [-1, 2]$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}, \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$ **d**) $f(x) = x^5 - 5x^3, \left[-1, \sqrt{3}\right]$

e) $f(x) = x^3 - 4500x^2 + 6 \times 10^6 x, [0, 3000]$.

Exercice 19: La fonction f définie pour tout $x \in [-1, 1]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ pour } x \in]-1, 1[\\ 0 \text{ pour } x = -1 \text{ et pour } x = 1 \end{cases}$$

est-elle continue ? atteint-elle un maximum ou un minimum ?

Exercice 20: Une firme pharmaceutique produit de la pénicilline. Le prix de vente à l'unité est 200 et le coût de production de x unités est donné par :

$$C(x) = 500000 + 80x + 0,003x^2.$$

La firme peut produire jusqu'à 30000 unités. Quelle est la valeur de x qui maximise le profit ?

Exercice 21: Le prix qu'un entrepreneur peut obtenir pour un bien varie avec la demande Q selon la formule $P(Q) = 18 - 0,006\, Q$. Le coût total est donné par $C(Q) = 0,004\, Q^2 + 4\, Q + 4500$. Déterminez la fonction de profit $\pi(Q)$ ainsi que la valeur de Q qui maximise le profit.

Chapitre 05

Fonctions Élémentaires

5.1 Fonction logarithme

5.1.1 Définition et propriétés de la fonction logarithme népérien

$\boldsymbol{m}$ étant un rationnel quelconque différent de $-\mathbf{1}$, la fonction $\boldsymbol{x^m}$ est continue sur $]\mathbf{0}, +\infty[$ et y admet les primitives $\frac{x^{m+1}}{m+1} + c$.

Pour $\boldsymbol{m = -1}$, la fonction $\frac{1}{x}$ est continue en particulier sur $]\mathbf{0}, +\infty[$ et admet donc sur cet intervalle des primitives ; on distinguera, par commodité, la primitive s'annulant pour $\boldsymbol{x = 1}$ et l'on posera :

Définition. On appelle fonction logarithme népérien et l'on note **ln**, la fonction définie sur $]\mathbf{0}, +\infty[$ par :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

La définition équivaut à :

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \text{ et } \ln(1) = 0.$$

Théorème.

La fonction $\mathbf{ln}:]\mathbf{0}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes:

(1) La fonction **ln** est indéfiniment dérivable, strictement croissante ;

(2) $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > 0: \mathbf{ln}(\boldsymbol{xy}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$**;**

(3) $\forall\, \boldsymbol{x} > 0: \mathbf{ln}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right) = -\,\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$**;**

(4) $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > 0:\ \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$;

(5) $\forall\, \boldsymbol{x} > 0, \forall\, r \in \mathbb{Q}: \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{r}\,\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$.

Preuve.

(1) La fonction "**ln**" est indéfiniment dérivable car la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$**,** $\mathbf{0} < \boldsymbol{x} < +\infty$**,** l'est.

"**ln**" est évidement croissante puisque sa dérivée $\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$ est positive dans $]\mathbf{0}, +\infty[$.

(2) Si l'on fixe un nombre $\boldsymbol{y} > 0$, alors la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \mathbf{ln}(\boldsymbol{xy})$, $\boldsymbol{x} > 0$, a pour dérivée la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$, d'où

$$\mathbf{ln}(\boldsymbol{xy}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{c}.$$

En faisant $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$, on a $\boldsymbol{c} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$, d'où la propriété fondamentale de **ln** :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > 0: \mathbf{ln}(\boldsymbol{xy}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{ln}(\boldsymbol{y}).$$

Remarquons que cette relation s'étend par récurrence à un nombre fini quelconque de nombres positifs $\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}, \dots \dots \dots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$

$$\ln(x_1 \times \dots\dots \times x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) \dots\dots\dots + \ln(x_n).$$

(3) Soit $x > 0$. Posons $z = \frac{1}{x}$. Alors $1 = xz$, donc, d'après (2)

$\ln(1) = \ln(x) + \ln(z) \Leftrightarrow 0 = \ln(x) + \ln(z)$, d'où l'affirmation.

(4) Soit $x, y > 0$. Posons $z = \frac{x}{y}$. Alors $x = yz$, donc, d'après (2)

$\ln(x) = \ln(y) + \ln(z)$, d'où l'affirmation.

(5) En particulier si $x = x_1 = \cdots = x_n$, on a d'après (2) :

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

Si $y = \sqrt[n]{x}, x > 0$, alors $y^n = x$, d'où $n \ln(y) = \ln(x)$, donc

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln(x).$$

En appliquant cette relation à $x^{p/q}$, p et q étant deux entiers strictement positifs, on aura $\ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{1}{q} \ln(x^p) = \frac{p}{q} \ln(x)$.

On a donc démontré la relation **(5)** pour $r > 0$. le cas $r < 0$ s'y ramène en posant $r' = -r$:

$$\ln(x^r) = \ln\left(\frac{1}{x^{r'}}\right) = \ln(1) - \ln\left(x^{r'}\right) = -r' \ln(x) = r ln(x).$$

Donc la relation **(5)** est démontrée pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

5.1.2 Graphe de la fonction $''\ln''$

Montrons d'abord que

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \ln(x) = -\infty.$$

Preuve.

Comme la fonction $''\ln''$ est croissante, on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$, d'où

$$\ln(2^n) = n.\ln(2) \longrightarrow +\infty \text{ lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

Par conséquent, $\sup\limits_{x>0} \ln(x) = +\infty$, d'où

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \ln(x) = \sup_{x>0} \ln(x) = +\infty$$

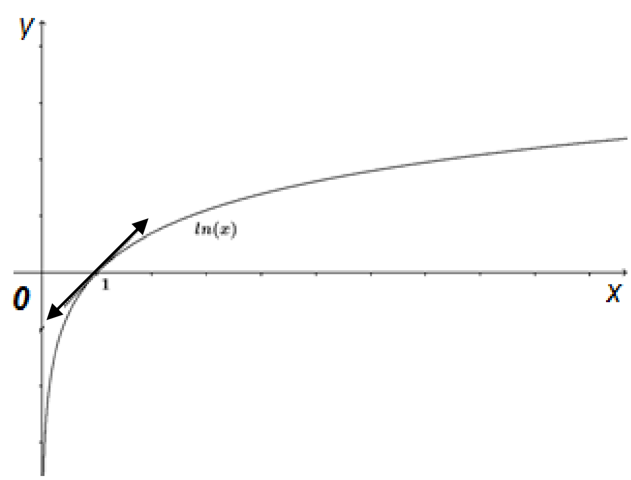
puisque $\ln$ est croissante.

La seconde relation en résulte immédiatement $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow -\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0$.

Variation de la fonction $''\ln''$.

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Limites Usuelles.

(1) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\quad \lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \ln(x) = -\infty$,

(2) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$,

(3) $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x \ln(x) = 0$,

(4) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

5.1.3 Dérivée logarithmique

Définition. Soit U une fonction dérivable au point $x_0 \in I$ et telle que

$U(x_0) \neq 0$. On appelle dérivée logarithmique de U le nombre $\frac{U'(x_0)}{U(x_0)}$.

On remarquera que si $U(x)$ est positive et dérivable en x_0, $\ln\big(U(x)\big)$ est une fonction de x définie en x_0 et y admet pour dérivée $\frac{U'(x_0)}{U(x_0)}$.

Si $U(x)$ est de signe quelconque, on a :

$$(\ln\ |U(x_0)|\ )' = \frac{U'(x_0)}{U(x_0)},$$

d'où le nom de dérivée logarithmique donnée à $\frac{U'}{U}$.

Les règles de calcul pour les dérivées logarithmiques sont utiles pour le calcul d'erreur :

La dérivée logarithmique d'un produit de deux fonctions est égale à la somme de leurs dérivées logarithmiques et celle d'un quotient est égale à la différence des dérivées logarithmiques.

En effet,

$$\frac{(\boldsymbol{U}.\boldsymbol{V})'}{\boldsymbol{U}.\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{U}'.\boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}.\boldsymbol{V}'}{\boldsymbol{U}.\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{U}'}{\boldsymbol{U}} + \frac{\boldsymbol{V}'}{\boldsymbol{V}}.$$

$$\frac{\left(\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{V}}\right)'}{\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{V}}} = \frac{\boldsymbol{U}'.\boldsymbol{V} - \boldsymbol{U}.\boldsymbol{V}'}{\boldsymbol{V}^2} \cdot \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{U}} = \frac{\boldsymbol{U}'}{\boldsymbol{U}} - \frac{\boldsymbol{V}'}{\boldsymbol{V}}.$$

5.1.4 Logarithme de base $\boldsymbol{a}$

Définition. $\boldsymbol{a}$ étant un nombre positif et différent de $\mathbf{1}$, on appelle logarithme de base $\boldsymbol{a}$, la fonction $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}$, définie sur $]\mathbf{0}, +\infty[$ par:

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{a})}.$$

Propriétés.

Évidemment $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{1}$.

Les résultats obtenus pour le logarithme népérien s'étendent immédiatement au logarithme de base quelconque en se ramenant à la définition

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{a})}.$$

C'est ainsi que:

$\forall\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > 0$: $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{xy}) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y})$,

$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{y}),$$

$\forall\, \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{Q}$: $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{r}.\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$,

$$(\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}))' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}\mathbf{ln}(\boldsymbol{a})}.$$

Signalons encore la formule de changement de base pour les logarithmes.

Soit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ deux réels > 0 et $\neq \mathbf{1}$. On a évidemment

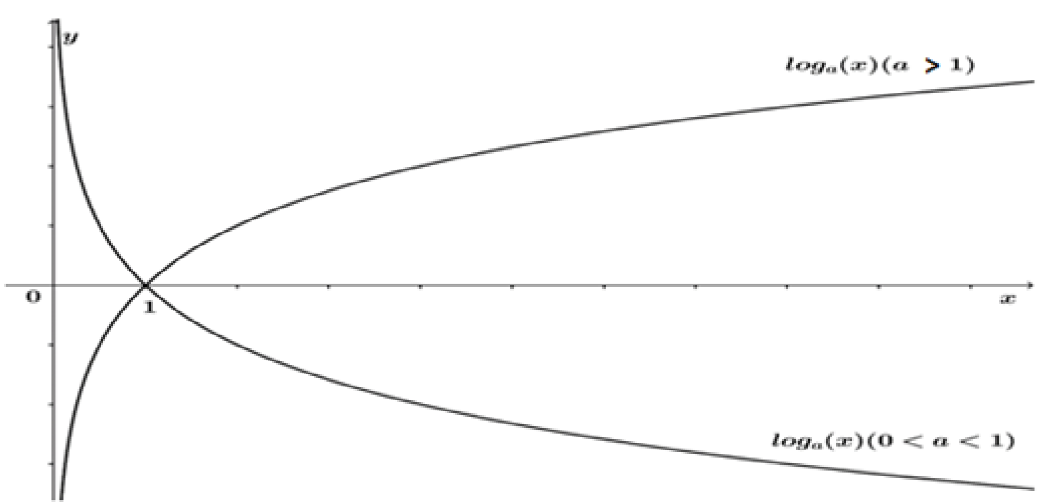
$$\mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{b})} = \frac{\mathbf{ln}(\boldsymbol{a})}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{b})} \cdot \frac{\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{ln}(\boldsymbol{a})} = \mathbf{log}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a})\,.\,\mathbf{log}_{\mathbf{a}}(\boldsymbol{x}).$$

Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$ tel que $\mathbf{ln}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{1}$, on dira que $\boldsymbol{e}$ la base du logarithme népérien,

$$\mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{log}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{1}}.$$

Logarithme décimal. Le logarithme népérien est le plus utilisé en analyse, mais pour le calcul numérique, compte tenu de la représentation décimale des nombres réels, on utilise le logarithme de base $\mathbf{10}$ ou logarithme décimal. On note $\mathbf{log}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{log}_{\mathbf{10}}(\boldsymbol{x})$.

Graphe de $\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$.



5.2 Fonction exponentielle

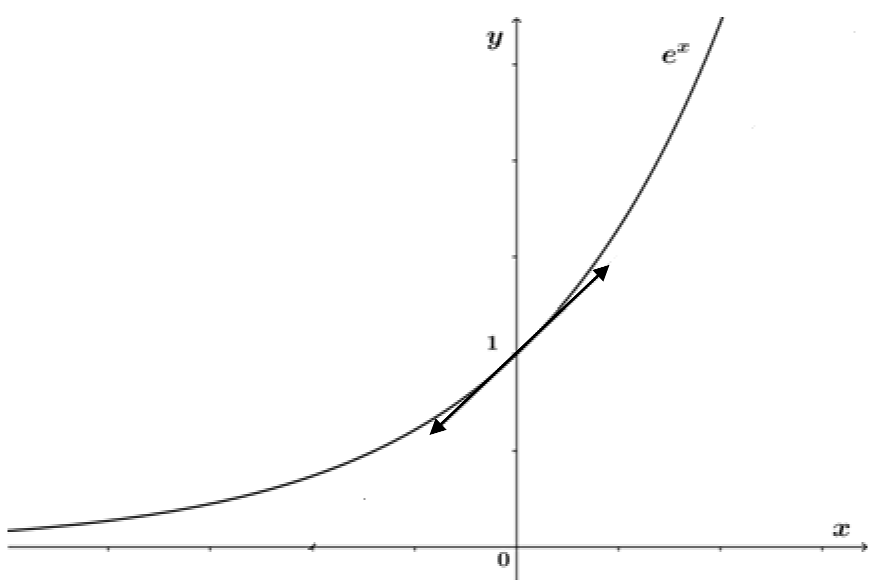
5.2.1 Définition de la fonction exponentielle de base e

Définition. la fonction logarithme népérien réalise une bijection continue et strictement croissante de $]\mathbf{0}, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$. On appelle fonction exponentielle, la fonction réciproque, notée $\mathbf{exp}$ (et qu'on aurait pu noter $\mathbf{ln^{-1}}$), de la fonction logarithme népérien.

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}.$$

Il est évident que $\boldsymbol{x} = \mathbf{ln}(\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{x}))$ et que $\boldsymbol{y} = \mathbf{exp}(\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{y}))$.

On note encore $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e^x}$ au lieu de $\boldsymbol{y} = \mathbf{exp}(\boldsymbol{x})$. Cette notation sera justifiée plus loin. Il résulte de la définition que la fonction $\boldsymbol{e^x}$ est une application continue et strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]\mathbf{0}, +\infty[$. Son graphe est le symétrique du graphe de $\mathbf{ln}$ par rapport à la première bissectrice.



5.2.2 Propriétés

Propriétés.

1. $\forall \boldsymbol{x} \in]-\infty, +\infty[,\ \boldsymbol{e^x} > 0$ **,**

2. $\forall \boldsymbol{x} \in]-\infty, +\infty[,\ \mathbf{ln}(\boldsymbol{e^x}) = \boldsymbol{x}$ **,**

3. $\forall \boldsymbol{x} \in]\mathbf{0}, +\infty[,\ \ \boldsymbol{e}^{\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{x},$

4. $\boldsymbol{e^0} = \mathbf{1}\ \ , \boldsymbol{e^1} = \boldsymbol{e}.$

Propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{e^{x+y}} = \boldsymbol{e^x}.\boldsymbol{e^y};$

(2) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{e^{-x}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x}}\ ;$

(3) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R},\ \ \boldsymbol{e^{x-y}} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{e^y}}\ ;$

(4) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ **et** $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z},\ (\boldsymbol{e^x})^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{e^{px}}.$

Dérivée. La fonction exponentielle est indéfiniment dérivable et

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} : (\boldsymbol{e^x})^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{e^x}.$$

Conséquences.

1. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, (\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x};$

2. La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites Usuelles.

$(\mathbf{1})\ \lim\limits_{\boldsymbol{x}\longrightarrow-\infty} \boldsymbol{e^x} = \mathbf{0}, \quad \lim\limits_{\boldsymbol{x}\longrightarrow+\infty} \boldsymbol{e^x} = +\infty;$

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$;

(3) $\lim_{x \to -\infty} x.e^x = 0$;

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Théorème.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Preuve.

On a $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Il en résulte en particulier pour la suite $x_n = \frac{1}{n}$,

$$\frac{1}{x_n} \ln(1 + x_n) = n.\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 1$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, d'où, en vertu de la continuité de la fonction $\exp$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \exp(1) = e$$

Remarque. On a désigné la fonction $\exp(x)$ par e^x. Cette notation tient au fait que pour tout rationnel r on a :

$$\exp(r) = e^r,$$

Le second membre étant la puissance $\boldsymbol{r}$-ième du nombre $\boldsymbol{e}$. Ainsi **exp** constitue un prolongement de la fonction

$\boldsymbol{r \longrightarrow e^r, r} \in \mathbb{Q}$ Sur $\mathbb{R}$, qui peut donc être noté $\boldsymbol{x \longrightarrow e^x}$.

5.2.3 Fonction exponentielle de base $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} > 0)$

La fonction $\boldsymbol{x \longrightarrow e^x = \exp(x)}$ étant définie, posons par définition pour tout $\boldsymbol{a} > 0$:

$$\boldsymbol{\exp_a(x) = a^x = e^{x\,ln(a)}, x} \in \mathbb{R}.$$

Pour $\mathbf{a \neq 1}$, la fonction $\boldsymbol{\exp_a}$ est évidemment strictement monotone (croissante pour $\boldsymbol{a} > 0$, décroissante pour $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < 1$) et réalise une bijection

$\mathbb{R} \longrightarrow]\mathbf{0}, +\infty[$. En outre, il vient de la définition que $\boldsymbol{\exp_a(a \neq 1)}$ n'est autre que la réciproque de la fonction $\boldsymbol{\log_a}$.

En effet,

$$\boldsymbol{y = a^x = e^{x\,ln(a)} \Leftrightarrow \log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \frac{x\,ln(a)}{\ln(a)} = x}.$$

Il est clair aussi que $\boldsymbol{\exp_a}$ constitue le prolongement (sur $\mathbb{R}$) de la fonction

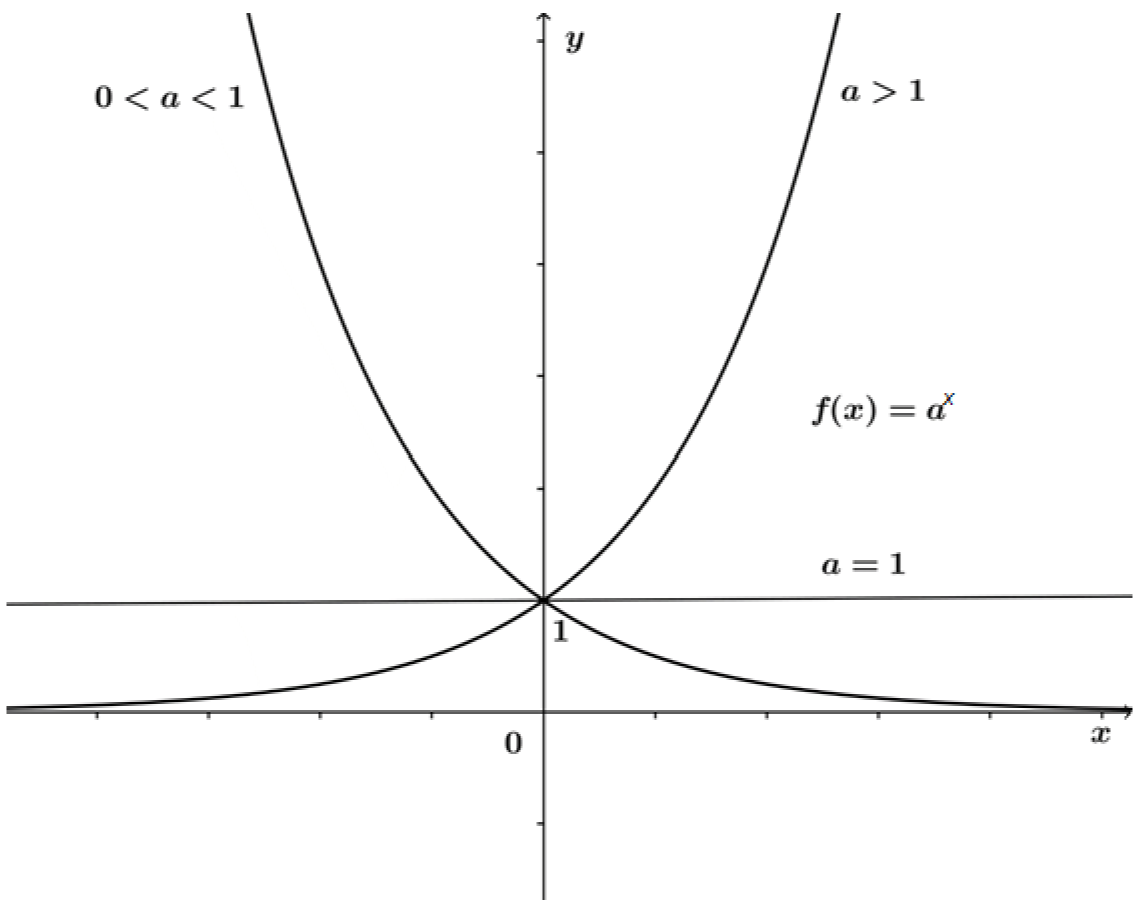
$$\boldsymbol{r \longrightarrow a^r}, \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}.$$

Les propriétés suivantes de $\mathbf{exp}_a$ sont des conséquences immédiates de la définition.

1. $(a^x)' = a^x \ln(a)$, d'où $\mathbf{exp}_a$ est évidemment indéfiniment dérivable ;

2. $a^{x+y} = a^x . a^y$, $\quad (a^x)^y = a^{xy}$;

3. $(a.b)^x = a^x . b^x$ pour $a > 0, b > 0$.



5.3 Fonction Puissance

Définition.

On connaît la fonction $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$, définie dans $\mathbb{R}$ pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Cette fonction est strictement monotone si $\boldsymbol{n}$ est impair et admet dans ce cas une fonction réciproque, notée

$$\boldsymbol{x}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{x}}\ .$$

Si $\boldsymbol{n} > 0$ est pair, on considère la restriction de cette fonction à $[\mathbf{0}, +\infty[$ et on définit la fonction réciproque de cette restriction notée aussi $\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}$.

La définition de $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$ pour $\boldsymbol{a} > 0$ permet de définir $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ pour $\boldsymbol{x} > 0$ et $\boldsymbol{\alpha}$ réel quelconque.

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{ln}(x)}, \qquad \boldsymbol{x} > 0\ .$$

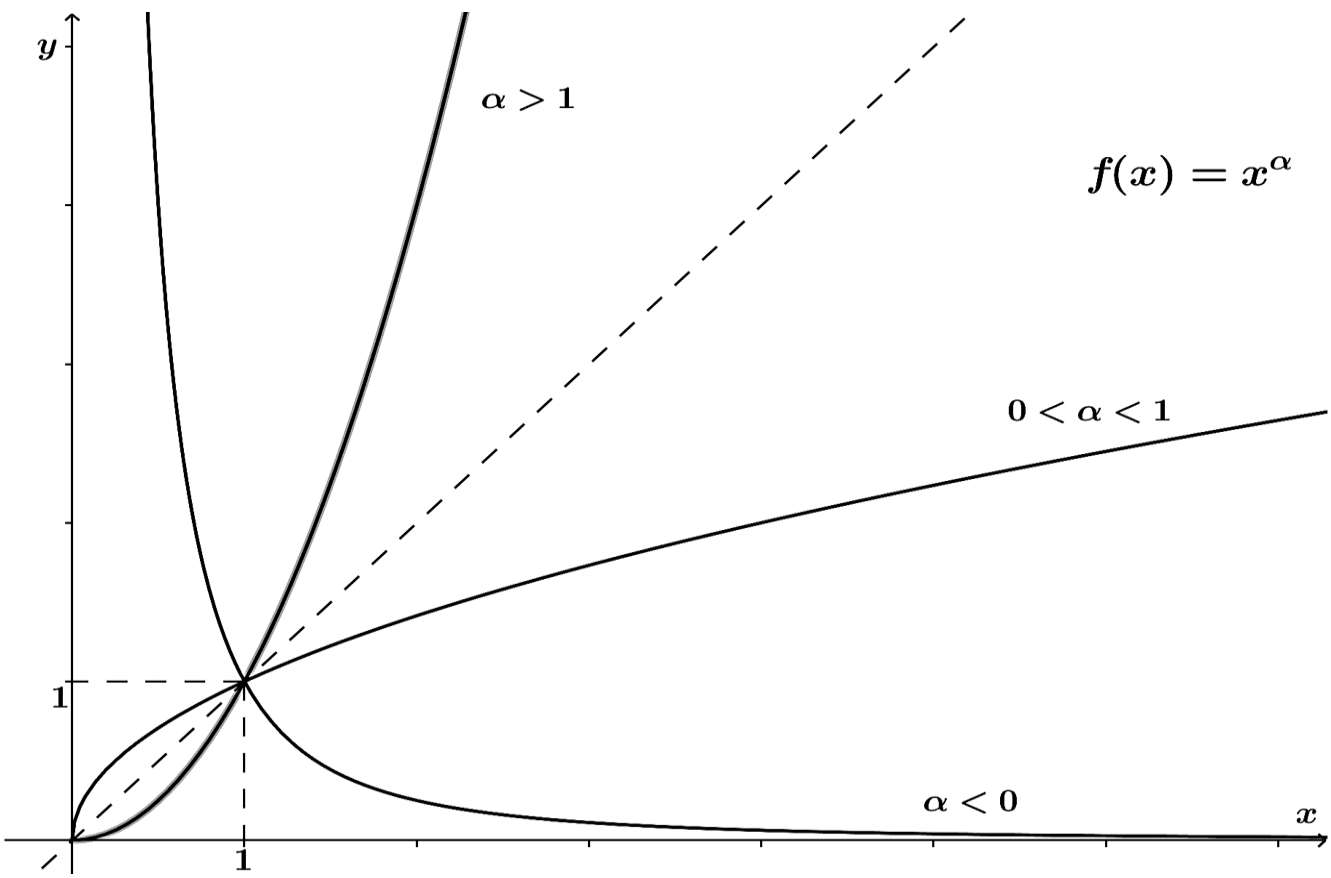
Les propriétés algébriques découlent de celles de $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}$:

- $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$,
- $(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}})^{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta}}$,
- $(\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y})^{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}.\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

Pour $\boldsymbol{x} > 0$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\frac{1}{\alpha}}$; Les fonctions $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ **et** $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}^{\frac{1}{\alpha}}$ sont donc réciproques d'une de l'autre. La fonction $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ est indéfiniment dérivable pour $\boldsymbol{x} > 0$.

En effet,

$$(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}})' = \left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\alpha}\ln(\boldsymbol{x})}\right)' = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\alpha}\ln(\boldsymbol{x})} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}-\mathbf{1}}.$$



Remarque. Pour $\boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}$, on prolonge par continuité la fonction $\boldsymbol{x} \longrightarrow \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}$ en $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:

5.4 Croissance comparée des fonctions logarithme, exponentielle et puissance

5.4.1 Fonction logarithme et puissance

Théorème.

$$\forall\, \alpha > 0 : \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0; \qquad (1)$$

$$\forall\, \alpha > 0 : \quad \lim_{x \to 0} x^{\alpha}.\ln(x) = 0. \qquad (2)$$

Preuve.

La relation (1) se déduit de la réglé de l'hôpital.

La relation (2) s'en déduit en posant $x = \frac{1}{y}$.

5.4.2 Fonction exponentielle et puissance

Théorème. α étant un nombre positif quelconque et $a > 1$, on a :

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^{\alpha}} = +\infty$;

(2) $\lim_{x \to -\infty} |x|^{\alpha}.a^x = 0$.

Preuve.

- La relation (1) se déduit de la règle de l'hôpital appliqué autant de fois qu'il faudra pour que l'exposant de $\mathbf{x}$ dans le dénominateur devienne ≤ 0.
- La relation (2) s'en déduit en écrivant pour $x < 0$.

$$|x|^{\alpha}.a^{x} = \frac{1}{\frac{a^{y}}{y^{\alpha}}}\ , \qquad y = -x.$$

On résume parfois les résultats précédents en disant que la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction puissance lorsque $a > 1$ et que la fonction puissance « l'emporte » sur la fonction logarithme.

Exemple. Études des formes indéterminées.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x^{x}$: on a une forme indéterminée du type 0^{0}. compte tenu de la continuité de

la fonction e^{x} on a :

$$x^{x} = e^{x.\ln(x)} \longrightarrow e^{0} = 1 \text{ pour } x \longrightarrow 0.$$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$: forme indéterminée du type ∞^{0}.

De même, $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}.\ln(x)} \longrightarrow e^{0} = 1$ pour $x \longrightarrow +\infty$.

(3) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

En effet, pour $x \neq 0$, on a

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} \longrightarrow e^{1} = e \text{ pour } x \longrightarrow 0.$$

Car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}(1 + x) = 1$.

(4) De même,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

En effet, on se ramène au cas précédent en posant $y = \frac{1}{x}$.

5.5 Applications économiques

Les fonctions exponentielles et logarithmiques permettent de formaliser divers problèmes économiques dont la particularité réside dans leur croissance exponentielle.

5.5.1 La fonction logistique.

Cette fonction permet de formaliser des problèmes économiques, lesquels ont la particularité de représenter la croissance d'une grandeur économique qui croît au départ d'une manière croissante, puis croît d'une manière décroissante pour enfin se rapprocher d'un plafond.

La fonction logistique prend la forme générale :

$$f(x) = \frac{c}{1 + be^{-ax}} \quad \text{, où } c, b \text{ et } a > 0 \qquad (1)$$

Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R}$, on peut en outre vérifier par calcul direct que la fonction logistique est strictement croissante, soit :

$$f'(x) = \frac{abce^{-a.x}}{(1 + be^{-a.x})^2} > 0 \ \forall \ x \qquad (2)$$

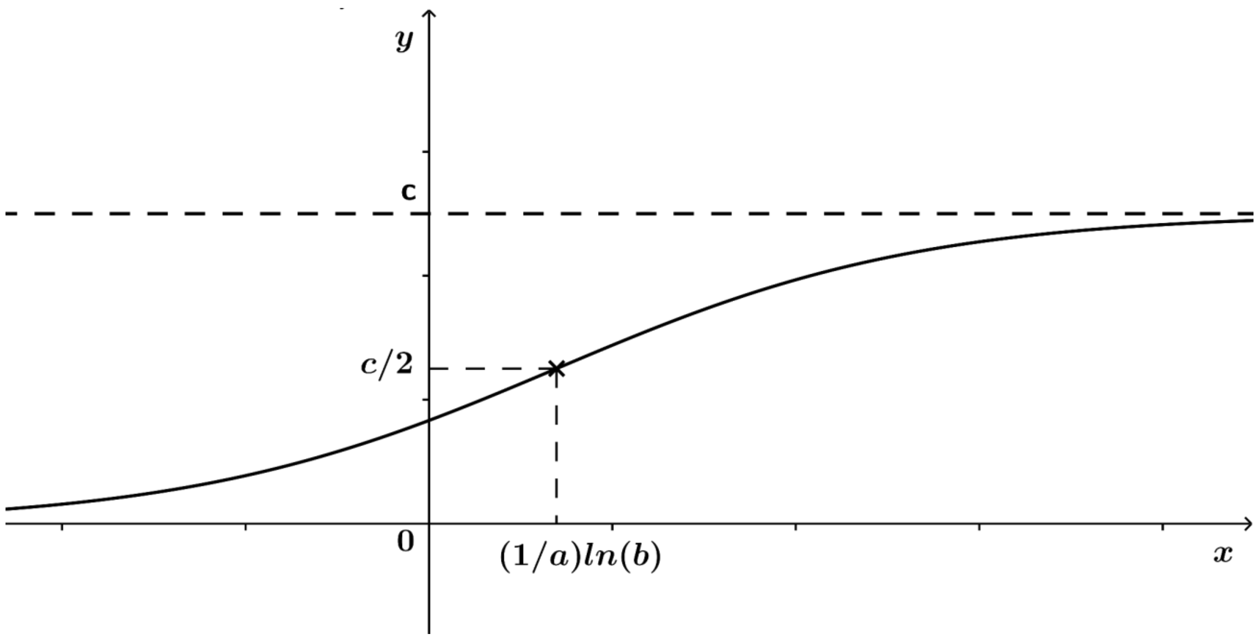
f est en outre strictement comprise entre 0 et c. On peut aussi vérifier par calcul direct que cette fonction admet le point $x = \left(\frac{1}{a}\right) \ln(b)$ comme point d'inflexion car sa dérivée seconde :

$$f''(x) = a^2 bce^{-ax} \frac{(be^{-ax} - 1)}{(1 + be^{-ax})^3} \qquad (3)$$

y est nulle alors que la dérivée première demeure positive à droite et à gauche de ce point. On peut en outre vérifier par calcul direct que :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \mathbf{0} \text{ quand } \boldsymbol{x} \longrightarrow -\infty \,;\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \boldsymbol{c} \text{ quand } \boldsymbol{x} \longrightarrow +\infty;$$

le point d'abscisse $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\right)\mathbf{ln}(\boldsymbol{b})$ a pour ordonnée $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2}}$ et la dérivée $\boldsymbol{f}'\left(\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\right)\mathbf{ln}(\boldsymbol{b})\right)$ est égale *à* $\frac{\mathbf{ac}}{\mathbf{2}}$. Le graphe de cette fonction prend alors la forme générale:



Le graphe ci-dessus indique que la fonction logistique $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ tend vers une constante "$\boldsymbol{c}$" lorsque "$\boldsymbol{x}$" s'accroît indéfiniment.

5.5.2 Elasticité ponctuelle

Considérons la fonction $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. La dérivée de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ est notée $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$.

Considérons la dérivée de $\mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$ par rapport à $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$. On peut définir de nouvelles variables $\boldsymbol{U} \equiv \mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$ et $\boldsymbol{V} \equiv \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{V}})$. En utilisant la règle de la chaîne on peut retrouver la dérivée de $\mathbf{ln}(\boldsymbol{y})$ par rapport à $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x})$, soit :

$$\frac{d(\ln(y))}{d(\ln x)} = \frac{dU}{dV} = \frac{dU}{dy} \cdot \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dV} = \frac{d}{dy}\ln(y)\frac{dV}{dx} \cdot \frac{d}{dV}\, e^V = \frac{1}{y}\frac{dV}{dx}e^V = \frac{dV}{dx}\frac{x}{y}$$

La dernière expression peut être réécrite sous la forme :

$$e_{y.x} = \frac{dy/dx}{y/x} = \frac{dy/y}{dx/x} = \frac{d(\ln(y))}{d(\ln(x))}. \qquad (4)$$

(4) définit **l'élasticité** d'une fonction et apparaît comme le rapport d'une fonction marginale (la dérivée $f'(x)$) et d'une fonction moyenne $\left(\frac{f(x)}{x}\right)$.

L'élasticité permet aussi (deuxième expression) de mesurer le rapport de la variation relative d'une variable y et de la variation relative de la variable x.

Enfin l'élasticité d'une fonction $y = f(x)$ est obtenu en utilisant les logarithmes dans la dérivation.

Si y désigne la quantité demandée d'un bien particulier et x désigne son prix, alors la formulation (4) permet de souligner l'impact d'une variation relative du prix x sur la variation relative de la quantité demandée y de ce bien. Par convention la valeur absolue de e_{yx} est utilisée pour décider si une fonction particulière

$y = f(x)$ est élastique ou non, soit formellement:

$$\text{la fonction est } \begin{cases} \text{élastique} \\ \text{unitaire} \\ \text{inélastique} \end{cases} \text{ en un point donné si } e_{yx} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} 1.$$

5.5.3 Problème d'intérêt composé

Considérons le placement, à un taux d'intérêt de 100% par an, d'un capital initial d'une unité monétaire **(u.m)**. Si l'intérêt est capitalisé (ajouté au capital initial) une fois par an, la valeur du capital initial ou valeur capitalisé $\mathbf{V(1)}$ (le chiffre entre parenthèses indique la fréquence de la capitalisation en une année) est égale à :

$$\mathbf{V(1) = 1(1 + 100\%)^1 = 2} \qquad (5)$$

Si, par contre, l'intérêt est capitalisé semestriellement au taux annuel de $\mathbf{100\%}$, alors à la fin du premier semestre le capital initial se serait accru de (100/2)% et sa valeur capitalisée serait :

$$\boldsymbol{V^* = 1\left(1 + \left(\frac{100}{2}\right)\%\right) = 1{,}50}$$

La somme $\boldsymbol{V^*}$ recevra des intérêts pour le deuxième semestre et à la fin de l'année la valeur capitalisée par le capital initial sera égale à :

$$\boldsymbol{V(2) = V^*\left(1 + \left(\frac{100}{2}\right)\%\right) = 1\left(1 + \left(\frac{100}{2}\right)\%\right)\left(1 + \left(\frac{100}{2}\right)\%\right)}$$

(en remplaçant $\boldsymbol{V^*}$ par sa valeur)

Soit

$$V(2) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2.$$

En développant la même argumentation on peut établir que

$$\boldsymbol{V(3) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3}, \qquad \boldsymbol{V(4) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4}$$

et ainsi de suite pour aboutir à la formulation générale :

$$\boldsymbol{V(m) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}} \qquad (6)$$

Où $\boldsymbol{m}$ désigne la fréquence de la capitalisation. Si l'intérêt est capitalisé d'une manière continu, ou en d'autres termes si $\boldsymbol{m}$ tend vers l'infini. la valeur capitalisée $\boldsymbol{V(m)}$ de l'unité monétaire s'accroît graduellement pour aboutir au bout d'une année à :

$$\boldsymbol{\lim_{m \to \infty} V(m) = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = e = 2,71828\ \mathrm{u.m.}} \qquad (7)$$

Le nombre $\boldsymbol{e}$ peut ainsi être interprété comme la valeur capitalisée d'un capital initial d'une unité monétaire au bout d'une année si le taux d'intérêt de $\boldsymbol{100\%}$ est capitalisé continuellement.

Note: Etant donné que **1** unité monétaire devient au bout d'une année **2,718 u.m.,** le taux d'intérêt effectif est donc de **1,718 u.m.**. Le taux d'intérêt de $\boldsymbol{100\%}$ ne représente ainsi qu'un taux d'intérêt nominal.

5.6 Exercices d'application

Exercice 01: Exprimez les nombres suivants comme des multiples de $\ln(3)$.

a) $\ln(9)$. b) $\ln(\sqrt{3})$. c) $\ln\left(\sqrt[5]{3^2}\right)$. d) $\ln\left(\frac{1}{81}\right)$.

Exercice 02: Simplifiez les expressions suivantes :

a) $\exp[\ln(x)] - \ln[\exp(x)]$, b) $\ln[x^4 \exp(-x)]$,

c) $\exp[\ln(x^2) - 2\ln(x)]$.

Exercice 03:

1. Montrer que :

$$\forall x > -1, \qquad \ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire que :

$$\forall n > 1\,, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 04: posons, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$: $a = \exp(x^2)$ et $b = \frac{1}{x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.

simplifier a^b.

Exercice 05: Résoudre les équations suivantes aprés avoir déterminé le domaine de validité :

1) $\ln(x-1) = \ln(3x-5)$.

2) $\ln(\sqrt{2x-3}) = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln(x)$.

3) $\mathbf{2\ln(x) = \ln(x+4) + \ln(2x)}$.

4) $\boldsymbol{e^{4x} - 3e^{2x} - 4 = 0}$.

5) $\mathbf{8^{6x} - 38^{3x} - 4 = 0}$.

6) $\boldsymbol{x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^{x}}$.

7) $\mathbf{2^{x^3} = 3^{x^2}}$.

8) $\boldsymbol{\log_a(x) = \log_x(a)}$ **o**ù $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\mathbf{1}\}$.

9) $\boldsymbol{\log_3(x) - \log_2(x) = 1}$.

10) $\boldsymbol{2^x + 2^{x+1} + \cdots + 2^{x+n} = 3^x + 3^{x+1} + \cdots + 3^{x+n}}$ **o**ù $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Exercice 06: Résoudre les inéquations suivantes après avoir donné leur domaine de validité :

1) $\boldsymbol{\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)}$.
2) $\boldsymbol{e^{x^2} > (e^x)^4 e}$.
3) $\boldsymbol{a^{x^2} < \left(\sqrt{a}\right)^{7x-3}}$ **o**ù $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{\mathbf{1}\}$.

Exercice 07: Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x^{1/x}$ 2) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{3^x}$ 3) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{x^x}}$

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x^{\sqrt{x}}$ 5) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{3^x}$ 6) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ **o**ù $\mathbf{1} < a < b$

7) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1/x}$ 8) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} - x$ 9) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$ 11) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$ 12) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

13) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 08:

Soit un entier $n > 1$. On considère l'équation:

$$x^{x^n} = n$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution à cette équation.
2. Déterminer cette unique solution.

Exercice 09: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires pour écrire en base 10 est égale à la partie entière de $1 + \log(n)$.

Exercice 10:

a) Soit $f(t) = Ae^{rt}$ et $g(t) = Be^{st}$, où $A > 0, B > 0$ et $r \neq s$.
Résolvez l'équation $f(t) = g(t)$ par rapport à t.

b) En 1990, le PNB (produit national brut) de la chine était estimé à $1,2.10^{12}\$$ et le taux de croissance de celui-ci à $r = 0,09$. En comparaison, le PNB des Etats-Unis était de $5,6 \times 10^{12}\$$ et le taux de croissance estimé à $s = 0,02$. En supposant que les PNB de chaque pays ont continué à croître exponentiellement aux taux respectifs de $r = 0,09$ et $s = 0,02$, quand les deux nations auront-elles le même PNB?

Exercice 11: Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x-1}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = 2$.

Étudier la continuité de g en 0.

Exercice 12: Calculez la dérivée première et la dérivée seconde

1) $\ln(x) + 3x - 2$ 2) $x^3(\ln(x))^2$ 3) $\ln(ln(x))$

4) $x^2 - 2\ln(x)$ 5) $\frac{x^2}{\ln(x)}$ 6) $\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

7) $x^3 \ln(x)$ 8) $(\ln(x))^{10}$ 9) $e^x \ln(x)$

10) $\frac{\ln(x)}{x}$ 11) $(\ln(x) + 3x)^2$ 12) $e^{x^3}\ln(x^2)$

13) $\ln(e^x + 1)$ 14) $2(e^x - 1)^{-1}$ 15) e^{2x^2-x}

16) $\ln(x^2 + 3x - 1)$

Exercice 13: Déterminez les domaines de définition des fonctions :

1) $\ln(x + 1)$ 2) $\ln(x^2 - 1)$ 3) $\frac{(1-\ln(x))^2}{2x}$

4) $\ln\left(\frac{3x-1}{1-x}\right)$ 5) $\ln(ln(x))$ 6) $\ln(e^x + e^{-x})$

7) $\ln|x|$

Exercice 14: Déterminez les intervalles de croissance des fonctions :

1) $\ln(4-x^2)$ **2)** $x^3\ln(x)$ **3)** $\dfrac{1}{\ln(\ln x)-1}$ **4)** $\ln(e^x+e^{-x})$

Exercice 15:

Écrivez une équation de la tangente à la courbe représentative des fonctions :

a) $y=\ln(x)$ aux points d'abscisses **i)** 1 **ii)** $\frac{1}{2}$ **iii)** e

b) $y=xe^x$ aux points d'abscisses **i)** 0 **ii)** 1 **iii)** -2.

Exercice 16:

Calculez, par dérivation logarithmique, les dérivées :

a) $(2x)^x$;

b) $x^{\sqrt{x}}$;

c) $\left(\sqrt{x}\right)^x$.

Exercice 17:

En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x>0$ et $x<0$ démontrer que :

1. Pour tout réel x on a $e^x\geq 1+x$;

2. Pour tout $x>-1$ on a $\ln(1+x)\leq x$.

Exercice 18:

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que

$$\forall x>0,\ \frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln(x)<\frac{1}{x}.$$

2. Calculez

$$\lim_{x \to +\infty} x\,(\ln(x+1) - \ln(x)) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,(\ln(x+1) - \ln(x)).$$

3. En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

4. Calculer $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

<u>Exercice 19</u>: Étudier les variations et donner une représentation graphique de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$$

en répondant aux questions suivantes :

1. Domaine de définition.
2. Comportement aux extrémités du domaine de définition.
3. Extrema locaux, sens de variation et tableaux des variations.
4. Comportement en $\pm\infty$ (recherche d'asymptôtes).
5. Graphe.

<u>Exercice 20</u>: Tracer le graphe des fonctions ci-dessous : on étudiera les variations de ces fonctions, et on précisera les branches infinies, tangentes aux points remarquables :

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$; **b)** $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$.

<u>Exercice 21</u>: Utilisez la règle de l'hôpital pour calculer les limites :

1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{3x^3}$; 2) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2}$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-3x} - e^{-2x} + x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} \ln\left(\dfrac{7x+1}{4x+4}\right)$;

5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln(x)}$.

Exercice 22: Localisez les extrema des fonctions suivantes :

1) $(x+2)e^{-x}$ 2) $\frac{\ln(x)}{x^2}$

3) $\ln(x) + \dfrac{1}{x}$ 4) $e^{2x} - 2e^{x}$

5) $x^3 e^{-x}$ 6) $(x^2 + 2x)e^{-x}$

Exercice 23 : Si le taux annuel d'accroissement de la population européenne est $0,72\%$, quel est son temps de doublement?

Exercice 24 : On a estimé la population du Botswana à $1,22$ million en **1989**. Son taux de croissance annuel est de $3,4\%$. Si **1989** est l'année de référence $t = 0$, écrivez une formule qui donne la population $P(t)$ à la date t. Quel est son temps de doublement ?

Chapitre 06

Calcul Intégral

6.1 Primitives et Intégrales

6.1.1 Primitive d'une fonction

Définition. soient **I** un intervalle et $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur **I**. On appelle primitive de $\boldsymbol{f}$ sur **I** toute fonction $\mathbf{F}: \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur **I** de fonction dérivée $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$.

Tableau des primitives usuelles. **F** est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur tout intervalle où $\boldsymbol{f}$ est continue.

Fonction $\boldsymbol{f}$	Primitive $\mathbf{F}$
a	ax
$x^{\alpha}(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^{x}	e^{x}
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$1+\tan^{2}(x)=\dfrac{1}{\cos^{2}(x)}$	$\tan(x)$
$\dfrac{1}{1+x^{2}}$	$Arctan(x)$
$u'(ax), (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}u(ax)$
$u'u^{\alpha}(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$u'e^{u}$	e^{u}
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Théorème. soit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant une primitive $\boldsymbol{F}$ sur l'intervalle **I.**

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\boldsymbol{G}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur **I**,
(ii) Il existe une constante $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbf{I}$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\alpha}$.

Démonstration.

L'implication (ii) ⇒ (i) est évidente. Démontrons la réciproque. Si $\boldsymbol{G}$ est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur **I** alors la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ est dérivable sur **I** de dérivée

$\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Or une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante.

Donc il existe une constante $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ telle que: $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\alpha}$. ∎

6.1.2 Théorème fondamental de l'intégration

Théorème. Théorème fondamental de l'intégration.

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur un intervalle **I**. Alors la fonction suivante :

$$\boldsymbol{x} \in \mathbf{I} \longmapsto \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

est l'unique primitive de $\boldsymbol{f}$ sur **I** s'annulant en $\boldsymbol{a}$.

Corollaire. si $\boldsymbol{f}$ est une fonction continue sur un intervalle **I**, alors $\boldsymbol{f}$ admet des primitives sur **I**.

On déduit également du théorème fondamental le théorème suivant, qui constitue le principal outil pour calculer des intégrales.

Théorème. soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur l'intervalle **I** et $\boldsymbol{F}$ une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur **I**. Alors pour tous $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ éléments de **I**, on a:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

La différence $F(b) - F(a)$ est notée $[F(t)]_a^b$.

Remarque. si f est de classe C^1 sur **I**, on a:

$$\forall (a,b) \in I^2, f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Démonstration. Posons

$$\forall x \in I, \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

D'après le théorème fondamental, Φ est une primitive de f sur l'intervalle **I**. Or F est également une primitive de f sur **I**. Donc il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in I, F(x) = \Phi(x) + \alpha$. **Or** Φ s'annule en a, donc $\alpha = F(a)$, puis:

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) = F(b) - \alpha = F(b) - F(a). \qquad \blacksquare$$

Exemple.

$$\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = [\ln(e^t + 1)]_0^1 = \ln(e^1 + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$$

Théorème. Interprétation géométrique. Soit une fonction f dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine limité par l'axe des abscisses , la courbe (C_f), les droites d'équations

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est mesurée en unité d'aire par : **A**=$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(t)dt}$.

6.1.3 Propriétés De L'intégrale

Théorème. soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions intégrables sur **I**, $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}^2$ et

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathbf{I}^3$.

- **Linéarité** :

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

- **Relation de Chasles** :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

- **Positivité** : si $a \leq b$ et si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0.$$

- **Croissance** : si $a \leq b$ et si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

- $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$;
- $\int_a^a f(t)dt = 0$.

Théorème. Stricte positivité. Si $\boldsymbol{f}$ est continue et positive sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ où $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$,

alors:

- $\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f$ est nulle sur $[a, b]$.
- $\int_a^b f(t)dt > 0 \Leftrightarrow f$ est non nulle sur $[a, b]$.

Définition. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

Si f est continue sur $[a, b]$, on apelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

Remarque.

La valeur moyenne $m = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est telle que f et la fonction

constante égale à m ont la même intégrale sur $[a, b]$.

Théorème. Inégalité de la moyenne.

Soit f continue sur $[a, b]$ où $a \leq b$ alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt \leq (b-a)\max_{[a,b]}|f|.$$

6.2 Méthodes de calcul d'intégrales

6.2.1 Intégration par parties

Théorème. Intégration par parties.

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})]_a^b - \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}.$$

Démonstration.

Posons $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{uv}$ est de classe $\boldsymbol{C^1}$ sur $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, donc dérivable de dérivée continue : $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{u}'.\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}'$**.** On obtient alors par linéarité de l'intégrale:

$$\int_a^b \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = \int_a^b \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} + \int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}$$

Or on a par ailleurs :

$$\int_a^b \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt} = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})]_a^b = [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}).\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})]_a^b$$

Ce qui permet de conclure. ■

Exemple.

"$\boldsymbol{ln}$" est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\boldsymbol{x} \longmapsto \int_1^x \mathbf{ln}(\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{dt}$ est la primitive de $\boldsymbol{ln}$ sur $]\mathbf{0},+\infty[$ s'annulant en $\mathbf{1}$. Posons pour tout $\boldsymbol{t} > 0$:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t} & \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{ln}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{u}'\boldsymbol{t}) = \mathbf{1} & \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{t}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}} \end{array}$$

$\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont de classe $\boldsymbol{C^1}$ sur $]\mathbf{0},+\infty[$**.** Une intégration par parties donne :

$$\int_1^x \mathbf{ln}(\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{dt} = [\boldsymbol{t}.\mathbf{ln}(\boldsymbol{t})]_1^x - \int_1^x \boldsymbol{t} \times \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{xln}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x} - \mathbf{1}).$$

$x \longmapsto x\ln(x) - x + 1$ est donc l'unique primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$ s'annulant en 1.

6.2.2 Changement de variable

Théorème. Formule du changement de variable.

Soient **I** et **J** deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur **I**, φ une fonction de classe C^1 sur **J** telle que $\varphi(J) \subset I$. Pour tout α et β dans **J** on a:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du.$$

Remarque.

On dit qu'on pose $u = \varphi(t)$ et que $du = \varphi'(t)dt$.

Démonstration.

f est continue sur **I** donc admet une primitive F sur **I**. On remarque qu'une primitive de $t \longmapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ sur **J** est $t \longmapsto F(\varphi(t))$. On a donc :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = F(\rho(\varphi)) - F(\varphi(\alpha)).$$

On conclut en remarquant que :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)du = [F(u)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)). \qquad \blacksquare$$

Exemple.

Exemple où on donne la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

Calculons $\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)} dt$ en posant $u = t^3$.

La fonction $t \longmapsto t^3$ est de classe C^1 sur $[1,2]$. On a $u = 1$ quand $t = 1$ et $u = 8$ quand $t = 2$. Par ailleurs $du = 3t^2 dt$. Donc par changement de variable:

$$\int_1^2 \frac{1}{t(t^3+1)} dt = \int_1^2 \frac{1}{3t^3(t^3+1)} 3t^2 dt = \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)} du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^8 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \frac{1}{3}[\ln(u) - \ln(u+1)]_1^8$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Proposition. Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$ où $a > 0$.

- Si f est paire alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt.$$
- Si f est impaire alors
$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$

6.2.3 Intégration des fractions rationnelles

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle avec :

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - u_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{s}\left(x^2 - p_j x + q_j\right)^{m_j}$$

Où :

- Les u_i sont des réels,
- Les p_j et les q_j sont des réels tels que :

$$p_j^2 - 4q_j < 0.$$

- Les n_i et les m_j sont des entiers strictement positifs

Théorème. La fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose de manière unique sous la forme suivante:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{h=1}^{n_i}\frac{A_{ih}}{(x-u_i)^h} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{B_{jk} + C_{jk}x}{\left(x^2 + p_j x + q_j\right)^k}$$

Où:

- **E** est un polynôme.
- Les coefficients A_{ih}, les B_{jk} et les C_{jk} sont des nombres réels.

Cas particulier.

Cas où le degré de Q est 2 et le degré de P est strictement inférieur à 2:

$$\left(d^\circ(P) < d^\circ(Q)\right)$$

Par exemple

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Pour calculer A et B.

Pour A?

On multiplie $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}$ par $(x-a)$

On obtient :

$$\frac{(x-a)P(x)}{(x-a)(x-b)} = A + \frac{B(x-a)}{x-b}.$$

Puis on donne à **x** la valeur $\boldsymbol{a}$**.**

Pour B?

On multiplie $\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}$ par $(x-b)$

On obtient :

$$\frac{(x-b)P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A(x-b)}{x-a} + B.$$

Puis on donne à **x** la valeur $\boldsymbol{b}$**.**

Exemples.

1. $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$

On calcule C:

$$\frac{(x-2)x}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A(x-2)}{(x-1)^2} + \frac{B(x-2)}{x-1} + C$$

Pour $x = 2 \Longrightarrow C = \frac{2}{(2-1)^2} = 2.$

On calcule A :

$$\frac{x(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)} = A + \frac{B(x-1)^2}{x-1} + \frac{C(x-1)^2}{x-2}$$

Pour $\boldsymbol{x = 1 \Longrightarrow A = -1}$

On calcule B :

$$\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{x}{(x-1)^2} + \frac{Bx}{x-1} + \frac{2x}{x-2}$$

Quand $x \longrightarrow +\infty$ on trouve : $\boldsymbol{0 = 0 + B + 2 \Longrightarrow B = -2.}$

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}dx = -\int \frac{dx}{(x-1)^2} - 2\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2}.$$

$$= \frac{1}{x-1} - 2Ln|x-1| + 2Ln|x-2| + K$$

2. $$\frac{x}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{(Bx+C)}{x^2+x+1}$$

On calcule A :

$$\frac{(x-2)x}{(x-2)(x^2+x+1)} = A + \frac{(Bx+C)(x-2)}{x^2+x+1}$$

Pour $x = 2 \Longrightarrow A = \frac{2}{7}$.

On calcule C :

$$\text{Pour } x = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{2/7}{-2} + C \Longrightarrow C = \frac{1}{7}.$$

On calcule B :

On multiplie par $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{Ax}{x-2} + \frac{Bx^2+Cx}{x^2+x+1}$$

Quand $x \longmapsto +\infty$:

$$0 = A + B \Longrightarrow B = -A \Longrightarrow B = -\frac{2}{7}$$

Donc

$$\int \frac{x}{(x-2)(x^2+x+1)} = \int \frac{\frac{2}{7}}{x-2} + \int \frac{\left(-\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}\right)}{x^2+x+1}$$

$$= \frac{2}{7}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{7}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{7}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{7} Ln|x-2| - \frac{1}{7}[\ln(x^2+x+1)] + \frac{2}{7}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx + K$$

On calcule: $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx \;= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\frac{2^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{2}+1}dx$$

on pose : $u = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$$

Donc:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^{2}+1}dx$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{2}{\sqrt{3}}Arctg(u) + K'.$$

6.3 Applications économiques

Etant donné que la procédure de dérivation de fonction est souvent utilisée en économie, on doit s'attendre à ce que la procédure inverse apparaisse dans les analyses économiques. En effet au lieu de commencer l'analyse avec une fonction primitive, on peut envisager des cas où la fonction de départ est une fonction dérivée et où l'objectif est de retrouver la fonction primitive à travers une procédure d'intégration.

• De la fonction marginale à la fonction totale.

a. Investissement et formation de capital.

L'investissement net est défini comme le taux de variation du stock de capital à travers le temps. Si le processus de formation de capital est continu à travers le temps, alors on peut exprimer le stock de capital comme fonction du temps, soit $\boldsymbol{k(t)}$ et utiliser la dérivée $\boldsymbol{dk/dt}$ pour désigner le taux de formation du capital qui n'est autre que le taux d'investissement net au temps $\boldsymbol{t}$. Par conséquent le stock de capital $\boldsymbol{k}$ et l'investissement net sont reliés par les deux équations :

$$\frac{dk}{dt} = I(t).$$

et $$k(t) = \int I(t)dt = \int \frac{dk}{dt}dt = \int dk.$$

b. Coût marginal et coût total.

On peut aussi envisager le calcul du coût total $(\boldsymbol{CT})$ à partir du coût marginal $(\boldsymbol{Cmg})$. En effet le coût marginal est égal à la variation du coût total due à une variation dans l'output $(\boldsymbol{Q})$. Par conséquent, le coût total s'obtient du coût marginal en opérant une procédure d'intégration, soit :

$$CT = \int Cmg\, dQ = CV + CF.$$

Où : $\boldsymbol{CV}$ et $\boldsymbol{CF}$ désigne respectivement le coût variable et le coût fixe.

c. Valeur actualisée d'un cash-flow.

Etant donné un taux d'actualisation $\boldsymbol{r}$, la formulation :

$$A = Ve^{-rt}$$

a été interprétée comme la valeur actualisée $\boldsymbol{A}$ d'une valeur future $\boldsymbol{V}$ disponible après $\boldsymbol{t}$ années. Considérons le cas d'une rentrée continue d'argent (Cash-flow) au taux de $\boldsymbol{R(t)}$ unités monétaires par an. Si en un point quelconque $\boldsymbol{t}$, un intervalle infinitésimal de temps $\boldsymbol{dt}$ s'écoule, alors le montant des rentrées durant l'intervalle $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t} + \boldsymbol{dt})$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{R(t)dt}$. Etant donné un taux nominal d'actualisation $\boldsymbol{r}$, la valeur actualisée de ce montant de rentrées s'exprime sous la forme $\boldsymbol{R(t)e^{-rt}dt}$. Si on veut calculer la valeur totale actualisée de rentrées sur une période de $\boldsymbol{n}$ années, alors celle-ci est donnée par:

$$\boldsymbol{S = \int_0^n R(t)e^{-rt}dt} \qquad (\mathbf{1})$$

On peut en outre envisager le cas où $\boldsymbol{n} \longrightarrow \infty$ (des rentrées perpétuelles telle qu'une rente foncière par exemple). $(\mathbf{1})$ Sera alors réécrite sous la forme:

$$\boldsymbol{S = \int_0^{+\infty} R(t)e^{-rt}dt} \qquad (\mathbf{2})$$

6.4 Exercices D'application

Exercice 01: Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$(1)\ f(x)=\frac{1}{x\ln x},\qquad (2)\ f(x)=\frac{\arctan x}{1+x^2},$$

$$(3)\ \frac{x^{n-1}}{1+x^n},\qquad (4)\ f(x)=\frac{x^3-1}{x^4-4x+1}.$$

Exercice 02: Intégrer les fractions rationnelles suivantes :

$$(1)\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{x-1}{x^2+x+1}dx \qquad (2)\int_{5}^{6}\frac{x+2}{x^2-3x-4}dx \qquad (3)\int_{0}^{1}\frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$$

$$(4)\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+4x+7}dx \qquad (5)\int_{3}^{a}\frac{x+3}{x^2-4}dx \qquad (6)\int_{0}^{1}\frac{x^2-2x+2}{(x+1)^2}dx$$

$$(7)\int_{3}^{4}\frac{2x^2+3x-1}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx \qquad (8)\int_{1}^{2}\frac{x^2+3x+6}{x+1}\,dx$$

Exercice 03: Calculer par un changement de variables, les intégrales suivantes :

$$(1)\ \int_0^e \frac{\ln x}{x}dx\ (x = e^t) \qquad (2)\ \int_0^1 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx\ \left(t=\sqrt{x}\right)$$

$$(3) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx\ (t = e^x) \qquad (4)\ \int_0^a \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx\ (t=e^x)$$

$$(5) \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx\ (x=e^t) \qquad (6)\ \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{1+e^x}}dx\ \left(t=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right)$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx\ \ (t=\cos x) \qquad (8)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 3x^2}{\sqrt{\cos x + x^3}}dx\ (t = \cos x + x^3)$$

Exercice 04: Calculer, par une intégration par partie les intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx \qquad (2) \int_1^2 x^2 \ln x\ dx \qquad (3) \int_2^a \sqrt{x}\ln x\ dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\, dx \qquad (5) \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx \qquad (6)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{2} xe^{2x+1}\, dx$$

$$(7)\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^3}\,dx \qquad\qquad (8)\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$$

<u>Exercice 05</u>: Calculer les intégrales suivantes :

$$(1)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin x+\cos x}\,dx\ \left(t=\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$(2)\int_0^1 xe^{\sqrt{x}}dx \qquad (3)\int_1^e x^n \ln x\,dx$$

$$(4)\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx \qquad (5)\int_1^a \frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}\,dt\ (x=\ln t)$$

<u>Exercice 06</u>: On considère la suite d'intégrales

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx \ \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$

1. Calculer I_0, I_1, puis montrer que $I_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$.
3. Montrer que pour tout $n > 0$, on a $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{ne}$. En déduire la limite de I_n.

Exercice 07:

1. On considère les deux intégrales

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \text{ et } J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx\,.$$

Calculer $I-J$ et $I+J$ en déduire la valeur de I et de J.

2. On considère les deux intégrales

$$I=\int_{0}^{\ln 16}\frac{e^{x}+3}{e^{x}+4}dx \text{ et } J=\int_{0}^{\ln 16}\frac{1}{e^{x}+4}dx$$

Calculer $I-3J$ et $I+J$ en déduire la valeur de I et de J.

Exercice 08: On considère les trois intégrales

$$I=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x^{2}+1}}dx\;,J=\int_{0}^{1}\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}+1}}dx \text{ et } K=\int_{0}^{1}\sqrt{x^{2}+1}\,dx$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$, et calculer la valeur de I.
2. Montrer que $J+2I=K$ **et** $K=\sqrt{3}-J$. En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 09: On considère la suite d'intégrales

$$I_{n}=\frac{1}{n!}\int_{0}^{1}(1-x)^{n}e^{x}dx \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $\boldsymbol{n} > 0$, on a $\boldsymbol{I_n} = \boldsymbol{I_{n-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!}$.
2. Montrer que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{I_n} \leq \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{n}!}$. En déduire la limite de $\boldsymbol{I_n}$.
3. Montrer que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{I_n} = \boldsymbol{e} - \sum_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!}$. En déduire la limite de $\sum_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}!}$.

<u>Exercice 10</u>: On considère la suite d'intégrales

$$\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{e}} (\ln \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{dx} \text{ pour } \boldsymbol{n} > 0 \text{ et } \boldsymbol{I_0} = \boldsymbol{e} - \mathbf{1}.$$

1. Montrer que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{I_{n+1}} = \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{n} + \mathbf{1})\boldsymbol{I_n}$.
2. Montrer que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{I_n} \geq \mathbf{0}$.
3. En déduire que $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{I_n} \leq \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}$.
4. Quelle est la limite de la suite $(\boldsymbol{I_n})_{\boldsymbol{n} \geq \mathbf{0}}$.

<u>Exercice 11</u>: Le profit d'une entreprise comme fonction de son niveaux $\boldsymbol{x}$ de production est donné par:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{4000} - \boldsymbol{x} - \frac{\mathbf{3000000}}{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} > 0.$$

a) Déterminez le niveau de production qui rend le profit maximal. Faites le graphique de $\boldsymbol{f}$.

b) Si le niveau de production Oscille entre $\mathbf{1000}$ et $\mathbf{3000}$ unités, calculez le profit moyen :

$$\boldsymbol{I} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2000}} \int_{\mathbf{1000}}^{\mathbf{3000}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{dx}.$$

Exercice 12: Soit $\boldsymbol{K(t)}$ le stock en capital d'une économie au temps $\boldsymbol{t}$. l'investissement net au temps $\boldsymbol{t}$, noté $\boldsymbol{I(t)}$, est donné par le taux d'accroissement $\boldsymbol{K'(t)}$ de $\boldsymbol{K(t)}$.

a) Si $\boldsymbol{I(t) = 3t^2 + 2t + 5 \ \ (t \geq 0)}$, quelle est l'augmentation totale du stock en capital pendant la période de $\boldsymbol{t = 0}$ à $\boldsymbol{t = 5}$?

b) Si $\boldsymbol{K(t_0) = K_0}$, établissez une expression de l'augmentation totale du stock en capital entre les temps $\boldsymbol{t = t_0}$ et $\boldsymbol{t = T}$ si la fonction d'investissement $\boldsymbol{I(t)}$ est celle de la partie **(a).**

Exercice 13: On suppose que les courbes de demande et d'offre sont respectivement $\boldsymbol{P = f(Q) = 200 - 0{,}02\ Q}$ et $\boldsymbol{P = g(Q) = 20 + 0{,}1\ Q}$.

Déterminez le prix et la quantité à l'équilibre et calculez les surplus du producteur et du consommateur.

Exercice 14: Une compagnie pétrolière projette d'extraire du pétrole d'un de ses champs, à partir d'aujourd'hui $\boldsymbol{t = 0}$, où $\boldsymbol{t}$ est mesuré en années. Elle a le choix entre deux profils $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ relatifs aux taux de débit de pétrole, mesurés en barils par an. Les deux profils d'extraction s'étalent sur $\boldsymbol{10}$ ans, avec $\boldsymbol{f(t) = 10t^2 - t^2}$ et $\boldsymbol{g(t) = t^3 - 20t^2 + 100t}$ pour $\boldsymbol{t}$ dans $[\boldsymbol{0, 10}]$.

a) Tracez les deux profils dans un même repère.

b) Montrez que $\boldsymbol{\int_0^t g(\tau)\, d\tau \geq \int_0^t f(\tau) d\tau}$, quel que soit $\boldsymbol{t}$ dans $[\boldsymbol{0, 10}]$.

c) La compagnie vend son pétrole au prix unitaire $\boldsymbol{P(t) = 1 + \frac{1}{t+1}}$. Selon chaque profil, les revenus totaux sont alors donnés par $\int_0^{10} \boldsymbol{P(t)\, f(t) dt}$ et $\int_0^{10} \boldsymbol{P(t)\, g(t) dt}$ respectivement. Calculez ces intégrales. Lequel des deux profils génère le revenu le plus élevé ?

Chapitre 07

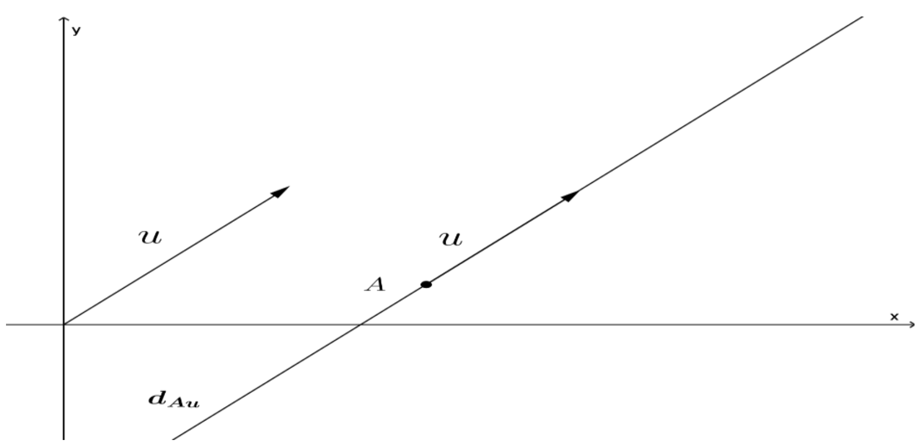
Les Fonctions de Plusieurs Variables

7.1 Les fonctions de deux variables

7.1.1 Rappels sur le plan, Éléments de topologie

Définition. Droite passant par $\boldsymbol{A}$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{U}$.

Soient $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}/\{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$. On appelle droite passant par $\boldsymbol{A}$ et de vecteur directeur $\boldsymbol{U}$, et on note $\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{U}}$, l'ensemble des points du plan de la forme $\mathbf{M} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{U}$ où $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

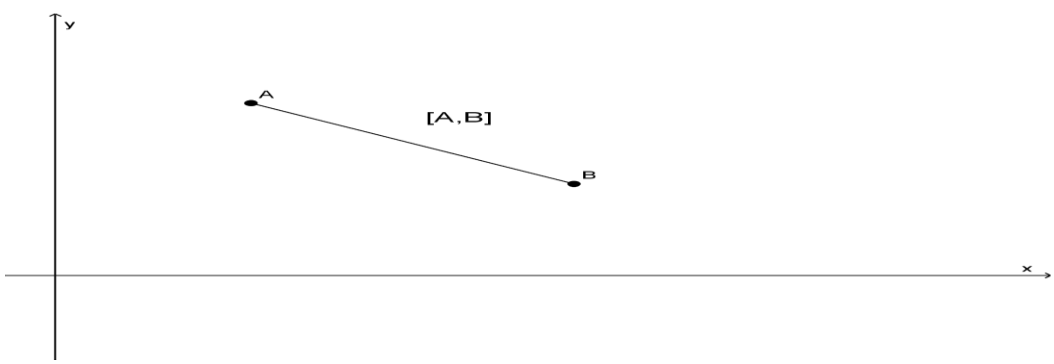


Remarque. Notons $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ et $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Pour tout $\mathbf{M} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, on a :

$$\mathbf{M} \in \boldsymbol{d}_{A,U} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{v} \end{cases}$$

Définition. Segment $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$

Soient $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. On appelle segment $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ l'ensemble des points du plan de la forme $\mathbf{M} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{A} + \boldsymbol{t}\boldsymbol{B}$ où $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.



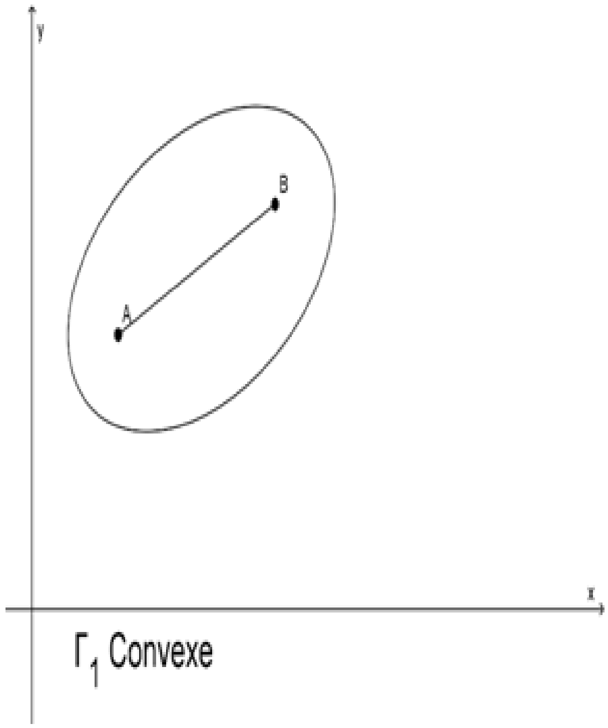
Remarques.

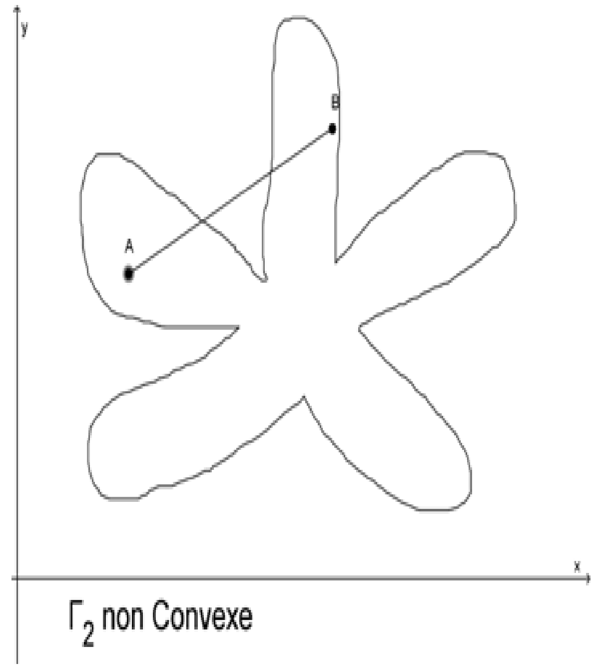
1. On a $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}]$.
2. Notons $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{a}_{\mathbf{2}})$ et $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{b}_{\mathbf{2}})$. Pour tout $\mathbf{M} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, on a :

$$\mathbf{M} \in [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}] / \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}} - \boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{b}_{\mathbf{1}} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{b}_{\mathbf{2}} - \boldsymbol{a}_{\mathbf{2}}) = (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{a}_{\mathbf{2}} + \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{b}_{\mathbf{2}} \end{cases}$$

Définition. Partie convexe.

Soit $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. On dit que $\boldsymbol{\Gamma}$ est **convexe** lorsque pour tout couple $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \in \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{2}}$, on a : $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \subset \boldsymbol{\Gamma}$.





Exemple.

Montrons que le quart de plan $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbb{R}_+^{\mathbf{2}}$ est convexe.

Soient $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$ et $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2})$ deux points quelconques de $\boldsymbol{\Gamma}$. Pour tout $\mathbf{M} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$**,** il existe $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ tel que :

$$\boldsymbol{x} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{b_1} \text{ et } \boldsymbol{y} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{t})\boldsymbol{a_2} + \boldsymbol{t}\,\boldsymbol{b_2}.$$

Or $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont dans $\boldsymbol{\Gamma}$ donc $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_1} et\ \boldsymbol{b_2}$ sont positifs. De plus $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ donc $\boldsymbol{t}$ et $\mathbf{1} - \boldsymbol{t}$ sont positifs. Donc $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$, c'est-à-dire $\mathbf{M} \in \boldsymbol{\Gamma}$.

Donc $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] \subset \boldsymbol{\Gamma}$ et par conséquent $\boldsymbol{\Gamma}$ est convexe.

Définition. Produit scalaire.

Soient $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \in \mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. On appelle produit scalaire de $\boldsymbol{X}$ et de $\boldsymbol{Y}$, et on note $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle$**,** le réel :

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \boldsymbol{x_1 y_1} + \boldsymbol{x_2 y_2}.$$

Proposition. Propriétés élémentaires du produit scalaire.

Pour tous $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$ dans $\mathbb{R}^2$, et $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\mu}$ dans $\mathbb{R}$:

- $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} \rangle$.
- $\langle \boldsymbol{\lambda X} + \boldsymbol{\mu Y}, \boldsymbol{Z} \rangle = \boldsymbol{\lambda} \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z} \rangle + \boldsymbol{\mu} \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \rangle$.
- $\langle \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{\lambda X} + \boldsymbol{\mu Y} \rangle = \boldsymbol{\lambda} \langle \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X} \rangle + \boldsymbol{\mu} \langle \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Y} \rangle$.
- $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{0} \rangle = \langle \boldsymbol{0}, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{0}$.
- $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle \geq \boldsymbol{0}$.
- $\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$.

Définition . Norme euclidienne. Soit $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. On appelle norme euclidienne de $\boldsymbol{X}$, et on note $\|\boldsymbol{X}\|$ le réel positif : $\|\boldsymbol{X}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle}$.

Proposition. Pour tous $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, on a :

- $\|\boldsymbol{X}\| = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$.
- $\|\boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{X}\| = |\boldsymbol{\lambda}| \|\boldsymbol{X}\|$.

Proposition. Pour tous $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\|\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}\|^{\mathbf{2}} = \|\boldsymbol{X}\|^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle + \|\boldsymbol{Y}\|^{\mathbf{2}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}\|^{\mathbf{2}} = \langle \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \rangle &= \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle + \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle + \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} \rangle + \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle \\ &= \|\boldsymbol{X}\|^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle + \|\boldsymbol{Y}\|^{\mathbf{2}} \text{ car } \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X} \rangle. \end{aligned}$$

Définition. Partie bornée.

Soit $\boldsymbol{\Gamma} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. On dit que $\boldsymbol{\Gamma}$ est **bornée** lorsqu'il existe $\mathbf{M} \geq \mathbf{0}$ tel que :

$$\forall\, \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{\Gamma}, \|\boldsymbol{X}\| \leq \mathbf{M}.$$

Définition. Distance euclidienne. Soient $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. On appelle distance euclidienne entre $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$, et on note $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, le réel positif :

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}\|.$$

Remarque. D'après les propriétés de la norme, pour tous $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \text{ et } \boldsymbol{d}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}.$$

Théorème. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour tous $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ et $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, on a :

$$|\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{X}\| \,.\, \|\boldsymbol{Y}\|,$$

avec égalité si et seulement si $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ sont proportionnels :

$$|\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle| = \|\boldsymbol{X}\| \,.\, \|\boldsymbol{Y}\| \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{Y} \text{ ou } \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{X}.$$

Remarque. l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit également :

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle^{\mathbf{2}} \leq \|\boldsymbol{X}\|^{\mathbf{2}}.\|\boldsymbol{Y}\|^{\mathbf{2}} \text{ ou } \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle^{\mathbf{2}} \leq \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle \langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y} \rangle.$$

Théorème. Inégalité triangulaire. Pour tous $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{Z}$ dans $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\|\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}\| \leq \|\boldsymbol{X}\| + \|\boldsymbol{Y}\| \text{ et } \boldsymbol{d}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}) \leq \boldsymbol{d}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}).$$

7.1.2 Fonctions définies sur $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, continuité

Définition. Fonction réelle de deux variables.

On appelle fonction réelle de deux variables toute fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, c'est-à-dire toute fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple.

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x^2+y^2 \end{cases} \qquad g:\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \ln(xy)+\dfrac{1}{x+y} \end{cases}$$

Exemple économique 01. Dans une étude sur la demande en lait de R. Frisch et T. Haavelmo figure la relation

$$x = A\frac{m^{2,08}}{p^{1,5}} \ (\ \mathbf{A} \text{ est une constante strictement positive}),$$

où x est la consommation de lait, p le prix relatif du lait et m le revenu par famille. Cette expression définit x comme une fonction de p et m. Selon cette formule, la consommation en lait augmente en même temps que le revenu et diminue lorsque le prix du lait monte, ce qui semble logique.

Exemple économique 02. Une fonction de deux variables très fréquente dans les modèles économiques est :

$$F(x,y) = Ax^a\, y^b \quad ,(A, a \text{ et } b \text{ sont des constantes}).$$

On suppose d'habitude que F n'est définie que pour $x > 0$ et $y > 0$. Ce type de fonction F est appelé fonction de Cobb-Douglas. Notez que la fonction de l'exemple **01** est de ce type, car on peut l'écrire $x = Ap^{-1,5}\,.\,m^{2,08}$.

La plupart du temps, la fonction de Cobb-Douglas est utilisée pour décrire certains procédés de production. Dans ce contexte, x et y sont appelés facteurs de production, tandis que $\boldsymbol{F(x,y)}$, fournissant le nombre d'unités produites (output), est alors appelée fonction de production.

Définition. Graphe d'une fonction réelle de deux variables.

Soit $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. On appelle graphe de $\boldsymbol{f}$ l'ensemble :

$$\boldsymbol{\{}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \setminus (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D} \text{ et } \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\}}.$$

Remarque. le graphe d'une fonction d'une variable est une courbe dans $\mathbb{R}^2$; celui d'une fonction de deux variables est une surface dans $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$.

Définition. Plan affine de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$.

On appelle plan affine de $\mathbb{R}^3$ toute partie **H** de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ ayant une équation de la forme :

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\{}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \setminus \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} = \boldsymbol{d}\ \boldsymbol{\}}$$

où $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$ sont des constantes réelles telles que $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ ne soient pas toutes nulles.

Remarque. Cette définition est à rapprocher de celle d'une droite affine dans $\mathbb{R}^2$. Une droite affine dans $\mathbb{R}^2$ est une partie $\boldsymbol{D}$ de $\mathbb{R}^2$ ayant une équation de la forme :

$$\boldsymbol{D} = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} / \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c}\right\}$$

où $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont des constantes réelles telles que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne soient pas toutes les deux nulles.

Définition. Fonction affine de deux variables.

On appelle fonction affine de deux variables toute fonction de la forme :

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c}$$

où $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ sont trois constantes réelles.

Proposition. Le graphe d'une fonction affine de deux variables est un plan affine de $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$.

Définition. Courbes de niveau.

Soit $\boldsymbol{f}$ définie sur $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout réel $\boldsymbol{\lambda}$, on appelle courbe de niveau $\boldsymbol{\lambda}$ l'ensemble : $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\lambda}\}$.

Exemple.

Considérons une fonction affine $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \longmapsto \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{c}$ où $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$. La courbe de niveau $\boldsymbol{\lambda}$ de $\boldsymbol{f}$ est l'ensemble des $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ tels que $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{c}$: il s'agit d'une droite affine de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

Définition. Fonction continue en un point de Ω.

Soient $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \in \Omega$, Ω désignera une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

On dit que f est continue en A lorsque, pour tout $\mathcal{E} > 0$, il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall X \in B(A,r) \cap \Omega, |f(X) - f(A)| < \varepsilon.$$

Définition. Fonction continue sur Ω.

Soit $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur Ω lorsqu'elle est continue en tout point A de Ω.

Théorème. Opérations algébriques sur les fonctions continues.

Soient f et g deux fonctions définies sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}$. Ω désignera une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

- Pour tout $A \in \Omega$, si f et g sont continues en A alors $f + g$, λf et fg sont continues en A.

  Si de plus $g(A) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en **A**.

- Si f et g sont continues sur Ω alors $f + g$, λf et fg sont continues sur Ω.

  Si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur Ω.

Théorème. Composition à gauche par une fonction continue d'une variable .

Ω désignera une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Soient $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable, où $\boldsymbol{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\Omega}) \subset \boldsymbol{I}$.

- Si $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\Omega}$ et si $\boldsymbol{\varphi}$ est continue en $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$ alors $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{A}$.
- Si $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\boldsymbol{\Omega}$ et si $\boldsymbol{\varphi}$ est continue sur $\mathbf{I}$ alors $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{f}$ est continue sur $\boldsymbol{\Omega}$.

Définition. Fonctions polynomiales et rationnelles de deux variables.

- On appelle fonction polynomiale de deux variables, toute fonction de la forme :

$$\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \longmapsto \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}} \,.\, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}}$$

où les $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$ sont des nombres réels, et les $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}$ et les $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{k}}$ des entiers naturels.

- On appelle fonction rationnelle de deux variables tout quotient de fonctions polynomiales de deux variables.

Exemples.

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \longmapsto \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{8}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}$ est une fonction polynomiale de deux variables.
2. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \setminus \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\} \longmapsto \frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathbf{4}}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}$ est une fonction rationnelle

   de deux variables.

Théorème. Exemples fondamentaux de fonctions continues.

- Les fonctions polynomiales de deux variables sont continues sur $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.
- Les fonctions rationnelles de deux variables sont continues sur leur ensemble de définition.

- La fonction norme $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2} \longmapsto \|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{2}+\boldsymbol{y}^{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{2}$.

Exemples.

1. Montrons que $\boldsymbol{f}:(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \ln(2\boldsymbol{x}^{2}+3\boldsymbol{y}^{4})$ est continue sur $\boldsymbol{\Omega}=\mathbb{R}^{2} \backslash\{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$.
   $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto 2\boldsymbol{x}^{2}+3\boldsymbol{y}^{4}$ est continue sur $\boldsymbol{\Omega}$, car polynomiale, et à valeurs dans $]\mathbf{0},+\infty[$.
   Or "$\ln$" est continue sur $]\mathbf{0},+\infty[$, donc $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\boldsymbol{\Omega}$ en tant que composée de fonctions continues.
2. Etudions la continuité de $\boldsymbol{g}:(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \cos\left(\frac{3xy+x^{2}y^{3}}{2x^{2}-xy}\right)$.
   On remarque que : $2\boldsymbol{x}^{2}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}(2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{x}$.
   On pose donc $\boldsymbol{V}=\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2} \backslash \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{y} \neq 2\boldsymbol{x}\}$ et on montre la continuité de $\boldsymbol{g}$ sur $\boldsymbol{V}$.
   $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \left(\frac{3xy+x^{2}y^{3}}{2x^{2}-xy}\right)$ est une fonction rationnelle définie sur $\boldsymbol{V}$. Elle est donc continue sur $\boldsymbol{V}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   Or "$\cos$" est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\boldsymbol{g}$ est continue sur $\boldsymbol{V}$ en tant que composée de fonctions continues.

Propriétés des fonctions continues.

- Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{I}$ une partie de $\mathbb{R}$, on appelle image réciproque de $\boldsymbol{I}$ par $\boldsymbol{f}$ l'ensemble
  $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{I})=\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2} / \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{I}\}$.
- On appelle intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$,où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des réels tels que $-\infty \leq \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b} \leq +\infty$.

• On appelle intervalle fermé de $\mathbb{R}$, tout intervalle de l'un des trois types suivants :

- Les segments $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des réels tels que $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{b}$.
- Les demi-droites de la forme $[\boldsymbol{a}, +\infty[$ ou $]-\infty, \boldsymbol{a}]$,où $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}$.

Théorème. Soit $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ alors l'image réciproque par $\boldsymbol{f}$ de tout intervalle ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

Exemple.

La fonction $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. On en déduit que :

- L'ensemble $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} / \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]\mathbf{0}, +\infty[$ par la fonction $\boldsymbol{f}$.
- L'ensemble $\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} / \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \geq \mathbf{1}\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, car c'est l'image réciproque de l'intervalle fermé $[\mathbf{1}, +\infty[$ par la fonction $\boldsymbol{f}$.

Théorème. Soient $\boldsymbol{C}$ une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, et $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur un ouvert contenant $\boldsymbol{C}$. Alors $\boldsymbol{f}$ est bornée sur $\boldsymbol{C}$ et elle y atteint ses bornes, autrement dit il existe $\mathbf{M_1} \in \boldsymbol{C}$ et $\mathbf{M_2} \in \boldsymbol{C}$ tels que :

$$\forall \mathbf{M} \in \boldsymbol{C}, \boldsymbol{f}(\mathbf{M_1}) \leq \boldsymbol{f}(\mathbf{M}) \leq \boldsymbol{f}(\mathbf{M_2}).$$

Exemple.

$\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \longmapsto \mathbf{2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} - \mathbf{7}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{3}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. La boule fermée $\overline{\boldsymbol{B}}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ est une partie de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ fermée, bornée et non vide.

Donc $\boldsymbol{f}$ est bornée $\overline{\boldsymbol{B}}(\mathbf{0},\mathbf{1})$ et elle y atteint ses bornes : Il existe $\mathbf{M_1} \in \overline{\boldsymbol{B}}(\mathbf{0},\mathbf{1})$ **et** $\mathbf{M_2} \in \overline{\boldsymbol{B}}(\mathbf{0},\mathbf{1})$ tels que :

$$\forall \boldsymbol{X} \in \overline{\boldsymbol{B}}(\mathbf{0},\mathbf{1}), \boldsymbol{f}(\mathbf{M_1}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{f}(\mathbf{M_2}).$$

7.1.3 Calcul differential

On rappelle que $\boldsymbol{\Omega}$ désigne une partie ouverte de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$.

Définition. Dérivées partielles.

Soient $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{\Omega}$.

- Si la fonction $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$ admet une dérivée en $\boldsymbol{a}$, cette dérivée est appelée dérivée partielle de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{A}$ selon $\boldsymbol{x}$, et elle est notée :
$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}) \text{ ou } \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$
- Si la fonction $\boldsymbol{y} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})$ admet une dérivée en $\boldsymbol{b}$, cette dérivée est appelée dérivée partielle de $\boldsymbol{f}$ en A selon $\boldsymbol{y}$, et elle est notée :
$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{A}) \text{ ou } \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

Exemple 01.

Calculez les dérivées partielles des fonctions

(a) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}$.

(b) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}$.

Solution.

(a) On trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + 1 \text{ (y est tenue constante).}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y \quad \text{(x est tenue constante).}$$

(b) Pour cette fonction, il faut faire appel à la règle de dérivation du quotient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

Il y a encore d'autres notations en usage pour désigner les dérivées partielles de $Z = f(x,y)$.

Les plus courantes sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial x} = Z'_x = f'_x(x,y) = f'_1(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Z}{\partial y} = Z'_y = f'_y(x,y) = f'_2(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

Exemple économique.

On a envisagé la fonction $x = Ap^{-1,5}m^{2,08}$ à l'exemple **7.1.2.1.** Calculez les dérivées partielles de la fonction x par rapport aux variables p et m et étudiez leurs signes.

Solution. on trouve

$\dfrac{\partial x}{\partial p}(p,m) = -1,5A.p^{-2,5}.m^{2,08}$ et $\dfrac{\partial x}{\partial m}(p,m) = 2,08Ap^{-1,5}m^{1,08}$.

Comme A, p et m sont strictement positives,

$$\frac{\partial x}{\partial p}(p,m) < 0 \;\; et \;\; \frac{\partial x}{\partial m}(p,m) > 0.$$

Ces signes sont en accord avec le commentaire qui terminait l'exemple.

Définition. Définition formelle des dérivées partielles.

La définition formelle de la dérivée partielle est déduite de façon assez évidente de la définition de la dérivée des fonctions d'une seule variable.
Si $Z = f(x,y)$ et si y est considéré comme une constante, on pose

$g(x) = f(x,y)$ et la dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à **x** est simplement $g'(x)$. Or, selon la définition,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \text{ . } \textbf{comme } f'_x(x,y) = g'(x),$$

Il suit :

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \text{ .} \qquad (1)$$

De même :

$$f'_y(x,y) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k} \qquad (2)$$

Lorsque la limite (1) (ou (2)) n'existe pas, on dit que $f'_x(x, y)$ (ou $f'_y(x, y)$)

n'existe pas, ou que Z n'est pas différentiable par rapport à x ou à y au point considéré. Par exemple, la fonction $f(x, y) = |x| + |y|$ n'est pas différentiable au point $(x, y) = (0, 0)$.

• Si f a des dérivées partielles par rapport à x et à y continués en un point, elle est dite différentiable en ce point.

Si h est petit en valeur absolue, on tire de (1) l'approximation :

$$f'_x(x, y) \approx \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \qquad (3)$$

De même, si k est petit en valeur absolue :

$$f'_y(x, y) \approx \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} \qquad (4)$$

Ces approximations s'interprètent de la façon suivante :

(a) La dérivée partielle $f'_x(x, y)$ est à peu près égale à la variation de $f(x, y)$ par unité d'accroissement de x,y étant constante. **(5)**

(b) La dérivée partielle $f'_y(x, y)$ est à peu près égale à la variation de $f(x, y)$ par unité d'accroissement de y, x étant constante.

Exemple économique.

Soit $y = F(k, L)$ le nombre d'unités produites lorsque k unités de capital et L unités de travail sont injectées dans le procédé de production. Quelle est l'interprétation en termes économiques de $F'_k(100, 50) = 5$**?**

Solution

D'après ($\boldsymbol{5}$), $\boldsymbol{F'_k(100, 50) = 5}$ signifie que, partant de $\boldsymbol{k = 100}$ et tenant le travail bloqué à $\boldsymbol{50}$, la quantité produite augmente de $\boldsymbol{5}$ unités par unité supplémentaire de $\boldsymbol{k}$.

Définition. Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Pour $\boldsymbol{Z = f(x, y)}$, $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}}$ **et** $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ sont appelées les dérivées partielles premières

ou d'ordre un. Ces dérivées partielles sont, en général, à nouveau des fonctions de deux variables que l'on peut envisager de dériver partiellement par rapport à $\boldsymbol{x}$ et à $\boldsymbol{y}$, à condition que ces nouvelles dérivées partielles existent. Elles sont appelées dérivée partielles secondes ou d'ordre deux de $\boldsymbol{f(x, y)}$ et sont au nombre de quatre. Elles sont notées

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemple.

Soit la fonction : $\boldsymbol{f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2}$

1. Les dérivées partielles premières sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y + 2xy^2 + 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2x^2y + 2y.$$

2. Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy + 2y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2 + 2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4xy = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y).$$

7.2 Les fonctions de plus de deux variables.

7.2.1 Définition.

Définition. une fonction f de n variables $x_1, \dots\dots\dots\dots, x_n$ dont le domaine de définition est D est une régle qui associe à chaque **n**-uplet $(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n)$ de D un unique nombre réel, noté $f(x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n)$.

Exemple économique 01.

La demande en sucre aux États-Unis entre **1929** et **1935** peut, selon T.w. Schultz, être décrite approximativement par la formule

$$x = 108{,}83 - 6{,}0294\,P + 0{,}164\,w - 0{,}4217\,t.$$

Ici x, la demande en sucre, est une fonction de trois variables :
P (le prix du sucre), w (un indice de production) et t (la date pour laquelle $t = 0$ correspond à **1929**).

7.2.2 Continuité.

Définition. toute fonction de n variables qui peut être construite par addition, soustraction, multiplication, division ou composition de fonction continues est continue là où elle est définie.

Exemple.

Sur quels domaines de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$ respectivement les fonctions suivantes sont-elles continues ?

(a) $f(x, y, z) = x^2y + 8x^2y^5z - xy + 8z$

(b) $g(x, y) = \frac{xy-3}{x^2+y^2-4}$

Solution.

(a) En tant que somme de produits de puissances positives, f est définie et continue pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

(b) La fonction g est définie et continue pour tout (x, y) de son domaine de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$ duquel sont retirés les (x, y) tels que $x^2 + y^2 = 4$, car ils annulent le dénominateur.

7.2.3 Les dérivées partielles des fonctions de plus de deux variables.

Définition. Si $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x})$, alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i = 1, 2, \ldots \ldots, n$ désigne la dérivée partielle de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par rapport à x_i quand toutes les autres variables $x_j (j \neq i)$ sont tenues constantes.

À condition qu'elles existent toutes, il y a n dérivées partielles premières, une par variable.

Les autres notations en usage sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial Z}{\partial x_i} = {\partial Z}/{\partial x_i} = Z_i^{'} = f_{x_i}^{'}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Exemple. Calculez les trois dérivées partielles premières de :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2 + x_3^3.$$

Solution. On obtient :

$$f_{x_1}^{'}(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + x_2^3 \ , \qquad f_{x_2}^{'}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2^2 - 2x_2x_3^2 \ ,$$

$$f_{x_3}^{'}(x_1, x_2, x_3) = -2x_2^2x_3 + 3x_3^2 \ .$$

Définition. Dérivées partielles d'ordre deux.

Chacune des $\boldsymbol{n}$ dérivées partielles premières peut à son tour être dérivée par rapport aux $\boldsymbol{n}$ variables. Ce sont les dérivées partielles secondes, notées :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} = Z_{ij}^{''} = f_{x_i\, x_j}^{''},$$

et dites mixtes lorsque $i \neq j$. Elles sont donc au nombre de n^2.

On dispose ces n^2 dérivées partielles secondes dans un tableau carré de $\boldsymbol{n}$ lignes et $\boldsymbol{n}$ colonnes, appelé matrice $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})$.

$$H(X) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}^{''}(X) & f_{x_1x_2}^{''}(X) & \cdots & f_{x_1x_n}^{''}(X) \\ f_{x_2x_1}^{''}(X) & f_{x_2x_2}^{''}(X) & \cdots & f_{x_2x_n}^{''}(X) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}^{''}(X) & f_{x_nx_2}^{''}(X) & & f_{x_nx_n}^{''}(X) \end{pmatrix} \text{(matrice hessienne)}$$

Exemple. Calculez la matrice hessienne de :

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2 + x_3^3$$

Solution

La matrice hessienne :

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & f''_{x_2x_3} \\ f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 3x_2^2 & 0 \\ 3x_2^2 & 6x_1x_2 - 2x_3^2 & -4x_2x_3 \\ 0 & -4x_2x_3 & -2x_2^2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

Définition. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ **.** On dit que f est de classe C^2 sur Ω si pour tout couple **(i,j)** d'éléments de $[\![1, n]\!]$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ est définie et continue sur Ω.

Théorème de Schwarz.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ et **A** un point de **Ω.**

i et **j** sont deux éléments de $[\![1, n]\!]$.

On suppose que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$ sont définies sur une boule de centre **A** et continue en **A.**

Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(A) \qquad , i \neq j$$

Corollaire.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω :

$$\forall(\mathrm{i}\,,\mathrm{j}) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \colon \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}.$$

Définition. Définition formelle des dérivées partielles.

Soit $Z = f(x_1, \dots \dots, x_n)$, alors, si toutes les variables x_j autres que x_i sont tenues constantes, $\partial Z/\partial x_i = g'(x_i)$ où
$g(x_i) = f(x_1, x_2, \dots \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Or, en suivant la définition de $g'(x_i)$, on a:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

Au cas où cette limite n'existe pas, on dit que $\partial Z/\partial x_i$ n'existe pas, ou que $\mathbf{Z}$ n'est pas dérivable par rapport à x_i au point considéré.

Comme en **(7.1.3.5)** on a les approximations grossières suivantes :

La dérivée partielle $\partial Z/\partial x_i$ est à peu près égale à la variation par unité de la fonction :

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, \dots, x_n)$$

Causée par un accroissement de x_i, pendant que toutes les autres variables x_j ($j \neq i$) sont maintenues constantes.

En notation symbolique, pour h petit, on a :

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) \approx \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f\big(x_1, \dots, x_{(i-1)}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\big)}{h}$$

7.2.4 Des applications économiques.

Cette section est consacrée aux applications économiques des dérivées partielles.

Exemple.

Soit la fonction de production agricole $Y = F(K, L, T)$ où Y représente le nombre d'unités produites, K la quantité de capital investi, L le travail utilisé et T l'étendue exploitée. La dérivée partielle $\partial Y/\partial K = F'_K$ est appelée **productivité marginale du capital**. C'est le taux de variation de la quantité produite Y par rapport aux variations de K en supposant inchangées les quantités de L et T. De même, $\partial Y/\partial L = F'_L$ et $\partial Y/\partial T = F'_T$ sont respectivement la **productivité marginale du travail** et **de l'étendue**. Si, par exemple, la valeur de K est exprimée en dollars et si $\partial y/\partial K = 5$, cela signifie qu'une augmentation de capital de h unités provoquerait une augmentation d'environ $5h$ unités de la quantité produite.

Prenons le cas particulier où F est la fonction de Cobb-Douglas.

$$F(K, L, T) = Ak^a L^b T^c$$

$$(A, a, b \ et \ c \text{ sont des constantes strictement positives}).$$

Déterminez les productivités marginales et les dérivées partielles secondes. Etudiez leurs signes.

Solution. Les productivités marginales sont :

$$F_K^{'} = A\, a\, K^{a-1}L^bT^c, \qquad F_L^{'} = A\, b\, K^aL^{b-1}T^c, \quad F_T^{'} = A\, c\, K^a\, L^b\, T^{c-1}.$$

Si K, L et T sont toutes strictement positives, les productivités marginales le sont aussi. Une augmentation de capital, de travail ou de l'étendue des terres exploitées va donc faire croître le nombre d'unités produites.

Les dérivées partielles secondes mixtes sont :

$$F_{K\,L}^{''} = A\, a\, b\, K^{a-1}\, L^{b-1}\, T^c \quad , \qquad F_{K\,T}^{''} = A\, a\, c\, K^{a-1}\, L^b\, T^{c-1},$$
$$F_{L\,T}^{''} = A\, b\, c\, K^a\, L^{b-1}\, T^{c-1}.$$

Vérifiez que les dérivations effectuées dans l'autre ordre $F_{LK}^{''}$, $F_{TK}^{''}$ et $F_{TL}^{''}$ conduisent aux mêmes expressions. Notez que ces dérivées partielles sont strictement positives. Ces facteurs, prix deux à deux, sont dits complémentaires, car l'augmentation de l'un fait croître la productivité marginale de l'autre.

Les autres dérivées partielles secondes sont :

$$F_{KK}^{''} = A\, a(a-1)K^{a-2}\, L^b\, T^c \quad , \qquad F_{LL}^{''} = A\, b(b-1)K^a\, L^{b-2}\, T^c$$
$$F_{TT}^{''} = A\, c\, (c-1)K^a\, L^b\, T^{c-2}.$$

C'est ainsi que $F_{KK}^{''}$ est la dérivée partielle de la productivité marginale du capital $(F_K^{'})$ par rapport à K.

Si $a < 1$. Alors $F_{KK}^{''} < 0$ et la productivité marginale du capital diminue, c'est-à-dire qu'une légère augmentation du capital investi aura pour effet de diminuer la productivité marginale du capital. Cela veut dire que même de légères augmentations du capital vont faire croître la production $(F_K^{'} > 0)$, mais à un rythme qui diminue $(F_{KK}^{''} < 0)$. De même pour le travail (si $b < 1$) et pour les étendues cultivées (si $c < 1$).

7.3 Optimisation à plusieurs variables

7.3.1 Deux variables. Extrema Globaux

Définition. Soit **U** un ouvert, $\boldsymbol{f}$ une fonction de $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

- On dit que $\boldsymbol{f}$ admet un maximum global en **A** si et seulement si
$$\forall \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{U}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}).$$
- On dit que $\boldsymbol{f}$ admet un minimum global en **A** si et seulement si
$$\forall \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{U}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}).$$

Remarque. L'étude d'existence d'extrema global sur un domaine qui peut être non borné n'est pas facile à faire.

Exemple. La fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2$ admet un minimum global en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Car $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}\ \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2$.Mais

$\lim_{\boldsymbol{x} \to +\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = +\infty$ donc on a pas de maximum global.

7.3.2 Deux variables.Extrema Locaux

Soit $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **.** On suppose $\boldsymbol{f}$ de classe C^2, c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\mathbf{2}$ existent et sont continues.

Définition.

On dit que f admet en $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ un minimum (resp. maximum) local s'il existe $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ tel que : $\forall\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{B}(\ (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\ , \boldsymbol{\varepsilon})$ alors $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ (resp. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$.

Proposition. Si $\boldsymbol{f}$ admet un extremum local en $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ **alors**

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad , \qquad f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Définition. Si en (x_0, y_0) on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \text{ (conditions du premier ordre)}$$

on dit que (x_0, y_0) est un **point critique** de f ou un **point stationnaire** de f.

Remarque.

Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 01. la fonction f est définie pour tout (x, y) par :

$$f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158.$$

En supposant que f atteint un maximum, déterminez ses coordonnées.

Solution. les coordonnées (x, y) d'un point stationnaire doivent satisfaire aux conditions du premier ordre que voici :

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -4x - 2y + 36 = 0 \\ f'_y(x, y) = -2x - 4y + 42 = 0 \end{cases}$$

Ce système de deux équations du premier degré en x et y n'admet que la solution $(x, y) = (5, 8)$. Puisqu'il est supposé que la fonction a un maximum, c'est en ce point qu'il se produit. La fonction y prend la valeur $f(5, 8) = 100.$

Exemple 02. Une entreprise fabrique deux modèles A et B d'un bien. Le coût journalier de production de x unités de A et y unités de B est donné par la fonction :

$$C(x, y) = 0,04x^2 + 0,01xy + 0,01y^2 + 4x + 2y + 500.$$

Si l'entreprise vend toute sa production au prix de $\mathbf{15}$ par unité du modèle $\boldsymbol{A}$ et $\mathbf{9}$ par unité du modèle **B**, déterminez les niveaux $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de production journalière qui rendent le profit maximal.

Solution. le profit journalier est donné par :

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{15}\boldsymbol{x} + \mathbf{9}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \text{ou}$$

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{15}\boldsymbol{x} + \mathbf{9}\boldsymbol{y} - \mathbf{0,04}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{0,01}\boldsymbol{xy} - \mathbf{0,01}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{500}$$

$$= -\mathbf{0,04}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{0,01}\boldsymbol{xy} - \mathbf{0,01}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \mathbf{11}\boldsymbol{x} + \mathbf{7}\boldsymbol{y} - \mathbf{500}.$$

Les valeurs strictement positives de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ qui rendent le profit maximal doivent satisfaire simultanément aux deux équations.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\mathbf{0,08}\boldsymbol{x} - \mathbf{0,01}\boldsymbol{y} + \mathbf{11} = \mathbf{0}\,,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\mathbf{0,01}\boldsymbol{x} - \mathbf{0,02}\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} + \mathbf{7} = \mathbf{0}\,.$$

Le système formé par ces deux équations du premier degré n'a qu'une seule solution, à savoir $\boldsymbol{x} = \mathbf{100},\ \boldsymbol{y} = \mathbf{300}$.

Le profit y est égal à $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{100},\mathbf{300}) = \mathbf{1100}$.

Théorème. Test de la dérivée seconde pour les extrema locaux.

Soit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ une fonction de classe $\boldsymbol{C}^{\mathbf{2}}$ sur un domaine $\boldsymbol{S}$ et soit $(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}},\boldsymbol{y}_{\mathbf{0}})$ un point stationnaire de $\boldsymbol{S}$. On pose :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{xx}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}},\boldsymbol{y}_{\mathbf{0}})\ ,\ \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{xy}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}},\boldsymbol{y}_{\mathbf{0}}) \text{ et } \boldsymbol{C} = \boldsymbol{f}''_{\boldsymbol{yy}}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}},\boldsymbol{y}_{\mathbf{0}}).$$

(a) Si $\boldsymbol{A} < 0$ et $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{B}^{\mathbf{2}} > 0$, alors $\boldsymbol{f}$ admet en $(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}},\boldsymbol{y}_{\mathbf{0}})$ un maximum local.

(b) Si $\boldsymbol{A} > 0$ **et** $\boldsymbol{AC - B^2} > 0$, alors $\boldsymbol{f}$ admet en $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ un minimum local.

(c) Si $\boldsymbol{AC - B^2} < 0$, alors $\boldsymbol{f}$ présente en $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ un point-selle.

(d) Si $\boldsymbol{AC - B^2 = 0}$, on ne peut conclure.

Exemple 01.

Déterminez les points stationnaires et identifiez-les pour

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2 + 8}.$$

Solution. les points stationnaires sont les solutions communes aux deux équations :

$$\boldsymbol{f'_x(x,y) = 3x^2 - 2x = 0} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{f'_y(x,y) = -2y = 0.}$$

La première équation a comme solutions $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{x = 2/3}$ et la deuxième

$\boldsymbol{y = 0}$. Les seuls points stationnaires sont donc $(\boldsymbol{0,0})$ et $(\boldsymbol{2/3, 0})$.

Ensuite, $\boldsymbol{f''_{xx}(x,y) = 6x - 2}$, $\boldsymbol{f''_{xy}(x,y) = 0}$ et $\boldsymbol{f''_{yy}(x,y) = -2}$.

Pour établir la nature des points stationnaires, il est commode de dresser un tableau comme celui-ci-dessous (avec $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ définie comme dans le théorème)

(x,y)	A	B	C	$AC - B^2$	Type de point
$(0,0)$	-2	0	-2	4	Maximum local
$\left({}^2/_3, 0\right)$	2	0	-2	-4	Point-selle

Exemple 02. "maximisation du profit".

Soit $\boldsymbol{Q = F(K, L)}$ une fonction de production qui fournit la quantité produite selon le capital $\boldsymbol{K}$ et le travail $\boldsymbol{L}$ injectés. Le prix unitaire du produit est $\boldsymbol{p}$, le coût (ou loyer) par unité de capital est $\boldsymbol{i}$ et le salaire $\boldsymbol{w}$, les constantes $\boldsymbol{p, i}$ et $\boldsymbol{w}$ sont toutes strictement positives. Le profit $\boldsymbol{\pi}$ qui résulte de la production et de la vente de $\boldsymbol{F(K, L)}$ unités est alors donné par la fonction :

$$\boldsymbol{\pi(K, L) = pF(K, L) - iK - wL} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . (\mathbf{1})$$

Si $\boldsymbol{F}$ est différentiable et si $\boldsymbol{\pi}$ atteint un maximum dans l'ensemble des valeurs strictement positives de $\boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{L}$, alors les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi'_k(K, L) = pF'_k(K, L) - i = 0} \\ \boldsymbol{\pi'_l(K, L) = pF'_L(K, L) - w = 0} \end{cases} \dots \dots \dots \dots \dots \dots (*)$$

Une condition nécessaire pour que le profit soit rendu maximal lorsque

$\boldsymbol{K = K^*}$ et $\boldsymbol{L = L^*}$ est donc que :

$$\boldsymbol{pF'_k(K^*, L^*) = i} \quad , \qquad \boldsymbol{pF'_L(K^*, L^*) = w} \dots \dots \dots \dots (**)$$

La première équation indique que $\boldsymbol{i}$, le coût du capital, doit être égale à la productivité marginale en valeur du capital, au prix unitaire $\boldsymbol{p}$. La deuxième équation s'interprète de façon analogue.

- Cas particulier du profit :

$$\boldsymbol{\pi(K, L) = 12K^{1/2}\, L^{1/4} - 1{,}2K - 0{,}6L.}$$

On résoudre le système des equations $\boldsymbol{\pi'_k(K, L) = 0, \pi'_l(K, L) = 0}$, on obtient

L = K = 625 est la seule solution possible.

- On montre que $\boldsymbol{\pi}$ admet un maximum au point stationnaire $\mathbf{D} = (\boldsymbol{K_0}, \boldsymbol{L_0}) = (\mathbf{625}, \mathbf{625})$.

- L'espace considéré est celui où $\boldsymbol{K} > 0$ et $\boldsymbol{L} > 0$. On calcule successivement :

$$\boldsymbol{\pi}''_{KK} = -3K^{-\frac{3}{2}}\ L^{\frac{1}{4}}\ \ ,\boldsymbol{\pi}''_{KL} = \frac{3}{2}K^{-\frac{1}{2}}\,L^{-\frac{3}{4}} \text{ et } \boldsymbol{\pi}''_{LL} = -\frac{9}{4}K^{\frac{1}{2}}\,L^{-\frac{7}{4}}.$$

Clairement, $\boldsymbol{\pi}''_{KK}(\boldsymbol{D}) < 0$, $\boldsymbol{\pi}''_{LL}(\boldsymbol{D}) < 0$ et

$$\boldsymbol{\pi}''_{KK}(\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{\pi}''_{LL}(\boldsymbol{D}) - [\boldsymbol{\pi}''_{KL}(\boldsymbol{D})]^2 = \frac{27}{4}K_0^{-1}\,L_0^{-\frac{3}{2}} - \frac{9}{4}K_0^{-1}\,L_0^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{9}{2}K_0^{-1}\,L_0^{-\frac{3}{2}} > 0$$

Le point stationnaire $\mathbf{D} = (\boldsymbol{K_0}, \boldsymbol{L_0}) = (\mathbf{625}, \mathbf{625})$ maximise donc le profit.

7.3.3 Trois variables et plus.

Définition. Soit $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction de $\boldsymbol{n}$ variables définie sur un ensemble $\boldsymbol{S}$ de $\mathbb{R}^n$.

- $\boldsymbol{f}$ atteint un maximum (global) sur $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ si

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}), \text{ pour tout } \boldsymbol{X} \text{ de } \boldsymbol{S}.$$

- $\boldsymbol{f}$ atteint un maximum sur $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{c}$ si et seulement si $-\boldsymbol{f}$ atteint un minimum sur $\boldsymbol{S}$ en $\boldsymbol{c}$.

Définition. La distance entre les points de coordonnées $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \dots\dots\dots\dots (\mathbf{1})$$

Dans le cas particulier où $\mathbf{y}$ est le vecteur nul, la formule (1) se réduit à :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

C'est la distance entre le point de coordonnées $\mathbf{x}$ et l'origine. Le nombre $\|\mathbf{x}\|$ est aussi appelé norme ou longueur du vecteur $\mathbf{x}$.

Théorème. soit la fonction f définie sur un ensemble S de $\mathbb{R}^n$ et soit $c = (c_1, \dots, c_n)$ un point de S en lequel f est différentiable. Une condition nécessaire pour qu'en c la fonction passe par un minimum ou un maximum est que c soit un point stationnaire de f, autrement dit $\mathbf{x} = c$ est une solution du système des n équations.

$$f'_{x_i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots \dots .., n \quad \text{(Conditions du premier ordre).}$$

Théorème. Théorème des Bornes atteintes.

On suppose que la fonction f est continue sur un ensemble non vide fermé et borné S de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe un point d de S en lequel f atteint un minimum et un point $\mathbf{c}$ de S en lequel f atteint un maximum, c'est-à-dire,

$$f(\mathbf{d}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(c), \text{ Quel que soit } X \text{ dans } S$$

Théorème. On suppose que $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ est définie sur un ensemble S de $\mathbb{R}^n$, que F est une fonction d'une variable définie sur l'ensemble image de f et que $c \in S$.

On définit g sur S par : $g(\mathbf{x}) = F\big(f(\mathbf{x})\big)$. On a alors les propriétés suivantes :

(a) Si F est croissante et si, en c, f passe par un maximum (minimum) sur S, alors, en c, g passe aussi par un maximum (minimum) sur S.

(b) Si F est strictement croissante, alors c rend f maximum (minimum) sur S si et seulement si c rend g maximum (minimum) sur S.

7.4 L'optimisation sous contraintes.

7.4.1 La méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Pour trouver les seules solutions possibles du problème :

maximiser (minimiser) $\boldsymbol{f(x,y)}$ sous contrainte $\boldsymbol{g(x,y)=c}$ … … … … … … . $\mathbf{(1)}$

on procède comme suit :

A) Ecrire le lagrangien :

$$\boldsymbol{L(x,y)=f(x,y)+\lambda(c-g(x,y)}, \boldsymbol{\lambda} \text{ est une constante.}$$

B) Dériver partiellement $\boldsymbol{L}$ par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ et égaler ces dérivées partielles à $\mathbf{0}$.

C) Les deux équations de **B**, jointes à la contrainte, constituent un système de trois équations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{L'_x(x,y)=f'_x(x,y)-\lambda g'_x(x,y)=0} \\ \boldsymbol{L'_y(x,y)=f'_y(x,y)-\lambda g'_y(x,y)=0} \\ \boldsymbol{g(x,y)=c \Leftrightarrow L'_\lambda(x,y)=c-g(x,y)=0} \end{cases}$$

D) Résoudre ces trois équations en les trois inconnues $\boldsymbol{x,y}$ et $\boldsymbol{\lambda}$. Les triplets $\boldsymbol{(x,y,\lambda)}$ sont des candidats à la solution et, si le problème a une solution, elle est parmi eux.

Les conditions énoncées sous **C**) sont appelées **les conditions du premier ordre** du problème $(\mathbf{1})$.

Exemple.

Une entreprise ne produit qu'un bien et veut en produire $\mathbf{30}$ unités au moindre coût. Avec $\boldsymbol{k}$ unités de capital et $\boldsymbol{L}$ unités de travail, elle peut produire $\boldsymbol{\sqrt{k}+L}$

unités. Les prix respectifs du capital et du travail sont $\mathbf{1}$ et $\mathbf{20}$. Le problème posé s'énonce :

minimiser $\boldsymbol{k+20L}$ sous contrainte $\sqrt{\boldsymbol{k}}+\boldsymbol{L}=\mathbf{30}$.

Cherchez le choix optimal de $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{L}$.

Solution. Lagrangien s'écrit $\boldsymbol{\mathcal{L}=k+20L+\lambda\big(30-(\sqrt{k}+L)\big)}$ et les conditions du premier ordre sont :

$$\boldsymbol{L_k^{'}=1-\frac{\lambda}{2\sqrt{k}}=0} \quad , \quad \boldsymbol{L_L^{'}=20-\lambda=0} \quad , \boldsymbol{\sqrt{k}+L=30}.$$

La deuxième équation fournit $\boldsymbol{\lambda=20}$ et la première, $\boldsymbol{1=20/(2\sqrt{k})}$ ou $\boldsymbol{\sqrt{k}=10}$ ou encore $\boldsymbol{k=100}$. Ces valeurs de $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{k}$ substituées dans la contrainte donnent $\boldsymbol{\sqrt{100}+L=30}$ et de là $\boldsymbol{L=20}$.

Les $\mathbf{30}$ unités sont donc produites au moindre coût en utilisant $\mathbf{100}$ unités de capital et $\mathbf{20}$ unités de travail. Le coût minimal est $\boldsymbol{k+20L=500}$.

7.4.2 Interprétation du multiplicateur de Lagrange.

On reprend le problème :

$$\textbf{Max (min) } \boldsymbol{f(x,y)} \textbf{ sous contrainte } \quad \boldsymbol{g(x,y)=c}.$$

Soit $\boldsymbol{x}^*$ et $\boldsymbol{y}^*$ les valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ qui résolvent ce problème. En règle générale, $\boldsymbol{x}^*$ et $\boldsymbol{y}^*$ dépendent de $\boldsymbol{c}$. On suppose que $\boldsymbol{x^*=x^*(c)}$ et $\boldsymbol{y^*=y^*(c)}$ sont des fonctions dérivables de $\boldsymbol{c}$.

La valeur associée de $\boldsymbol{f(x,y)}$ est alors aussi une fonction de $\boldsymbol{c}$,

$$\boldsymbol{f^*(c)=f\big(x^*(c),y^*(c)\big)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \mathbf{(1)}$$

Cette fonction $\boldsymbol{f^*(c)}$ est appelée **fonction de valeur optimale** du problème. En général, la valeur associée du multiplicateur de Lagrange dépend évidemment aussi de $\boldsymbol{c}$. Sous certaines conditions vérifiées dans la plupart des problèmes, on a le résultat remarquable suivant.

$$\boldsymbol{\frac{df^*(c)}{dc} = \lambda(c) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)}$$

Le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda = \lambda(c)}$ est égale au taux de variation par rapport

à la constante de contrainte $\boldsymbol{c}$ de la valeur prise à l'optimum par la fonction objectif.

En particulier, si $\boldsymbol{dc}$ désigne une faible variation de $\boldsymbol{c}$, on a l'approximation

$$\boldsymbol{f^*(c + dc) - f^*(c) \simeq \lambda(c)dc \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (3)}$$

Dans les applications économiques, $\boldsymbol{c}$ rend souvent compte du stock disponible d'une certaine ressource et $\boldsymbol{f(x, y)}$ désigne l'utilité ou le profit dans ce cadre, $\boldsymbol{\lambda(c)dc}$ donne une mesure approximative de la variation en utilité ou profit que peut induire $\boldsymbol{dc}$ unités de plus (ou $\boldsymbol{-dc}$ de moins, si $\boldsymbol{dc} < 0$). Les économistes appellent $\boldsymbol{\lambda}$ un prix **fictif** (ou **implicite** de la ressource). Si $\boldsymbol{f^*(c)}$ est le niveau maximum du profit lorsque la ressource est au niveau $\boldsymbol{c}$, alors $(\boldsymbol{3})$ dit que $\boldsymbol{\lambda}$ indique l'augmentation approximative du profit par unité de ressource supplémentaire.

7.4.3 Plusieurs candidats à la solution.

Nous présentons dans cette section un problème qui admet plusieurs candidats à la solution. Par conséquent, il faut décider parmi eux celui qui résout effectivement le problème, étant entendu qu'il ait une solution.

Exemple.

Résoudre le problème :

$$\text{Max (min) } \boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2} \text{ s.c } \boldsymbol{g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 3}$$

Solution. Le lagrangien s'écrit dans ce cas :

$\boldsymbol{L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(3 - (x^2 + xy + y^2))}$ et les trois équation à satisfaire par une éventuelle solution sont :

$$\boldsymbol{L'_x(x,y) = 2x - \lambda(2x + y) = 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (\boldsymbol{i})$$

$$\boldsymbol{L'_y(x,y) = 2y - \lambda(x + 2y) = 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\boldsymbol{ii})$$

$$\boldsymbol{L'_\lambda(x,y) = 3 - (x^2 + xy + y^2) = 0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\boldsymbol{iii})$$

On élimine $\boldsymbol{\lambda}$ des équations $(\boldsymbol{i})$ et $(\boldsymbol{ii})$. Pour cela, on extrait $\boldsymbol{\lambda = \frac{2x}{2x+y}}$ à condition que $\boldsymbol{y \neq -2x}$ de la première et on l'introduite dans la seconde cela donne :

$$\boldsymbol{2y = \frac{2x}{2x+y}\ (x + 2y)} \text{ ou } \boldsymbol{y^2 = x^2}, \qquad \text{et de là } \boldsymbol{y = \pm\, x}.$$

Cas $\boldsymbol{y = x}$. Alors, $(\boldsymbol{iii})$ fournit $\boldsymbol{x^2 = 1}$ de sorte que $\boldsymbol{x = 1}$ ou $\boldsymbol{x = -1}$ deux candidats solutions, $(\boldsymbol{1,1})$ et $(\boldsymbol{-1,-1})$, avec $\boldsymbol{\lambda = {}^2/_3}$.

Cas $\boldsymbol{y = -x}$. Alors, $(\boldsymbol{iii})$ fournit $\boldsymbol{x^2 = 3}$, de sorte que $\boldsymbol{x = \sqrt{3}}$ ou $\boldsymbol{x = -\sqrt{3}}$ deux candidats solutions, $\boldsymbol{(\sqrt{3}, -\sqrt{3})}$ et $\boldsymbol{(-\sqrt{3}, \sqrt{3})}$, avec $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

Il existe encore envisager le cas $\boldsymbol{y = -2x}$. Mais alors, selon (i), $\boldsymbol{x = 0}$ et donc aussi $\boldsymbol{y = 0}$**.** Cette solution ne satisfaisant pas $(\boldsymbol{iii})$ ne peut être retenue.

On a ainsi trouvé les quatre seuls couples (x, y) qui peuvent résoudre le problème. En ces points, la fonction objective vaut :

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 2 \qquad , \qquad f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6.$$

En conclusion, si le problème admet des solutions, les couples $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ résolvent le problème de minimisation, tandis que les couples $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ et $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ résolvent le problème de maximisation.

7.4.4 Conditions suffisantes.

Théorème. Conditions locales du second ordre.

On considère le problème :

$$\text{Max (min) } f(x, y) \text{ s.c } g(x, y) = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et supposons que (x_0, y_0) est un point stationnaire du lagrangien

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\big(c - g(x, y)\big).$$

On définit la matrice heessienne de L en (x, y, λ) par**:**

$$H_L(x\quad, y\quad, \lambda\quad) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial y}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial \lambda}(x, y, \lambda) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial x}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y\, \partial \lambda}(x, y, \lambda) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial x}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda\, \partial y}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x, y, \lambda) \end{pmatrix}$$

(a) Si $\boldsymbol{det}[\boldsymbol{H_L}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{\lambda_0})] = |\boldsymbol{H_L}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{\lambda_0})| > 0$, alors $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ résout le problème de maximisation locale.

(b) Si $\boldsymbol{det}[\boldsymbol{H_L}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{\lambda_0})] = |\boldsymbol{H_L}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{\lambda_0})| < 0$, alors $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ résout le problème de minimisation locale.

Exemple.

Max (min) (local) $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2}$ **s.c** $\boldsymbol{g(x,y) = x^2 + xy + y^3 = 3}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L(x,y,\lambda)} &= \boldsymbol{f(x,y) + \lambda\big(c - g(x,y)\big)} \\ &= \boldsymbol{x^2 + y^2 + \lambda(3 - (x^2 + xy + y^3))}\end{aligned}$$

On y a vu que les conditions du premier ordre conduisent aux points $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ et $(\mathbf{-1},\mathbf{-1})$, avec $\boldsymbol{\lambda = 2/3}$, et $(\sqrt{\mathbf{3}},-\sqrt{\mathbf{3}})$ et $(-\sqrt{\mathbf{3}},\sqrt{\mathbf{3}})$, avec $\boldsymbol{\lambda = 2}$.
Qu'apportent le théorème précédent et les conditions d'ordre deux dans ce cas ?

Solution. La matrice hessienne de **L** en $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$:

$$\boldsymbol{H_L(x,y,\lambda)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2-2\lambda} & \boldsymbol{-\lambda} & \boldsymbol{-(2x+y)} \\ \boldsymbol{-\lambda} & \boldsymbol{2-6\lambda y} & \boldsymbol{-(3y^2+x)} \\ \boldsymbol{-(2x+y)} & \boldsymbol{-(3y^2+x)} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Pour le point $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ **avec** $\boldsymbol{\lambda = 2/3}$ **on a :**

$$\boldsymbol{det}[\boldsymbol{H_L}(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2/3})] = |\boldsymbol{H_L}(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2/3})| = \frac{\mathbf{-26}}{\mathbf{3}} < 0$$

Pour le point $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ **avec** $\boldsymbol{\lambda = 2/3}$ **on a :**

$$\boldsymbol{det}[\boldsymbol{H_L}(\mathbf{-1},\mathbf{-1},\mathbf{2/3})] = |\boldsymbol{H_L}(\mathbf{-1},\mathbf{-1},\mathbf{2/3})| = \frac{\mathbf{-46}}{\mathbf{3}} < 0$$

on conclut que $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ et $(-\mathbf{1},-\mathbf{1})$ donnent lieu à des minima.

Pour le point $(\sqrt{\mathbf{3}},-\sqrt{\mathbf{3}})$ **avec** $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{2}$ **on a :**

$$\boldsymbol{det}\left[\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{L}}\left(\sqrt{\mathbf{3}},-\sqrt{\mathbf{3}},\mathbf{2}\right)\right]=\left|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{L}}\left(\sqrt{\mathbf{3}},-\sqrt{\mathbf{3}},\mathbf{2}\right)\right|=\mathbf{150}-\mathbf{36}\sqrt{\mathbf{3}}>0$$

Pour le point $(-\sqrt{\mathbf{3}},\sqrt{\mathbf{3}})$ **avec** $\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{2}$ **on a :**

$$\boldsymbol{det}\left[\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{L}}\left(-\sqrt{\mathbf{3}},\sqrt{\mathbf{3}},\mathbf{2}\right)\right]=\left|\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{L}}\left(-\sqrt{\mathbf{3}},\sqrt{\mathbf{3}},\mathbf{2}\right)\right|=\mathbf{150}+\mathbf{36}\sqrt{\mathbf{3}}>0$$

on conclut que $\left(\sqrt{\mathbf{3}},-\sqrt{\mathbf{3}}\right)$ et $\left(-\sqrt{\mathbf{3}},\sqrt{\mathbf{3}}\right)$ donnent lieu à des maxima.

7.4.5 Variables et contraintes supplémentaires.

Les problèmes d'optimisation sous contraintes en économie comportent habituellement plus de deux variables. Le problème type à $\boldsymbol{n}$ variables s'écrit sous la forme :

$$\textbf{Max (min) } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\dots,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}) \textbf{ s.c } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\dots,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})=\boldsymbol{c}\dots\dots\dots\dots\dots(\mathbf{1})$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut aisément se généraliser. Comme précédemment. On associe un multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ à la contrainte et on forme le lagrangien :

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\dots,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\dots,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})+\boldsymbol{\lambda}\big(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}},\dots,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}})\big)\dots\dots\dots\dots(\mathbf{2})$$

On cherche ensuite toutes les dérivées partielles premières de $\boldsymbol{L}$ et on les égales à Zéro, pour former le système

$$\begin{cases} L'_{x_1}=f'_{x_1}(x_1,\dots,x_n)-\lambda g'_{x_1}(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ L'_{x_n}=f'_{x_n}(x_1,\dots,x_n)-\lambda g'_{x_n}(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}\dots\dots\dots..(3)$$

Ces n équations, jointes à la contrainte, forment $n+1$ équations à résoudre ensemble pour déterminer les $n+1$ inconnues $x_1, \dots, x_n$ et λ.

Exemple. Résolvez le problème de demande du consommateur

$$\textbf{Max } U(x,y,z) = x^2y^3z \quad \textbf{s.c } x+y+z=12$$

Solution. Avec $L(x,y,z,\lambda) = x^2y^3z + \lambda(12-(x+y+z))$, les conditions du premier ordre sont :

$$L'_x = 2xy^3z - \lambda = 0\ ,\quad L'_y = 3x^2y^2z - \lambda = 0,\quad L'_z = x^2y^3 - \lambda = 0 \dots (*)$$

Si une des variables x, y ou z est nulle, alors la fonction objectif x^2y^3z est nulle, ce qui n'est pas sa valeur maximale. En conséquence, on fait l'hypothèse que x, y et z sont toutes strictement positives. Des deux première équation $(*)$, on déduit

$2xy^3z = 3x^2y^2z$, de sorte que $y = 3x/2$, la première et la troisième équation $(*)$ impliquent de façon analogue $z = x/2$.

Après avoir remplacé $y = 3x/2$ et $z = x/2$ dans l'expression de la contrainte, on obtient $x + {}^{3x}/_{2} + {}^{x}/_{2} = 12$ ou $x = 4$. De là, $y = 6$ et $z = 2$.

La seule solution possible est $(x,y,z) = (4,6,2)$.

7.5 Exercices D'application.

Exercice 01: Soit $f(x,y) = x + 2y$. Calculez $f(0,1)$, $f(2,-1), f(a,a)$ et $f(a+h,b) - f(a,b)$.

Exercice 02: Soit $F(k,L) = 10k^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}}$, pour $k \geq 0$ et $L \geq 0$. Calculez $F(1,1), F(4,27), F\left(9,\frac{1}{27}\right), F(3,\sqrt{2}), F(100,1000)$ et $F(2k,2L)$.

Exercice 03: Déterminez les couples (x,y) pour lesquels les fonctions données par les formules suivantes sont définies, puis représentez graphiquement les domaines de définition de (b) et (c) dans le plan Oxy.

$a)\ \dfrac{x^2+y^3}{y-x+2}$ $\qquad b)\ \sqrt{2-(x^2+y^2)}$ $\qquad c)\ \sqrt{(4-x^2-y^2)(x^2+y^2-1)}$

Exercice 04: Déterminez les domaines de définition des fonctions définies par les formules suivantes.

$a)\ \dfrac{1}{e^{x+y}-3}$.

$b)\ \ln(x-a)^2 + \ln(y-b)^2$.

$c)\ 2\ln(x-a) + 2\ln(y-b)$.

Exercice 05: Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 06: La fonction $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \longmapsto \frac{\boldsymbol{x^3 y z}}{\boldsymbol{x+y+z}}$ a-t-elle une limite en $\mathbf{0}$?

Exercice 07: La fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}^{\mathbf{2}} - \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$ par

$$f(x, y) = \frac{\ln(1+x)\,(\sin y - y)}{x^2 + y^2}$$

Peut-elle être prolongée par continuité en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$?

Exercice 08: En utilisant par exemple les coordonnées polaires, étudier la continuité des fonctions suivantes :

$\mathbf{1})\ f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ $\quad$ $\mathbf{2})\ f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$ $\quad$ $\mathbf{3})\ f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$

$\mathbf{4})\ f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^3 + y^2}$ $\quad$ $\mathbf{5})\ f(x, y) = \frac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}$

Exercice 09: Calculez toutes les dérivées partielles du premier et du deuxième ordre :

$a)\ f(x, y) = 3x + 4y$ $\quad$ $b)\ f(x, y) = x^3 y^2$

$c)\ f(x, y) = x^5 - 3x^2 y + y^6$ $\quad$ $d)\ f(x, y) = \frac{x}{y}$

$e)\ f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ $\quad$ $f)\ f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice 10: Calculez toutes les dérivées partielles du premier et du deuxième ordre :

$a)\ f(x, y) = x^2 + e^{2y}$ $\quad$ $b)\ f(x, y) = y \ln(x)$

$c)\ f(x,y) = xy^2 - e^{xy}$ $d)\ f(x,y) = x^y$

Exercice 11: Calculez $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ et $f''_{xy}(x,y)$

$a)\ f(x,y) = x^7 - y^7$ $b)\ f(x,y) = x^5 \ln y$ $c)\ f(x,y) = (x^2 - 2y^2)^5$

Exercice 12: Calculer les dérivées partielles d'ordre **1** et **2** de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}.$$

Exercice 13: Soit $F(S,E) = 2,26\ S^{0,44}.E^{0,48}$.(cette fonction fournit un modèle de production pour une certaine pêche au homard où S désigne le stock de homards. E l'effort de pêche et $F(S,E)$ la prise).

a) Calculez $F'_S(S,E)$ et $F'_E(S,E)$.
b) Montrez que $SF'_S + EF'_E = kF$ pour une certaine constante k.

Exercice 14: Décrivez géométriquement l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace pour lequel :

a) $y = 2,\ z = 3$ (x varie librement)
b) $y = x$ (z varie librement).

Exercice 15: Montrez que $x^2 + y^2 = 6$ est une courbe de niveau de

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2 + 2.$$

Exercice 16: Tracez les graphiques des fonctions ainsi qu'un ensemble de courbes de niveau :

a) $\boldsymbol{f(x,y) = 3 - x - y}$.

b) $\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}}$.

Exercice 17: Calculez toutes les dérivées partielles premières des fonctions :

$$a)\ f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4 \quad b)\ f(x,y,z) = \frac{x^4}{yz} \quad c)\ f(x,y,z) = e^{xyz}$$

Exercice 18: la fonction $\boldsymbol{f}$ définie pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ par :

$\boldsymbol{f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 3}$ admet un maximum. En quelles valeurs de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ se produit-il?

Exercice 19: La fonction $\boldsymbol{f}$ définie pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ par :

$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 8y + 35}$ admet un minimum. Déterminez ses coordonnées.

Exercice 20:

a) Une firme produit deux types $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ d'un bien. Le coût journalier de production de $\boldsymbol{x}$ unités de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{y}$ unités de $\boldsymbol{B}$ est donné par :
$\boldsymbol{C(x,y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y + 514}$.

Supposez que la firme vend la totalité de ce qu'elle produit au prix de $\boldsymbol{24}$**€** pour le type $\boldsymbol{A}$ et **12€** pour le type $\boldsymbol{B}$. Déterminez les niveaux de production $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ qui maximisent le profit.

b) La firme est contrainte de produire exactement $\boldsymbol{54}$ unités par jour des deux types confondus. Qu'en est-il maintenant du plan de production optimal ?

Exercice 21: Utilisez la méthode de Lagrange pour déterminer la seule solution possible du problème :

$$\max xy \quad \text{s.c} \quad x + 3y = 24.$$

Exercice 22: Cherchez la solution des problèmes suivants par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

a) $\min f(x,y) = x^2 + y^2$ s.c $g(x,y) = x + 2y = 4$.
b) $\min f(x,y) = x^2 + 2y^2$ s.c $g(x,y) = x + y = 12$.
c) $\max f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ s.c $g(x,y) = x + y = 100$.

Exercice 23: La fonction d'utilité d'un individu est :

$$U(x,y) = 100xy + x + 2y.$$

Le prix unitaire de x est **2€** et celui de y est **4€**. L'individu dispose de **1000€** à consacrer totalement aux deux biens x et y.

Résolvez ce problème d'optimisation de l'utilité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 24:

a) Une entreprise peut compter sur L unités de travail. Elle produit trois biens différents en quantités x, y et z qui requièrent respectivement $\alpha x^2, \beta y^2$ et γz^2 unités de travail. Résolvez le problème :
$\max(ax + by + cz)$ s.c $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = L.$

Où a, b, c, α, β et γ sont des constantes strictement positives.

b) Posez $\boldsymbol{a = 4}$, $\boldsymbol{b = c = 1}$, $\boldsymbol{\alpha = 1}$, $\boldsymbol{\beta = \frac{1}{4}}$ et $\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{5}}$ et montrez que, dans ce cas, la solution du problème ($\boldsymbol{a}$) est $\boldsymbol{x = \frac{4}{5}\sqrt{L}}$, $\boldsymbol{y = \frac{4}{5}\sqrt{L}}$ et $\boldsymbol{z = \sqrt{L}}$. De combien varie la valeur optimale de $\boldsymbol{4x + y + z}$ quand $\boldsymbol{L}$ passe de $\boldsymbol{100}$ à $\boldsymbol{101}$? Déterminez à la fois la variation exacte et l'approximation du premier degré basée sur le multiplicateur de Lagrange.

BIBLIOGRAPHIE.

1. K. Alleb, éléments d'analyse, O.P.U, Alger 1984.
2. B. Beck, I. Selon, Analyse 3, France 1999.
3. E. Berrebi, Mathématique, Exercices corrigées avec rappels de cours, Tome 02.
4. F. Benoist, L. Dorat, S. Maffre, B. Rivet, B. Touzillier, Mathématiques ECS 1^{ere} année, Durnod, Paris 2011.
5. R. Bendib, Mathématique pour économistes, Alger 2003.
6. B. BaBa Hamed, Analyse 1, université d'Oran 1991.
7. Collection : L'enseignement Mathématique, Théories et applications des équations différentielles, O.P.U Alger.
8. J. Fourastié, Exercices de mathématiques appliquées à l'économie : avec solutions et rappels de cours, Bordas, Paris 1983.
9. B. Miloudi, Mathématique Pour économistes : cours and exercices corrigées, Alger 1999.
10. M. Mechab, cours d'analyse, l'institut d'informatique de l'université de Sidi Bel Abbés 1993.
11. K. Sydsaeter, P. Hammond and A. Strøm, Pearson, France 2014.
12. L. Todjihounde, calcul différentiel : cours et exercices corrigés, université d'Abomey-calavi 2014.