République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

Université de Saida– Dr. Moulay Tahar
Faculté des Sciences

Polycopié de cours

Séries et équations différentielles

2ième années LMD-SM

Dr TEMMAR Fatma

2023-2024

Préface

Ce document fait l'objet d'un complément de cours pour le module Séries et Equations Différentielles enseigné aux étudiants de la deuxième année spécialisés en Sciences de la Matière.

En premier chapitre, nous traitons les notions des séries numériques, séries de fonctions et les séries entières. Le deuxième chapitre permettra aux étudiants d'acquérir les méthodes de calcul d'intégrale de Riemann et de la primitive d'une fonction en faisant des applications sur le calcul d'air, de volume, … etc, par les intégrales simples, doubles et triples.

Nous rappelons dans le troisième chapitre la notion de l'intégrale généralisée qui est une extension de la notion d'intégrale de Riemann. Notre but dans ce chapitre est de calculer des intégrales sur des intervalles non bornés (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$), ou bien des intégrales sur un intervalle borné, de fonctions ayant une limite infinie en un point de l'intervalle d'intégration.

En quatrième chapitre, le calcul des équations différentielles passera du premier au second ordre. Les deux derniers chapitres comportent des concepts et des outils de calcul scientifique tel que les transformés de Laplace et de Fourier qui nous permettent de traiter les équations différentielles, ces deux méthodes sont nécessaires pour la résolution des problèmes de physique tel que le calcul de la fonction de transfert et l'analyse de la réponse d'un système.

Table des matières

Chapitre 1

Les séries

L'objectif de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies des nombres réels et, éventuellement, de les calculer. Nous détaillerons dans ce chapitre l'étude de convergence de plusieurs familles de séries : les séries arithmétiques, géométriques … les séries de fonctions et les séries entières.

I. Les séries

I.1 Les séries numériques :

La suite de valeurs numériques constantes est une liste de termes générale U_n :

$$U_n : U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{N-1}, U_N. \qquad \begin{cases} pour \ n = 1 \to U_1 \\ n = 2 \to U_2 \\ n = 3 \to U_3 \\ \ldots \\ n = N \to U_N \end{cases}$$

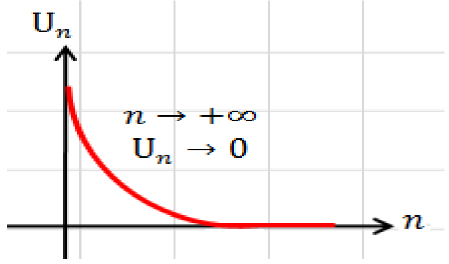
I.1.1 Définition : Une série numérique $\sum U_n$ est la somme d'une suite de nombres réels (U_n). $(n = 1, 2, 3 \ldots\ldots, N)$.

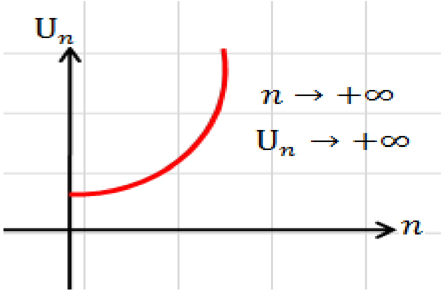
On définit : $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots . + U_{N-1} + U_N = \sum_{n=1}^{N} U_n$

I.1.2 Condition nécessaire de convergence d'une série numérique $\sum U_n$:

On applique la limite sur U_n

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ on dit que $\sum U_n$ converge. Et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ on dit que $\sum U_n$ diverge.





I.1.3 Convergence d'une somme de suite S_n:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Si \ S_n \ admet\ une\ limite\ nule\ on\ dit\ que\ la\ série \sum U_n \text{ converge} \\ Si \ S_n \ a \text{ une limite infinie } (+\infty) \text{on dit que la série} \sum U_n \text{ diverge} \end{cases}$$

- ✓ La somme de 1 à N de la suite U_n est la somme partielle de la série $\sum U_n$ en écrit: $\sum_{n=1}^{N} U_n$
- ✓ La somme de 1 à $+\infty$ de la suite U_n est la somme total de la série $\sum U_n$ en écrit: $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

Exemple 1 :

Etudier la nature de la série numérique de terme général : $U_n = cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

Solution :

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = cos(0) = 1.$ La série est donc divergente.

Exemple 2 :

Soit la série $\sum U_n$ de terme général U_n telle que : $U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; $n \geq 1.$

- Calculer la somme partielle et total de la série $\sum U_n$.
- Etudier la convergence de cette série.

Solution :

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{N-1} + U_N. \quad \left\{\begin{array}{r} n = 1 \to U_1 = 1 - \frac{1}{2} \\ n = 2 \to U_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ n = 3 \to U_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots \\ n = N-1 \to U_{N-1} = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \\ n = N \to U_N = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \end{array}\right.$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

- la somme partielle de la série $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$
- la somme totale de la série $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$
- La limite de la série égale à 1 donc cette série est divergente.

Remarque : Pour étudier la limite en utilise le terme $\lim_{n\to+\infty} U_n$ ou bien $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

I.1.4 Règle de convergence pour quelques séries usuelles :

- **La série arithmétique :** $\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \; U_n = n$

On utilise la somme partielle : $\sum_{n=1}^{N} U_n = S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (N-1) + N \qquad (1)$

J'écris cette somme dans le sens inverse :

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = S_n = N + (N-1) + \cdots + 3 + 2 + 1 \qquad (2)$$

Et je fais la somme de la relation (1) et (2) :

$$(1) + (2) = 2\,S_n = (N+1) + (N+1) + (N+1) + \cdots + (N+1) + (N+1)$$

Il y a N paquet de $(N+1)$: $2\,S_n = N(N+1)$ donc $S_n = \frac{N(N+1)}{2}$

$S_n = \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: Cette série est divergente

- **La série géométrique :** $\sum_{n=0}^{\infty} U_n, \; U_n = q^n$

On calcul la somme partielle :

$$\sum_{n=1}^{N} q^n = S_n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \cdots . + q^N \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

On multiplie la relation par q : $qS_n = q.1 + qq^1 + qq^2 + qq^3 + \cdots + qq^N$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots . + q^{N+1} \quad \ldots\ldots. \quad (2)$$

$$(1) - (2) = S_n - qS_n = 1 - q^{N+1} \Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{N+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} Si\ |q| < 1 \rightarrow \sum U_n \text{ converge vers } \frac{1}{1-q} \\ Si\ |q| > 1 \rightarrow \sum U_n \text{ diverge} \end{cases}$$

- **La série de Riemann :**

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n, U_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sum U_n \text{ converge pour } \alpha > 1 \\ \sum U_n \text{ diverge pour } \alpha < 1 \end{cases}$$

- **La série Alternées :** $\sum_n (-1)^n U_n$ converge pour $U_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Exemple : Etudier la nature de la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{U}_n$ de terme général : $\mathrm{U}_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$,

Solution :

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots$ il y a une alternance entre le (-) et le (+)

$\mathrm{U}_n = \frac{1}{n^2}$ avec $\alpha = 2 > 1$ c'est une série de Riemann convergente donc $\sum_n (-1)^n U_n$ converge.

I.1.5 Quelques tests de convergence : Si la série donnée n'est pas une série usuelle, effectuer l'un des tests suivants :

Comparaison avec une série : Soient $\sum \mathrm{U}_n$ et $\sum \mathrm{V}_n$ deux séries positives et équivalentes :

Si $|\mathrm{U}_n| \leq |\mathrm{V}_n|$ et $\sum \mathrm{V}_n$ converge alors $\sum \mathrm{U}_n$ est convergente.

Si $|\mathrm{U}_n| \geq |\mathrm{V}_n|$ et $\sum \mathrm{V}_n$ diverge alors $\sum \mathrm{U}_n$ est divergente.

Exemple :

Etudier la nature de la série $\sum_n U_n$ tel que $\mathrm{U}_n = \frac{a^n}{n}$, $(a > 1)$.

Solution :

$a > 1 \Rightarrow a^n > 1 \Rightarrow \frac{1}{a^n} > \frac{1}{n}$ et comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann $\alpha < 1$)

$\Rightarrow \sum \mathrm{U}_n$diverge.

Approximation par une série : soient $\sum \mathrm{U}_n$ et $\sum \mathrm{V}_n$ deux séries positives et équivalentes :

Si $\mathrm{U}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{V}_n$ et $\sum \mathrm{V}_n$ converge alors $\sum \mathrm{U}_n$ est convergente.

Si $\mathrm{U}_n \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{V}_n$ et $\sum \mathrm{V}_n$ diverge alors $\sum \mathrm{U}_n$ est divergente.

Exemple : Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

Solution :

$$\mathrm{U}_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{1/2}}{n} = \frac{1}{n^{1/2}} = \mathrm{V}_n$$

or $\sum \mathrm{V}_n = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (série de Riemann $\alpha < 1$) alors $\sum \mathrm{U}_n$ est divergente.

Teste d'Alembert : Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \ell$ $\begin{cases} \text{si } \ell < 1 : \sum U_n \text{ est convergente} \\ \text{si } \ell > 1 : \sum U_n \text{ est divergente} \end{cases}$

Teste de Cauchy : Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = \ell$ $\begin{cases} \text{si } \ell < 1 : \sum U_n \text{ est convergente} \\ \text{si } \ell > 1 : \sum U_n \text{ est divergente} \end{cases}$

Exemple : Etudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ et la série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(\ln n)^n}}$

Solution :

a. On applique la condition d'Alambert :

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}\right| = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2.\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{e} < 1 \quad \left(\text{Je rappelle : } \lim_{n\to+\infty}\left(\mathbf{1}+\frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{2}{e} < 1$ donc $\sum U_n$ converge.

b. On applique la condition de Cauchy :

$$\sqrt[n]{|U_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{(\ln n)^n}}} = \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc } \sum U_n \text{ converge.}$$

I.2 Les séries de fonctions :

$$U_n \text{ est une application} : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto U_n(x)\ )$$

I.2.1 Définition : Une série de fonction désignée par $\sum U_n(x)$ est la somme d'une suite de

fonction $U_n(x). (n = 1, 2, 3, \dots)$.

Exemple : $U_n(x) = 1+\frac{x}{n}$, $U_n(x) = x^n$, $U_n(x) = e^{nx}$, ...

I.2.2 Domaine de convergence simple :

Le domaine de convergence est parfois donné par la condition :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| < 1.$$

Si cette condition ne donne rien, effectuer une comparaison avec une série numérique équivalente ou effectuer une approximation de $U_n(x)$ tout en vérifiant la condition nécessaire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) = 0$.

Exemple : Trouver le domaine de convergence des séries de terme général $U_n(x)$ tel que :

a. $U_n(x) = \frac{e^{nx^2}}{3^n}$, **b.** $U_n(x) = \frac{n^2}{n^x+n+1}$, **c.** $U_n(x) = \frac{(x-2)^{2n}}{2^n}$,

Solution :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{e^{(n+1)x^2}}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{e^{nx^2}}\right| = \frac{e^{x^2}}{3} < 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| < 1 \Rightarrow \frac{e^{x^2}}{3} < 1 \Longmapsto e^{x^2} < 3$$

$$\Longmapsto x^2 < \ln 3$$

$$\Longmapsto |x| < \sqrt{\ln 3}$$

$$\Longmapsto -\sqrt{\ln 3} < x < \sqrt{\ln 3}$$

➲ Pour $x = \pm\sqrt{\ln 3}$ la série devient : $U_n(x) = \frac{e^{n\ln 3}}{3^n} = \frac{e^{\ln 3^n}}{3^n} = \frac{3^n}{3^n} = 1$

donc $\sum U_n(x) = \sum 1$ et $\sum 1$ diverge.

On déduit donc que le domaine de convergence $D_{conv} = \left]-\sqrt{\ln 3}, +\sqrt{\ln 3}\right[$.

b. Si $x < 2$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^x+n+1} = \infty \neq 0$: la série diverge

Si $x > 2$: $\frac{n^2}{n^x+n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^x} = \frac{1}{n^{x-2}}$ et $\sum\frac{1}{n^{x-2}}$ est une série de Riemann

ne converge que pour $x - 2 > 1$.

Donc la série converge pour $x > 3$

$$D_{conv} =]3, +\infty[$$

c. $U_n(x) = \left(\frac{(x-2)^2}{2}\right)^n$ c'est une série géométrique de raison $\frac{(x-2)^2}{2}$ converge pour $\left|\frac{(x-2)^2}{2}\right| < 1$

$\Longmapsto$ $|x-2| < \sqrt{2}$

$\Longmapsto$ $-\sqrt{2} < x - 2 < \sqrt{2}$

$\Longmapsto$ $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$.

Pour $x - 2 = \pm\sqrt{2} \Longmapsto x = 2 \pm \sqrt{2}$ en remplace x par sa valeur :

$U_n(x) = \frac{(x-2)^{2n}}{2^n} = \frac{(2\pm\sqrt{2}-2)^{2n}}{2^n} = \frac{(\pm\sqrt{2})^{2n}}{2^n} = 1$ la série devient $\sum 1$ et elle diverge.

$$D_{conv} = \left]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right[$$

I.2.3 Séries entières et rayon de convergence :

Une série entière est une série de la forme $\sum a_n x^n$, ou a_n est une suite numérique. Son rayon de convergence est R

$$R = \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n(x)}{a_{n+1}(x)}\right| \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1/\sqrt[n]{|a_n(x)|} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x| < R : \sum a_n x^n \text{ converge absolument} \\ R = 0 : \sum a_n x^n \text{ converge pour } x = 0 \\ R = +\infty : \sum a_n x^n \text{ diverge} \end{cases}$$

Pour $\sum a_n x^n$ le centre du domaine de convergence de rayon R est (0, 0) et

pour $\sum a_n (x - x_0)^n$ le centre de D_{conv} est $(x_0, 0)$.

Exemple :

Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 5n + 1)x^n$

Solution :

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n(x)}{a_{n+1}(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2+5n+1}{(n+1)^2+5(n+1)+1}\right| \underset{n\to\infty}{\sim} 1 \quad \left(\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n^2\left(1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{7}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}\right| = 1\right)$$

$\sum a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ $(-1 < x < 1)$.

Propriétés :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et R_c son rayon de convergence,

- La série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ et la série primitive $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont le même R_c,
- Le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^{2n}$ égale à $\sqrt{R_c}$ ($x^2 < R \Longrightarrow |x| < \sqrt{R}$),
- La série $\sum \lambda a_n x^n = \lambda \sum a_n x^n, \lambda \in \mathbb{R}^+$ à le même R_c,

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières et R_1 , R_2 leur rayon de convergence,

- Le rayon de convergence R_c de la somme de ces deux séries

  $\sum(a_n + b_n) x^n$ vérifie $R_c \geq \min(R_1, R_2)$,

- Le rayon de convergence R_c du produit de ces deux séries

  $(\sum a_n x^n).(\sum b_n x^n) = \sum(a_n.b_n) x^n$ vérifie $R_c \geq \min(R_1, R_2)$.

Chapitre II

Calcul d'intégrales

L'intégration est un outil scientifique fondamental utilisé pour faire les opérations de mesure de grandeur comme l'air, volume, longueur d'une courbe ... etc.

Dans ce chapitre, on va faire quelques rappels sur l'intégrale de Riemann et l'intégrale simple des fonctions d'une variable, définir la notion d'intégrale double et multiple pour les fonctions de 2 variables et 3 variables respectivement.

II. Calcul d'intégrale

II.1 Calcul d'intégrale simple

II.1.1 Intégration par la fonction primitive :

Théorème :

Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, et $F(x)$ la primitive de $f(x)$ alors

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Propriété de l'intégrale définie :

- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- L'inverse $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
- Linéarité : $\int_a^b [\lambda f(x) + \beta\, g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$
- Symétrie : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & \text{si f est paire} \\ 0 & \text{si f est impaire} \end{cases}$

Exemple : Calculer l'intégrale : $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Solution :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$$

Les primitives de quelques fonctions :

Fonction	Primitive
x^q	$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^{ax}	$\frac{1}{a}\,e^{ax}$
$\sin(ax)$	$-\frac{1}{a}\,\cos(ax)$
$\cos(ax)$	$\frac{1}{a}\,\sin(ax)$

$f'(x)\cos\ (f(x))$	$\sin(f(x))$
$\cos^2(px)=\dfrac{1}{2}(1+\cos(2px))$	$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4p}\sin(2px)$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$
$\dfrac{1}{\sqrt{px+q}}=\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$	$\frac{2}{p}\sqrt{px+q}=2\sqrt{f}$
$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	$\sqrt{x^2+1}$
$f'(x)\,e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\|f(x)\|$
$f'(x)\,[f(x)]^{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1}\quad,\ (\alpha\neq-1)$
$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)}$	$arctan[f(x)]$
$\frac{1}{(x-\alpha)^m}$	$si\ m\neq 1\qquad -\frac{1}{(m-1)}\frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}}$ $si\ m=1\qquad ln\|x-a\|$
$\dfrac{1}{cos^2\,x}$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\dfrac{1}{\sin x\cos x}$	$\ln(\tan x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\left[x+\sqrt{x^2+a}\right]$
$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$	$\arcsin f(x),\quad x\in\,]-1,1[$
$\dfrac{f'(x)}{f^n(x)}$	$\dfrac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}\qquad a\in R_+^*-\{1\}$
$\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$	$2\sqrt{1+\sin x}$

II.1.2 Intégration par parties :

Théorème :

Soient U(x) et V(x) continument dérivables sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b \boldsymbol{U(x)V'(x)\,dx} = [\boldsymbol{U(x).V(x)}] - \int_a^b \boldsymbol{V(x)\,U'(x)dx}$$

Exemple : Calculer l'intégrale : $\int_0^1 x\, e^{-2x} dx$

Solution : $\begin{cases} \mathbf{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} & \boldsymbol{U'(x)} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{V'(x)} = e^{-2x} & \mathbf{V(x)} = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$

$$\int x\, e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} 1. e^{-2} + \frac{1}{2} 0. e^0 - \frac{1}{4}[e^{-2x}]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4}[e^{-2} - e^0]$$

$$= -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4}$$

II.1.3 Intégration par changement de variable :

Théorème :

Soit $f(x)$ une fonction définie sur $[a, b]$. Soit u : $[\alpha, \beta] \to [a, b]$

tel que $\boldsymbol{u(a) = \alpha}$ *et* $\boldsymbol{u(b) = \beta}$, alors

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x).dx} = \int_\alpha^\beta \mathbf{f}\boldsymbol{\big(u(t)\big).u'(t)dt}$$

Exemple : Calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

Solution : On pose, le changement de variable

$u(x) = arctan\, x.$ $du = \frac{1}{1+x^2} dx$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int_{\arctan 0}^{\arctan +\infty} u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\, du$$

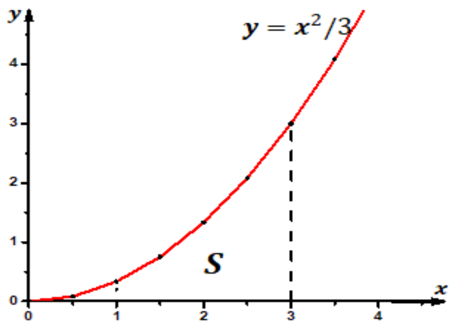
$$= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

II.1.4 Calcul d'intégrale au sens de Riemann :

Ce que je veux faire dans cette cour c'est expliquer le lien entre l'intégrale simple calculer par la primitivation $\int_a^b f(x)\,dx$ et le calcul d'aire sous la courbe à l'aide de l'approche de l'air des rectangles qui s'appelle sommes de Riemann.

Pour bien expliquer cette approximation j'introduis **l'exemple** suivant :

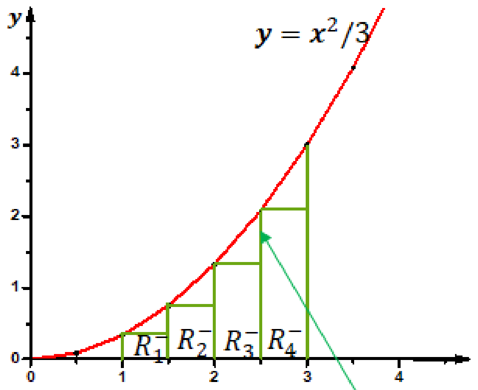
Considérons la fonction $f(x) = \frac{x^2}{3}$ définit sur l'intervalle **[1, 3]**. Je souhaite calculer l'aire S (surface) en-dessous du graphe de $y = f(x)$ et entre les droites d'équation $(x = 1)$, $(x = 3)$ et

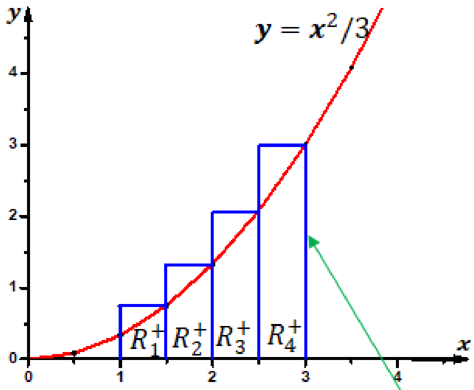


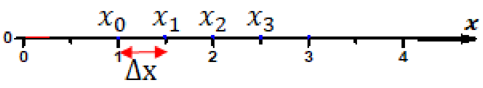
Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit n un entier positif ; divisons notre intervalle **[1, 3]** en n subdivision **(n=1, 2, 3, …, k-1, k)**

On considère les rectangles inférieurs (R_{inf}) ou (R^-) et les rectangles supérieurs (R_{sup}) ou (R^-),

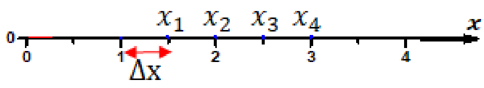
Je divise par exemple l'intervalle **[1, 3]** en 4 subdivisions et je calcul l'aire sous la courbe :







La hanteur à gauche



La hanteur à droite

Le pas Δx :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{dans cette exemple} \qquad \Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

L'aire des rectangles située en-dessous de la courbe $\boldsymbol{S_{inf}}$, montré en couleur rouge des rectangles $\boldsymbol{R^-}$ est la hanteur à gauche multiplier par le pas Δx :

$S(R^-) =$ la hanteur à gauche multiplier par Δx

$$\begin{aligned} \mathrm{S_{inf}} &= S(R_1^-) + S(R_1^-) + S(R_2^-) + S(R_3^-) + S(R_4^-) \\ &= \Delta x. f(x_0) + \Delta x. f(x_1) + \Delta x. f(x_2) + \Delta x. f(x_3) \\ &= \Delta x\, [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] \overset{AN}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\overset{AN}{\Rightarrow} \qquad \mathrm{S_{inf}} = \frac{1}{2}\left[f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{9}{4.3} + \frac{4}{3} + \frac{25}{4.3}\right] = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}\right]$$

$$= \frac{27}{12} \text{ Unité de surface}$$

L'aire des rectangles située au-dessus de la courbe $\boldsymbol{R_{sup}}$, montré en couleur vert des rectangles $\boldsymbol{R^+}$ est la hanteur à droite multiplier par la pas Δx :

$S(R^+) =$ la hanteur à droite multiplier par Δx

$$\begin{aligned} \mathrm{S_{sup}} &= S(R_1^+) + S(R_1^+) + S(R_2^+) + S(R_3^+) + S(R_4^+) \\ &= \Delta x. f(x_1) + \Delta x. f(x_2) + \Delta x. f(x_3) + \Delta x. f(x_4) \\ &= \Delta x\, [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)] \end{aligned}$$

$$\overset{AN}{\Rightarrow} \quad \mathrm{S_{sup}} = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{9}{4.3} + \frac{4}{3} + \frac{25}{4.3} + \frac{9}{3}\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9\right]$$

$$= \frac{43}{12} \text{ u.s}$$

On constate que l'aire recherché est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs (S est entre ces deux valeurs, l'aire des rectangles supérieurs et inférieurs) :

$$S_{\inf}(R_{inf}) \leq l'aire\ recherché\ (S) \leq S_{\sup}(R_{sup}) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Si on augmente le nombre des subdivisions $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{k-1} < x_k$, (k varie de 1à n),

L'aire de chaque rectangle situé en-dessous de la courbe est « Δx × l'hanteur $f(x_{k-1})$»

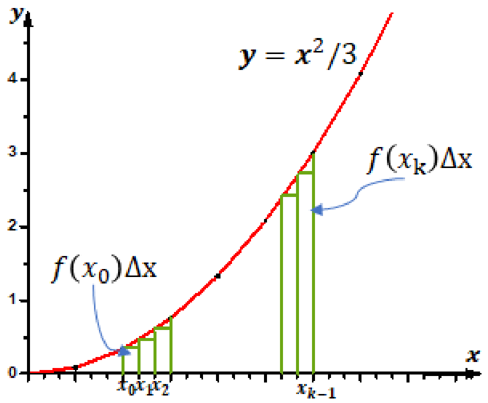
et l'aire de chaque rectangle situé au-dessus de la courbe est « Δx × la hanteur $f(x_k)$ »

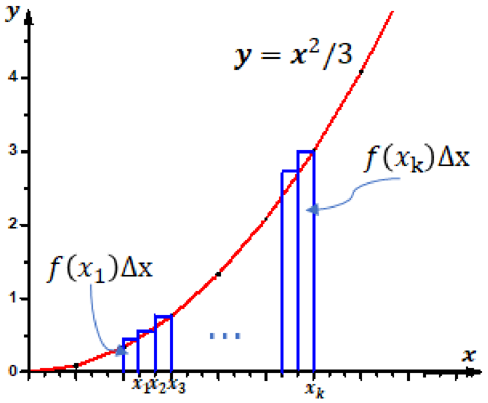
$$S(R_{inf}) = \Delta x \sum_{k=1}^{n=k} f(x_{K-1}) \quad \text{et} \quad S(R_{sup}) = \Delta x \sum_{k=1}^{n=K} f(x_K) \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Identification de x_k :

$$\begin{cases} x_0 = a = 1 \\ x_1 = x_0 + \Delta x = a + \frac{b-a}{n} = 1 + \frac{2}{n} \\ x_2 = x_0 + 2\Delta x = a + 2\frac{b-a}{n} = 1 + 2\frac{2}{n} \quad \cdots \\ x_3 = x_0 + 3\Delta x = a + 3\frac{b-a}{n} 1 + 3\frac{2}{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k-1} = x_0 + (k-1)\Delta x = a + (k-1)\frac{b-a}{n} = 1 + (k-1)\frac{2}{n} \\ x_k = x_0 + k\,\Delta x = a + k\,\frac{b-a}{n} = 1 + k\frac{2}{n} \end{cases}$$

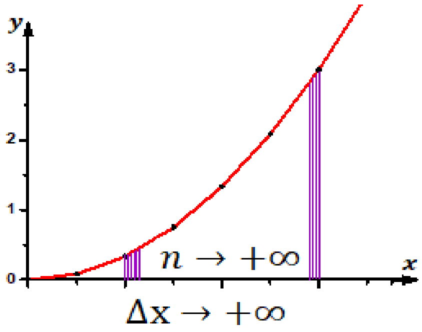




La surface des rectangles recouvre approximativement la surface S, plus les largeurs des rectangles R_k sont petites, plus l'approximation est bonne.

L'erreur commise sur l'aire des rectangles en-dessous et au-dessus est de l'ordre 1, pour le fait disparaître ($\Delta S \to 0$) il faut augmenter les nombres des subdivisions n à l'infinis ($n \to +\infty$) pour que le pas Δx devient infinitésimale ($\Delta x \to 0$) et dans ce cas on confond **Δx** avec dx, c-à-d en fait le passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta x \sum_{k=1}^{n=k-1} f(x_{K-1}) \leq S \leq \lim_{n\to+\infty} \Delta x \sum_{k=1}^{n=K} f(x_K) \ldots (2)$$



Maintenant on calcul l'aire des rectangles située en-dessous de la courbe par application de la somme de la relation (2), pour n subdivision on trouve :

$$S_n(R^-) = S_1(R_1^-) + S_2(R_1^-) + S_3(R_2^-) + \cdots + S_{k-1}(R_{k-1}^-)$$

$$= \Delta x. f(x_0) + \Delta x. f(x_1) + \Delta x. f(x_2) + \Delta x. f(x_3) + \cdots + \Delta x. f(x_{k-1})$$

$$= \Delta x\, [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{k-1})]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\frac{1^2}{3} + \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{3} + \frac{\left(1+2\frac{2}{n}\right)^2}{3} + \frac{\left(1+3\frac{2}{n}\right)^2}{3} + \cdots + \frac{\left(1+(k-1)\frac{2}{n}\right)^2}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3n}\left[1 + \left(1 + 2\frac{2}{n} + 1^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right) + \left(1 + 2.2\frac{2}{n} + 2^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right) + \left(1 + 2.3\frac{2}{n} + 3^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \left(1 + 2.(k-1)\frac{2}{n} + (k-1)^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3n}\left[\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{\text{n fois 1}} + 2\frac{2}{n}\underbrace{(1+2+3+\cdots+(k-1))}_{\sum_{n=1}^{n=K-1} n = \frac{n(n-1)}{2}} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \underbrace{(1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2)}_{\sum_{n=1}^{n=K-1} n^2 = \frac{n(n-1)(2n-1))}{6}}\right]$$

$$= \frac{2}{3n}\left[n.1 + 2\frac{2}{n}\sum_{n=1}^{n=K-1} n + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=K-1} n^2\right]$$

$$= \frac{2}{3n}\left[n + 2\frac{2}{n}\frac{n(n-1)}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \frac{2n}{3n}\left[1+2\left(1-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{6}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[1+2\left(1-\frac{1}{n}\right)+4\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\,(R^-) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\left[1+2\left(1-\frac{1}{n}\right)+4\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)}{6}\right]$$

$$= \tfrac{2}{3}\left[1+2+4\tfrac{2}{6}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\,(R^-) = \tfrac{26}{9}$$

De la même manière on calcul l'aire des rectangles située au-dessus de la courbe par application de la somme de la relation (2), pour n subdivision on trouve :

$$S_n(R^+) = S_1(R_1^+) + S_2(R_1^+) + S_3(R_2^+) + \cdots + S_{k-1}(R_k^+)$$

$$= \Delta\text{x}.\,f(x_0) + \Delta\text{x}.\,f(x_1) + \Delta\text{x}.\,f(x_2) + \Delta\text{x}.\,f(x_3) + \cdots + \Delta\text{x}.\,f(x_k)$$

$$= \Delta\text{x}\,[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_k)]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\frac{1^2}{3} + \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{3} + \frac{\left(1+2\frac{2}{n}\right)^2}{3} + \frac{\left(1+3\frac{2}{n}\right)^2}{3} + \cdots + \frac{\left(1+k\frac{2}{n}\right)^2}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3n}\left[1 + \left(1 + 2\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}} + 1^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right) + \left(1 + 2.2\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}} + 2^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right) + \left(1 + 2.3\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}} + 3^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right) + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(1 + 2.k\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}} + k^2\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}}\right)^2\right)\right]$$

$$= \tfrac{2}{3n}\left[\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{\text{n fois 1}} + 2\tfrac{2}{n}\underbrace{(1+2+3+\cdots+k)}_{\sum_{n=1}^{n=K} n \,=\, \frac{n(n+1)}{2}} + \left(\tfrac{2}{n}\right)^2\underbrace{(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)}_{\sum_{n=1}^{n=K} n^2 \,=\, \frac{n(n+1)(2n+1))}{6}}\right]$$

$$= \frac{2}{3n}\left[n.1 + 2\frac{2}{n}\sum_{n=1}^{n=K} n + \left(\frac{2}{n}\right)^2\sum_{n=1}^{n=K} n^2\right]$$

$$= \frac{2}{3n}\left[n + 2\frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{2n}{3n}\left[1 + 2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + 2\left(1+\frac{1}{n}\right) + 4\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\,(R^+) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\left[1 + 2\left(1+\frac{1}{n}\right) + 4\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{6}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[1 + 2 + 4\frac{2}{6}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\,(R^+) = \frac{26}{9}$$

Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers +∞) alors on obtient à la limite que l'aire S de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers 26/9. Donc l'aire de notre région est 26/9.

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \Delta x \sum_{k=1}^{n=k} f(x_{K-1}) \;\leq \int_1^3 \frac{x^2}{3}\,dx \leq \;\lim_{n\to+\infty} \Delta x \sum_{k=1}^{n=K} f(x_K) \ldots\ldots\ldots.(3)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n=k} f(x_{K-1}) \;\leq \int_1^3 \frac{x^2}{3}\,dx \leq \;\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n=K} f(x_K) \ldots\ldots\ldots.(4)$$

avec

$$x_{k-1} == a + (k-1)\frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_k == a + k\frac{b-a}{n}$$

C'est une approximation de l'aire cherchée et cette approximation est d'autant meilleure que les Δx_k sont petits et donc que le nombre d'intervalles n est grand. À la limite (si elle existe), on obtiendra l'aire recherchée S.

On pose alors la définition suivante :

Définition :

Une fonction bornée f : [a,b]⟶ ℝ est dite intégrable au sens de Riemann si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ où

$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n=K} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ est convergente de limite $\int_a^b f(x)dx$.

En écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n=K} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Le cas le plus utilisé est $\boldsymbol{a = 0}$ et $\boldsymbol{b = 1}$, alors :

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{n=K} f\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)$$

Exemple : Calculer l'intégrale au sens de Riemann de la suite : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{k+n}}$,

Solution :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{k} + \mathrm{n}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\mathrm{n}\left(\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}} + 1\right)}$$

$$S_n = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}} + 1}$$

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{x}+1} dx = \ln 2$$

II. 2 Calcul d'Intégrale double :

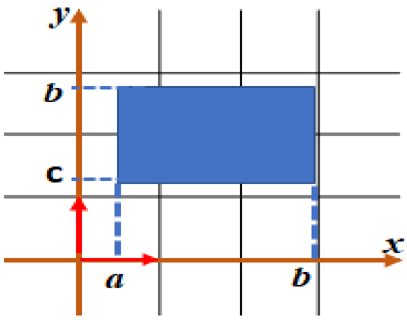
II. 2.1 Intégrale double en coordonnées cartésienne sur un rectangle :

Nous allons supposer le plan usuel $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$.

Théorème :

Soit $\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \times [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$, $(\mathrm{a} < \mathrm{b}, \mathrm{c} < \mathrm{d})$ un rectangle fermé du plan $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R} \to \mathbb{R}$ **une fonction continue**, alors f est intégrable sur $\boldsymbol{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\iint_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dxdy &= \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy}\, \boldsymbol{dx} \\ &= \int_c^d \left[\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dx}\right] dy \\ &= \int_a^b \left[\int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy}\right] dx\end{aligned}$$



$$\boldsymbol{R} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 / a \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}, c \leq \mathrm{b} \leq d\}$$

Exemple :

Soit $\boldsymbol{R} = [\mathbf{1},\mathbf{2}] \times [\mathbf{0},\mathbf{2}] \subset \mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{xy}}$

Calculer

$$\iint_{\boldsymbol{R}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,dxdy$$

Solution :

D'après la relation :

$$\iint_R (ye^{xy})\,dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^2 ye^{xy}\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[\int_1^2 ye^{xy}\,dx\right] dy$$

Or $\int_1^2 ye^{xy}\,dx = \left[\frac{ye^{xy}}{y}\right]_1^2 = e^{2y} - e^y$

On en déduit

$$\int_0^2 [e^{2y} - e^y]\,dy = \left[\frac{1}{2}e^{2y} - e^y\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^4 - e^2 + \frac{1}{2}$$

Note : En intégrant d'abord par rapport à x, le précédent calcul nous a pris juste deux lignes. Si nous commençons par intégrer d'abord par rapport à y, le calcul nécessite une intégration par parties.

Cas particulier :

Si f est constante de valeur $1 (f = 1)$, alors $\iint_{\boldsymbol{R}} dxdy$ correspond au volume d'un ensemble de base D et de hauteur constante 1, c'est donc l'aire de R :

$$Aire(R) = \iint_{\boldsymbol{R}} dxdy$$

II.2.2 Intégrales double sur un domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites verticales :

Théorème :

Soient $\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](\mathrm{a} < \mathrm{b})$ un intervalle fermé borné du plan $\mathbb{R}$, $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions continues sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ telles que $\forall \boldsymbol{x} \in [a, b], u(\mathrm{x}) \leq v(\mathrm{x})$.

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par $\boldsymbol{D} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 / a \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}, u(\mathrm{x}) \leq \mathrm{b} \leq v(\mathrm{x}) \}$

Si $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f est intégrable sur $\boldsymbol{D}$ et on a :

$$\iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dxdy = \int_a^b \left[\int_{u(\mathrm{x})}^{v(\mathrm{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy}\right] dx$$

Exercice : Calculer l'aire de la région du plan xOy délimitée par les courbes :

$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{16} - x^2}{\mathbf{2}}$ **et** $x + 2y = 4$

Exemple :

Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ compris entre les droites d'équations $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}, \boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ et les deux paraboles d'équations respectives $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^2 - \mathbf{4}, \boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})^2 + \mathbf{4}$.

On considère sur D la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} + \mathbf{1}$.

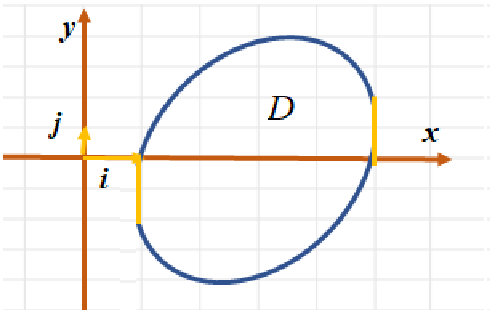
Nous allons calculer l'intégrale

$$I = \iint_{\boldsymbol{D}} f(x, y)\, dxdy$$

Solution :

Posant $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^2 - \mathbf{4}$ et $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{x} - \mathbf{3})^2 + \mathbf{4}$, on voit facilement que sur l'intervalle [1, 4], on a :

$u(\mathrm{x}) \leq v(\mathrm{x})$ quel que soit x.



$$\boldsymbol{D} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^{2} / \ \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq 4, u(\mathrm{x}) \leq \mathrm{y} \leq \ v(\mathrm{x}) \ \}$$

D'après la relation :

$$\iint_{D} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, dxdy = \int_{1}^{4} \left[\int_{u(\mathrm{x})}^{v(\mathrm{x})} (\boldsymbol{3x} - \boldsymbol{2y} + \boldsymbol{1})\, \boldsymbol{dy} \right] dx = \int_{1}^{4} [(3x+1)y - y^2]_{x^2-4x}^{-x^2+6x-5}\, dx$$

$$= \int_{1}^{4} \left((3x+1)(v(x) - u(x)) - v(x)^2 + u(x)^2\right) dx$$

On a donc

$$I = \int_{1}^{4} (-2x^3 - 2x^2 + 55x - 30)\, dx = \left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{55}{2}x^2 - 30x\right)_{1}^{4} = 153us$$

Exercice : Calculer l'aire de la région du plan xOy délimitée par les courbes :

$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{16}-\boldsymbol{x}^{2}}{\mathbf{2}}$ **et** $\quad x + 2y = 4$

Remarque :

L'intégrale double sur un domaine compris entre les graphes deux fonctions et deux droites horizontales :

$\forall \boldsymbol{y} \in [c,d], u(\mathrm{x}) \leq \ v(\mathrm{x}).$

$$\iint_{D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, dxdy = \int_{c}^{d} \left[\int_{u(\mathrm{x})}^{v(\mathrm{x})} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dx} \right] dy$$

avec $\boldsymbol{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2} / u(x) \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}, c \leq \mathrm{b} \leq \ d \ \}$

II.2.3 Intégrale double en coordonnées polaire :

Dans un repère orthonormé direct du plan $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$, un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) peut être repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) avec $r = OM$ et $\theta = \left(\widehat{\vec{\boldsymbol{\imath}}, \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}\right)$

(θ est quelconque pour le point O, et défini à 2π près pour un autre point).

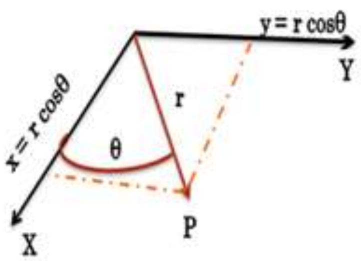
$$\boldsymbol{D} = [r_{min}\,, r_{max}] \times [\boldsymbol{\theta_{min}}, \boldsymbol{\theta_{max}}]$$

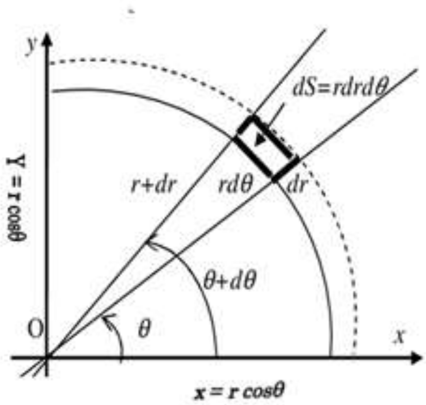
On peut passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires par les formules $rcos\theta$ et $y = rsin\theta$, et l'élément de surface $ds = dxdy$ vaut alors $ds = rd\theta dr$.

Donc la formule d'une intégrale sur un domaine D en coordonnées polaires s'écrit :

$$\iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dxdy = \iint_{\boldsymbol{\Omega}} f(rcos\theta, rsin\,\theta)\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{drd\theta} = \int_{\boldsymbol{\theta_{min}}}^{\boldsymbol{\theta_{max}}} \left[\int_{\boldsymbol{r_{min}}}^{\boldsymbol{r_{max}}} \boldsymbol{rf}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})\, \boldsymbol{dr}\right] d\theta$$

$$\iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dxdy = \left(\int_{\boldsymbol{\theta_{min}}}^{\boldsymbol{\theta_{max}}} g(\theta) d\theta\right) \times \left(\int_{r_{min}}^{r_{max}} \boldsymbol{r}f(r)\, dr\right)$$





Exemple :

Calculer l'aire d'un disque de centre O et de rayon R vérifient $0 \leq r \leq \boldsymbol{R}$ et $0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{2\pi}$.

Solution :

L'aire du disque égale à :

$$\iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, dxdy = \iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{1}.\, dxdy = \int_{\boldsymbol{r=0}}^{\boldsymbol{R}} \int_{\boldsymbol{\theta=0}}^{\boldsymbol{2\pi}} \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{dr} d\theta = \left(\int_{\boldsymbol{\theta=0}}^{\boldsymbol{2\pi}} d\theta\right)\left(\int_{\boldsymbol{r=0}}^{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{rdr}\right)$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R$$

$$= \boldsymbol{\pi} R^2 \text{us}$$

Exercice :

si D est le quart de disque de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre O vérifiant $x \geq 0, \; y \geq 0$

Calculer

$$\iint_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{xy}\, dxdy$$

(Réponse : $\frac{1}{96}$)

II. 3 Calcul d'intégrale triple :

L'intégrale triple d'une fonction $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ quelconque sur un volume V (un pavé, une boule, un cylindre...) généralise l'intégrale double.

Elle n'a pas, a priori, d'interprétation géométrique dans l'espace ; cela n'empêche pas les intégrales triples d'être utiles notamment en mécanique pour calculer des masses ou des moments d'inertie, en électrostatique, ...

Par exemple, la masse d'un solide V dont la densité volumique en un point $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ est une fonction $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ s'exprime par l'intégrale

$$\iiint_{\boldsymbol{V}} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\, dxdydz$$

Dans le cas où $f = 1$ cependant, de même qu'une intégrale double correspondait à une aire, une intégrale double correspond à un volume :

$$\iiint_{\boldsymbol{V}} \mathbf{1}\, dxdydz = \text{Volume}(V)$$

II.3.1 Intégrale triple en coordonnées cartésienne :

Pour calculer des intégrales triples, on procède comme pour les intégrales doubles, en décomposant l'intégrale en 3 intégrales simples.

$$\iiint_V \boldsymbol{f(x,y,z)}\, dxdydz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x)\, dy\, dx = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \left[\int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{d}} \left[\int_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{f(x,y,z)\, dz}\right] \boldsymbol{dy}\right] \boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}, c \leq \mathrm{y} \leq d, e \leq z \leq f\ \}$$

II.3.2 Intégrale triple en coordonnées cylindriques :

Dans un repère orthonormé direct du plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$,, un point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) peut être repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) avec avec $r = OP$ et $\theta = (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{OP}})$, P étant la projection orthogonale de M sur l'axe (Oz).

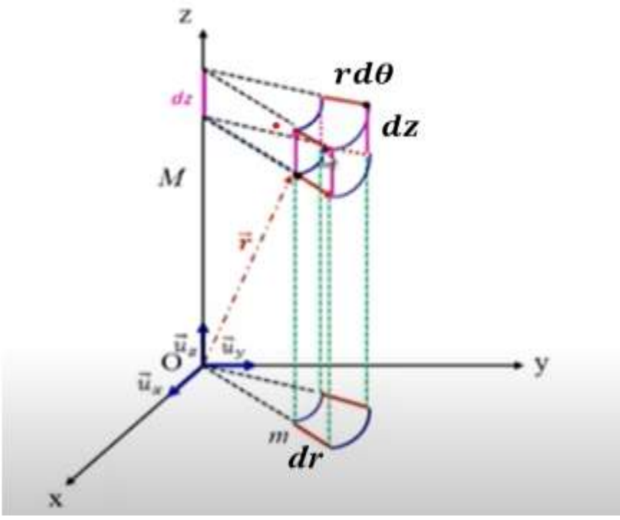
Comme en coordonnées polaires dans le plan, θ est quelconque pour un point de l'axe (Oz), et défini à 2π prêt pour un autre point.

On a alors $\boldsymbol{x = r\cos\theta}$, $y = \boldsymbol{r\sin\theta}$, $\boldsymbol{z = z}$,

et l'élément de volume $dV = dxdydz$ s'exprime par $\boldsymbol{dV = rd\theta drdz}$.

Par conséquent,

$$\iiint_V \boldsymbol{f(x,y,z)}\, dxdydz = \iiint_V \boldsymbol{f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)}\, dV = \iiint_V f(r,\theta,\varphi)\, r\, d\theta\, drdz$$



Exemple :

Calculer le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur L.

Solution :

Le volume d'un cylindre de centre O et de rayon R vérifient $0 \leq r \leq \boldsymbol{R}$ et $0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{2\pi}$.

$$\iiint_V f(r,\theta,\varphi)\, r\, d\theta\, drdz = \iiint_V 1.r\, d\theta\, drdz = \left(\int_0^R rdr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^L dz\right)$$

$$V = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}[z]_0^L$$

$$V = \pi L r^2$$

Exemple :

Le moment d'inertie d'un solide V par rapport à un axe Δ égal à :

$\iiint_{M\in V} d(M,\Delta)^2\, \rho(M)\, dV$

où $d(M,\Delta)$ est la distance d'un point M à l'axe et $\rho(M)$ est la densité volumique du solide. Déterminer le moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie (Oz) d'un cylindre de rayon R, de hauteur L et de densité volumique constante.

Solution :

$$\iiint_{M\in V} d(M,\Delta)^2\, \rho(M)\, dV = \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} d^2 \rho r dr d\theta dz$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta dz$$

$$= \left(\int_0^R r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^L dz\right)$$

$$M = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}[z]_0^L$$

$$M = \frac{\pi L R^4 \rho}{2}$$

II.3.3 Intégrale triple en coordonnées sphériques :

Dans un repère orthonormé direct du plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, un point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) peut être repéré par ses coordonnées sphériques (r,φ,θ).

Si P est le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy), $r = OM$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OP}}\right) \in [0,2\pi]$

et $\theta = \left(\widehat{\vec{k}, \overrightarrow{OM}}\right) \in [0, \pi]$

On a donc $\begin{cases} x = \ell cos\varphi \\ y = \ell sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$ avec $\ell = rsin\theta$

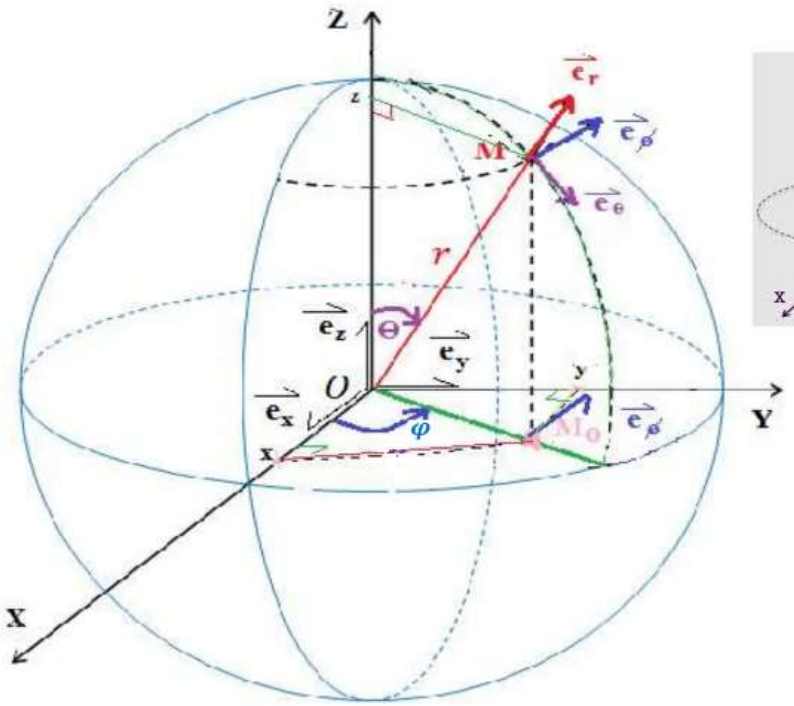
et on a vu que l'élément de volume $dV = dxdydz$ s'exprime par :

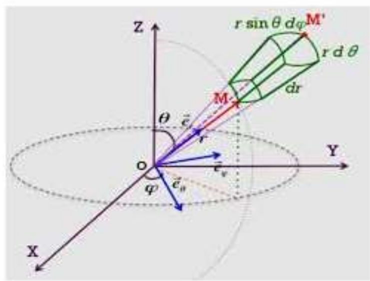
$dV = rd\theta\ dr\ \ell d\varphi = r^2 sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$

Ainsi :

$$\iiint_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{f(x,y,z)}\, dxdydz = \iiint_{\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{f}(rsin\theta cos\varphi, rsin\theta sin\varphi, r\,cos\theta)$$

$$= \iint_V f(r,\theta,\varphi) r^2\, sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$





Exemple : Calculer le volume d'une sphère de rayon R.

Solution :

Le volume d'une sphère de rayon R vérifient $0 \leq r \leq \boldsymbol{R}$, $0 \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\pi}$ et $0 \leq \boldsymbol{\varphi} \leq \boldsymbol{2\pi}$

$$\iiint_V f(r,\theta,\varphi)\,dV = \iiint_V 1.r^2 sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \left(\int_0^R r^2 dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$
$$V = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi}$$
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Exemple :

Le moment d'inertie d'un solide V par rapport à un axe Δ égal à :

$$\iiint_{M\in V} OM^2 \rho(M)dV$$

où $\rho(M)$ est la densité volumique du solide.

Calculer le moment d'inertie par rapport à son centre d'une sphère de rayon R et de densité volumique constante.

Solution :

$$\iiint_{M\in V} OM^2\rho(M)dV = \iiint_{M\in V} r^2\rho\, dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\rho\, r^2 sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 dr\, sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \rho\left(\int_0^R r^4 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^\pi sin\theta\, d\theta\right)$$

$$M = \rho\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi}[-\cos\theta]_0^\pi$$
$$M = \frac{2\pi R^5\rho}{5}[-\cos\pi + \cos 0]$$
$$M = \frac{4\pi R^5\rho}{5}$$

Chapitre III

Les intégrales impropres

La notion d'intégrale (au sens de Riemann) a été introduite, dans le chapitre II, pour les fonctions bornées sur un intervalle borné. En particulier, on sait que toute fonction continue et bornée sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann. Dans ce chapitre, on va étendre cette notion au cas où les fonctions considérées ne sont pas toujours bornées et au cas où l'intervalle sur lequel on intègre n'est pas nécessairement borné.

III. Intégrale impropre

Jusqu'à présent on avait considéré la définition d'une intégrale sur un intervalle lorsque cet intervalle est borné :

Le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$ (intégrale de Riemann) a été défini pour une fonction f réelle définie sur l'intervalle $[a, b]$ fermé et borné.

Si sur un certain intervalle le domaine sous la courbe de la fonction f est illimité, alors l'intégrale de f sur cet intervalle est dite impropre.

Une intégrale impropre (ou généralisée) concerne une fonction réelle définie sur un intervalle qui n'est pas un intervalle fermé et borné.

Les intervalles concernés sont donc :

- Les intervalles bornés, ouverts ou semi-ouverts :

$$[a, b[,]a, b],]a, b[\quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b)$$

- Les intervalles non bornés :

$$]-\infty, b],]-\infty, b[, [a, +\infty[\ ]a, +\infty[,]-\infty, +\infty[\quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

III.1 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle borné, infinies à l'une des extrémités :

C'est le cas si au moins l'une des bornes d'intégration est $-\infty$ ou $+\infty$. Dans ces cas-là, l'intégrale de la fonction de $\boldsymbol{a}$ à $+\infty$ est la limite de l'intégrale de $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ lorsque b tend vers $+\infty$, et l'intégrale de la fonction de $-\infty$ à $\boldsymbol{a}$ est la limite de l'intégrale de $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{b}$ à $\boldsymbol{a}$ lorsque $\boldsymbol{b}$ tend vers $-\infty$.

Par exemple on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[a, +\infty]$ et on se pose la question

"Est-ce que la limite $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ existe ou non ?"

Pour répondre à cette question, il faut connaitre la primitive de f. En effet si

$$\boldsymbol{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

alors

$$\boldsymbol{\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x)}$$

et seulement lorsque cette limite I existe on peut noter

$$\boldsymbol{I = \int_a^\infty f(x)\,dx}$$

et dans ce cas on dira que *l'intégrale converge*. Cette intégrale s'appelle l'*intégrale impropre* en b.

Si l'aire sous la courbe du domaine illimité est finie, alors l'intégrale impropre correspondante est dite **convergente**. Si cette aire est infinie, elle est dite **divergente**.

Définition :

Soit $f: [a, b[\to \mathbb{R}$, où $a < b \leq +\infty$, une fonction continue sur $[a, b[$.

On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si la fonction $x \to \int_a^x f(x) dx$ admet une limite finie quand *x* tend vers *b*.

On pose alors :

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

De même si $f: \to \mathbb{R}$, où est définie sur $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b,$ l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si $\boldsymbol{\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(x)\,dx}$ existe..

Exemple : Calculer l'intégrale impropre :

$$\boldsymbol{\int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx = \lim_{x\to+\infty}} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

Solution :

On sait calculer l'intégrale de 1 à b de la fonction $\boldsymbol{f: x \to} \frac{1}{x^2}$

$$\int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \int_1^b x^{-2}\,dx = \left[\frac{1}{-2+1} x^{-2+1}\right]_1^b = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

On calcule sa limite quand b tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{x\to+\infty}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}\right) = \mathbf{1}-\mathbf{0}=\mathbf{1}$$

Exercice :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\boldsymbol{dx} =$$

Choisissez une seule réponse (a) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) Elle est divergente

III.2 Exemples de calcul d'intégrales impropres

III.2.1 Utilisation d'une primitive :

Étude de : $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ ainsi à partir de l'égalité,

$$\forall x>0,\ \int_0^x e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^b = [-e^{-x}+e^0] = [1-e^{-x}]$$

$$,\ \lim_{x\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{x\to\infty}[1-e^{-x}] = 1$$

on déduit, en faisant tendre *x* vers $+\infty$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est convergente et vaut 1.

2. **Étude de :** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$

$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x,$

quand *x* tend vers $+\infty$, la fonction $x \to \int_0^x \frac{1}{1+x^2}$ a une limite qui vaut $\frac{\pi}{2}$.

On a donc montré la convergence de l'intégrale et calculé sa valeur.

III.2.2 Intégration par parties :

Etude de : $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$

On considère, pour un entier naturel *n*, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx.$

En intégrant par parties :

$$\forall x > 0,\ \lim_{x\to+\infty} \int_0^x x^n e^{-x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} [-x^n e^{-x}]_0^x + n \lim_{x\to+\infty} \int_0^x x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x x^{n-1} e^{-x}\,dx = \lim_{x\to+\infty} [-x^{n-1} e^{-x}]_0^x + (n-1) \lim_{x\to+\infty} \int_0^x x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

Quand x tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers 0 et le second a une limite égale à 1.

$$\lim_{x\to+\infty} [-x^{n-1} e^{-x}]_0^x = 0 + 1$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} x^0 e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = [-e^{x}]_0^{+\infty} = +1 \qquad I_0 \text{ existe et vaut } 1$$

On montre par récurrence que :

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = n(n-1)(n-2)I_{n-3} = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots I_0$$

$$I_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1 = n!$$

I_n existe pour un certain entier n, et vaut $n!$.

III.2.3 Changement de variable :

Etude de : $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

Pour tout x réel strictement positif, on pose, le changement de variable

$$u(x) = arctan\,x. \qquad du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

On obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\arctan x} u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{arctang\,x} = \frac{1}{2}((\arctan x)^2 - 0)$$

Quand x tend vers $+\infty$,

on a donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{8}$

D'où : $\int_0^{+\infty} \frac{arctan\, x}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{8}$

Les calculs faits nous ont montré simultanément la convergence de l'intégrale.

III.3 Intégrales de fonctions définies sur un intervalle non borné :

Nous allons considérer maintenant l'intégrale de f sur un intervalle non borné.

C'est aussi le cas de l'intégrale de c à b d'une fonction $\boldsymbol{f}$ qui tend vers l'infini lorsque x tend vers $\boldsymbol{c}$ (ou vers b). Si $\boldsymbol{f}$ tend vers $+\infty$ lorsque $\boldsymbol{x}$ tend vers c, alors l'intégrale de $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{c}$ à $\boldsymbol{b}$ est la limite de l'intégrale de $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ lorsque a tend vers c.

Par exemple :

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{dx} = \lim_{a\to 0^+} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Voici par exemple le calcul de

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{dx} = \lim_{a\to 0} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

On calcule d'abord l'intégrale de a à 1 :

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{dx} = \int_0^1 \boldsymbol{x}^{\frac{-1}{2}} \boldsymbol{dx} = \left[\frac{\boldsymbol{x}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_a^1 = \left[2\sqrt{\boldsymbol{x}}\right]_a^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\boldsymbol{a}} = 2 - 2\sqrt{\boldsymbol{a}}$$

On calcule sa limite quand b tend vers 0 :

$$\lim_{a\to 0} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a\to 0}\left(2 - 2\sqrt{\boldsymbol{a}}\right) = 2 - 2 \times 0 = 2$$

Définition :

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, une fonction continue sur $]a, b[$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ impropre en a et b, est convergente lorsque, pour un réel $c \in]a, b[$, les deux intégrales $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ convergent.

On pose alors :

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)\, dx} = \lim_{x\to a} \int_x^c \boldsymbol{f(x)\, dx} + \lim_{x\to b} \int_c^x \boldsymbol{f(x)\, dx}$$

Si l'une des deux intégrales diverge, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est dite divergente.

Étude de : $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

On a :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Pour la première intégrale, on étudie la fonction $x \to \int_x^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\arcsin x$

Quand x tend vers -1, cette fonction a une limite qui vaut $\frac{\pi}{2}$.

On montre de même que : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to 1} [\arcsin x]_0^x = \frac{\pi}{2}$

d'où

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \pi$$

Comme précédemment, on a simultanément montré l'existence de l'intégrale et calculé sa valeur.

Chapitre IV

Les équations différentielles

L'objectif est d'acquérir une bonne connaissance de base sur l'équation différentielle, une équation liant une fonction et sa dérivée. La résoudre revient à trouver une expression générale pour toutes ces solutions. On se limitera dans ce cours aux équations linéaires, du premier ordre et du deuxième ordre et aux dérivés partiels du premier ordre et du deuxième ordre.

IV. Les équations différentielles

IV.1 Equations différentielles ordinaires du 1er et du 2ème ordre :

Dans ce cours en intéressant à la résolution des équations différentielle d'ordre 1 et 2, on cherche une fonction y(x) qui est continument dérivable sur un intervalle de définition ;

par exemple : $\boldsymbol{y' + a(x)y = b(x)}$,

où y′ est la dérivée de y.

Dire qu'elle est du premier ordre veut dire que cette équation ne fait intervenir que la fonction y et sa dérivée première y′.

- Résoudre une telle équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions dérivables y(x) définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant,

$$\text{pour tout } x \in I, \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

IV.1.1 Equation différentielle du premier ordre sans second membre (ED du 1ier OSSM) :

On commence par chercher la solution générale de l'équation sans second membre,

l'équation : $y' + a(x)y = 0$ … (I)

$$(I) \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = -a(x)y \quad \Rightarrow \int \frac{dy(x)}{y(x)} = -\int a(x)\,dx \quad \Rightarrow \ln y(x) = -\int a(x)\,dx$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \lambda\, e^{-A(x)}$$

Soit A(x) une primitive de la fonction a(x). Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, λ une constante réelle ou complexe.

$$\boxed{y_g(x) = \lambda e^{-A(x)}}$$

Exemple : Trouver la solution générale de l'éq : $y' = 3y \quad \dots I$

Solution :

$$I \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 3dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx \;\Rightarrow\; \ln y = 3x + Cst$$

$$I \Rightarrow y(x) = e^{3x+Cst} = e^{3x}\,e^{Cst} = \lambda e^{3x} \qquad \Rightarrow \qquad y_g(x) = \lambda e^{3x}$$

Théorème :

L'équation $y' + a(x)y = 0$ admet une solution générale la fonction $y_g(x)$ définies par :

$$y_g(x) = \lambda\, e^{-A(x)} \qquad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle quelconque.}$$

IV.1.2 Equation différentielle du premier ordre avec second membre (ED du 1ier OASM) :

Voici la procédure :

Pour résoudre l'équation avec second membre : $y' + a(x)y = b(x) \quad \dots.\ (II)$

a(x) et b(x) sont deux fonctions continus et dérivables sur l'intervalle I ;

- on commence d'abord à chercher les solutions de l'équation homogène :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad \dots.\ (I)$$

(Solution trouvé pour **ED du1ier ordre SSM** ⇒ solution générale $y_g(t)$)

- Une fois que la solution générale ($y_g(x)$) est connue alors on pose:

$$y_p(x) = \lambda(x)g(x) \qquad \text{telle que} \quad g(x) = e^{-A(x)}$$

l'équation (II) admet une solution complet $y(x)$ égale la somme de la solution générale trouvé pour l'éq (I) et la solution particulière, donc on pose : $y(x) = y_p(x) + y_g(x)$.

$y(x)$	$=$	$y_p(x)$	$+$	$y_p(x)$
solution générale de l'éq avec second membre		**solution particulière**		**solution générale de l'éq sans second membre (homogène)**

Et on dérive : $y_p'(x) = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x)$ .....(1)

En remplace (1) dans (II) on cherche à trouver $\lambda(x)$:

$y' + a(x)y = b(x) \quad \Rightarrow \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x) + a(x)\lambda(x)g(x) = b(x)$

On trouve que : $\lambda(x) = \int \frac{b(x)}{g(x)} dx$

Et enfin en essaieras de trouver $y(x) = \lambda\, g(x) + \left[\int \frac{b(x)}{g(x)} dx\right] g(x)$

Proposition :

Soit $y_p(x)$ une solution de $y' + a(x)y = \mathrm{b(x)}$, appelée solution particulière de l'équation. Alors toute solution y s'écrit $y_p(x) + y_g(x)$, où y_g est une solution de l'équation homogène (ED du 1[ier] OSSM).

Exercice :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ $sur\ \mathbb{R}$
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ $sur\ ]-1, +\infty\,[$
3. $y' - 2xy = (2\mathrm{x} - 1)e^x$ sur R
4. $y' - y/x = x^2$ $sur\ ]0, +\infty[$

Solution de l'exemple 1 :

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est :

$$y_g(x) = \lambda e^{-x} = \lambda\, g(x).$$

on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)g(x) = \lambda(x)e^{-x}$

de sorte que $y_p'(x) = \lambda'(x)g(x) + \lambda(x)g'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$.

On introduit ceci dans l'équation différentielle et on trouve :

$$\lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \quad \Rightarrow \quad \lambda'(x)e^{x} = \frac{1}{1+e^x}$$

Après simplification, ceci donne $\lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow \int d\lambda(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$

$$\Rightarrow \lambda(x) = \ln(1+e^x)$$

Une solution particulière est donc donné par $y_p(x) = \lambda(x)e^{-x} = \ln(1+e^x)e^{-x}$

Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda\, e^{-x}$$

IV.1.3 Equation différentielle d'ordre deux sans second membre (ED du 2ième OSSM) :

On commence par chercher la solution générale de l'équation sans second membre (homogène) :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{….(E}_1\text{)}$$

L'équation caractéristique associé à l'éq (E_1) s'écrit : $ar^2 + br + c = 0$ ….(E_2) avec $a, b\ c \in \mathbb{R}$

On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

L'ensemble des solutions générales $y_g(x)$ sont donnée dans le tableau suivant :

Δ	Racines de l'équation E_2	$y_g(x)$
$\Delta > 0$	Deux racines réelles : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y_g(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x}$, C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	Une racine double : $r_1 = r_2 = r = \frac{-b}{2a}$	$y_g(x) = (C_1 x + C_2)e^{rx}$, C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	Deux racines complexes : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$	$y_g(x) = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)\, e^{\alpha x}$ C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exemple : Trouver la solution générale de l'éq : $y'' + y' + y = 0$ ….(E_1)

Solution : L'équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$ ….(E_2)

On calcul le discriminant : $\Delta = -3 = i^2 3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$, avec $\alpha = \frac{-1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-(-3)}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$r_1 = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$ et $r_2 = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$

Donc $y_g(x) = \left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) e^{\frac{-x}{2}}$

IV.1.4 Equation différentielle d'ordre deux avec second membre (ED du 2ième OASM) :

On cherche à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants ou a, b et c sont des constantes réelles :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \;\ldots..Eq.1$$

Etape 1 : On détermine d'abord les solutions générales de l'équation homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \ldots..Eq.2$$

a. si l'équation caractéristique admet deux racines r_1 et r_2, alors les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto y_g(x) = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x} \quad , C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

b. si l'équation caractéristique admet une racine double r, alors les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto y_g(x) = C_1 x + C_2 \quad , C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

c. si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto y_g(x) = (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)\, e^{\alpha x}$.

Etape 2 :

On cherche ensuite une solution particulière : $y_p(x)$

a. si $f(x)$ est un polynôme, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

b. si $f(x) = Ae^{kx}$, on cherche une solution particulière sous la forme

- Be^{kx}, si $\boldsymbol{k}$ n'est pas racine de l'équation caractéristique;
- $(Bx + C)e^{kx}$si $\boldsymbol{k}$ est racine simple de l'équation caractéristique;
- $(Bx^2 + Cx + D)e^{kx}$si $\boldsymbol{k}$ est racine double de l'équation caractéristique.

c. si $f(x) = Bcos\,(wx)$, on cherche une solution sous la forme : $y_p(x) = \text{a}\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$

sauf si l'équation homogène est $y'' + \omega^2 y = 0$. Dans ce cas, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = a\ x\ sin(\omega x)$.

d. si $f(x) = Bsin\,(wx)$, on cherche une solution sous la forme : $y_p(x) = \text{a}\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$

sauf si l'équation homogène est $y'' + \omega^2 y = 0$. Dans ce cas, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = a\ x\ cos(\omega x)$.

e. Plus généralement, si $f(x) = P(x)e^{kx}$, avec P un polynôme, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q(x)e^{kx}$.

Les solutions de l'équation 1 s'écrivent comme la somme de cette solution particulière et des solutions de l'équation homogène.

Exemple : Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \ldots\ldots (E_1)$$

Solution :

1. On détermine $y_g(x)$ solution de l'équation homogène d'ordre 2 : $y'' - 3y' - 4y = 0 \ldots\ldots (E_2)$

L'équation caractéristique : $r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow (r-4)(r+1) = 0$

$$\Rightarrow r_1 = 4\,,\ r_2 = -1$$

Donc : $y_g(x) = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{-x}$, C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$

2. Maintenant on va chercher à trouver une fonction particulière qui rassemble $f(x)$:

Donc on propose : $y_p(x) = Ae^{2x}$

Sa dérivée première : $y'_p(x) = 2Ae^{2x}$

Sa dérivée seconde : $y''_p(x) = 4Ae^{2x}$

En remplace cette fonction et ces dérivées dans l'eq.E_1, on trouve :

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} \Rightarrow 4Ae^{2x} - 3.2Ae^{2x} - 4\,Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow -6A = 3$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Donc la solution de l'eq.E_1 : $y(x) = y_g(x) + y_p(x) = C_1\, e^{4x} + C_2\, e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x}$

Exercice : Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. $y'' - 3y' + 2y = 1 + 2e^{x} \ldots\ldots Eq.E$

Solution :

L'équation homogène correspondante est $y'' - 3y' + 2y = 0$

Le polynôme caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r-2)$

donc les racines sont $r = 1$ et $r = 2$

La solution de l'équation homogène est donc de la forme : $y_g(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{2x}$, C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$

Cette équation a deux seconds membres 1 et $P(x)e^{mx}$.

a. 2nd membre = 1, qui est de la forme $P(x)e^{mx}$ avec $m = 0$ et P le polynôme de degré 0, P(x) = 1. Donc (E) a une solution de la forme Q(x) où Q est un polynôme de degré 0, i.e. Q(x) = α.

Comme Q est solution de (E), alors $Q'' - 3Q' + 2Q = 1$

Ce qui donne $2\alpha = 1$, donc $\boxed{\alpha = \frac{1}{2} = Q(x)}$

b. 2nd membre $2e^x$, qui est de la forme $P(x)e^{mx}$ où $m = 1$ et P est un polynôme de degré 0. Comme 1 est une racine simple $(r = 1\,)$ du polynome caractéristique, alors (E) a une solution de la forme $P(x)xe^x$ où P est un polynôme de degré 0, i.e. de la forme $Q(x) = \beta x e^x$

Étant donné que Q est solution de (E), alors :

$$Q'' + 3Q' + 2Q = 2e^x \Rightarrow (\beta x e^x)'' - 3(\beta x e^x)' + 2\beta x e^x = 2e^x$$

$$\Rightarrow \beta e^x + \beta e^x + \beta x e^x - 3\beta e^x - 3\beta x e^x + +2\beta x e^x = 2e^x$$

$$\Rightarrow \beta + \beta + \beta x - 3\beta - 3\beta x + +2\beta x = 2$$

$$\Rightarrow -\beta e^x = 2e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = -2}$$

L'ensemble de solutions d'une équation différentielle du second ordre est un espace vectoriel de dimension 2, alors la solution générale de (E) est de la forme :

$$\boxed{y(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{2x} + \frac{1}{2} - 2xe^x \;,\; C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}}$$

Ici les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$ donnent

$$\begin{cases} C_1\, e^0 + C_2\, e^{2.0} + \frac{1}{2} - 2.0.\, e^0 = 0 \\ C_1\, e^0 + 2C_2\, e^{2.0} - 2.0.\, e^0 - 2e^0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ C_1 + 2C_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne : $C_2 = \frac{5}{2}$ et $C_1 = -3$

Dans ce cas, $\boxed{y(x) = -3\, e^x + \frac{5}{2}\, e^{2x} + \frac{1}{2} - 2xe^x}$

IV.2 Equations aux dérivées partielles du 1ière ordre et 2ième ordre

IV.2.1 La fonction à deux variables :

Définition :

Une fonction à deux variables est une application : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Domaine de définition de la fonction ***f*** **(*x*)**: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y)\ existe\ dans\ \mathbb{R}\}$

Exemple :

Calculer l'image de ***f(x)*** au point (-1, 1) tel que *f* égale à : $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + 1$

$$f(-1, 1) = 1 - 1 + 2 + 1 = 3 \in \mathbb{R}$$

IV.2.2 1ière dérivée partielle (EDP du 1ière O) :

Une EDP est alors une relation entre les variables (x, y) et les dérivées partielles de $f(x, y)$

Définition :

Soit ***f(x)*** une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^2$, pour cette fonction à deux variables il y'a deux dérivées partielles :

- une par rapport à ***x***, en considérant ***y*** comme une constante, noté : $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour simplifier, on utilise parfois f'_x
- et l'autre par rapport à ***y***, en considérant ***x*** comme une constante, noté : $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou parfois f'_y

Question : Calculer la 1ière dérivée partielle des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = xy - x^2 + 4y^2 - y$

1- Par rapport à **x**, **y** constant : $\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x$

2- Par rapport à **y**, **x** constant : $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 8y - 1$

- $f(x,y) = \frac{\sqrt{y}+x}{x^2+y^2-1}$

1- Par rapport à **x**, **y** constant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(\sqrt{y}+x)'\,(x^2+y^2-1)-(\sqrt{y}+x)\left(x^2+y^2-1\right)'}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{x^2+y^2-1-(\sqrt{y}+x)2x}{(x^2+y^2-1)^2}$$

2- Par rapport à **y**, **x** constant :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(\sqrt{y}+x)'\,(x^2+y^2-1)-(\sqrt{y}+x)\left(x^2+y^2-1\right)'}{(x^2+y^2-1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x^2+y^2-1)-\sqrt{y}2y}{(x^2+y^2-1)^2}$$

- $f(x,y) = \sin y + 2yx + \frac{1}{y}$

1. Par rapport à **x**, **y** constant : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$
2. Par rapport à **y**, **x** constant : $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y + 2x - \frac{1}{y^2}$

IV.2.3 2ième dérivée partielle (EDP du 2ière O) :

De la même façon que précédemment, on peut étudier l'existence de la dérivée par rapport à **x** de $f_x'(x,y)$ et de $f_y'(x,y)$; on définit ainsi les dérivées second que l'on note :

$$f_{x^2}''(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad f_{xy}''(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

On peut définir les dérivées second par rapport à **y** de $f_y'(x,y)$et de $f_x'(x,y)$ que l'on note :

$$f_{y^2}''(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad f_{yx}''(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Exemple :

Calculer la 2ième dérivée partielle de la fonction : $f(x,y) = x^3 + y^3$

Solution :

$$f''_{x^2}(x,y) = \frac{\partial^2(x^3+y^3)}{\partial x^2} = \frac{\partial(3x^2)}{\partial x} = 6x$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2(x^3+y^3)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(6x)}{\partial y} = 0$$

$$f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2(x^3+y^3)}{\partial y^2} = \frac{\partial(3y^2)}{\partial y} = 6y$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2(x^3+y^3)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(3y^2)}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \; f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$$

Les dérivées partielles par à rapport à $\boldsymbol{x}$, puis par rapport à $\boldsymbol{y}$ sont les dérivées partielles ***mixtes***. Si les dérivées partielles mixtes existent et sont continues, alors elles sont égales : l'ordre de dérivation est indifférent : c'est un résultat établi dans toute sa généralité par Karl H. Schwarz :

Théorème de Schwarz :

Soit f est une fonction numérique de deux variables $\boldsymbol{x}$ et **y**. Si $\boldsymbol{f}$ est de classe C^2 (admettant des dérivées partielles continues d'ordre 1 et 2 par rapport à chaque variable), alors :

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Chapitre V

La transformée de Laplace

Un des principes de la Transformée de Laplace permet de résoudre une équation différentielle linéaire en basculant dans un autre espace, l'espace de transformée de Laplace. A l'intérieur de ce nouvel espace, vous aurez juste à utiliser des techniques algébriques connues. Seulement, il ne faudra pas oublier d'utiliser le processus inverse, qui s'appelle la transformée de Laplace inverse, afin de pouvoir trouver l'expression de la solution du problème, c'est-à-dire l'original du système.

V. La transformée de Laplace :

Une méthode mathématique les plus efficaces pour :

- Résoudre les équations différentielles en électricité et électronique
- Le calcul de la fonction de transfert d'un système
- L'analyse de la réponse d'un système

V.1 Définition

Si $f(t)$ désigne une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle t, définie sur le domaine $t \in]0, +\infty[$ et nulle pour $t < 0$; on appelle **Transformée de Laplace** de $f(t)$ la fonction $F(p)$ définie par :

$$L(f(t))_p = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dx$$

où p est la variable réel ou complexe positive.

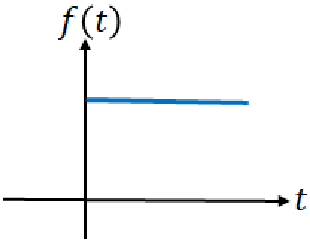
- On dit que $F(p)$ est " l'image " de $f(t)$ par la TL et également $f(t)$ est l'originale de $F(p)$.

$$f(t) \xrightarrow{TL} F(p)$$

V.2 Transformée de Laplace de quelques fonctions élémentaires

a. Transformée de Laplace d'un échelon unitaire :

- TL d'un échelon unitaire : $f(t) = u(t), \quad t \geq 0$

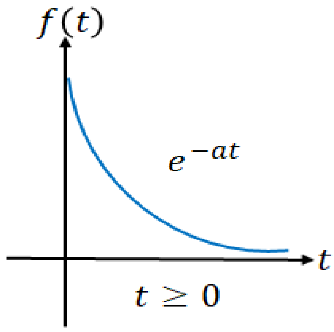


$$L(f(t))_p = \int_0^{+\infty} 1\,.\,e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{L(1)_p = \frac{1}{p}}$$

b. Transformée de Laplace de la fonction exponentielle :

- TL de la fonction $f(t) = e^{-at}, \quad t \geq 0$



$$L\big(f(t)\big)_p = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p-a}\right]_0^{+}$$

$$\boxed{L(e^{-at})_p = \frac{1}{p-a}}$$

c. Transformée de Laplace de la fonction puissance :

- TL de la fonction $f(t) = t\,, \quad t \geq 0$ on utilisant l'intégration par parties :

$$L(t)_p = \int_0^{+\infty} t.e^{-pt}\, dx = \left[-\frac{t.e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} -1.e^{-pt}\, dx = \left[-\frac{e^{-pt}}{p^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}$$

$$\boxed{L(t)_p = \frac{1}{p^2}}$$

- TL de la fonction $f(t) = t^2\,, \quad t \geq 0$ on utilisant deux fois l'intégration par parties :

$$L(t^2)_p = \int_0^{+\infty} t^2.e^{-pt}\, dx = \left[-\frac{t^2.e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{p}\int_0^{+\infty} t.e^{-pt}\, dx = \frac{2}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{p^3}$$

$$\boxed{L(t^2)_p = \frac{2}{p^3}}$$

- TL de la fonction $f(t) = t^n\,, \quad t \geq 0$ on utilisant n fois l'intégration par parties :

$$L(t^n)_p = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-pt}\, dx = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\frac{n-2}{p}\dots\frac{1}{p}\int_0^{+\infty} t^0.e^{-pt}\, dx$$

$$= \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\frac{n-2}{p}\dots\frac{1}{p}[-e^{-pt}]_0^{+\infty} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$\boxed{L(t^n)_p = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

d. Transformée de Laplace de la fonction dérivée :

- TL de la fonction dérivé $f'(t)$, $t \geq 0$

$$L\big(f'(t)\big)_p = \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dx$$

avec une simple intégration par parties on montre facilement que si $f(t)$ est continue, alors :

$$L\big(f'(t)\big)_p = p.L\big(f(t)\big)_p - f(0)$$

On peut ensuite obtenir :

- TL de la dérivé second de la fonction $f(t)$, $t \geq 0$

$$L\big(f''(t)\big)_p = p^2.L\big(f(t)\big)_p - pf(0) - f'(0)$$

et, par récurrence, les transformées de Laplace des dérivées troisième, quatrième, etc.

- La formule générale de la dérivation :

$$\boxed{L\big(f^n(t)\big)_p = p^n.L\big(f(t)\big)_p - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f^1(0) - \cdots - p^0 f^{n-1}(0)}$$

V.3 Propriétés

– **Linéarité :** Soient $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^+ \to \not\subset$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace F(p) et G(p), et soient α et β deux réels ; alors :

$$TL[\boldsymbol{\alpha}.f(t) + \boldsymbol{\beta}.g(t)] = L(\boldsymbol{\alpha}.f(t) + \boldsymbol{\beta}.g(t))_p = \boldsymbol{\alpha}L(f(t))_p + \boldsymbol{\beta}L(g(t))_p$$

Grace à cette propriété, on peut déterminer la transformée de cosinus et sinus :

$$\cos \boldsymbol{a}t = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{iat} + e^{-iat}\right] \Rightarrow L\left(\frac{1}{2}\left[e^{iat} + e^{-iat}\right]\right)_p = \frac{1}{2}\left[L\left(e^{iat}\right)_p + L\left(e^{-iat}\right)_p\right]$$

$$\sin \boldsymbol{a}t = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[e^{iat} - e^{-iat}\right] \Rightarrow L\left(\frac{1}{2i}\left[e^{iat} - e^{-iat}\right]\right)_p = \frac{1}{2i}\left[L\left(e^{iat}\right)_p - L\left(e^{-iat}\right)_p\right]$$

avec $L(e^{at})_p = \frac{1}{p-a}$ on trouve que :

$$L(\cos at)_p = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right] = =\frac{1}{2}\left[\frac{p+ia+p-ia}{(p-ia)(p+ia)}\right] = \frac{p}{p^2+a^2}$$

$$\boxed{L(\cos at)_p = \frac{p}{p^2+a^2}}$$

De même on trouve :

$$L(\sin at)_p = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right] = =\frac{1}{2i}\left[\frac{p+ia-p+ia}{(p-ia)(p+ia)}\right] = \frac{1}{2i}\frac{+2ia}{p^2+a^2} = \frac{+a}{p^2+a^2}$$

$$\boxed{L(\sin at)_p = \frac{a}{p^2+a^2}}$$

Exemple : Déterminer la TF de : $f(t) = 2\sin t - 3\cos\sqrt{2}t$

Solution :

$$TL[f(t)] = TL\left[2\sin t - 3\cos\sqrt{2}t\right] = 2L(\sin t)_p + 3L\left(\cos\sqrt{2}t\right)_p$$

$$= 2\frac{1}{p^2+1} + 3\frac{p}{p^2+2}$$

$$= \frac{2}{p^2+1} + \frac{3p}{p^2+2}$$

Exemple : Déterminer la TF de :$f(t) = \cos t - u(t)$

Solution :

Déterminer la TL de :

$$TL[f(t)] = \begin{cases} TL[\cos t] = \dfrac{p}{p^2+1} \\ TL[u(t)] = \dfrac{1}{p} \end{cases} \Rightarrow \quad TL[f(t)] = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p}$$

– **Multiplication par un réel :** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant des transformée de Laplace $F(p)$, et soit un réels k > 0 ; alors :

$$TL[k.f(t)] = k.L(f(t))_p = \int_0^{+\infty} k.e^{-pt}\,dt = k\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = k.F(p)$$

Exemples de dérivation :

1. Déterminer la TL de dérivée de : $f(t) = \cos 3t$

On connait que : $f(t) = \cos 3t \Rightarrow L\big(f(t)\big)_p = F(p) = \frac{p}{p^2+9}$

$$L\big(f'(t)\big)_p = L((\cos 3t)'\ )_p = p.L(\cos 3t)_p - f(0) = p.\frac{p}{p^2+9} - \cos 0 = \frac{p^2}{p^2+9} - 1$$

2. Déterminer la TL de dérivée de : $f(t) = \sin t$

On connait que : $f(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad L\big(f(t)\big)_p = F(p) = \frac{1}{p^2+1}$

$$L\big(f'(t)\big)_p = L((\sin t)'\ )_p = p.L(\sin t)_p - f(0)$$

$$= p.\frac{1}{p^2+1} - \sin 0$$

$$= \frac{p^2}{p^2+1}$$

V.4 Transformée de Laplace de l'intégration :

L'intégration dans le domaine du temps correspond à diviser par p dans le domaine de Laplace.

On peut démontrer cette relation en utilisant la définition de la transformée de Laplace et une intégration par parties.

$$L\left(\int_0^t f(t)\ dx\right)_p = \frac{F(p)}{p}$$

V.5 Théorème du retard (La translation dans le domaine de Laplace) :

La translation dans le domaine de Laplace de fréquence correspond à une multiplication par un exponentiel dans le domaine du temps.

Pour $t \geq a$

$$L\big(e^{at}f(t)\big)_p = \int_0^{+\infty} e^{at}\ e^{-pt}\ dx = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\ dx = F(p-a)$$

Exemple :

Déterminer la TL de : $f(t) = e^{2t}\cos\sqrt{3}t$

On connait que : $L(\cos\sqrt{3}t)_p = \frac{p}{p^2+3}$ et $L(e^{2t})_p = \frac{1}{p-2}$

$$\Rightarrow L(e^{2t}\cos\sqrt{3}t)_p = L(\cos\sqrt{3}t)_{p-2} = F(p-2)$$

$$= \frac{p-2}{(p-2)^2+3}$$

V.6 Changement d'échelle :

Le changement d'échelle permet d'établir la relation entre f (t) et F(p) lorsque la variable de temps est multipliée par une constante k > 0 :

$$L(f(kt))_p = \int_0^{+\infty} f(kt)\, e^{-pt}\, dt = \langle {u = kt \atop du = kdt} \rangle = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-\frac{p}{k}t}\, dt = \frac{1}{k} L(f(t))_{p/_t}$$

$$L(f(kt))_p = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

V.7 Transformée inverse :

L'inverse de la TL consiste à déterminer la fonction originale $f(t)$ à partir de sa transformée de Laplace $F(p)$:

$$L(f(t))_p = F(p) \;\Rightarrow\; f(t) = L^{-1}(F(p))_p$$

Exemples :

1. $F(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow TL^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = u(t)$
2. $F(p-2) = \frac{p-2}{(p-2)^2+3} \Rightarrow TL^{-1}\left[\frac{p-2}{(p-2)^2+3}\right]$

   donc $f(t) = e^{2t}\cos\sqrt{3}t$
3. $F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3} \Rightarrow TL^{-1}\left[\frac{3p+7}{p^2-2p-3}\right] = TL^{-1}\left[\frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1}\right]$

   donc $f(t) = 4e^{3t} - e^{-t}$

4. $F(p) = \frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{a}{p-1} + \frac{bp+c}{p^2+1} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$

$$F(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{2p-1}{p^2+1} = 2\frac{1}{p-1} - 2\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}$$

$$TL^{-1}\left[\frac{3p+7}{(p-1)(p^2+1)}\right] = TL^{-1}\left[2\frac{1}{p-1} - 2\frac{p}{p^2+1} - 3\frac{1}{p^2+1}\right]$$

donc $\quad f(t) = 2e^t - 2\cos t + \sin t$

V.8 Application à la résolution d''équations différentielles :

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficient constants :

$$L(f(t))_p = p^n . L(f(t))_p - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f^1(0) - \cdots - p^0 f^{n-1}(0)$$

$$f(t) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y = y(t)$ pour $t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales : $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, …, $y^{n-1}(0) = y_0^{n-1}$.

On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation :

$$L[f(t)]_p = L[a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y]_p$$

En utilisant les propriétés de linéarité

$$L[f(t)]_p = a_0 L(y^n)_p + a_1 L(y^{n-1})_p + \cdots + a_{n-1} L(y')_p + a_n L(y)_p$$

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9y(t) = 1$ avec $y'(0) = y(t) = 0$

$$TL\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9y(t)\right] = TL[1] \Rightarrow p^2 TL(y(t))_p - p\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 9TL(y(t)) = TL(1)$$

$$\Rightarrow p^2 TL(y(t))_p + 9TL(y(t)) = TL(1)$$

$$\Rightarrow (p^2 + 9) TL(y(t))_p = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \; TL(y(t))_p = \frac{1}{p(p^2+9)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+9} = \frac{(a+b)p^2+cp+9a}{p(p^2+9)} \;\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \Rightarrow b=-a=-1/9 \\ 9a=1 \;\Rightarrow a=1/9 \\ c=0 \end{cases}$$

donc $\quad TL(y(t))_p = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{(p^2+9)}\right]$

$$\Rightarrow \; y(t) = TL^{-1}\left[\frac{1}{9}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{(p^2+9)}\right]\right]$$

$$\Rightarrow \; y(t) = \frac{1}{9}\left[1 - \frac{1}{3}\sin 3t\right]$$

V.9 Utilisation de la transformée de Laplace à partir des Tables

Pour un problème donné, on obtient assez facilement l'image $F(p)$ d'une fonction $f(t)$, dans la recherche de l'origine de la fonction $f(t)$ on utilise la Table de correspondances on " dictionnaire de la Transformée " $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Table des transformées de Laplace :

Fonction $f(t)$	$L(f(t))_p = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dx$
$u(t) = 1$	$\frac{1}{p}$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(at), \quad a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at), \quad a \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+a^2}$

Exercice :

Résoudre l'équation différentielle suivantes par la transformée de Laplace :

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = 1 \;\; et \;\; y'(0) = 0$$

Solution :

$$y'' - 2y' + y = 0 \;\Rightarrow\; L(y'' - 2y' + y)_p = L(0)_p$$

$$\Rightarrow\; L(y'')_p + L(-2y')_p + L(y)_p = 0$$

$$\Rightarrow\; L(y'')_p + -2L(y')_p + L(y)_p = 0$$

$$\Rightarrow\; p^2.L(y)_p - pf(0) - f'(0) + -2\left(p.L(y)_p - f(0)\right) + L(y)_p = 0$$

$$\Rightarrow\; p^2.L(y)_p - p.1 - 0 - 2\left(p.L\big(y(t)\big)_p - 1\right) + L(y)_p = 0$$

$$\Rightarrow\; p^2.L(y)_p - p - 2p.L(y)_p + 2 + L(y)_p = 0$$

$$\Rightarrow\; (p^2 - 2p + 1)L(y)_p = p - 2 = p - 1 - 1$$

$$\Rightarrow\; L(y)_p = \frac{p-2}{p^2-2p+1} = \frac{p-2}{(p-1)^2} = \frac{p-1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}$$

$$\Rightarrow\; y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)_p + L^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)_p = e^t + e^t t = e^t(1+t)$$

$$\Rightarrow\; y(t) = e^t(1+t)$$

Chapitre VI

La transformée de Fourier

La Transformée de Fourier peut être vue comme une généralisation des séries de Fourier aux signaux non périodiques

VI. La transformation de Fourier

- Acquérir les outils de base que sont : les séries de Fourier et la transformée de Fourier.
- Développer et interpréter une fonction périodique en séries de Fourier;
- Calculer et manipuler la transformée de Fourier d'une fonction (à une seule variable).

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est une opération qui transforme une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ en une autre fonction, décrivant le spectre fréquentiel de cette dernière. Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa transformée de Fourier est la fonction $\mathcal{F}(f)$.

VI.1 Rappel sur le développement en série de Fourier

Soit f une fonction (ou signal) périodique de période T.

Joseph FOURIER, mathématicien français, affirma, dans un mémoire daté de 1807, qu'il était possible, dans certaines conditions, de décomposer une fonction périodique f sous la forme d'une somme infinie de signaux sinusoïdaux.

Ainsi on a, dans certaines conditions (par exemple si f est de classe C^1 par morceaux):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$

On peut donc considérer ***f*** comme la somme

- d'un terme constant a_0
- d'un nombre infini de termes sinusoïdaux appelés harmoniques.

L'harmonique de rang *n* est

$$u_n = a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

Il peut s'écrire sous la forme

$$u_n(t) = A_n \cos(n\omega x - \varphi_n)$$

avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n}$ $(si\ a_n \neq 0)$

A_n représente l'amplitude, $\frac{2\pi}{n\omega}$ la période, φ_n la phase et $\frac{n\omega}{2\pi}$ la fréquence.

Remarque :

Si on utilise les coefficients de Fourier complexe, on obtient alors une décomposition :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

avec c_n coefficient de Fourier complexe de *f*.

VI.2 Série de Fourier

VI.2.1 Définition

On appelle série de Fourier associée à $f(x)$, la série de fonctions trigonométrique de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

avec $x \in \mathbb{R}, \omega > 0, \omega = \frac{2\pi}{T}$

pour tout n dans $\mathbb{N}$, les coefficients a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier, peuvent s'écrire comme suit :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx$$

Et $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, dx$

En particulier si ω = 1, cas des fonctions 2π-périodique ;

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Dans cette partie, on ne va considérer que les fonctions de période 2π. A chaque fois on précisera les formules pour une période quelconque.

VI.2.2 Propriétés :

Nous allons étudier quelques cas particuliers. Rappelons d'abord quelques propriétés.

$f: k \rightarrow k$ une fonction intégrable sur $[-k,\ k]$.

- f est paire $\Rightarrow \int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{k} f(x)\,dx$
- f est impaire $\Rightarrow \int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 0$

➲ Si f est développable en série de Fourier :

a. $f(x)$ est paire :

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$

car la fonction $x \mapsto f(x).\cos(nx)$ est paire.

et $b_n = 0$ car la fonction $x \mapsto f(x).\sin(nx)$ est impaire

b. f est impaire :

$a_n = 0$ car la fonction $x \mapsto f(x).\cos(nx)$ est impaire.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

car la fonction $x \mapsto f(x).\sin(nx)$ est paire

Exemple 1 :

Soit $f:]-\pi,\pi[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.

Solution :

$f(-x) = -x$ f une fonction impaire donc $a_0 = a_n = 0$ et

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx$ $\quad \begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi - 0\right] + \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)$$

$$= -\frac{2}{n}(-1)^n$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Et par suite

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx}$$

Exemple 2 :

Soit $f:]-\pi, \pi[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = |x|$.

Solution :

$f(-x) = |-x| = x$: f une fonction paire donc $b_n = 0$ et

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}[x^2]_0^{\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \qquad \begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos nx & v = +\frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\pi}{n}\sin n\pi - 0\right] + \left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}[\cos n\pi - \cos 0]\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}[\cos n\pi - 1]\right]$$

$$= \begin{cases} si\ n\ pair & 0 \\ si\ n\ impair & \frac{-4}{\pi n^2} \end{cases}$$

Et par suite

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}}$$

VI.3 Transformée de Fourier d'une fonction :

VI.3.1 Définition :

Soit $f(x)$ une fonction à valeurs réelles ou complexes de la variable réelle ***x***.

On appelle transformée de Fourier de $f(x)$ la fonction complexe de la variable réelle ***k*** définie par :

$$\mathcal{F}(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,.\,e^{-ikx}\,dt \qquad \textbf{(1)}$$

En physique, dans la plupart des exemples, la variable concernée est, soit **une longueur**, soit **un temps**. Usuellement, la notation *x* représente une longueur. Dans ce cas, la variable ***k*** a les dimensions de l'inverse d'une longueur. Elle est appelée le vecteur d'onde.

Lorsque l'on considère une fonction $f(t)$ du temps, on utilise pour la transformée de Fourier de $f(t)$ la notation :

$$\mathcal{F}(w) = TF[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,.\,e^{-i\omega t}\,dt \qquad \textbf{(2)}$$

Où la variable **ω**, qui a les dimensions de l'inverse d'un temps, est la fréquence angulaire ou de la pulsation avec $\omega = 2\pi\rho$.

La convention adoptée ici relativement au signe précédant ***i*** dans l'exponentielle imaginaire n'est pas la même dans les deux cas. Ce choix est lié au fait qu'en physique, l'on est fréquemment amené à considérer la transformée de Fourier spatiale et temporelle d'une fonction $f(x,t)$ dépendant à la fois de l'espace et du temps. Cette transformée de Fourier spatiale et temporelle est généralement définie par l'intégrale double suivante :

$$\mathcal{F}[f(x,t)] = \int\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,.\,e^{i(\omega t - kx)}dt\,dx$$

En ce qui concerne les fonctions d'une variable, nous utiliserons dans la suite la convention de l'équation **(1)**.

La définition précédente de la transformation de Fourier n'est pas toujours celle choisie.

Par exemple, certains auteurs définissent la transformée de Fourier de $f(t)$ par :

$$\mathcal{F}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, . \, e^{-2\pi i\sigma t} \, dt \qquad \textbf{(3)}$$

Mais parfois, notamment en électronique, ils peuvent utiliser une définition différente pour assurer une symétrie entre transformée et transformée inverse :

$$\mathcal{F}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, . \, e^{-i\omega t} \, dt \qquad \textbf{(4)}$$

Mettre la constante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ permet d'avoir une définition de la transformée de Fourier inverse tout à fait analogue à celle de la transformée de Fourier.

VI.3.2 Inversion de la transformation de Fourier :

On démontre que, inversement, on peut en général obtenir $f(x)$ à partir de $\mathcal{F}(k)$ par la transformation dite de Fourier inverse :

$$f(x) = \overline{\mathcal{F}}[\mathcal{F}(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(k) \, . \, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} \, dk \qquad \textbf{(3)}$$

La formule d'inversion s'interprète comme une décomposition de $f(x)$ en une somme d'oscillations harmoniques.

Si ***x*** est une longueur, $\mathcal{F}(k)$ est l'amplitude correspondant au vecteur d'onde ***k***.

Si ***t*** est un temps, $\mathcal{F}(w)$ est l'amplitude correspondant à la fréquence angulaire ***ω***.

VI.3.3 Simplification des calculs dues à la parité de $f(t)$:

On remarque que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, . \, e^{-i\boldsymbol{\omega} t} \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, . \, (\cos(\boldsymbol{\omega} t) + i \sin(\boldsymbol{\omega} t)) \, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, . \cos(\boldsymbol{\omega} t) dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, . \sin(\boldsymbol{\omega} t) \, dt
\end{aligned}$$

- Si $f(t)$ une fonction paire :

$f(t).\cos \boldsymbol{\omega} t$: est paire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,.\cos(\boldsymbol{\omega} t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,.\cos(\boldsymbol{\omega} t)dt$

$(t).\sin \boldsymbol{\omega} t$: est impaire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,.\sin(\boldsymbol{\omega} t)dt = 0$

On en déduit

$$\boxed{\mathcal{F}(f) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,.\cos(\boldsymbol{\omega} t)dt}$$

- Si $f(t)$ une fonction impaire :

$f(t).\cos \boldsymbol{\omega} t$: est impaire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,.\cos(\boldsymbol{\omega} t)dt = 0$

$(t).\sin \boldsymbol{\omega} t$: est paire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,.\sin(\boldsymbol{\omega} t)dt = 2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\,.\sin(\boldsymbol{\omega} t)dt$

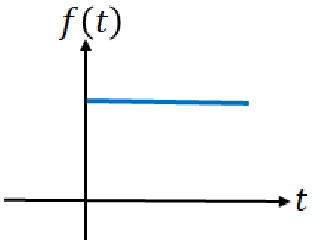
On en déduit

$$\boxed{\mathcal{F}(f) = 2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\,.\sin(\boldsymbol{\omega} t)dt}$$

VI.3.4 Transformée de quelques fonctions élémentaires

a. Transformée de Fourier de la fonction Heaviside dite également fonction échelon :

- TF d'u échelon unitaire : $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



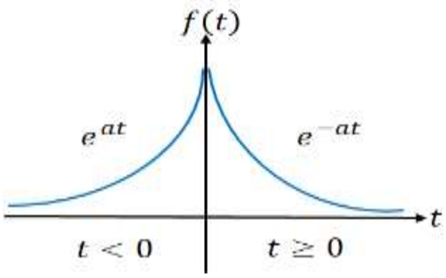
$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,.\,e^{-i\boldsymbol{\omega} t}\,dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} 1\,.\,e^{-i\boldsymbol{\omega} t}\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{e^{-i\boldsymbol{\omega} t}}{i\boldsymbol{\omega}}\right]_0^x$$

$$\boxed{TF[1] = \frac{-i}{\boldsymbol{\omega}}}$$

b. Transformée de Fourier de la fonction exponentielle :



- TF de la fonction $f(t) = e^{a|t|}, \quad t \geq 0$

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{0} e^{at}\,.e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}\,.e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{(a-i\omega)t}}{(a-i\omega)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(a+i\omega)}}{(a+i\omega)}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \left[\frac{1}{(a-i\omega)} - 0\right] + \left[0 + \frac{1}{(a+i\omega)}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{(a-i\omega)} + \frac{1}{(a+i\omega)}\right]$$

$$\boxed{\mathcal{TF}\left(e^{-a|t|}\right) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}}$$

c. Transformée de Fourier de la fonction puissance :

- TL de la fonction $f(t) = t\,, \quad t \geq 0$ on utilisant l'intégration par parties :

$$\mathcal{F}[t] = \int_{-\infty}^{+\infty} t.e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} t.e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} t.e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \left[-\frac{t.e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{0}^{+\infty} + \frac{1}{i\omega}\int_{0}^{+\infty} 1.e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left[\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{(i\omega)^2}$$

$$\boxed{\mathcal{TF}(t) = \left(\frac{1}{i\omega}\right)^2}$$

- TF de la fonction $f(t) = t^2$, $t \geq 0$ on utilisant deux fois l'intégration par parties :

$$\mathcal{F}(t^2) = \int_0^{+\infty} t^2 . e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \left[-\frac{t^2 . e^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{i\omega}\int_0^{+\infty} t . e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{2}{i\omega}\left[-\frac{te^{-i\omega t}}{i\omega}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{i\omega}\int_0^{+\infty} 1 . e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= 2\left(\frac{1}{i\omega}\right)^3$$

$$\boxed{T\mathcal{F}(t^2) = 2\left(\frac{1}{i\omega}\right)^3}$$

- TF de la fonction $f(t) = t^n$, $t \geq 0$ on utilisant n fois l'intégration par parties :

$$\mathcal{F}(t^n) = \int_0^{+\infty} t^n . e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \left[\frac{n}{i\omega}\,\frac{n-1}{i\omega}\,\frac{n-2}{i\omega}\cdots\frac{1}{i\omega}\int_0^{+\infty} t^0 . e^{-i\omega t}\, dt\right]$$

$$= \left[\frac{n}{i\omega}\,\frac{n-1}{i\omega}\,\frac{n-2}{i\omega}\cdots\frac{1}{i\omega}\left[-e^{-i\omega t}\right]_0^{+\infty}\right]$$

$$= n!\left(\frac{1}{i\omega}\right)^{n+1}$$

$$\boxed{T\mathcal{F}(t^n) = n!\left(\frac{1}{i\omega}\right)^{n+1}}$$

d. Transformée de Fourier de la fonction dérivée :

- TF de la fonction dérivé $f'(t)$, $t \geq 0$

$$\mathcal{F}\big(f'(t)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

avec une simple intégration par parties :

$$\mathcal{F}\big(f'(t)\big) = \left[\, f(t)\, e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + iw\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt$$

La fonction $f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa limite pour $t \to \mp\infty$ est nul, donc :

$$\mathcal{F}\big(f'(t)\big) = iw\, \mathcal{F}\big(f(t)\big)$$

On peut ensuite obtenir :

- TF de la dérivé second de la fonction $f(t)$, $t \geq 0$

$$\mathcal{F}\big(f''(t)\big) = (iw)^2.\mathcal{F}\big(f(t)\big)$$

et, par récurrence, les transformées de Fourier des dérivées troisième, quatrième, etc.

- La formule générale de la dérivation :

$$\boxed{T\mathcal{F}\big(f^n(t)\big) = (iw)^n.\mathcal{F}\big(f(t)\big)}$$

VI.3.5 Propriétés de la transformée de Fourier :

Énonçons quelques propriétés de la transformée de Fourier des signaux réels :

- **Linéarité :**

L'intégration étant une opération linéaire, la transformation de Fourier l'est aussi, c'est-à-dire que, **λ** et **μ** étant des scalaires, on a :

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{\lambda} f(t) + \boldsymbol{\mu} g(t)] = \boldsymbol{\lambda}\mathcal{F}(f(t)) + \boldsymbol{\mu}\mathcal{F}(f(t))$$

En d'autres termes, la transformation de Fourier commute avec l'addition et la multiplication par un scalaire.

- **Translation :**

Cherchons la transformée de Fourier de $f(x-a)$ (a réel). En posant $u = x - a$, on obtient :

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)\,.\,e^{-ikx}\,dx = e^{-ika}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,.\,e^{-ikx}\,dx$$

Soit

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-ika}\mathcal{F}(k)$$

la translation de $f(x)$ correspond un déphasage de $\mathcal{F}(k)$ proportionnel à k (la transformée de Fourier de $f(x-a)$ s'obtient en multipliant $\mathcal{F}(k)$ par le facteur de phase e^{-ika}).

Translater un signal dans le temps revient à déphaser la transformée de Fourier :

$$\boxed{f(t-\tau) = e^{-i\omega\tau}\mathcal{F}(w)}$$

► Changement d'échelle

Le changement d'échelle permet d'établir la relation entre $f(t)$ et $\mathcal{F}(w)$ lorsque la variable de temps est multipliée par une constante réelle $a \neq 0$. En posant $u = at$

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\, e^{-iwt}\, dt = \langle {u = at \atop du = adt} \rangle = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\frac{iwu}{a}}\, du$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right)}$$

Toute dilatation de l'échelle des temps conduit à une contraction inverse de l'échelle des fréquences et réciproquement.

► Dérivation de la transformée de Fourier :

La dérivée de $\mathcal{F}(f(t))$ par rapport à la variable k donne :

$$\frac{d}{dk}\mathcal{F}(k) = \frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= -i\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \mathcal{F}(-ixf(x))$$

Les dérivées successives de $\mathcal{F}(k)$ est généralisé par la formule :

$$\mathcal{F}^n(k) = \mathcal{F}((-ix)^n f(x))$$

Dans le domaine fréquentiel :

$$\frac{d^n}{dk^n}\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}((iwt)^n f(t))$$

VI.4 Application de la transformée de Fourier à la résolution d'équations différentielles :

La transformation de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire en la transformant en une équation plus simple.

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficient constants :

$$f(t) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y(t)$ pour $t \geq 0$.

On cherche la transformée de Fourier des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y]$$

En utilisant les propriétés de linéarité

$$\mathcal{F}[f(t)] = a_0 \mathcal{F}[y^n] + a_1 \mathcal{F}[y^{n-1}] + \cdots + a_{n-1} \mathcal{F}[y'] + a_n \mathcal{F}[y]$$

Proposition **:**

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que $TF(f) = \mathcal{F}(\omega)$. Alors on a

$$TF\left(\frac{d}{dt} f(t)\right) = (i\omega)\mathcal{F}(\omega)$$

Et

$$TF\left(\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right) = (i\omega)^2\mathcal{F}(\omega)$$

En générale

$$TF\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = (i\omega)^n\mathcal{F}(\omega)$$

Exemple :

En appliquant la transformée de Fourier trouver une solution de l'équation différentielle suivante

$$-\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = e^{-t^2} \quad \text{.......(I)}$$

Solution :

$$(\text{I}) \Rightarrow TF\left[-\frac{d^2y(t)}{dt^2}+y(t)\right]=TF\left[e^{-t^2}\right] \Rightarrow TF\left[-\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+T\mathcal{F}[y(t)]=TF\left[e^{-t^2}\right]$$

$$\Rightarrow -(i\omega)^2\mathcal{F}(\omega)+\mathcal{F}(\omega)=TF\left[e^{-t^2}\right]$$

$$\Rightarrow ((i\omega)^2+1)\mathcal{F}(\omega)=TF\left[e^{-t^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\omega)=\frac{1}{1+(i\omega)^2}TF\left[e^{-t^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\omega)=\frac{1}{2}\frac{2}{1+(i\omega)^2}TF\left[e^{-t^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(\omega)=\frac{1}{2}TF\left[e^{|t|}.e^{-t^2}\right]$$

donc $$f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{|t|}.e^{-t^2}\right)$$

Référence :

Les six chapitres ci-présent est un document proche du cours oral fait en classe. Nous citons ci-dessous des références et d'autres ouvrages :

[1] Jean Combes, *Suites et séries*, PUF, 1982, 206 p. (ISBN 978-2-13-037347-6).

[2] Y. Chevallard, *Théorie des séries*, vol. 1/ Série numériques, Cédic/Nathan, « Histoire et méthode » 1979.

[3] Elie BELORIZKY, *Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et des ingénieurs*, EDP Sciences, Paris, (2007).

[4] Walter APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens!*, 4ème Ed., H&K Edition, Paris, (2008).

[5] C. ASLANGUL, *Des mathématiques pour les sciences, Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation*, De Boeck, Bruxelles (2011).

[6] C. ASLANGUL, *Des mathématiques pour les sciences2, Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes*, De Boeck, Bruxelles (2013).

[7] J. M. RAKOSOTON, J. E. RAKOSOTON, *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Ed. PUF, (1999).

[8] S. NICAISE, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles : cours et problèmes résolus*, Ed. Dunod, Paris, (2000).

[9] Edmond Ramis, Claude Deschamps et Jacques Odoux, *Cours de mathématiques spéciales : séries, équations différentielles*, t. 4, Paris/Milan/Barcelone, Masson, 1993

[10] Hassan Emamirad, Cours de Mathématiques L1, Université de Poitiers Version 2009/2010

[11] *Philippe PILIBOSSIAN, J-Pierre LECOUTRE*, Algèbre, rappel de cours, exercices et problèmes résolus, DUNOD 1998 [cote B.U. 512 (076) PIL]

[12] *Louis JEREMY, Pierre MIMEAU, J-Claude THIENARD*, Analyse 1, VUIBERT 1997 [cote B.U. 517.5 JER].

[13] Srishti D. Chatterji *Cours d'analyse*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes 1998 (ISBN 978-2880743468)

[14] Claude Gasquet et Patrick Witomski, *Analyse de Fourier et applications : exercices corrigés*, Dunod, 2000, 233 p. (ISBN 978-2-10-005017-8)