

**Université de Saida– Dr. Moulay Tahar
Faculté de Technologie**

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat de 3^{ème} Cycle

Spécialité : Structures et Géo-matériaux en Génie Civil

Filière : Génie Civil

Par :

HANIFI HACHEMI AMAR LEMYA

Thème :

Modélisation multi-échelle des structures en matériaux avancés.



Thèse soutenue le date de soutenance devant le jury composé de :

N°	Nom et prénom	Grade	Etablissement	Qualité
01	REZGANI Laid	Prof.	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Président
02	KACI Abdelhakim	MCA	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Rapporteur
03	YEGHNEM Redha	Prof.	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Co-rapporteur
04	BENYOUCEF Samir	Prof.	Université SBA	Examineur
05	HOUARI_Mohammed Sid Ahmed	MCA	Université Mascara	Examineur
06	MAHMOUDI_Noureddine	Prof.	Université de Saida – Dr. Moulay Tahar	Examineur
07	TOUNSI Abdelouahed	Prof.	Université SBA	Invité

A mon défunt père

A ma très chère mère

A mon très cher mari et ma petite fille

A toute ma famille

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Monsieur le Docteur **KACI Abdelhakim**, pour la confiance et l'attention qu'il m'a accordées tout au long de ce travail, son aide et son sens de motivation m'ont été très utiles pour mener à terme ce travail.

Je remercie bien évidemment mon Co-directeur de thèse, Monsieur le Professeur **YEGHNEM Redha**, pour toute son aide.

J'adresse également mes remerciements les plus vifs à Monsieur le Professeur **REZGANI Laid** pour avoir accepté de présider le jury de thèse.

Je remercie aussi tous les membres de mon jury. Mes sincères remerciements se dirigent vers M. le Professeur **BENYOUCEF Samir** de l'Université Djillali liabes de Sidi Bel Abbes et les Messieurs les maîtres de conférences M. le Docteur **HOUARI Mohammed Sid Ahmed** de l'Université de Mascara d'avoir accepté d'examiner mon travail. M. le Professeur **MAHMOUDI Nouredine** de l'Université de Saida d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens aussi à remercier sincèrement M. le Professeur **TOUNSI Abdelouahed** pour toute son aide, ses conseils et sa disponibilité tout au long de ce travail de thèse. Et enfin de m'avoir honoré d'être l'invité de ma soutenance.

Mes remerciements s'adressent également à mon amie **ZAOUI Fatima Zohra**. Sa collaboration et ses conseils ont nettement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance à M. **CHALLAMEL Noel** de l'université de Bretagne Sud à Lorient qui m'a conseillé et assisté dans la modélisation des structures en matériaux avancés pendant mon stage de courte durée.

Je voudrais également remercier tous les membres du laboratoire, de m'avoir fait partager leurs connaissances et leur savoir-faire durant ces quatre années de thèse ainsi que tous les enseignants du Département de Génie Civil (Université Djillali Liabes De Sidi Bel Abbes). Mes remerciements s'adressent également à toutes les autres personnes avec lesquelles j'ai eu le plaisir de collaborer au cours de ces quatre ans.

Enfin, sur un plan plus personnel, je pense à ma famille, mon mari, mes frères, ma belle-mère, ainsi qu'à la mémoire de mon beau-père qui m'ont toujours encouragée. Et je n'oublierai pas ma mère qui m'apporte toujours son soutien sans faille.

المخلص

في هذه الأطروحة ، قمنا بدراسة السلوك الساكن والديناميكي للبنى الدقيقة المتدرجة وظيفيا مثل الألواح الدقيقة والبنى المجهرية. لهذا ، يتم اقتراح نظرية معدلة من قيود عزم الدوران مع استخدام نظريات تشوه القص عالية النظام تنقسم رسالة الدكتوراه هذه إلى قسمين.

في الجزء الأول ، درسنا البنى الدقيقة باستخدام مادة متدرجة وظيفيا ، مع الأخذ في الاعتبار تأثير مسامية المادة وتغير بارامتر المقياس من خلال سماكة الحزمة وفقا لوظيفة قانون السلطة

في الجزء الثاني ، تم اقتراح نظرية جديدة من الدرجة العليا مع أربعة متغيرات بدلاً من خمسة وأكثر للمرة الأولى من خلال إدخال مصطلحات متكاملة في علم الحركة ، وقد استخدم هذا واحد لدراسة سلوك لوحات مايكرو متدرجة وظيفيا يتم الحصول على معادلات الحركة في أطروحة الدكتوراه هذه باستخدام مبدأ هاملتون. يتم عرض النتائج العددية لفحص تأثير مقياس المقياس ، نسبة الطول إلى السمك ، توزيع المسامية ، ومعلمة المادة في استجابات التركيب المجهرى. تتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع تلك الموجودة في الأدبيات العلمية لإظهار دقة ودقة استخدام الحل

كلمات مفتاحية النظرية المعدلة لقيود عزم الدوران ، مقياس المقياس ، البنية المتدرجة وظيفيا ، المسامية ، الانحناء، الاهتزاز ، نظرية تشوه القص،

Résumé

Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude de comportement statique et dynamique des microstructures fonctionnellement graduées telle que les microplaques et les micros poutres. Pour ce là, une théorie modifiée des contraintes de couple est proposée avec l'utilisation des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevée.

Ce travail de thèse de Doctorat se divise en deux parties :

Dans la première partie, nous avons étudié les micros poutres en utilisant un matériau fonctionnellement gradués, en prenant en compte l'effet de la porosité du matériau et la variation du paramètre d'échelle à travers l'épaisseur de la poutre selon une fonction de loi de puissance.

Dans la deuxième partie, une nouvelle théorie d'ordre élevée à quatre variables au lieu de cinq et plus a été proposée pour la première fois en introduisant des termes d'intégrale dans la cinématique, celle-ci a été utilisée pour l'étude du comportement des micros plaques fonctionnellement gradués.

Les équations de mouvement sont obtenue dans cette thèse de Doctorat en utilisant le principe d'Hamilton. Des résultats numériques sont présentés pour examiner l'effet du paramètre d'échelle, du rapport longueur sur épaisseur, la distribution de la porosité et le paramètre matériel dans les réponses des microstructures. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux trouvés dans la littérature scientifique afin de montrer l'exactitude et la précision de la solution utilisée.

Mots clés : Théorie modifiée des contraintes de couple, le paramètre d'échelle, structure fonctionnellement graduée, porosité, flexion, vibration, théorie de déformation de cisaillement.

Abstract

In this thesis, we studied the static and dynamic behavior of functionally graduated microstructures such as micro plates and microstructures. For this, a modified theory of torque constraints is proposed with the use of high order shear deformation theories.

This PhD thesis work is divided into two parts:

In the first part, we studied the microstructures using a functionally graduated material, taking into account the effect of the porosity of the material and the variation of the scale parameter through the thickness of the beam according to a function of power law.

In the second part, a new theory of high order with four variables instead of five and more was proposed for the first time by introducing integral terms in the kinematics, this one was used for the study of the behavior of functionally graduated micros plates.

The movement equations are obtained in this PhD thesis using the Hamilton principle. Numerical results are presented to examine the effect of the scale parameter, the length-to-thickness ratio, the porosity distribution, and the material parameter in microstructure responses. The results obtained are compared with those found in the scientific literature to show the accuracy and precision of the solution used.

Keywords : Modified couple stress theory, scale parameter, functionally graduated structure, porosity, bending, vibration, shear deformation theory.

Table des matières

ملخص	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Liste des Figures	iv
Liste des Tableaux	vi
Liste des Notations	vii
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux avancés(FGM)	
I.1. Introduction	6
I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés	7
I.3. Historique de développement du FGM	8
I.4. Les méthodes de fabrication du Matériau à Gradient de propriétés	9
.4.1Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor Blade)	10
I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)	11
I.4.3Dépôt par Electrophorèse	12
I.4.4 Compaction sèche des Poudres	12
I.4.5 Projection plasma	12
I.4.6 C. V. D. et P. V. D	12
I.4.8. Frittage et infiltration	12
I.4.9. Implantation ionique (Sputtering)	13
I.4.10Dépôt par centrifugation	13
I.5.Loix régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	14
I.5.1.Propriétés matérielles de la plaque P-FGM	14
I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM.	16
I.5.3.Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM	
I.6.Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	18
I.5.1.Génie civil	18
I.6.2 Réacteur nucléaire	19
.6 .3.Cylindres de moteur de voiture	20
I.6.4 Lames de turbine	20
I.6 .5.Électronique et optoélectronique	21

I.6 .6.Médecine	21
I.7. Conclusion	22

Chapitre II : Rappel sur l'élasticité et la théorie de contrainte de couple modifié

II.1. Introduction	24
II.2. Définition d'une poutre	24
II.2.1. Historique	24
II.2.2. Les différents types de poutres	25
II.2.3. Les différentes théories des poutres	26
II.2.3. 1 Modèle d'Euler Bernoulli	26
II.2.3. 2. Modèle de Timoshenko	28
II.2.3. 3.Théorie d'Ordre Elevé	30
II.3. Définition d'une plaque	32
II.4. Modèles analytiques des plaques	32
II.4.1. Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff	32
II.4.2.La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre	34
II.4.3.Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé	35
II.4. Revue bibliographique sur la théorie de contrainte de couples modifiés	37
II.4.1. Théorie de contrainte de couple	40
II.5. Conclusion	44

Chapitre III : Formulation mathématique des micros poutres poreuses

III.1. Introduction	46
III.2. La théorie de couple de contrainte modifié	46
III.3. Les relations cinématiques	47
III.4. Les relations constitutives	48
III.5. Equations de mouvement	49
III.6. Équations du mouvement en termes de déplacements	51
III.7. Solutions analytiques	52
III.8. Conclusion	53

Chapitre IV: Formulation mathématique des micros plaques FGM

IV.1. Introduction	55
--------------------	----

IV.2. La théorie de couple de contrainte modifié	55
IV.3. Les relations cinématiques	55
IV.4. Les relations constitutives	55
IV.5. Equations de mouvement	59
IV.6. Équations du mouvement en termes de déplacements	62
IV.7. Solutions analytiques	64
IV.8. Conclusion	66
Chapitre V : Résultats numériques et discussions	
V.1. Introduction	
V.2. Cas des micros poutres poreuses	68
V.3. Cas des micros plaques FGM	79
V.4. Conclusion	91
Conclusion générale & Perspectives.	93
Annexes	
Références bibliographiques	

Liste des Figures

Chapitre I : Les matériaux

fonctionnellement gradués (FGM)

Figure I.1. Caractéristiques de FGM [10]	8
Figure I.2 : Principe de la méthode coulage en bande [13].	11
Figure I.3 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [25].	14
Figure. I.4 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [20]	15
Figure. I.5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [20]	15
Figure. I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P	16
Figure. I.7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S	17
Figure. I.8 : Variation du module de Young dans une plaque E	18
Figure I.9 Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive	19
Figure I.10 Réacteur nucléaire.	20
Figure I.11 Cylindre du moteur de la voiture.	21
Figure I.12 Lames de turbine.	21
Figure I.13 Les champs potentiels de l'application des FGM.	22
Chapitre II : Rappelle sur l'élasticité et la théorie de contrainte de couples modifiés	
Figure II.1 Cinématique d'Euler Bernoulli [Dufort, 2000a]	25
Figure II.2 Cinématique de Timoshenko	27
Figure. II.3 : Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.	28
Figure. II.4 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [69].	30
Figure. II.5 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [69].	31
Figure. II.6: Illustration de la plaque d'ordre élevé [69].	33
Figure. II.7 : La configuration du corps.	34
Figure. II.8. Composantes générales des tenseurs de force et de couple dans la théorie des contraintes de couple.	39
Figure II.9. Composantes générales des tenseurs de force et de couple dans la théorie	39

des contraintes de couple.

Chapitre IV Formulation mathématique des micros plaques FGM

Figure IV.1 Variation de la fraction volumique V_1 à travers l'épaisseur d'une plaque FG pour différents index de gradient p 55

Chapitre V Résultats numériques et discussions

Figure. V.1a : Variation de la flèche transversal non dimensionnel du micro-poutre FG pour différentes valeurs de paramètres de porosité $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b/h = 1$, $k = 2$, Charge ponctuelle 66

Figure V.1b : Variation de la flèche transversal non dimensionnel du micro-poutre FG pour différentes valeurs de paramètres de porosité $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b/h = 1$, $k = 2$, Charge uniforme 67

Figure V.2a : Variation de la flèche transversale non dimensionnelle du micro-poutre FG soumis à une charge ponctuelle pour $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $l_1/l_2 = 2$, $h/l_m = 1$ 67

Figure. V.2b : Variation de la flèche transversale non dimensionnelle du micro-poutre FG soumis à une charge ponctuelle pour $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $l_1/l_2 = 2$, $h/l_m = 8$ 68

Figure. V. 3a : Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_1/l_2 = 2$, $L/h = 10$, $l_2 = 15\mu m$, $b = 2 \times h$, $k = 2$, $h/l_2 = 8$ Charge ponctuelle 68

Figure. V. 3b : Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_1/l_2 = 2$, $L/h = 10$, $l_2 = 15\mu m$, $b = 2 \times h$, $k = 2$, $h/l_2 = 8$ Charge uniforme 69

Figure. V.4a : Variation de la contrainte 69

transversale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m = 2$,
 $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b = 2 * h$, $k = 2$,
 $h/l_m = 1$

Figure. V.4b: Variation de la contrainte transversale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m = 2$,
 $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b = 2 * h$, $k = 2$,
 $h/l_m = 8$ 70

Figure. V.5a: Variation de la fréquence non dimensionnelle à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m = 2$,
 $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b = 2 * h$, $k = 2$,
 $h/l_m = 8$ 70

Figure. V.5b: Variation de la fréquence non dimensionnelle à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m = 2$,
 $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b = 2 * h$, $k = 2$,
 $h/l_m = 8$ 71

Figure. V.6a : Variation de la flèche transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre l_1/l_2 , $a/h = 5$, $l_2 = 15\mu m$, $a = b$,
 $k = 2$, $h/l_2 = 1$ 78

Figure. V.6b : Variation de la flèche transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_1/l_2 , $a/h = 5$, $l_2 = 15\mu m$,
 $a = b$, $h/l_2 = 8$ 78

Figure. V.7a. Variation de la flèche transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_1/l_2 , $a/h = 5$, $l_2 = 15\mu m$,
 $a = b$, $h/l_2 = 1$ 79

Figure. V.7b : Variation de la contrainte normale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_1/l_2 , $a/h = 5$, $l_2 = 15\mu m$,
 $a = b$, $h/l_2 = 8$ 79

Figure. V.8 : Variation de la contrainte normale non dimensionnel de la micro 80

plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_1/l_2 , $a/h=5$, $l_2=15\mu m$,
 $a=b$, $h/l_2=8$

Figure. V.9a : Variation de la contrainte de cisaillement transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_1/l_2 , $a/h=5$, $l_2=15\mu m$,
 $a=b$, $k=2$,

81

Figure. V.9b : Variation de la contrainte de cisaillement transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_1/l_2 , $a/h=5$, $l_2=15\mu m$,
 $a=b$, $k=2$,

Figure. V.10a : Variation de la fréquence non dimensionnelle de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre de longueur pour l_1/l_2 , $a/h=5$, $l_2=15\mu m$

82

Figure. V.10b : Variation de la fréquence non dimensionnelle de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre de longueur pour l_1/l_2 , $a/h=5$, $l_2=15\mu m$,
 $a=b$, $k=1$, $m=n=3$

82

Liste des tableaux

CHAPITRE I : Généralités sur les Matériaux Composites et les matériaux à Gradient de propriétés

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....7

CHAPITRE V : Résultats et Discussion

Tableau V.1: la flèche transversale non dimensionnel du micro-poutre FG pour la charge ponctuelle63

Tableau V.2 : la flèche transversale non dimensionnel du micro-poutre FG pour la charge uniforme.....64

Tableau V.3 : des fréquences non dimensionnelles fondamentales pour FG micro-poutre.....65

Tableau V.4: Comparaison de la flèche non dimensionnée \bar{w} d'une plaque carré homogène.....72

Tableau V.5: Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnée $\bar{\omega}$ d'une plaque carré homogène.....73

Tableau V.6 : Flèche non dimensionnée \bar{w} d'une plaque carré homogène.....74

Tableau V.7 : Fréquence non dimensionnée $\bar{\omega}$ d'une plaque carré homogène.....75

Tableau V.8 : Flèche non dimensionnée \bar{w} d'une plaque carré homogène76

Tableau V.9 : Fréquence non dimensionnée $\bar{\omega}$ d'une plaque carré homogène.....77

Notations et Symboles

E	Module de Young
μ	Coefficient de Poisson
G	Module de cisaillement
ρ	La masse volumique
I	Moment d'inertie de la poutre
A	Section de la poutre
$[\sigma_{ij}]$	Tenseur de contrainte
$[C]$	Matrice de rigidité
$[\varepsilon_{ij}]$	Tenseur de déformation
$f(z)$	Fonction de gauchissement (fonction de cisaillement transverse)
$U(M)$	Le déplacement axial d'un point M
$u(x, z)$	Déplacement suivant la direction X
$w(x, z)$	Déplacement suivant la direction Z (la flèche)
$u_0(x), w_0(x)$	Les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z .
τ_{xz}	La contrainte de cisaillement
G_{xz}	Le module de cisaillement transversal
γ_{xz}	Déformations de distorsion
$\varphi_0(x), \varphi_0(y)$	La rotation de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre suivant x et y respectivement
k	Coefficient correcteur
$f'(z)$	La première dérivée de la fonction de gauchissement par rapport à z
$T1, T2$	Temps quelconques
L	Dimension de la poutre suivant x
b	Dimension de la poutre suivant y
h	Epaisseur de la poutre
$q(x)$	Chargement transversal de la poutre
ε_x	La déformation selon la direction x
σ_x	La contrainte normale selon la direction x
δU	La variation virtuelle de l'énergie de déformation
δv	La variation virtuelle du travail des forces extérieures

δk	La variation virtuelle de l'énergie cinétique
δw	La variation du déplacement transversal
$\delta \dot{w}$	La première dérivée de la variation du déplacement transversal par rapport au temps
$\delta \varphi$	La variation de la rotation de la section transversale de la poutre
$\ddot{\varphi}$	La deuxième dérivée de la rotation de la section transversale de la poutre par rapport au temps
M, P, Q	Les résultantes des efforts
I0, I2, J2, K2	Les inerties massiques
D, D _s , H _s et A _s	Les rigidités
$W_n \varphi_n$	Des paramètres arbitraires à déterminés de la solution de Navier
Q _n	Le coefficient de Fourier associé au type de chargement
ω_m	La fréquence fondamentale selon le mode de vibration
[S _{ij}]	La matrice de rigidité
[m _{ij}]	La matrice de la masse
\bar{w}	Le déplacement transversal non dimensionnel
$\bar{\sigma}_x$	La contrainte axiale non dimensionnelle
$\bar{\tau}_{xz}$	Contrainte de cisaillement transversale non dimensionnelle
S	Rapport de dimension
$\bar{\omega}_w$	La fréquence fondamentale non dimensionnelle en mode de flexion
$\bar{\omega}_\varphi$	La fréquence fondamentale non dimensionnelle en mode de cisaillement
m	Mode de vibration
Kd	Coefficient de correction de cisaillement dynamique
FGM	Functionally Graded Materials
GD	Grande diffusion
HP	Haute performance
UD	Uni directionnel
HT	Haute ténacité
BM	Bas module d'élasticité
HM	Haut module d'élasticité
UHM	Ultra haut module d'élasticité
MO	Matrice Organique
MCA	Matrice carbonée

MC	Matrice céramique
MM	Matrice métallique
TD	Thermodurcissable
TP	Thermoplastique
2s	Deux fois symétrique
ETB	Classical Euler-Bernoulli theory of beam
CLPT	classical laminated plate theory
FSDT	First shear deformation theory
μ_{ij}	le couple de contrainte
m_{ij}	est la partie déviatorique de tenseur de la contrainte de couple
χ	est la courbure symétrique

Introduction générale

Les matériaux composites avancés sont largement utilisés dans les domaines de l'aérospatiale, de la mécanique, du génie civil, du nucléaire et de l'automobile, en raison de leurs caractéristiques exceptionnelles telles que leur rapport rigidité / résistance élevé, leur résistance au poids et leur faible coût de maintenance. Les matériaux composites stratifiés conventionnels présentent un déséquilibre de propriétés mécaniques à l'interface en raison de la liaison de deux matériaux discrets. Par conséquent, la concentration des contraintes se produit habituellement à l'interface. Cela peut entraîner des dommages sous forme de délaminage, de fissuration de la matrice et de séparation par collage. Des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont donc nés pour surmonter ces problèmes.

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) sont des composites non homogènes présentant une variation continue et lisse dans le profil de la composition et dans les caractéristiques du matériau qui leur permettent d'être utilisés dans une large gamme d'application dans nombreux dispositifs d'ingénieries. L'utilisation des matériaux fonctionnellement gradués conduit à une variation uniforme des contraintes dans les structures et évitement des problèmes telle que la discontinuité des composantes des contraintes entre les couches, le décollement interraciale, fissuration matriciel, etc.

Dans la dernière décennie, la tendance d'utilisation des poutres et des plaques fabriquées à partir de FGM pour les structures d'ingénieur a considérablement augmenté. Par conséquent, la compréhension du comportement des structures fabriquées par des FGM poreux sous une variation des charges mécaniques et thermiques est très importante pour leur conception précise.

Les FGMs sont largement utilisés dans les micro et nanostructures telles que les couches minces sous la forme d'alliages à mémoire de forme [1,2], les micro et nano-systèmes électromécaniques (MEMS et NEMS) et aussi microscopes à force atomique (AFMs) [3]. Les poutres employées dans MEMS, NEMS et AFMs, ont l'épaisseur de l'ordre des microns et des sous-microns. La réponse statique et dynamique dépendant de la taille dans les micros échelles sont vérifiées expérimentalement. Par exemple, dans le test de micro-torsion des fils en cuivre mince, Fleck et al. ont démontré que la diminution du diamètre des fils entraîne une amélioration remarquable du durcissement par torsion [4]. Stolken et Evans ont indiqué une augmentation considérable du durcissement du travail plastique induit par la diminution de l'épaisseur de la poutre dans le test de micro-flexion des poutres mince en nickel [5]. En outre, les comportements dépendant de la taille sont montrés dans certains types de polymères. Par exemple, lors de tests de micro-flexion des poutres fabriqués à partir de polymères époxy, Lam et al. ont observé une amélioration notable de la rigidité de flexion

induite par la réduction de l'épaisseur de la poutre [6]. McFarland et Colton ont trouvé une différence importante entre les valeurs de rigidité prédites par la théorie classique des poutres et les valeurs de rigidité déterminées lors d'un test de flexion de la micro-console en polypropylène [7]. Selon les résultats expérimentaux précédents, On peut conclure que le comportement dépendant de la taille est une propriété importante des matériaux qui apparaît pour une poutre lorsque la taille caractéristique telle que l'épaisseur ou le diamètre est proche du paramètre d'échelle de la longueur interne du matériau [8].

Dans les années 1960, certains auteurs scientifiques ont proposé la théorie de l'élasticité de couple de contrainte [9, 10, 11]. Dans l'équation constitutive de cette théorie, nous trouvons en plus des deux constantes classiques de Lamé, deux paramètres d'échelle d'ordre élevé. Zhou et Li ont utilisé cette théorie pour étudier le comportement statique et dynamique d'une micro-barre en chargement de torsion [12].

Kang et Xi ont étudié les fréquences de résonance d'une micro-poutre et ont indiqué que ces fréquences sont dépendantes de la taille [13].

Pour réduire les problèmes rencontrés dans la détermination des paramètres d'échelle des matériaux par des expériences, Yang et al. ont utilisé la théorie modifiée de contrainte de couple, qui dans ces équation constitutive, seulement un paramètre d'échelle matérielle apparaît [14]. En utilisant la théorie modifiée de contrainte de couple, Park et Gao ont examiné le comportement statique d'une poutre Euler-Bernoulli et ont discuté des résultats d'un test de flexion de poutre époxy polymère [15]. Kong et al. [16] ont présenté l'équation d'équilibre et les conditions aux limites d'une poutre d'Euler-Bernoulli par la théorie modifiée de contrainte de couple et le principe d'Hamilton [16]. Ils ont montré que les fréquences naturelles de la poutre sont dépendantes de l'échelle. En outre, la différence entre les fréquences naturelles calculées par la théorie de la poutre classique et celles obtenues par la théorie modifiée de contrainte de couple est considérable lorsque propriété d'échelle de la poutre est comparable au paramètre interne de la taille.

En raison, des grandes applications des matériaux fonctionnellement gradués dans les MEMS et NEMS, et aussi le fait que la théorie classique d'élasticité est incapable de prédire les réponses mécaniques dépendantes de la taille des microstructures, l'utilisation de la théorie non-classique de l'élasticité aux microstructures fabriqués par des FGMs semble avoir un grands mérites. Récemment, Lü et al. [17] ont développé une théorie raffinée généralisée en introduisant les effets de surface afin d'étudier la réponse élastique dépendant de la taille des films en ultra-minces FGM. Ils ont également évalué les réponses élastiques mécaniques dépendant de la taille nano des couches FGM en employant des hypothèses de Kirchhoff et la

théorie continue de l'élasticité de surface [18]. Non seulement les films minces FGM mais aussi les micro-poutres FGM sont souvent utilisés dans les MEMS et NEMS. Plus récemment, dans Al-Basyouni et al [19]. ont proposé une nouvelle formulation unifiée des poutres et une théorie modifiée des contraintes de couple (MCST) qui considère un paramètre d'échelle variable en conjonction avec le concept d'axe neutre pour étudier le comportements statique et dynamique des micro-poutres FG. Ainsi, une étude sur la réponse mécanique dépendante de la taille d'une micro-poutre les FGMs en employant une théorie d'élasticité non classique capable de capturer les effets à petite échelle semble être cruciale.

Avec l'avancement rapide de la technologie des composants de la structure, les structures avec une porosité graduée peuvent être considérées comme l'un des derniers développements dans les FGMs. Les structures considèrent les pores dans les microstructures en tenant compte de la densité locale. De plus, une grande opportunité dans un large éventail d'applications d'ingénierie se traduit par des conséquents. Les chercheurs sont attirés par le développement dans les techniques de préparation des FGMs telles que la métallurgie des poudres, dépôt de vapeur, auto-propagation, coulée centrifuge, et séparation magnétique [20, 21, 22, 23, 24]. Ces techniques présentent certains inconvénients tels que les coûts élevés et la complexité de la méthode. L'un des moyens simples et appropriés pour la fabrication des FGMs est le processus de frittage. Au cours de ce processus, en raison de la grande différence de solidification entre les constituants du matériau, cependant, Des porosités ou des micro-vides dans les matériaux peuvent être produits régulièrement [25]. Une étude approfondie a été effectuée sur les porosités apparaissant dans des échantillons de FGM fabriqués par une méthode d'infiltration séquentielle à plusieurs étapes [26]. La porosité peut modifier les propriétés élastiques et mécaniques. Sur la base de cette information concernant les porosités des FGMs, Il est important de considérer l'influence de la porosité lors de la conception des structures de FGM. Cependant, des recherches sur la réponse mécanique des structures FG poreuses, sont encore limitées en nombre. La propagation des ondes d'une plaque FG infinie ayant des porosités a été étudiée par Ait Yahia et al. en utilisant diverses théories d'ordres élevés simples de déformation par cisaillement [27].

Wattanasakulpong et Ungbhakorn ont examiné les réponses de vibrations linéaires et non linéaires des poutres d'Euler poreux FG avec extrémités élastiquement retenues [28].

Les propriétés du matériau d'une poutre FG ont été décrites par une règle de mélange modifiée. Ebrahimi et Mokhtari ont étudié le comportement des vibrations transversales des poutres rotatives de Timoshenko FG avec des porosités [29]. Le DTM a été utilisé pour résoudre les équations de mouvement. Il a été démontré que les fractions de volume de

porosité jouent un rôle considérable dans les vibrations des poutres FG poreux. De plus, Wattanasakulpong et Chaikittiratana ont discuté des vibrations de flexion des poutres de FG poreux par la théorie de la poutre de Timoshenko [30].

La technique de collecte de Chebyshev a été utilisée pour résoudre les équations. Ils ont exprimé la réduction du rendement de la porosité dans la masse et la résistance des poutres FG. Ebrahimi et Zia ont étudié la dynamique non linéaire à grande amplitude des poutres poreuse FG de Timoshenko [31]. Les techniques de Galerkin à échelles multiples ont été utilisées pour résoudre les équations de mouvement. Ait Atmane et al. ont proposé une théorie de la poutre efficace pour étudier le comportement statique, dynamique et de flambage des poutres poreux FG sur les fondations élastiques [32]. Plus récemment, Ebrahimi et al. ont étudié la réponse dynamique des poutres d'Euler FG poreux sous charge thermique [33].

Dans le présent travail, les microstructures FG seront étudiées : En commençant en premier lieu par les micro-poutres poreuses, en suite, les microplaques FG qui seront étudiées en proposant une nouvelle théorie à quatre variables. Le principe d'Hamilton, est utilisé pour les deux cas.

Concernant les micro-poutres FG poreuse une nouvelle théorie modifiée de contrainte de couple est proposée avec la théorie hyperbolique de déformation de cisaillement pour étudier leur comportement statique et dynamique.

Pour les microplaques FG, une nouvelle forme de la théorie de déformation de cisaillement de Reddy est proposée en introduisant des termes d'intégrales afin de réduire le nombre de variables et les équations de mouvement.

Les effets du paramètre d'échelle, de l'indice matériel, de la porosité et des rapports géométrique sont étudiés afin de vérifier leur influence sur le comportement dynamique et statique des micros structures FG.

Pour atteindre nos objectifs, ce travail de thèse est organisée en deux parties : une première partie qui décrit les matériaux avancée et l'élasticité, et une deuxième partie dans la quelle les microstructures sont étudiées.

Dans la première partie, nous présentons une courte étude bibliographique des matériaux avancées et l'élasticité sera présentée dans le Chapitre I et II.

Dans la deuxième partie, nous développons une nouvelle théorie modifiée de contrainte de couple dans les poutres et les plaques.

Dans le Chapitre III et IV nous présentons, des formulations mathématiques sur les micro-poutres poreuses, en suite, les microplaques FG qui seront étudiées en proposant une nouvelle théorie à quatre variables. Le principe d'Hamilton, est utilisé pour les deux chapitres. Des résultats sous forme des graphes et des tableaux sont décrits dans le Chapitre V.

En conclusion, nous faisons le bilan de nos travaux et présentons les perspectives de continuations de ce travail.

Chapitre I :
Généralités sur les
matériaux
avancés(FGM)

I.1. Introduction

Les matériaux à gradients de propriétés (FGM) ont été développés pour leurs excellentes propriétés mécaniques et thermiques. Ces matériaux ont de grandes performances et capables de résister aux températures ultra-hautes. Les FGM sont au microscope des matériaux composites non homogènes. Ces matériaux sont généralement faits à partir d'un mélange de métaux et de céramique. L'avantage d'utiliser ces matériaux est qu'ils peuvent résister à de hautes températures tout en maintenant leur propriété structurelle. Les FGM possèdent des propriétés qui changent graduellement et sans interruption afin de réaliser une fonction désirée. Un FGM typique, avec un effet élevé de couplage flexion-membrane, est un composite homogène fabriqué à partir de différentes phases de composants de matériaux (le plus souvent en céramique et métal). La composition change d'une surface en céramique à une surface en métal avec une variation voulue de la fraction volumique des deux matériaux entre les deux surfaces.

Le matériau à gradients de propriétés a été introduit pour la première fois au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais [34,35]. Depuis, un effort a été suivi pour développer des matériaux à haute résistance basée sur les matériaux à gradient fonctionnel.

Ces matériaux ont été initialement conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion [36, 37,38]. Ils sont maintenant développés pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température.

Au début, les FGM ont été conçus en tant que matériaux thermiques de barrière dans les applications aéronautiques et les réacteurs. C'est par la suite que les FGM ont été développés dans le domaine militaire, l'automobile, le biomédicale, l'industrie de semi-conducteur et toutes utilisations dans un environnement à hautes températures [39].

Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques [40]. La variation continue des propriétés mécaniques confère au matériau un comportement optimisé. Les FGM sont particulièrement utilisés dans les applications de haute technologie: aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, et en Génie Civil et trouvent également des applications biomédicales .

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

Tableau I.1: comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	<ul style="list-style-type: none"> - Élimination des problèmes de l'interface ; - Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> - Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée ; - Très bonne ténacité.

I.2. Concept des matériaux à gradient de propriétés

Le concept du matériau à gradient de propriété (FGM) est proposé comme étant un matériau capable de résister à une température de surface de 2000 K et à une variation de température de 1000 K à travers une section inférieure à 10 mm. Les changements continus de la composition, de la microstructure, de la porosité de ces matériaux résultent des changements des propriétés telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique. Depuis 1984, les couches minces de FGM ont été largement recherchées, et sont presque une réalité commerciale.

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) représente un des derniers développements du 21ème siècle. Le concept de FGM à non seulement beaucoup d'importance dans la conception pratique des matériaux réfractaires mais également dans le développement de divers matériaux graduels.

Le matériau à gradient de propriétés (FGM) dont lesquels la fraction volumique des fibres des constituants changent sans interruption en fonction de la position le long d'une direction. L'avantage du matériau à gradient de propriétés (FGM) est d'éviter la concentration des contraintes d'interfaces développées dans les matériaux composites conventionnels. La composition et la microstructure changent dans l'espace suivant une loi de distribution prédéfinie. Les matériaux composites offrent de nombreuses propriétés supérieures, comme la haute résistance et la rigidité élevée. Actuellement, aucun matériau industriel ne peut résister à de tels chargements thermomécaniques.

Les matériaux à gradient de propriétés sont donc des matériaux composites avec un caractère au microscope non homogène. Les changements continus de leur microstructure distinguent le FGM des matériaux composites conventionnels. Le changement continu de la

composition a comme conséquence les gradients dans les propriétés de FGM. Les différences dans la microstructure et les propriétés entre FGM et matériaux composites conventionnels sont illustrées schématiquement sur la figure I.1.

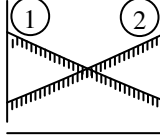
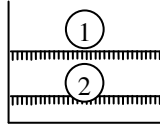
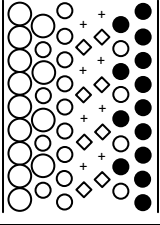
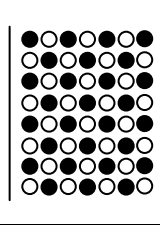
Fonction / propriété	① Force mécanique ② Conductivité thermique		
Structure / Texture	Eléments constituants Céramique ○ Métal ● Fibre ◇+ Micropore ○		
Matériaux	Exemple	FGM	Non FGM

Figure I.1. Caractéristiques de FGM [41]

I.3. Historique de développement du FGM

Un groupe de scientifiques, à Sendai (Japon) a proposé pour la première fois le concept de FGM en 1984, comme étant un nouveau matériau avec une barrière thermique ou des propriétés calorifuge (isolation thermique). Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique [41]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peut être utilisée pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [42].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement de Matériaux à Gradient de propriétés et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [41].

Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux:

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau;
- Ténacité du matériau côté basse température;

-Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des F.G.M a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute températures) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [43].

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications: biomécaniques, technologie de capteur, optique, [44].

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est de l'intérêt non seulement dans la conception des matériaux réfractaires performants pour des utilisations pour les futures navettes spatiales, mais également dans le développement de divers matériaux fonctionnels, tels que les matériaux optiques et électroniques. A cet effet, un deuxième projet a été lancé pour la recherche et développement des matériaux FGM en tant que matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux de conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

I.4. Les méthodes de fabrication du Matériau à Gradient de propriétés

Les procédés de fabrication d'un matériau à gradient de propriétés (FGM) peuvent habituellement être divisés en construisant la structure dans un espace hétérogène (mélange graduel) et transformation de cette structure en matériau en bloc (solidification). Les processus de mélange graduel peuvent être classés dans les constituants, l'homogénéisation et la ségrégation. Les procédés élémentaires sont basés sur la fabrication par étape de structure

en matériaux graduels précurseurs ou poudres. Les avancés en technologie d'automatisation pendant les dernières décennies ont rendu des processus élémentaire de progression technologiquement et économiquement durable. Dans la procédure d'homogénéisation qui traite une interface pointue entre deux matériaux est convertie dans un gradient par transport matériel. Les procédés d'homogénéisation et de ségrégation produit un gradient continu, mais ont des limitations au sujet des types de gradients qui peuvent être produits.

Habituellement le séchage et la solidification suivent les étapes du mélange graduel. Le besoin de ces processus de consolidation doit être adapté à FGMs: les conditions de ces procédures doivent être choisies pour que le gradient ne soit détruit ou altéré en mode non contrôlée. L'attention doit être également prêtée au rétrécissement inégal de FGMs pendant la consolidation [45].

Ces dernières années, les travaux menés au laboratoire ont permis de développer une méthode originale pour élaborer des composites à gradient continu de composition. Cette méthode est basée sur une technique de Co-sédimentation de poudres en milieu aqueux.

Chaque particule élémentaire de poudre sédimente avec une vitesse proportionnelle à la densité du matériau et au carré du diamètre de la particule (relation de Stokes). En contrôlant et en adaptant les répartitions granulométriques de chaque poudre, il est possible d'obtenir différents gradients de concentration dans le dépôt formé à l'issue de la sédimentation. Il existe de nombreuses méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés, les techniques les plus employées sont brièvement expliquées ci-après:

I.4.1. Coulage en Bande (Tape Casting ou Doctor Blade)

Le coulage en bande consiste à couler une barbotine de poudres fines en suspension aqueuse ou non-aqueuse (la plupart des travaux commerciaux utilisent le procédé non aqueux) sur un support plan en couches minces et régulières. Selon les cas, c'est soit la lame (Doctor Blade) qui est animée d'un mouvement de translation, soit le support qui se déplace sous la lame (Figure I.2). Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25-1000 μ m). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

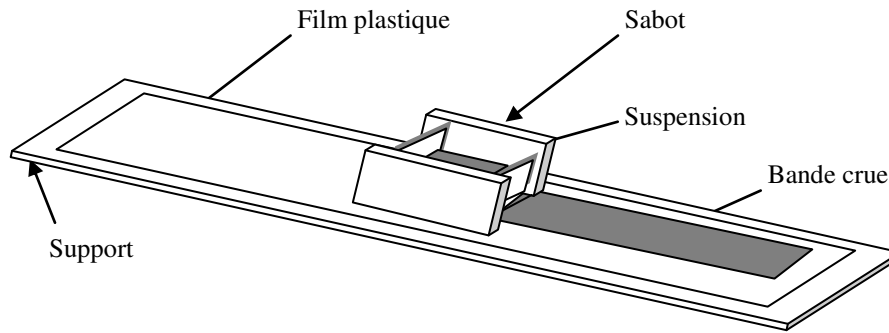


Figure I.2 : Principe de la méthode coulage en bande [46].

Le solvant doit avoir un point d'ébullition très bas et une viscosité faible. Il doit être soluble avec le liant, le plastifiant et les autres ajouts mais ne doit être ni soluble ni réactif avec la poudre céramique. Le liant donne une grande résistance mécanique au produit cru en permettant son maniement. Généralement un plastifiant est ajouté au liant pour baisser sa viscosité. Le liant, le plastifiant et le défloculant doivent être totalement dégagés pendant le délainage.

L'un des plus anciens travaux sur l'étude de cette technique a été publié par Howatt et al. [47], et depuis d'autres travaux ont été réalisés [48,49]. Ce procédé est devenu une technique économique pour la production des substrats céramiques de type Al_2O_3 et surtout pour les condensateurs à base de $BaTiO_3$. On peut d'ailleurs remarquer qu'il s'agit déjà de F.G.M puisqu'il faut empiler des couches conductrices (métaux rares) avec des couches diélectriques ($BaTiO_3$ principalement).

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par

Mistler [49], soit par empilage de couches élaborées séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [48,49].

I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise";

- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considéré comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [50]);
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

I.4.3. Dépôt par Electrophorèse

Le dépôt par électrophorèse est un procédé dans lequel une suspension colloïdale stable est placée dans une cellule contenant deux électrodes, le dépôt se fait par le mouvement des particules chargées au sein de la solution vers la cathode ou l'anode selon le signe de la charge des particules due à un champ électrique. L'élaboration des F.G.M peut se faire donc par le dépôt séquentiel des matériaux [51].

I.4.4. Compaction sèche des Poudres

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique et un déliantage. La densification sera enfin l'étape finale [52]. Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle.

I.4.5. Projection plasma

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces

en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [22].

I.4.6. C. V. D. et P. V. D.

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat. Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées, [53].

I.4.7. Frittage et infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [54].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

I.4.8. Frittage laser différentiel

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

Yuki et al. [56] ont utilisé cette technique pour élaborer un F.G.M de PSZ/Mo. La Figure I.3 montre schématiquement la disposition du procédé utilisé par ces auteurs.

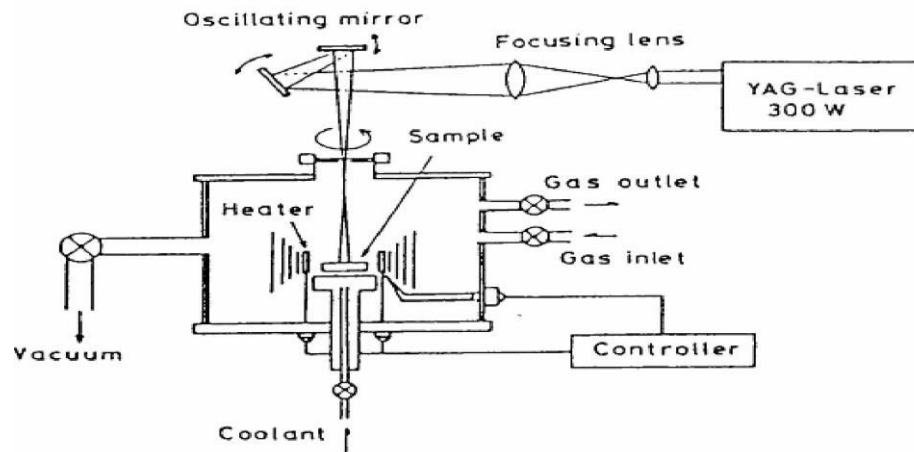


Figure I.3 : Disposition du procédé frittage laser différentiel [57].

I.4.9. Implantation ionique (Sputtering)

C'est une technique avancée pour la fabrication des F.G.M permettant de réaliser seulement des épaisseurs fines ($<1\mu\text{m}$) sur différents substrats (plastiques, céramiques, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via des gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé [58].

I.4.10. Dépôt par centrifugation

La technique consiste à verser une suspension colloïdale relativement diluée dans des flacons cylindriques, le tout est soumis à une centrifugation. La sédimentation s'opère et le liquide surnageant est retiré. Ce procédé est répété pour obtenir des multicouches (Figure I.4) [59].

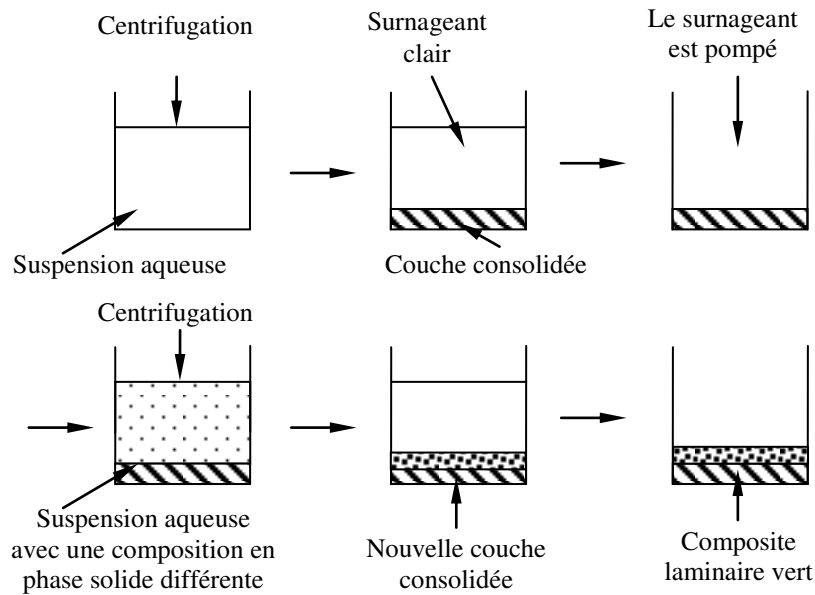


Figure I.4 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [59]

I.5. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » peut être produit en changeant sans interruption les constituants des matériaux multiphasés dans un profil prédéterminé. Les dispositifs les plus distincts d'un FGM sont les microstructures avec des macros –propriétés graduées sans interruption. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs utilisent la fonction de loi de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

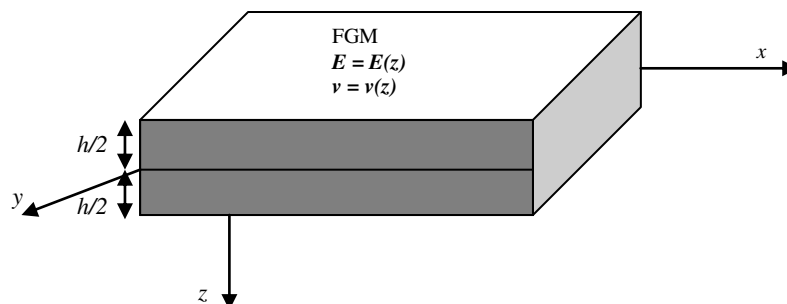


Figure. I.5 : Schéma du procédé dépôt par centrifugation [59]

Les coordonnées x et y définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe z perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieures et inférieures sont différentes mais sont déterminés selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z) soit : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I.5.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^k \quad (1.1)$$

Où k est un paramètre matériels et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale $\nu(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [26] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (1.2)$$

Où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z = -h / 2$) et de la surface supérieure ($z = h / 2$) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.6, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $k < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

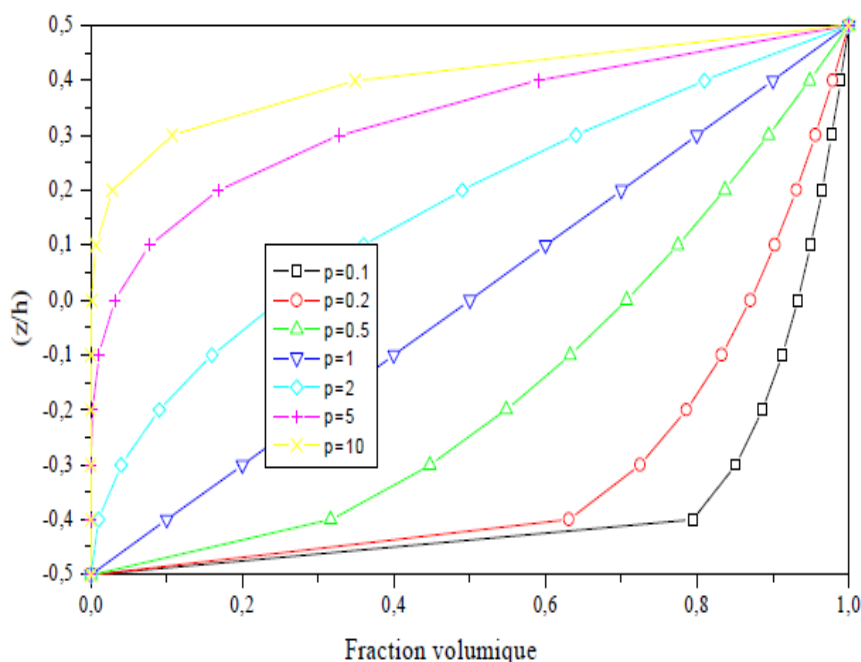


Figure I.6 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

I.5.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [57]. Par conséquent, Chung et chi [58] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définis par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z+h/2}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.3)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.4)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par la :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1-V_1(z)]E_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (1.5)$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1-V_2(z)]E_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (1.6)$$

Figure I.7 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.5) et (I.6) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)

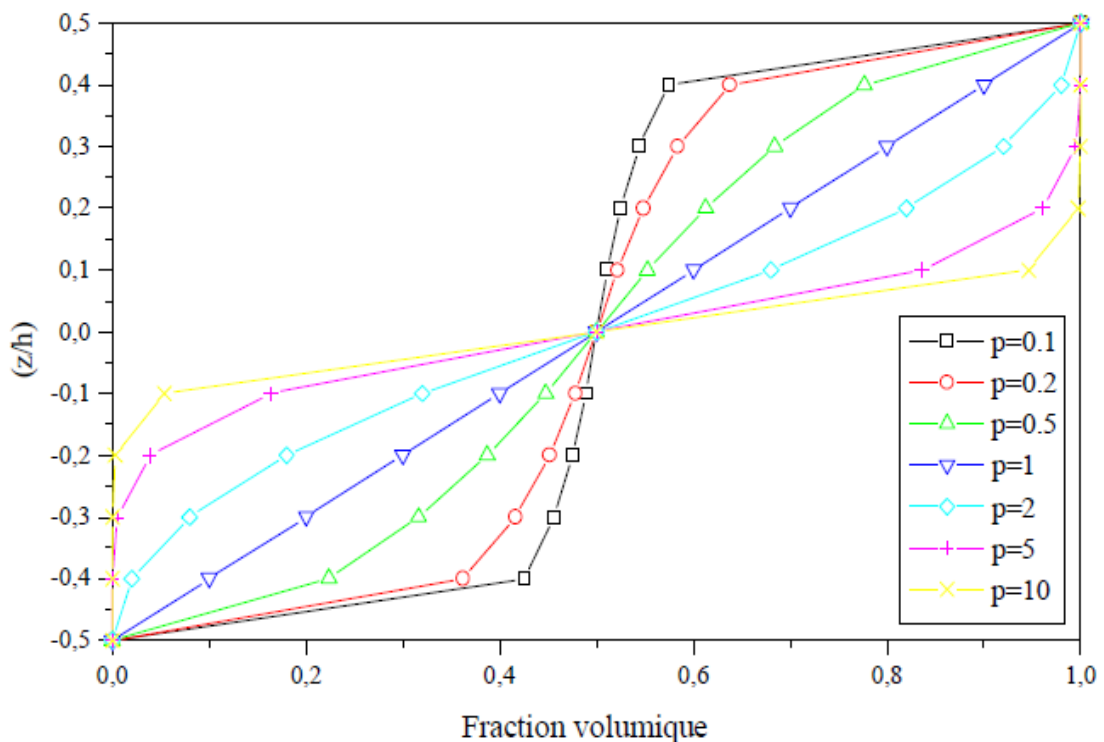


Figure I.7: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

I.5.3. Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM :

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [59] :

$$E(z) = E_2 e^{\delta(z+h/2)} \quad (1.7)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (1.8)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la Figure I.8.

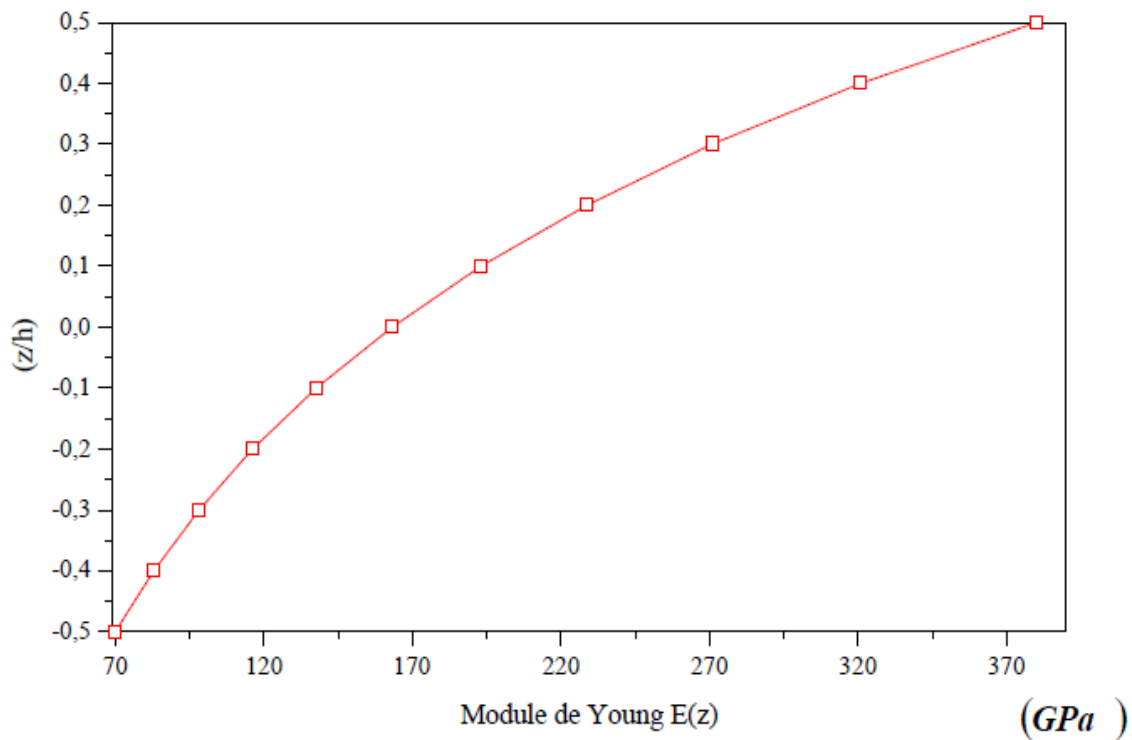


Figure I.8 : Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

I.6. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

De nos jours, les recherches sur les FGM ont été menées de manière intensive. Les FGM sont largement utilisés pour des applications mécaniques et sont utilisés dans les domaines de l'électronique, des diodes, des capteurs, des conducteurs de chaleur et des dispositifs électroniques, thermiques, structurels et militaires. Les FGM sont également une préoccupation dans les autres domaines tels que les matériaux industriels, l'optoélectronique, les biomatériaux et les matériaux énergétiques. Les FGM sont très prometteuses dans les

applications où les conditions d'exploitation sont plus nombreuses. En raison du développement du concept des matériaux fonctionnellement gradués dans les années 1990, l'utilisation pratique des FGM est encore très limitée. Ces solides non homogènes sont utilisés dans différentes branches d'applications d'ingénierie, par ex. [60].

I.6.1 Domaine de Génie civil

La gradation fonctionnelle des éléments en béton permet d'aligner la composition interne des composants structurels avec des exigences de performance structurelles et thermiques spécifiques. Cet alignement est rendu possible en modifiant continuellement les caractéristiques du matériau, y compris sa porosité, sa résistance ou sa rigidité. Le changement graduel des composants en béton permet l'altération continue des propriétés du béton dans toutes les dimensions spatiales. Minimiser la porosité améliore les caractéristiques structurelles du composant, tandis que la maximisation de la porosité optimise ses propriétés d'isolation thermique et son propre poids (Figure I.9).

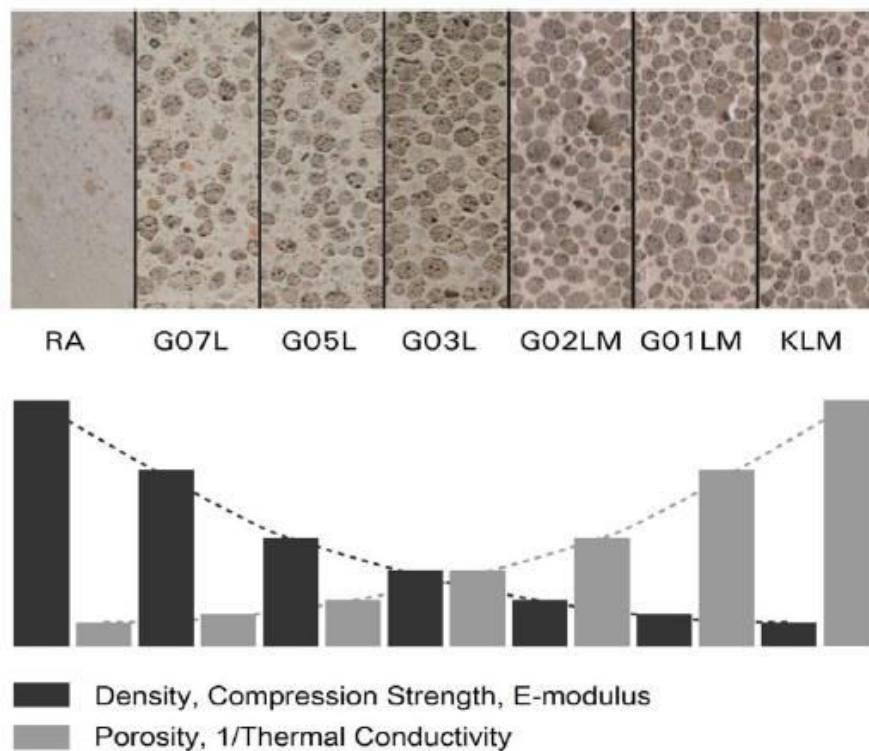


Figure I.9 Caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [60].

I.6.2 Réacteur nucléaire

Les parois internes des réacteurs nucléaires sont constituées de FGM (Céramique / Métal) dont la face exposée à très haute température posséderait des propriétés de résistance aux fortes sollicitations thermiques et à l'oxydation, tel que la céramique, et dont la face intérieure serait très bonne conductrice de la chaleur et posséderait une bonne résistance mécanique et une meilleure ténacité, comme le métal comme le montre la Figure I.10.

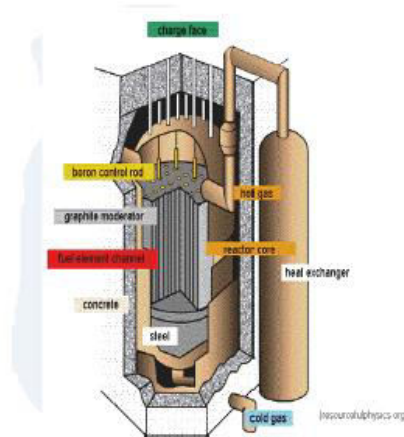


Figure I.10 Réacteur nucléaire.

I.6.3 Cylindres de moteur de voiture

Les cylindres du moteur de la voiture sont en FGM. La phase interne est en céramique et la phase externe est en métal comme le montre la Figure I.11.

I.6.4 Lames de turbine

Les FGM sont applicables dans les lames de la turbine comme le montre la Figure I.12. Les revêtements typiques pour les applications à haute température impliquent un revêtement résistant à l'oxydation et un revêtement de barrière thermique (TBC). Le revêtement résistant à l'oxydation est également appelé couche de liaison car il fournit une couche sur laquelle la céramique TBC peut adhérer.



Figure I.11 Cylindre du moteur de la voiture.

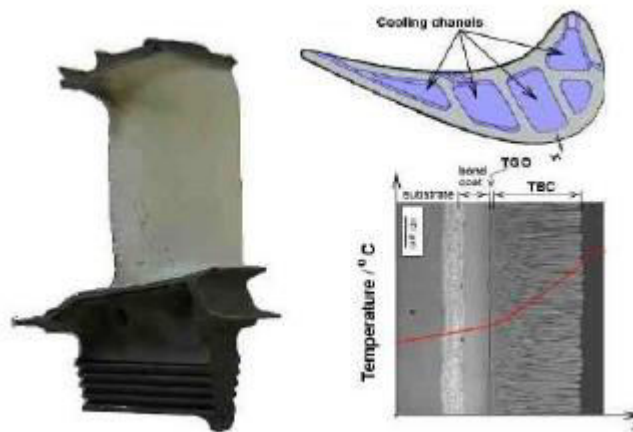


Figure I.12 Lames de turbine.

I.6.5 Domaine d'Électronique et optoélectronique

Fibres optiques utilisées pour la transmission des ondes à haute vitesse. Cartes de circuits imprimés (PCB) Téléphone cellulaire.

I.6.6 Domaine de Médecine

Les tissus vivants tels que les os et les dents sont caractérisés en tant que matériel gradué fonctionnellement de la nature pour remplacer ces tissus, un matériau compatible est nécessaire pour servir le but du bio-tissu original. La solution idéale pour cette application est un matériau fonctionnellement gradué. Les FGM ont trouvé une large gamme d'applications dans les applications dentaires et orthopédiques pour le remplacement des dents et des os. Le concept de FGM est applicable à divers domaines, comme l'illustre la Figure I.13.

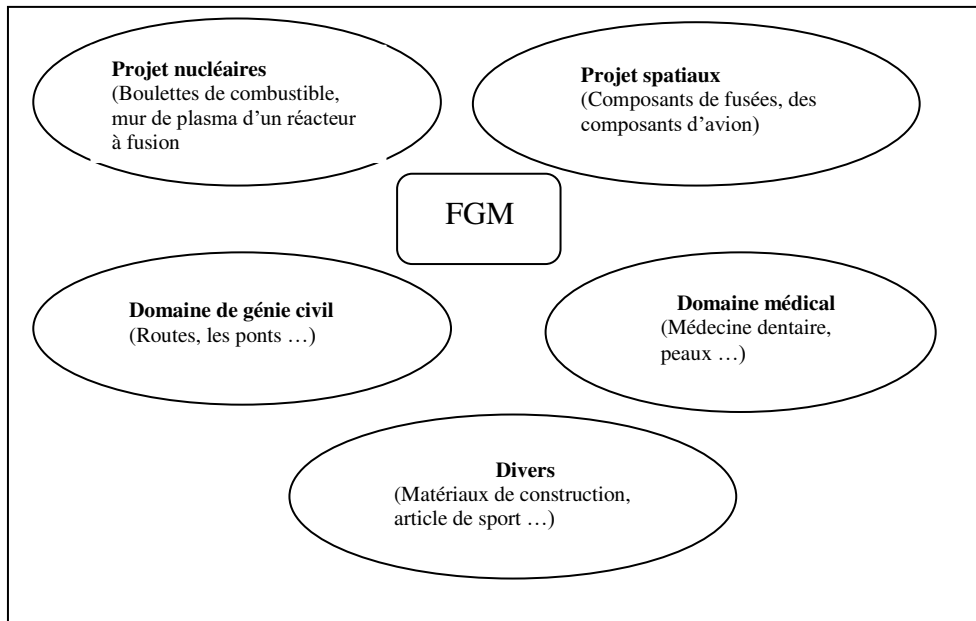


Figure I.13 Les champs potentiels de l'application des FGM.

Les FGM peuvent également trouver une application dans les techniques de communication et d'information. Les outils abrasifs pour la coupe de métal et de pierre sont d'autres exemples importants où la gradation de la couche de surface a amélioré les performances. Comme une observation finale concernant les FGM, on peut noter que ce concept de matériaux gradués a démontré que le gradient de composition micro/macrostructure peut non seulement éliminer les effets indésirables tels que la concentration des contraintes, mais aussi générer une fonction positive unique [61].

I.7. Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre ,la définition des matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement et puis leurs propriétés , leurs principales méthodes de fabrication et par la suite nous avons cités les différentes lois possibles qui servent à décrire la variation des propriétés matérielles du matériau (module de Young, masse volumique et coefficient de poisson) suivant l'épaisseur d'une plaque, ces lois peuvent être puissantielles, exponentielles ou même sigmoïde. Enfin, Nous avons présenté leurs domaines d'application.

Chapitre II :
Rappelle sur l'élasticité
et la théorie de
contrainte de couple
modifiés

II.1. Introduction

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans de nombreux domaines, en particulier les transports et le génie civil. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...).

L'objectif de ce chapitre est présenter les différentes théories de structure et la théorie de contrainte de couple modifiés.

II.2. Définition d'une poutre

Le terme de «poutre» désigne un objet dont la longueur est grande comparé aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisée pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions.

II.2.1 Historique

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pu pas finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques pussent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle .

II.2.2 Les différents types de poutres

La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines .En réaction aux charges appliquées, des forces et des moments internes se développent dans la poutre pour maintenir l'équilibre.

• Poutre simple

C'est une poutre reposant sur deux supports ; l'appui double et l'appui simple. Les points d'appui sont articulés de façon à ce que les extrémités puissent se mouvoir librement pendant la flexion.

• Poutre console

C'est une poutre encastrée dans un mur à une l'extrémité. L'extrémité encastrée ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastrée à une extrémité.

• Poutre avec porte-à-faux

C'est une poutre sur deux appuis (un simple et l'autre double) et a une ou deux extrémités qui dépassent de façon appréciable les appuis (porte-à-faux). On appelle aussi cette poutre en porte-à-faux. Les poutres sont classées suivant leurs appuis. les trois types de poutres précédentes entrent dans la catégorie des poutres statiquement déterminées (poutre isostatique), puisqu'elles possèdent trois inconnues reliées aux trois degrés de liberté et par le fait même aux équations d'équilibre.

• Poutre continue

C'est une poutre supportée par plus de deux supports, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

• Poutre à double encastrement

C'est une poutre supportée par deux encastresments, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique.

• Poutre supportée à double encastrement :

C'est une poutre par deux encastresments et supportée par un ou plusieurs supportée, c'est donc une poutre en équilibre hyperstatique. Elle a plus de fixations ou support que nécessaires. Cependant, ces supports augmentent la capacité portante de la poutre. les équations de la statique ne suffisent pas pour analyser ces poutres. On a recourt à différentes méthodes.

II.2.3 Les différentes théories des poutres

Les théories de poutres impliquent essentiellement la réduction d'un problème en trois dimensions de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Elles s'appliquent sur des solides élancés les prismes dont la longueur vaut 10 fois la plus grande dimension transversale. Là où la détermination de la solution exacte pour les champs de contrainte et de

déformation n'est pas possible, elle permet d'obtenir une solution approchée, qui donne une bonne idée sur les efforts et les déplacements.

II.2.4 Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Laminated Beam Theory- CLBT)

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle est applicable qu'aux poutres fines.

Dans cette approche, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couches puisque la poutre multicouche est homogénéisée, donc considérée comme une seule couche. L'hypothèse dans cette théorie:

- Après déformation, les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre),
- La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane.

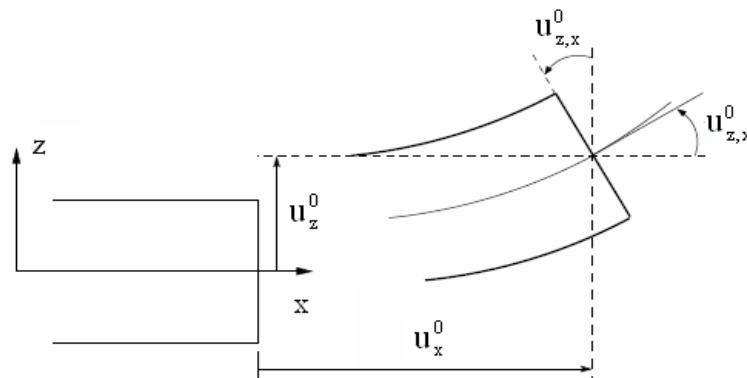


Figure II.1 Cinématique d'Euler Bernoulli

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est :

$$\Phi(z) = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw'_x(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$u(x, z)$: C'est le déplacement suivant X et $w(x, z)$ est le déplacement dans la direction de Z ou bien la flèche.

La rotation autour de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que:

$$w',_x(x) = \frac{\partial w^0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$u^0(x)$ et $w^0(x)$ sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre, respectivement le long des axes X et Z.

Lorsque cette théorie est utilisée pour l'analyse des fréquences naturelles des poutres, les flèches sont sous-estimées. Ceci est la conséquence de négliger la déformation de transversal.

II.2.5 Modèle de Timoshenko (FSDBT):

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Elle s'applique sur des poutres courtes, elle est basée sur le principe; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (Figure II.2). Ceci est dû au cisaillement transversal, découvert par Timoshenko, sur l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est analogue à la théorie de "Reissner-Mindlin" dans le cas des plaques épaisses. Dans le cas où nous avons un élanement faible, l'effet du cisaillement devient plus important sur la déformée. Dans ce cas, la fonction $\Phi(z)$ est égale à Z . Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées. C'est la théorie de premier ordre (FSDBT).

Le déplacement d'après Timoshenko s'écrit comme suit:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw',_x(x) + z \gamma^0_{xz}(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

γ^0_{xz} , c'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\gamma_{xz}^0(x) = w_{,x}^0(x) - \varphi^0(x) \quad (\text{II.5})$$

$\varphi^0(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

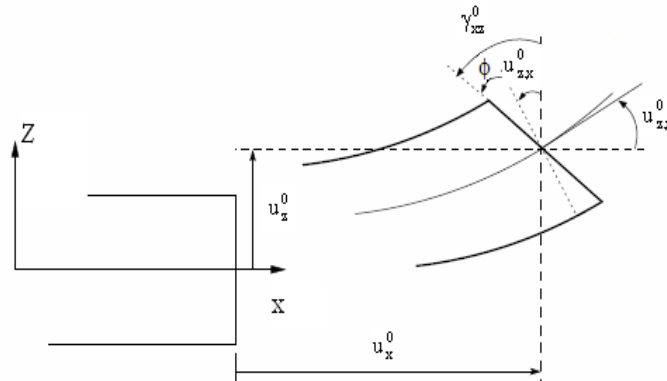


Figure II.2 Cinématique de Timoshenko

Par définition, la distorsion est donnée par la relation suivante:

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,x}^0(x) + \gamma_{xz}^0(x) + w_{,x}^0(x) \quad (\text{II.6})$$

$$\gamma_{xz}(x) = \gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.7})$$

Sachant que la contrainte de cisaillement est égale:

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz}^0 \quad (\text{II.8})$$

G_{xz} ; est le module de cisaillement transversal qui est supposé constant.

Avec cette théorie, les contraintes tangentielles de cisaillement sont constantes et uniformes sur toute l'épaisseur de la poutre; cela veut dire qu'elles existent même sur les bords supérieurs et inférieurs de la poutre et pourtant il n'y a aucun chargement qui induit le cisaillement. Cette contradiction mène à introduire des coefficients de correction pour corriger et maintenir les contraintes et les déformations du cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur de la poutre. Ce facteur a été calculé pour la variété de sections de poutres par Mindlin.

La théorie de Timoshenko est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Cette solution permet d'affiner les solutions analytiques issues de la théorie classique. Toutefois ces solutions sont entachées

d'erreurs au voisinage des appuis et de la zone indentation où nous pouvons avoir des concentrations de contrainte et des champs de déplacement non homogènes.

Les non nullité des contraintes tangentielles sur les bords extrêmes de la poutre et l'introduction des coefficients de correction de cisaillement ont menés d'autres chercheurs à essayer de trouver une autre théorie pouvant tenir compte de ces facteurs; c'est "la théorie d'ordre élevé".

II.2.6 Théorie d'Ordre Elevé

Dans cette théorie la distribution des champs de déplacement est non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Elle est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de "gauchissement". Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (Figure II.3). La fonction $\Phi(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $\Phi'(z)$ le cisaillement.

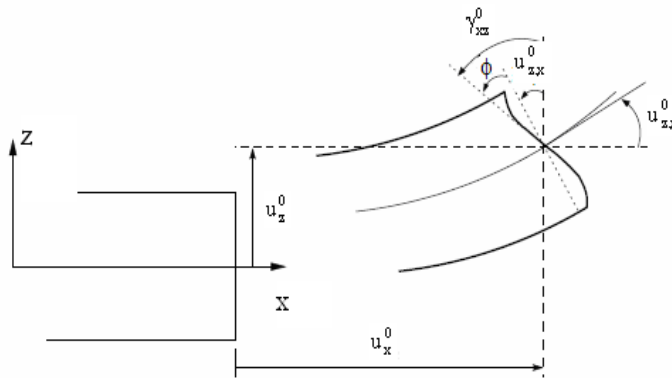


Figure II.3 Cinématique de la Théorie d'Ordre Elevé.

Dans ce cas, le champ de déplacement devient:

$$U(M) = \begin{cases} u(x, z) = u^0(x) - zw',_x(x) + \Phi(z) \gamma_{xz}^0(x) \\ w(x, z) = w^0(x) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -w',_x(x) + \Phi'(z) \gamma_{xz}^0(x) + w',_x(x) \quad (\text{II.10})$$

$$\gamma_{xz} = \Phi'(z) \gamma_{xz}^0(x) \quad (\text{II.11})$$

Pour que les contraintes tangentielles soient nulles sur les bords extrêmes de la poutre, on doit avoir:

$$\Phi'(z)|_z = \pm \frac{h}{2} \quad (\text{II.12})$$

C'est la condition qui nous permet d'avoir une répartition parabolique des contraintes de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre d'une part et de choisir correctement des fonctions cubiques qui répondent à la condition (II.11).

Selon l'expression de la fonction de gauchissement $\Phi(z)$, quelques modèles sont présentés dans la littérature des poutres en FGM:

1-) Le modèle Euler-Bernoulli (la théorie des poutres classiques) (CLBT):

$$\Phi(z) = 0 \quad (\text{II.13})$$

2-) Le modèle de Timoshenko ou bien la théorie du premier ordre (FSDBT):

$$\Phi(z) = z \quad (\text{II.14})$$

3-) Le modèle d'ordre élevé, avec l'approche de Levinson [87]:

$$\Phi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.15})$$

4-) Le modèle exponentiel proposé par Afaq et al [62] :

$$\Phi(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.16})$$

5-) Le modèle d'Aydogdu [88] :

$$\Phi(z) = z \alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln \alpha}} \quad (\text{II.17})$$

Avec, h: étant l'épaisseur de la poutre.

II.3 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces (Figure II.4). On définit :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;

- le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan (O, x, y) , d'équation $z = 0$;
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (x, y) donné ; elle a pour direction z .

On appelle h l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

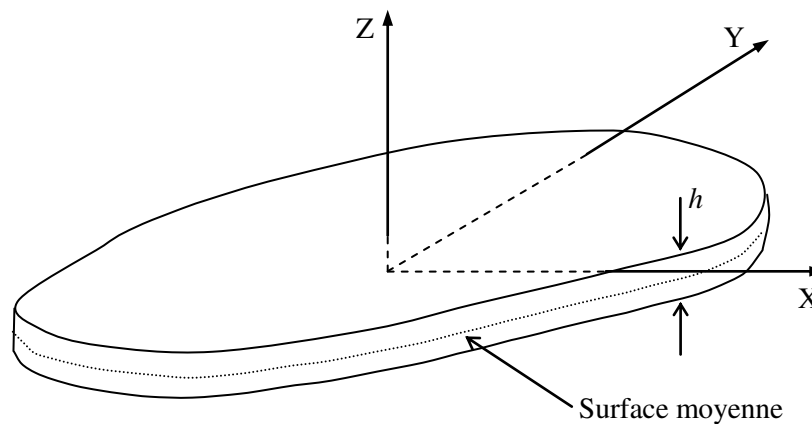


Figure II.4 : Géométrie d'une plaque de forme géométrique arbitraire.

II.3.1 Modèles analytiques des plaques

II.3.2 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

La théorie des plaques minces, ou théorie de Love-Kirchhoff s'inspire de celle des poutres minces d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant (Figure II.5). Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, la part de cisaillement dans la flèche est directement reliée à l'élancement (L/h) . Elle suppose les hypothèses ci-après :

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée (

$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). On admet dans ce cas que la déformation due à l'effort tranchant est nulle et ne participe pas à la rigidité.

- le plan neutre ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du plan neutre ;
- l'épaisseur est faible ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$);

Le champ de déplacement s'écrit pour la théorie classique des plaques sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.18})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.19})$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

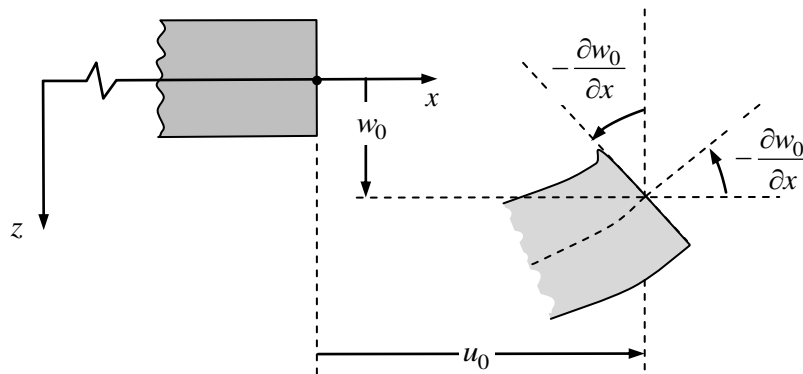


Figure II.5 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff .

Puisque ce modèle ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

II.3.3 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT)

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par Kirchhoff:

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque;

- La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres composantes;
- Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan moyen après déformation;
- L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

La troisième hypothèse veut dire que la déformation due au cisaillement transversal est négligée. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées. Wittrick a précisé qu'en excluant ces effets, l'erreur dans la théorie de plaque de Kirchhoff est proportionnelle à l'épaisseur si la théorie de plaque de Kirchhoff est employée, les fréquences obtenues sont au dessus de celles prévues. Une théorie plus sophistiquée de plaque est ainsi nécessaire pour l'analyse des plaques épaisses. Il y a eu beaucoup de théories de plaques épaisses prenant en compte l'effet de cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible. Reissner et al [66] a proposé la théorie de plaque épaisse la plus simple en introduisant l'effet de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale. Mindlin a présenté un travail différent de Reissner, une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues. Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que :

- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur k de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que :

- L'effet de l'inertie de rotation est inclue.

Dans la littérature, les vibrations des plaques fondées sur les hypothèses du premier ordre de cisaillement transversal sont largement mentionnées sous le nom de plaques de Mindlin,

Reissner-Mindlin ou Hencky-Mindlin. Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement (figure II.6) est exprimé sous la forme [71] :

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.20})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.21})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.22})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x , respectivement.

Le champ de déplacement définis dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.23})$$

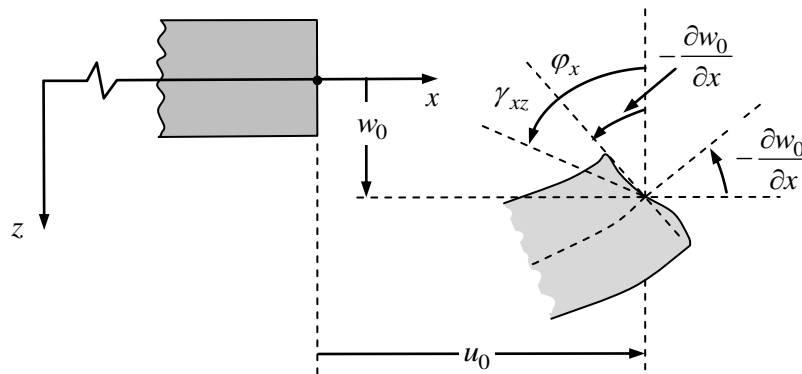


Figure II.6 : Illustration de la plaque de Love Kirchhoff [69].

D'ailleurs pour éviter l'introduction d'un facteur de correction, des théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé ont été développées.

II.3.4 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

À la différence de la théorie CPT et la théorie FSDT avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient

compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al [64] ; Naghdi [65] ; Reissner [66] ; Reddy [67], Kant et Swaminathan [68]). Nous avons introduit ici quatre modèles de plaque utilisés pour analyser le comportement des matériaux à gradient de propriétés.

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes y et x respectivement $\left(\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, \phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right)$, $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenue par en prenant $\Psi(z)=0$, alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par $\Psi(z)=z$.

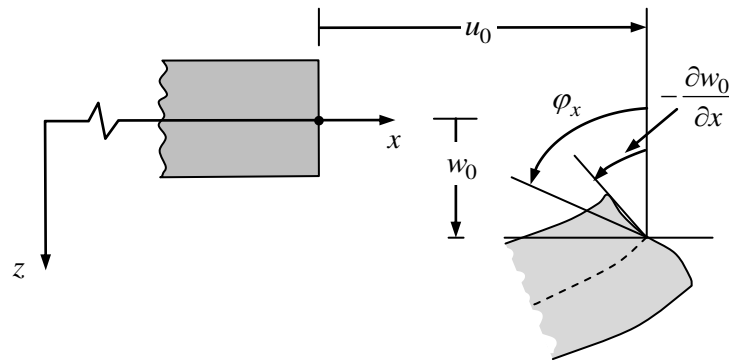


Figure II.7: Illustration de la plaque d'ordre élevé [69].

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement de la troisième de Reddy (TSDT) [67] sont obtenus par :

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier [69] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous. Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinus dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al. [70] est obtenue en prenant :

$$\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.24})$$

II.4 Revue bibliographique sur la théorie de contrainte de couples modifiés :

Mindlin et al [71] a développé la version initiale de la théorie de la contrainte du couple, basée sur la théorie de la contrainte de Cosserat [73], dans lequel la déformation est complètement spécifiée par le champ de déplacement continu u_i , Par conséquent, la quantités cinématiques, telles que le vecteur de rotation w_i , et des mesures de déformation, telles que tenseur de contrainte $e_{i,j}$, et tenseur de gradient de rotation $w_{i,j}$, sont dérivés de ce champ de déplacement. Comme un en conséquence, la théorie des contraintes de couple Mindlin-Tiersten-Koiter (MTK-CST) est basée sur la partie corps rigide du mouvement des éléments finis de la matière en chaque point du continu [72]. Dans ces développements importants, Mindlin, Tiersten et Koiter ont correctement établi que cinq conditions aux limites géométriques et cinq conditions mécaniques peuvent être spécifiées sur une surface lisse. En MTK-CST, le tenseur de couple-contrainte est conjugué énergiquement au gradient de vecteur de rotation $w_{j,i}$, qui est pris comme le tenseur de courbure. Bien que ces chercheurs aient fait un progrès significatif pour la mécanique du continuum, le MTK-CST final souffre de graves incohérences et difficultés avec les formulations sous-jacentes [75]. Les trois principales incohérences de MTK-CST pour les matériaux élastiques linéaires isotropes sont les suivantes:

1. L'indétermination dans la partie sphérique du tenseur de contraintes de couple et, par conséquent, dans partie asymétrique du tenseur force-contrainte;

2. L'incohérence dans les conditions aux limites, puisque la composante normale de la couple-traction le vecteur apparaît dans la formulation;

3. L'apparition de deux coefficients élastiques de contrainte de couple η et η' pour élastique linéaire matériau isotrope, bien qu'un seul de ces coefficients élastiques, η , apparaît en finale gouverner les équations lorsqu'elles sont écrites en termes de déplacements.

L'apparition d'une composante de contrainte de couple sphérique arbitraire dans le tenseur de contrainte de résultat de la déviatorique ou trace libre $w_{i,i} = 0$ caractère du tenseur de torsion $w_{i,j}$ dans cette théorie. Le caractère perturbant de cette composante sphérique est qu'il ne crée aucune déformation dans le corps, ce qui signifie que son effet est équivalent à une condition de chargement nul. Cette partie sphérique de tenseur de couple reste indéterminé lorsque le champ de rotation w est prescrit sur le toute la limite, et ne peut pas être simplement ignoré. Il ne peut pas non plus être déterminé de manière cohérente, systématique dans la plupart des cas, lorsque le vecteur normal de traction-couple est spécifié globalement ou une partie de la surface limite. Eringen [76] a compris que cette incohérence était un problème majeur problème mathématique dans le MTK-CST d'origine, qu'il a ensuite appelé couple indéterminé théorie de contrainte.

Une théorie du couple symétrique souffre toujours des mêmes incohérences et difficultés avec la formulation sous-jacente. Dans cette théorie, la partie symétrique du vecteur gradient de rotation champ w_i est pris comme le tenseur de courbure. Cependant, un examen attentif montre que cette symétrie le tenseur est en réalité un tenseur de torsion.

Par conséquent, le couples-contraintes dans cette théorie crée une combinaison de torsion et de déformation anticlassique avec courbure négative pour les éléments de surface de la contrainte. Comme dans le MTK-CST d'origine, la partie sphérique du tenseur couple-contrainte reste également indéterminée dans cette théorie et ne peut pas être déterminé de manière systématique et cohérente. Cette théorie est issue des travaux de Yang et al [14], communément appelée théorie du couple modifié (M-CST). Dans leur développement, Yang et al. [14] considèrent une équation d'équilibre artificielle supplémentaire pour le moment des couples, en plus des deux équations d'équilibre force / moment vectorielle. L'application de cette équation d'équilibre non corroborée conduit apparemment à une tenseur de couple symétrique. Il semble que la principale motivation de Yang dans leur développement a consisté à réduire le nombre de paramètres matériels de contrainte de couple pour le matériau

élastique isotrope à partir de deux coefficients η et η' dans l'original Mindlin-Tiersten-Koiter théorie à un seul coefficient η .

Hadjesfandiari et al . [78] ont récemment développé la contrainte constant du couple théorie (C-CST), qui résout toutes les incohérences dans le MTK-CST d'origine. Le triomphe de ce développement consiste à découvrir le caractère subtilement asymétrique du tenseur couple-contrainte, qui réduit le nombre de composantes de contrainte indépendantes à neuf. En conséquence, le tenseur de courbure dans C-CST est la partie asymétrique du gradient du champ de vecteur de rotation w . La première étape de ce développement consiste à satisfaire à la condition que la composante normale du couple le vecteur de traction doit disparaître de manière systématique à la surface. C'est ce que Mindlin, Tiersten et Koiter ont marqué leurs importants développements, bien qu'ils ont correctement établi les conditions aux limites cohérentes. Il est intéressant de noter que le caractère asymétrique du tenseur du couple-contrainte résout immédiatement le problème de l'indétermination en établissant que il n'y a pas de composant sphérique. En conséquence, le tenseur couple-contrainte est déterminé dans C-CST. Il est important de noter que les contraintes de couple asymétriques créent une déformation ellipsoïdale en forme de calotte à courbure gaussienne positive pour les éléments de surface du continu. Bien que le développement de C-CST n'ait pas été motivé par la réduction du nombre de couple de contraintes de matériau, il s'avère que pour les matériaux élastiques isotropes linéaires, cette théorie nécessite seulement un paramètre de matériau couple-contrainte $w_{i,j}$.

En raison des incohérences, il est presque impossible de trouver une vraie solution à de nombreux problèmes dans MTK-CST et M-CST qui satisfont à toutes les conditions aux limites. Cela peut être observé dans très problèmes pratiques élémentaires. Par exemple, il n'existe pas de solution cohérente pour la torsion pure d'une barre circulaire dans ces théories. Nous remarquons que les solutions approximatives incohérentes pour la torsion pure dans ces théories prédit un effet de taille significatif, ce qui ne correspond pas aux expériences [79] .

MTK-CST et M-CST ne peuvent pas non plus décrire une flexion pure d'une plaque correctement [80]. En particulier, M-CST prédit pas de contrainte de couple et aucun effet de taille pour le pliage pur de la plaque dans une coque sphérique. Par contre, CCST prédit des résultats cohérents pour la torsion pure d'une barre circulaire et la flexion pure d'une plaque.

Les méthodes énergétiques constituent un moyen pratique et alternatif de formuler les équations qui régissent la mécanique des solides continus. Ces méthodes donnent non seulement un nouvel aperçu des formulations, mais peut également être utilisé pour formuler des méthodes efficaces pour obtenir solutions approximatives. Par conséquent, nous nous concentrons sur les corps élastiques et en déduisons équations d'équilibre et conditions aux limites pour les MTK-CST et M-CST indéterminées et CST asymétrique déterminé. Nous minimisons l'énergie fonctionnelle totale potentielle correspondant à ces théories sous réserve de la condition de compatibilité du champ de vecteur de rotation $w_{i,i} = 0$. Par conséquent, nous imposons cette contrainte de compatibilité en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange. Comme nous le verrons, pour MTK-CST et M-CST, le multiplicateur de Lagrange est l'indéterminé.

La partie sphérique du tenseur couple-contrainte. Cela signifie que la méthode variationnelle aboutit à une composant sphérique pour le tenseur de couple dans le couple original Mindlin-Tiersten-Koiter théorie des contraintes (MTK-CST) et théorie des contraintes à couples modifiés symétriques (M-CST).

Par conséquent, la couple tenseur de contrainte ne devient pas trace libre comme on pourrait conclure à un direct incorrect minimisation sans contrainte. Ce résultat démontre clairement que le mode direct sans contrainte la minimisation de l'énergie potentielle totale pour MTK-CST et M-CST enfreint le principe de libre divergence condition de compatibilité du champ de vecteur de rotation, telle que $w_{i,i} = 0$. Ainsi, un autre aspect de la une incohérence de MTK-CST et de M-CST indéterminés est révélée selon la méthode de l'énergie. Par contre, pour C-CST, le multiplicateur de Lagrange correspondant s'annule, ce qui donne démontre la cohérence du caractère asymétrique du tenseur couple-contrainte dans cette théorie. Par conséquent, la minimisation directe sans contrainte de C-CST satisfait automatiquement la condition de compatibilité du champ de vecteur de rotation $w_{i,i} = 0$. Ce résultat montre une autre intérieure cohérence de C-CST.

II.4.1 Théorie de contrainte de couple:

Considérons un continuum matériel occupant un volume V délimité par une surface S avec unité extérieure Ordinaire n , comme le montre (la Fig. II.8).

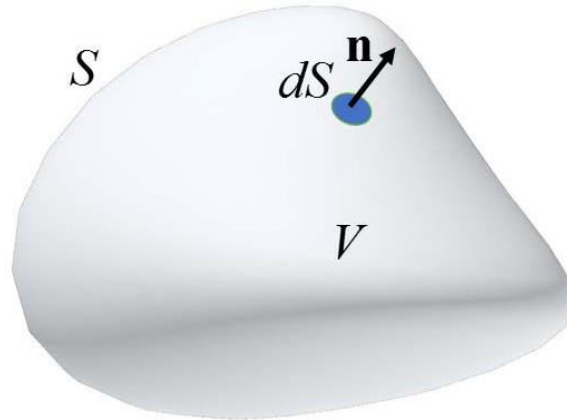


Figure II.8 : La configuration du corps.

Dans la théorie du contrainte de couple, l'interaction dans le corps est représentée par le vrai contrainte force (polaire) $\cdot \sigma_{ij}$ et pseudo (axiaux) contraintes de couple μ_{ij} . Les composantes du contrainte-force σ_{ij} et le couple de contrainte μ_{ij} . Les tenseurs de cette théorie sont illustrés à (la Figure II.9).

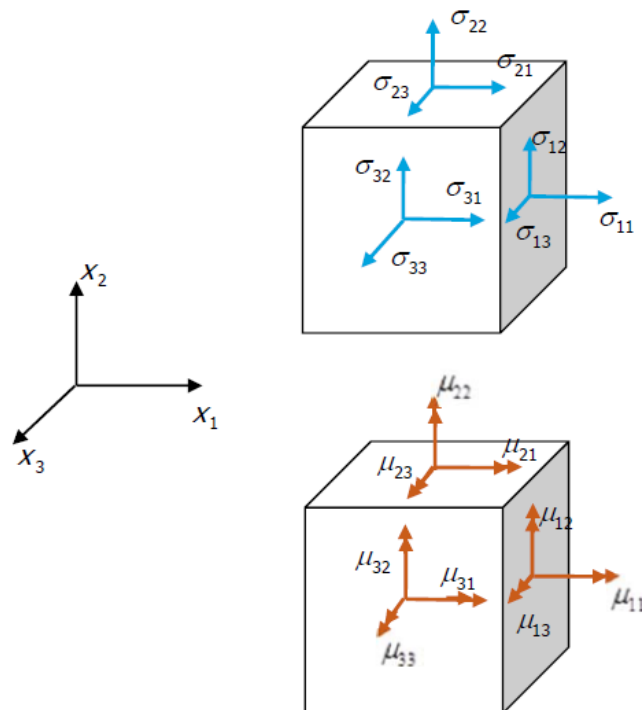


Figure II.9. Composantes générales des tenseurs de force et de couple dans la théorie des contraintes de couple.

Comme dans la théorie de contrainte de Cosserat, l'équilibre force / moment les équations régissant un élément infinitésimal de la matière dans des conditions quasi-statiques sont écrites, respectivement, comme:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + F_i &= 0 \\ \mu_{ij,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} &= 0\end{aligned}\quad (\text{II.25})$$

Où F_i est la densité de force corporelle spécifiée et ε_{ijk} est le symbole Lévi-Civita en alternance. Le vecteur force-traction t_i et vecteur de traction en couple m_i en un point sur un élément de surface dS avec unité vecteur normal n_i sont donnés par :

$$\begin{aligned}t_i &= \sigma_{ij} n_j \\ m_i &= \mu_{ij,j} n_j\end{aligned}\quad (\text{II.26})$$

Le tenseur force-contrainte est généralement non symétrique et peut être décomposé de la manière suivante:

$$\sigma_{ji} = \sigma_{(ji)} + \sigma_{[ji]} \quad (\text{II.27})$$

Où σ_{ij} et σ_{ji} sont les parties symétriques et asymétriques, respectivement. Le angulaire

l'équation d'équilibre (II.28) donne la partie asymétrique du tenseur force-contrainte comme

$$\sigma_{[ij]} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mu_{lk,l} \quad (\text{II.28})$$

Ainsi, pour le tenseur total force-contrainte, on a

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mu_{lk,l} \quad (\text{II.29})$$

En conséquence, l'équation linéaire d'équilibre (II.29) se réduit à

$$\left[\sigma_{(ij)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mu_{lk,l} \right]_{,j} + F_i = 0 \quad (\text{II.30})$$

Dans la théorie de la déformation, le champ de vecteur de déplacement u_i est suffisamment petit pour que la déformation et tenseurs de rotation sont définis comme

$$\begin{aligned} e_{ij} = u_{(i,j)} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ w_{ij} = u_{(i,j)} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

respectivement. Depuis le tenseur (polaire) w_{ij} est asymétrique, on peut introduire son pseudo vecteur rotation axiale correspondant comme

$$w_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{kj} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{k,j} \quad (\text{II.32})$$

Nous remarquons que la définition (Equation II.32) requiert

$$w_{i,i} = 0 \quad (\text{II.33})$$

qui est l'équation de compatibilité pour le vecteur rotation. Cette condition contraint la forme d'un vecteur de rotation donné w_{ij} . Il convient de noter que la partie du corps rigide du mouvement associée à des éléments finis (ou triades rigides) à chaque point est représenté par le vecteur de déplacement u_i et le vecteur de rotation w_i . Comme démontré dans Hadesfandiari et al .[80], le modèle approprié les mesures de déformation sont définies en fonction du mouvement relatif du corps rigide des triades aux points adjacents. Cela signifie que les mesures de déformation sont définies en fonction sur u_{ij} et w_{ij} . Il convient de souligner ici que dans la théorie classique, seule la partie symétrique de u_{ij} définit la déformation. Faut-il s'attendre à ce que le tenseur entier w_{ij} contribuer en tant que mesure de déformation dans la théorie du contrainte de couple?

Depuis le tenseur w_{ij} représente une combinaison de déformation en flexion et en torsion du matériau à chaque point, il peut être appelé à juste titre le tenseur de flexion en torsion [80]. L'infinitésimal les tenseurs pseudo (axiaux) de torsion et de courbure moyenne sont définis, respectivement, comme

$$\begin{aligned} \chi_{i,j} = w_{(i,j)} &= \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}) \\ k_{i,j} = w_{(i,j)} &= \frac{1}{2}(w_{i,j} - w_{j,i}) \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Depuis le tenseur de courbure moyenne k_{ij} est également asymétrique, on peut définir sa correspondance vecteur de courbure moyenne polaire (vraie) double comme

$$k_i = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} k_{kj}) \quad (\text{II.35})$$

Cela peut aussi être exprimé par

$$k_i = \frac{1}{2} w_{ji,j} = \frac{1}{4} (u_{j,ji} - \Delta^2 u_i) \quad (\text{II.36})$$

Mindlin et Tiersten , Koiter ont montré que le champ de déplacement u_i spécifié

sur une partie lisse de la surface limite S , spécifie la composante normale de la rotation $w^{(nn)} = w_i n_i$, En conséquence, ils ont démontré que la matière dans un couple constant la théorie ne supporte pas les distributions indépendantes de la traction normale en couple (ou en torsion) $m^{(nn)} = m_i n_i$. Ça signifie

$$m^{(nm)} = m_i n_i = \mu_{ji} n_i n_j = 0 \dots \text{Dans } \dots S \quad (\text{II.37})$$

D'un point de vue mathématique, ces résultats montrent que l'on peut spécifier soit le déplacement

Vecteur u_i ou le vecteur force-traction t . et la composante tangentielle du vecteur de rotation w_i ou le vecteur couple-traction tangent m_i . En d'autres termes, pour la valeur limite tridimensionnelle problèmes, le nombre de conditions aux limites cinématiques et mécaniques sont chacun cinq. Cependant, Mindlin, Tiersten et Koiter n'ont pas compris l'implication fondamentale de l'équation (II.37) en tant que contrainte sur la forme du tenseur couple-contrainte ,qui a repoussé la définition d'une théorie du contrainte du couple cohérent pendant un demi-siècle.

Conclusion :

Ce chapitre nous donne une revue sur les poutres et les plaques ainsi que les différentes théories utilisées.

Dans une première partie on a expliqué les différentes théories de structure :

- ✓ Théorie classique.
- ✓ Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

✓ Théorie d'ordre élevé.

Dans la deuxième partie on a présenté une revue bibliographique sur la théorie de contrainte de couple modifiés.

Chapitre III :
Formulation
mathématique des
micros poutres
poreuses

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, une nouvelle théorie de poutre de déformation du cisaillement hyperbolique est proposée sur la base d'une théorie de contrainte de couple (MCST) afin d'étudier la flexion et de vibration libres de la micro-poutre fonctionnellement graduées (FG) en matériau poreux. Ce modèle de micro-poutre non classique introduit le coefficient d'échelle de longueur de matériau qui peut capturer l'influence de la taille. Le modèle non classique de poutre se réduit au modèle classique lorsque le coefficient de longueur d'échelle de matériau est mis à zéro. On suppose que les propriétés des matériaux mécaniques de la micro-poutre FG varient dans le sens de l'épaisseur et sont estimées selon la loi classique du mélange qui est modifiée pour approximer les propriétés du matériau poreux avec des distributions uniformes et non uniforme des phases de porosités. Les effets de plusieurs paramètres importants tels que les exposants de la loi de puissance, les distributions de porosité, les fractions de volume de porosité, les paramètres d'échelle de longueur du matériau et les rapports d'élanement sur les réponses statique et dynamique des micro-poutres FG sont étudiés et discutés en détail. On conclut que ces effets jouent un rôle important dans le comportement mécanique des micro-poutres FG poreuses.

III.2. La théorie de contrainte de couple modifié

Basé sur la théorie de couple de contrainte modifié par Yang et al, [14], l'énergie de déformation U , pour un matériau linéaire élastique occupant une région Ω est lié aux tenseurs de déformation et à la courbure et peut être écrit comme

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{III.1})$$

Tel que σ est le tenseur de contrainte, ε est le tenseur de déformation, m est la partie déviatorique de tenseur du contrainte de couple et χ est la courbure symétrique. Ces tenseurs sont donnés par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{III.2})$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (\text{III.3})$$

Alors que $u_{i,j}$ est le vecteur de déplacement, et θ est le vecteur de rotation qui peut être défini comme

$$\theta = \frac{1}{2} e_{ijk} \cdot u_{k,j} \quad (\text{III.4})$$

Où e_{ijk} c'est un symbole de permutation.

III.3. Les relations cinématiques

Le champ de déplacement du conventionnel IHSdT est donné comme suit:

$$u(x, z, t) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.5})$$

$$v(x, z, t) = 0 \quad (\text{III.6})$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (\text{III.7})$$

Telle que u_0 ; w_b ; w_s , sont les trois déplacements inconnus du milieu du plan de la poutre, comme w_b est la composante de flexion et w_s est la composante de cisaillement.

$f(z)$ représente une fonction de forme définissant la variation des déformations de cisaillement transversal et des contraintes sur toute l'épaisseur.

Dans ce travail, la fonction de forme est considérée comme étant donnée par Nguyen et al [81] comme suit

$$f(z) = z - \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) + \frac{6z}{h\sqrt{13}} \quad (\text{III.8})$$

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.9})$$

Les déformations non nulles de la présente théorie de la poutre raffinée sont présentées comme

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}, \quad (\text{III.10})$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = 2g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.12})$$

De plus, les équations (III.5) et (III.4), les composants du vecteur de rotation sont obtenus comme

$$\theta_y = -\frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{1}{2}\psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.13})$$

$$\theta_x = \theta_z = 0 \quad (\text{III.14})$$

Avec $\psi(z) = 1 + f'(z)$

En remplaçant l'équation (III.13) en l'équation (III.3), les composants du tenseur de courbure prennent la forme

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \psi(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (\text{III.15})$$

$$\chi_{yz} = -\frac{1}{4} f''(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (\text{III.16})$$

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{xz} = 0 \quad (\text{III.17})$$

III.4. Les relations constitutives

Considérons une poutre FG composée de deux matériaux fonctionnels à gradation fonctionnelle, les propriétés matérielles de la poutre telle que le module de Young E , densité masse ρ et le paramètre de longueur d'échelle l sont considérés comme changeant continuellement dans l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance. Les propriétés matérielles efficaces des poutres FG avec deux sortes de distributions de porosité qui sont réparties de manière identique dans deux phases de céramique et de métal peuvent être exprimées en utilisant la loi modifiée des mélanges comme

$$p = p_c \left(v_c - \frac{\alpha}{2} \right) + p_m \left(v_m - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{III.18})$$

Où α est la fraction volumique de la porosité ($\alpha \ll 1$), pour une FGM parfaite, α est mis à zéro, P_c et P_m sont les propriétés matérielles de la céramique et du métal et v_c et v_m sont la fraction volumique de la céramique et du métal séparément est donné par

$$v_c + v_m = 1 \quad (\text{III.19})$$

Dans ce travail, une FGM imparfaite a été étudiée avec deux types de distributions de porosité (uniforme et non uniforme) par l'épaisseur de la micro-poutre due à un défaut lors de la fabrication.

Pour la répartition uniforme des porosités FGM-I, les propriétés matérielles effectives sont déterminées comme suit :

$$E(z) = (E_c - E_m)v_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \quad (\text{III.20})$$

$$l(z) = (l_c - l_m)v_c + l_m - \frac{\alpha}{2}(l_c + l_m) \quad (\text{III.21})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)v_c + \rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \quad (\text{III.22})$$

Où $v_c = (0.5 + z/h)^p$ c'est la fraction volumique de la céramique.

Pour FGM-II définie comme des porosités non uniformes, les propriétés des matériaux efficaces sont remplacées par la forme suivante:

$$E(z) = (E_c - E_m)v_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (\text{III.23})$$

$$l(z) = (l_c - l_m)v_c + l_m - \frac{\alpha}{2}(l_c + l_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{III.24})$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)v_c + \rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{III.25})$$

Les relations constitutives peuvent être écrites comme

$$\sigma_{ij} = \lambda(z)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(z)\varepsilon_{ij} \quad (\text{III.26})$$

$$m_{ij} = 2\mu(z)[l(z)]^2 \chi_{ij} \quad (\text{III.27})$$

Où δ_{ij} c'est le delta Kronecker, l c'est le paramètre d'échelle de longueur de matériau qui reflète l'effet du couple de contrainte, λ et μ sont les constantes de Lamé données par

$$\lambda(z) = \frac{E(z)v(z)}{[1+\nu(z)][1-2\nu(z)]} \quad (\text{III.28})$$

$$\mu(z) = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]} \quad (\text{III.29})$$

III.5. Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton est employé dans ce travail pour déterminer les équations de mouvement. Le principe peut être exprimé en analytique à partir de

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (\text{III.30})$$

Où δU c'est l'énergie de déformation virtuelle, δV c'est le travail virtuel effectué par des charges externes, et δK c'est l'énergie cinétique virtuelle. L'énergie de déformation virtuelle est exprimée par (voir Equation.(III.1))

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + m_{ij}\delta\chi_{ij}) dz dx \\ &+ \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} + 2m_{xy}\delta\chi_{xy} + 2m_{yz}\delta\chi_{yz}) dz dx \\ &= \int_0^L \left(N \frac{d\delta u_0}{dx} - (M_b + Y_1) \frac{d^2\delta w_b}{dx^2} - \left(M_s + \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 \right) \frac{d^2\delta w_s}{dx^2} + \left(Q - \frac{1}{2}Y_3 \right) \frac{d\delta w_s}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Où L c'est la longueur de la micro-poutre et les efforts résultants suivants sont exprimés comme

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz \quad (\text{III.32})$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (\text{III.33})$$

$$(Y_1, Y_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, f') m_{xy} dz \quad (\text{III .34})$$

$$Y_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f'' m_{yz} dz \quad (\text{III .35})$$

La variation du travail effectué par les forces externes appliquées peut s'exprimer comme

$$\delta V = - \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx \quad (\text{III .36})$$

Où q c'est la charge transversale.

La variation de l'énergie cinétique s'exprime comme

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) [\dot{u}_x \delta \dot{u}_x + \dot{u}_y \delta \dot{u}_y] dz dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} + \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) \right. \\ &\quad + I_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) - J_1 \left(\dot{u} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta \dot{u} \right) + K_2 \left(\frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} \right) \\ &\quad \left. + J_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (\text{III .37})$$

Lorsque la convention des points-supérieures désigne la différenciation par rapport à la variable de temps t ; $\rho(z)$ c'est la densité masse ; et $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$ sont les inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g) \rho(z) dz \quad (\text{III .38})$$

En remplaçant les Equations. (III.19) , (III.21) ,et (III.22) dans Equation. (III.18) et intégrant par partie , et collecter les coefficients de $(\delta u_0, \delta w_b, \delta w_s)$, les équations de mouvement suivantes sont obtenues

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (\text{III .39})$$

$$\delta w_b : \frac{d^2 M_b}{dx^2} + \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III .40})$$

$$\delta w_s : \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y_2}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{dY_3}{dx} + \frac{dQ}{dx} + q = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \quad (\text{III .41})$$

III.6. Équations du mouvement en termes de déplacements

En remplaçant Equations (III. 27) et (III.28) dans Equation (III.24), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements généralisés $(\delta u_0, \delta w_b, \delta w_s)$ comme

$$\delta u_0 : A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B^s_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (\text{III.42})$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & -(D_{11} + A_{13}) \frac{d^4 w_b}{dx^4} - \left(D^s_{11} + \frac{1}{2}(A_{13} + B_{13}) \right) \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : & B^s_{11} \frac{d^3 u_0}{dx^3} - \left(D^s_{11} + \frac{1}{2}(A_{13} + B_{13}) \right) \frac{d^4 w_b}{dx^4} - \left(H^s_{11} + \frac{1}{4}(A_{13} + 2B_{13} + D_{13}) \right) \frac{d^4 w_s}{dx^4} \\ & + \left(A^s_{55} + \frac{1}{4} E_{13} \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Où A_{11}, D_{11} etc., sont la rigidité de la poutre, définie par

$$(A_{11}, D_{11}, B^s_{11}, D^s_{11}, H^s_{11}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \frac{1-\nu(z)}{\nu(z)} [1, z^2, f, z f, f^2] dz \quad (\text{III.45})$$

$$(A_{13}, B_{13}, D_{13}, E_{13}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1, f', (f')^2, (f'')^2] \mu(z) l(z)^2 dz \quad (\text{III.46})$$

$$A^s_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(z) g(z)^2 dz \quad (\text{III.47})$$

III.7. Solutions analytiques

Dans cette section, des solutions analytiques pour la flexion et les vibrations libres sont présentées pour une poutre simplement appuyée rectangulaire sous une charge transversale

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_n \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{bn} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{sn} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

Où U_n , W_{bn} et W_{sn} sont des paramètres arbitraires à déterminer ω est la fréquence propre associée au nombre de mode propre, et $\lambda = n\pi/L$ la charge transversale q est également développé à série Fourier comme

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\lambda x) \quad (\text{III.49})$$

Où Q_n est l'amplitude de la charge calculée à partir de

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (\text{III.50})$$

Le coefficient Q_n est donné ci-dessous pour certaines charges typiques

$Q_n = q_0$, $n = 1$ pour la charge sinusoïdale,

$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ pour la charge ponctuelle P à la mi-travée,

En remplaçant les expansions de U_0 , W_b , W_s et q de Eqs. (III.27) et (III.28) dans les équations du mouvement Eq. (III.25)), les solutions analytiques peuvent être déterminées à partir des équations suivantes:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & 0 & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

Où

$$s_{11} = A_{11}\lambda^2, \quad s_{22} = (D_{11} + A_{13})\lambda^4, \quad s_{13} = -B^s_{11}\lambda^3, \quad s_{23} = \left(D^s_{11} + \frac{1}{2}(A_{13} + B_{13}) \right)\lambda^4,$$

$$s_{33} = \left(H^s_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(A_{13} + D_{13}) + B_{13} \right) \right)\lambda^4 + \left(A^s_{55} + \frac{1}{4}E_{13} \right)\lambda^2$$

$$m_{11} = I_0, \quad m_{12} = -I_1\lambda, \quad m_{13} = -J_1\lambda, \quad m_{22} = I_0 + I_2\lambda^2, \quad m_{23} = I_0 + J_2\lambda^2, \quad m_{33} = I_0 + K_2\lambda^2.$$

III.8. Conclusion

Dans cette recherche, une nouvelle dimension dépendante d'une micro-poutre poreuse FG avec deux distributions de porosité est présentée pour l'analyse de flexion et de vibration. Les équations du mouvement sont obtenues basé sur une nouvelle théorie hyperbolique de déformation du cisaillement et une théorie de couple de contrainte modifiée. La formulation actuelle considère un paramètre d'échelle de longueur variable.

Chapitre IV :
Formulation
mathématique des
micros plaques FGM

IV.1. Introduction

Dans ce chapitre nous étudions une nouvelle formulation de plaque et une théorie de couple de contrainte modifiée qui introduit un paramètre d'échelle de longueur variable est présentée pour discuter l'étude statique et dynamique à gradation fonctionnelle (FG) des microplaques. Un nouveau type de théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre de Reddy qui utilisent seulement 4 inconnues en incluant des variables intégrales indéterminées est proposé dans cette étude. Les équations du mouvement sont dérivées à partir du principe d'Hamilton. Des solutions analytiques sont obtenues pour une microplaque simplement appuyée. Exemples numériques sont présentés pour examiner l'effet du paramètre d'échelle de longueur sur les réponses des microplaques. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats précédemment publiés Pour démontrer l'exactitude de la présente formulation.

IV.2. La théorie de couple de contrainte modifié

Basé sur la théorie de couple de contrainte modifié par Yang et al, [14], l'énergie de déformation U , pour un matériau linéaire élastique occupant une région Ω est lié aux tenseurs de déformation et à la courbure et peut être écrit comme

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (IV.1)$$

Tel que σ est le tenseur de contrainte, ε est le tenseur de déformation, m est la partie déviatorique de tenseur du couple et χ est la courbure symétrique. Ces tenseurs sont donnés par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (IV.2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (IV.3)$$

Alors que $u_{i,j}$ est le vecteur de déplacement, et θ est le vecteur de rotation qui peut être défini comme

$$\theta = \frac{1}{2} e_{ijk} \cdot u_{k,j} \quad (IV.4)$$

Où e_{ijk} est un symbole de permutation.

IV.3. Relations cinématiques

Le champ de déplacement du conventionnel TSDT de Reddy est donné comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (IV.5a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (\text{IV.5b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.5c})$$

Où u_0 ; v_0 ; w_0 , φ_x , φ_y , sont cinq déplacements inconnus du milieu du plan de la plaque, et $f(z)$ représente une fonction de forme définissant la variation des déformations de cisaillement transversal et des contraintes à travers l'épaisseur.

Dans cette étude, le conventionnel TSDTs de Reddy est modifié en proposant des suppositions simplifiées afin que le nombre d'inconnues soit réduit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (\text{IV.6a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (\text{IV.6b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{IV.6c})$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépend de la géométrie. La fonction de forme est considérée comme étant donnée par Reddy [86] comme

$$f(z) = z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.7})$$

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{IV.8})$$

Où (u_0, v_0, w_0, θ) sont quatre déplacements inconnus du milieu du plan de la plaque; et h est l'épaisseur de la plaque. Les déformations linéaires non nulles sont

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

Tel que

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une méthode Navier et peut être écrit comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (\text{IV.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (\text{IV.16})$$

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{IV.17})$$

$$\int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{IV.18})$$

Où les coefficients A' et B' sont exprimés selon le type de solution utilisée, dans ce cas en utilisant Navier. Donc, A' et B' sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2} \quad (\text{IV.19})$$

$$B' = -\frac{1}{\beta^2} \quad (\text{IV.20})$$

$$k_1 = \alpha^2 \quad (\text{IV.21})$$

$$k_2 = \beta^2 \quad (\text{IV.22})$$

Où α et β sont définis dans l'expression (IV.53).

En outre, Equations (IV.4) et (IV.5), les composants du vecteur de rotation sont obtenus comme

$$\begin{cases} \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{1}{2} k_2 B' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{2} k_1 A' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

En remplaçant Equation (IV.23) dans Equation (IV.3), les composants du tenseur de courbure prennent la forme

$$\begin{cases} \chi_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} k_2 B' g(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \chi_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} k_1 A' g(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \chi_z = \frac{1}{2} (k_2 B' - k_1 A') g(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

$$\begin{cases} \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{4} g(z) \left(k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \\ \chi_{xz} = -\frac{1}{4} k_2 B' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \\ \chi_{yz} = \frac{1}{4} k_1 A' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{4} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

$$\begin{cases} \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{4} g(z) \left(k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \\ \chi_{xz} = -\frac{1}{4} k_2 B' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \\ \chi_{yz} = \frac{1}{4} k_1 A' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{4} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

IV.4. Relations constitutionnelles

Considérons une plaque FG composée de deux matériaux fonctionnellement gradués, les propriétés du matériau de la plaque telles que le module de Young E et densité masse ρ sont considérés comme changeant continuellement dans l'épaisseur par la loi de puissance et le paramètre d'échelle de longueur l sont donnés par la règle des mélanges comme

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \mathcal{V}_1 \quad (\text{IV.27})$$

$$\rho(z) = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \mathcal{V}_1 \quad (\text{IV.28})$$

$$l(z) = l_2 + (l_1 - l_2) \mathcal{V}_1 \quad (\text{IV.29})$$

Où $V_1 = (0.5 + z/h)^p$ est la fraction volumique du matériau 1, les indices 1 et 2 indiquent les deux matériaux utilisés, et p est l'indice de gradient indiquant la fraction volumique du matériau. La variation de la fraction volumique V_1 à travers l'épaisseur de la plaque est tracée dans Figure IV.1 Pour diverses valeurs de l'indice de puissance. Les relations constitutives élastiques linéaires sont

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (IV.30)$$

$$m_{ij} = \frac{E(z)}{1+\nu} [l(z)^2] \chi_{ij} \quad (IV.31)$$

Où ν est le rapport de Poisson considéré comme constant, l est le paramètre d'échelle de longueur de matériau qui reflète l'influence de contrainte de couple.

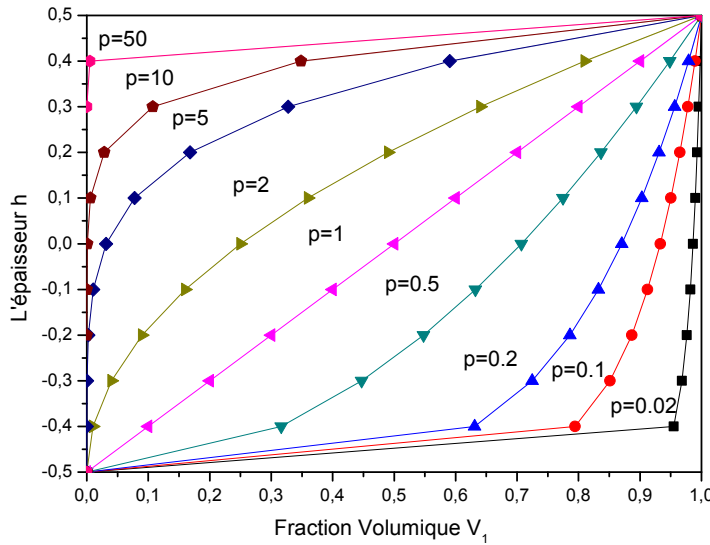


Figure IV.1 Variation de la fraction volumique V_1 à travers l'épaisseur d'une plaque FG pour différents index de gradient p .

IV.5. Equations de mouvement

Le principe d'Hamilton est employé dans ce travail pour déterminer les équations du mouvement. Le principe peut être exprimé en analyse à partir de

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (IV.32)$$

Où δU c'est l'énergie de déformation virtuelle, δV est le travail virtuel effectué par des charges externes, et δK est l'énergie cinétique virtuelle. L'énergie de déformation virtuelle est exprimée par (voir Equation (IV.1))

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + m_y \delta \varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dAdz \\
&+ \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (m_x \delta \chi_x + m_y \delta \chi_y + m_z \delta \chi_z + 2m_{xy} \delta \chi_{xy} + 2m_{xz} \delta \chi_{xz} + 2m_{yz} \delta \chi_{yz}) dAdz \\
&= \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} X_{yz} \left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2} \right) \right. \\
&+ \frac{1}{2} X_{xz} \left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y \partial x} \right) + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} (M_x + X_{xy}) + \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} (X_{xy} - M_y) \\
&+ \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} (X_x - 2M_{xy} - X_y) - S_x k_1 \theta + \frac{1}{2} Y_{yz} (k_1 A' - k_2 B') \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial y^2} \\
&+ \frac{1}{2} Y_{xz} (k_1 A' - k_2 B') \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x^2 \partial y} - S_y k_2 \theta - S_{xy} \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \right) \\
&- Q_{yz} k_2 B' \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} - Q_{xz} k_1 A' \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} Z_x k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} Z_y k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \\
&\left. + \frac{1}{2} Z_{xy} k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{2} Z_{xy} k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{2} W_{yz} k_1 A' \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} W_{xz} k_2 B' \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right] dx dy \quad (IV.33)
\end{aligned}$$

Où N, M, S, Q, X, Z et W sont les résultats du contrainte définis par

$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, i = x, y, xy \quad (IV.34)$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \sigma_i dz, i = xy, yz \quad (IV.35)$$

$$(X_i, Y_i, Z_i, W_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, f, g, g') m_i dz, i = x, y, xy, xz, yz \quad (IV.36)$$

La variation du travail effectué par les forces externes appliquées peut s'exprimer comme

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA = - \int_A q \delta w_0 dA \quad (IV.37)$$

Où q est la charge transversale.

La variation de l'énergie cinétique s'exprime comme

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_{A-h/2}^{h/2} \int_A \rho(z) \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dA \\
&= \int_A \left\{ I_0 \left[\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \right. \\
&\quad + I_1 \left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right] + K_2 \left[k_1^2 A'^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\
&\quad + J_2 \left[k_1 A' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \dot{\delta w}_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \dot{\delta w}_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\
&\quad \left. - J_1 \left[k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \delta \dot{v}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right] \right\} dA
\end{aligned} \tag{IV.38}$$

Lorsque la convention des points-supérieures désigne la différenciation par rapport à la variable de temps t ; $\rho(z)$ est la densité masse; et $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$ les inerties de masse sont-elles définies comme

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g) \rho(z) dz \tag{IV.39}$$

Substituer les équations (IV.33), (IV.37) et (IV.38) dans Equation (IV.18) et intégrant par parties, et en rassemble les coefficients de $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta)$, les équations de mouvement suivantes sont obtenues

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X_{yz}}{\partial y^2} \right) \\
= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}
\end{aligned} \tag{IV.40}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_{yz}}{\partial x \partial y} \right) \\
= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{IV.41}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2} (k_1 A' - k_2 B') \left(\frac{\partial^3 Y_{xz}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 Y_{yz}}{\partial x \partial y^2} \right) \\
+ \frac{\partial^2 X_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial y} + q \\
= I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{IV.42}$$

$$\begin{aligned}
\delta\theta : & k_1 S_x + k_2 S_y + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} - k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \\
& + \frac{1}{2} k_1 A' \left(\frac{\partial^2 Z_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial W_{yz}}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} k_2 B' \left(\frac{\partial^2 Z_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial W_{xz}}{\partial y} \right) \\
= & J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - J_3 \left(k_1^2 A'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{IV.43}$$

IV.6. Équations du mouvement en termes de déplacements

En remplaçant Equation (IV.27) et (IV.28) dans Equation (IV.32), les équations de mouvement peuvent être exprimées en termes de déplacements généralisés ($\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$) comme

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \\
& - (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial \theta}{\partial x} - B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \\
& - \frac{1}{4} A_n \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) \right] \\
& + \frac{1}{4} (k_1 A' - k_2 B') \left[B_n \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - D_n \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \right] \\
= & I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}
\end{aligned} \tag{IV.44}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_0 : & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& - (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial \theta}{\partial y} - B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \\
& - \frac{1}{4} A_n \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{4} (k_1 A' - k_2 B') \left[B_n \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - D_n \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \right] \\
= & I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{IV.45}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \\
 & - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{B_n}{4} (k_1 A' - k_2 B') \nabla^2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 & - A_n \nabla^4 w_0 - (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{C_n}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 - 2(k_1 A' - 2k_2 B') D_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - \frac{C_n}{2} \left(k_1 A' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 \theta + \frac{F_n}{4} (k_1 A' - k_2 B')^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
 & - (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{E_n}{4} (k_1 A' - k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + L_a \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + q \\
 & = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.46}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \theta : & (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
 & + \frac{D_n}{4} (k_2 B' - k_1 A') \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right) - (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 & - 2D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{C_n}{2} \left[k_1 A' \nabla^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_2 B' \nabla^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\
 & - (H_{11}^s k_1^2 + 2H_{12}^s k_1 k_2 + H_{22}^s k_2^2) \theta - H_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - k_1 A' A_{55}^s \left(-k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \\
 & - k_2 B' A_{44}^s \left(-k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - \frac{E_n}{4} (k_1 A' - k_2 B')^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{H_n}{4} k_1 A' \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \\
 & + \frac{H_n}{4} k_2 B' \left(k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - \frac{G_n}{4} \nabla^2 \left[k_1 A' \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + k_2 B' \left(k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right] \\
 & + \frac{G_n}{4} (k_1 A' - k_2 B') (3k_2 B' - 2k_1 A') \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & = J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - J_3 \left(k_1^2 A'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.47}$$

Où A_{11} , D_{11} , etc., sont la rigidité de la plaque, défini par

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{array} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \left[1, z, z^2, f, z f, f^2 \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{array} \right\} dz \tag{IV.48}$$

$$(A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[1, f, g, g', fg', f^2, g^2, g'^2 \right] \mu(z) l^2 dz \tag{IV.49}$$

$$\text{Avec } \lambda(z) = \frac{E(z)\nu(z)}{[1+\nu(z)][1-2\nu(z)]} \text{ et } \mu(z) = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]} \quad (\text{IV.50})$$

IV.7. Solutions analytiques

Dans ce travail, des solutions analytiques pour la flexion et les vibrations libres sont présentées pour une plaque rectangulaire simplement appuyée sous charge transversale q . Basé sur l'approche de Navier, les solutions sont supposées comme

$$\begin{Bmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \\ \theta(x, y, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Theta_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.51})$$

Où $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Theta_{mn}$ sont des coefficients de Fourier à déterminer pour chaque paire de m et n et $i = \sqrt{-1}$

Avec

$$\alpha = m\pi/a, \quad \beta = n\pi/b.$$

La charge transversal q est développé dans la série des sinus à double-Fourier comme

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{IV.52})$$

Où

$$\begin{aligned} Q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy \\ &= \begin{cases} q_0 & \text{Pour une charge répartiesinusoidale} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{Pour une charge uniformément répartie} \end{cases} \quad (\text{IV.53}) \end{aligned}$$

En remplaçant Equations. (IV.52) et (IV.51) dans les Equations (IV.44), (IV.45), (IV.46), (IV.47), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir des équations suivantes

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Theta_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.54})$$

Avec

$$s_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 + \frac{A_n}{4}\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$s_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta - \frac{A_n}{4}\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$s_{13} = \frac{B_n}{4}(k_2B' - k_1A')\alpha\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 - B_{11}\alpha^3$$

$$s_{14} = (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)\alpha - B_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha\beta^2 - \frac{D_n}{4}(k_1A' - k_2B')\alpha\beta^2$$

$$s_{22} = A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2 + \frac{A_n}{4}\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$s_{23} = -B_{22}\beta^3 - (2B_{66} + B_{12})\alpha^2\beta + \frac{B_n}{4}(k_1A' - k_2B')\alpha^2\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$s_{24} = (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2)\beta - B_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha^2\beta + \frac{D_n}{4}(k_1A' - k_2B')\alpha^2\beta$$

$$s_{33} = D_{11}\alpha^4 + D_{22}\beta^4 + 2(2D_{66} + D_{12})\alpha^2\beta^2 + A_n(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \frac{F_n}{4}(k_1A' - k_2B')^2\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$s_{34} = 2D_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha^2\beta^2 - k_2(D_{12}^s\alpha^2 + D_{22}^s\beta^2) - k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) + \frac{C_n}{2}(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{E_n}{4}(k_1A' - k_2B')^2\alpha^2\beta^2$$

$$s_{44} = H_{11}^s k_1^2 + H_{22}^s k_2^2 + 2H_{12}^s k_1 k_2 + H_{66}^s (k_1A' - k_2B')^2 \alpha^2 \beta^2 + A_{55}^s k_1^2 A'^2 \alpha^2 + A_{44}^s k_2^2 B'^2 \beta^2 + G_n \left(k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 - \frac{3}{2} k_1 A' k_2 B' \right) \alpha^2 \beta^2 + \frac{1}{4} G_n (k_1^2 A'^2 \alpha^4 + k_2^2 B'^2 \beta^4) - \frac{H_n}{4} k_2^2 B'^2 \beta^2$$

$$m_{11} = I_0, m_{12} = 0, m_{13} = -I_1\alpha, m_{14} = -J_1 k_1 A' \alpha, m_{22} = I_0, m_{23} = -I_1\beta, m_{24} = -J_1 k_2 B' \beta,$$

$$m_{33} = I_0 + I_2(\alpha^2 + \beta^2), m_{34} = J_2(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2), m_{44} = J_3(k_1^2A'^2\alpha^2 + k_2^2B'^2\beta^2)$$

IV.8. Conclusion

Dans cette recherche, une nouvelle dimension dépendante d'une microplaque FG est présentée pour l'analyse de flexion et de vibration. Les équations du mouvement sont obtenues basé sur une nouvelle théorie hyperbolique de déformation du cisaillement et une théorie de couple de contrainte modifiée. La formulation actuelle considère un paramètre d'échelle de longueur variable.

Chapitre V : Résultats numériques et discussions

V.1. Introduction

Dans cette étude, l'analyse statique et dynamique des micros structures en FGM par la théorie raffinée est effectuée pour discussion. Des solutions de Navier pour l'analyse de flexion et de vibration des micros plaques et poutre en FGM sont aussi présentées. Nous considérons une nouvelle théorie de couple de contrainte modifiée.

V.2. Cas des micros poutres poreuses

Dans cette section, la flexion statique et dynamique de micro-poutre FG sont proposés en fonction de la théorie du couple de contrainte modifiée et la distribution de porosité.

Les micro-poutres FG sont composées de métal ($Al: E_m = 70GPa, \rho_m = 2702kg/m^3, \nu_m = 0.3$) et de la céramique ($SiC: E_c = 427GPa, \rho_c = 3100kg/m^3, \nu_c = 0.17$) [87].

Les quantités non dimensionnelles employées sont:

La flexion transversale non-dimensionnelle :

$$\bar{w} = 100w \frac{E_m I}{PL^3} \text{ Pour une charge ponctuelle,}$$

$$\bar{w} = 100w \frac{E_m I}{q_0 L^4} \text{ Pour une charge uniforme.}$$

Contraintes non-dimensionnelle :

$$(\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xz}) = \left(\frac{\sigma_x A}{P}, \frac{\tau_{xz} A}{P} \right) \text{ Pour une charge ponctuelle}$$

Fréquence non-dimensionnelle :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

Les résultats classés dans le tableau (V.1) et (V.2), montrent la flexion non dimensionnelle des poreux FG de la micro-poutre (FGM-I) pour la charge ponctuelle et la charge uniforme respectivement. On peut voir l'augmentation de l'indice de puissance conduit à une augmentation de la flexion non dimensionnelle pour deux valeurs différentes du rapport d'aspect ($L/h=10, 100$) . La même remarque est observée pour le paramètre de porosité (α) . Le rapport (l_c/l_m) représente le degré de variation du paramètre de longueur d'échelle sur la poutre. On observe que l'augmentation de (l_c/l_m) conduit à une réduction de la flèche et les résultats sont significativement différents du cas où le paramètre d'échelle de longueur est

considéré comme une constante ($l_c/l_m = 1$). Cette remarque est également une confirmation que la variation du paramètre d'échelle de longueur a besoin de prendre en compte dans l'étude sur la micro-poutre FG. On constate que la CBT sous-estime les valeurs de la flèche parce que cette théorie néglige l'effet de déformation du cisaillement. Également, l'introduction du paramètre de longueur d'échelle conduit à une augmentation de la flèche comparativement à une théorie classique.

Tableau V.1: la flèche transversale non dimensionnel du micro-poutre FG pour la charge ponctuelle : $l_m = 15$, $h/l_m = 2$ et $b/h = 1$

l_c/l_m	α	Theories des pouters	$L/h = 10$				$L/h = 100$				
			$p = 0.3$	$p = 1$	$p = 3$	$p = 10$	$p = 0.3$	$p = 1$	$p = 3$	$p = 10$	
1/3	0	CBT	0.3207	0.4081	0.5201	0.6054	0.3207	0.4081	0.5201	0.6054	
	0.1		0.3395	0.4454	0.5901	0.6948	0.3395	0.4454	0.5901	0.6948	
	0.2		0.3585	0.4863	0.6759	0.8070	0.3585	0.4863	0.6759	0.8070	
	0.1	FSDT	0	0.3302	0.4199	0.5376	0.6329	0.3208	0.4083	0.5203	0.6057
			0.1	0.3495	0.4581	0.6095	0.7269	0.3396	0.4455	0.5903	0.6951
			0.2	0.3690	0.4999	0.6975	0.8454	0.3586	0.4865	0.6762	0.8074
	0.2	IHSdT	0	0.3281	0.4169	0.5331	0.6233	0.3208	0.4082	0.5202	0.6056
			0.1	0.3474	0.4551	0.6051	0.7173	0.3396	0.4455	0.5903	0.6951
			0.2	0.3670	0.4970	0.6936	0.8371	0.3586	0.4864	0.6761	0.8074
1	0	CBT	0.1846	0.2649	0.3963	0.5380	0.1846	0.2649	0.3963	0.5380	
	0.1		0.2006	0.2931	0.4481	0.6155	0.2006	0.2931	0.4481	0.6155	
	0.2		0.2177	0.3242	0.5090	0.7080	0.2177	0.3242	0.5090	0.7080	
	0.1	FSDT	0	0.1908	0.2736	0.4106	0.5631	0.1847	0.2651	0.3964	0.5383
			0.1	0.2071	0.3023	0.4639	0.6447	0.2007	0.2932	0.4483	0.6157
			0.2	0.2247	0.3342	0.5263	0.7425	0.2178	0.3243	0.5092	0.7083
	0.2	IHSdT	0	0.1877	0.2692	0.4032	0.5509	0.1847	0.2650	0.3963	0.5382
			0.1	0.2039	0.2977	0.4559	0.6312	0.2006	0.2931	0.4482	0.6157
			0.2	0.2213	0.3292	0.5178	0.7279	0.2177	0.3242	0.5091	0.7082
3/2	0	CBT	0.1203	0.1876	0.3123	0.4789	0.1203	0.1876	0.3123	0.4789	
	0.1		0.1318	0.2081	0.3508	0.5445	0.1318	0.2081	0.3508	0.5445	
	0.2		0.1443	0.2307	0.3945	0.6196	0.1443	0.2307	0.3945	0.6196	
	0.1	FSDT	0	0.1252	0.1947	0.3247	0.5020	0.1204	0.1877	0.3124	0.4792
			0.1	0.1369	0.2157	0.3643	0.5712	0.1318	0.2081	0.3509	0.5448
			0.2	0.1498	0.2389	0.4093	0.6509	0.1444	0.2309	0.3947	0.6199
	0.2	IHSdT	0	0.1219	0.1899	0.3164	0.4883	0.1204	0.1876	0.3123	0.4790
			0.1	0.1335	0.2106	0.3552	0.5555	0.1318	0.2081	0.3508	0.5446
			0.2	0.1462	0.2335	0.3993	0.6329	0.1443	0.2308	0.3946	0.6198
2	0	CBT	0.0819	0.1356	0.2453	0.4200	0.0819	0.1357	0.2453	0.4200	
	0.1		0.0900	0.1505	0.2736	0.4738	0.0900	0.1505	0.2736	0.4738	
	0.2		0.0989	0.1669	0.3047	0.5329	0.0989	0.1669	0.3047	0.5328	
	0.1	FSDT	0	0.0861	0.1418	0.2562	0.4412	0.0819	0.1357	0.2454	0.4203
			0.1	0.0944	0.1571	0.2854	0.4982	0.0901	0.1505	0.2737	0.4741
			0.2	0.1036	0.1739	0.3176	0.5611	0.0989	0.1669	0.3048	0.5332
	0.2	IHSdT	0	0.0829	0.1371	0.2477	0.4266	0.0819	0.1357	0.2453	0.4201
			0.1	0.0910	0.1519	0.2761	0.4812	0.0900	0.1505	0.2736	0.4739
			0.2	0.1000	0.1684	0.3073	0.5414	0.0989	0.1669	0.3047	0.5329
Théorie classique	0	CBT	0.4081	0.5966	0.8295	0.9725	0.4081	0.5967	0.8295	0.9725	
	0.1		0.4199	0.6289	0.9085	1.0655	0.4199	0.6289	0.9084	1.0655	
	0.2		0.4319	0.6644	1.0059	1.1823	0.4319	0.6644	1.0059	1.1823	
	0.1	FSDT	0	0.4203	0.6137	0.8568	1.0158	0.4083	0.5968	0.8298	0.9729
			0.1	0.4324	0.6469	0.9378	1.1144	0.4201	0.6292	0.9088	1.0660
			0.2	0.4448	0.6830	1.0377	1.2385	0.4321	0.6646	1.0063	1.1828
	0.2	IHSdT	0	0.4196	0.6133	0.8610	1.0259	0.4083	0.5968	0.8298	0.9730
			0.1	0.4318	0.6466	0.9441	1.1343	0.4201	0.6292	0.9088	1.0662
			0.2	0.4443	0.6831	1.0473	1.2813	0.4321	0.6646	1.0064	1.1834

Tableau V.2 : la flèche transversale non dimensionnel du micro-poutre FG pour la charge uniforme, $l_m = 15$, $h/l_m = 2$ et $b/h = 1$

l_c / l_m	α	Theories des poutres	$L/h = 10$				$L/h = 100$					
			$p = 0.3$	$p = 1$	$p = 3$	$p = 10$	$p = 0.3$	$p = 1$	$p = 3$	$p = 10$		
1/3	0	CBT	0.2004	0.2551	0.3251	0.3784	0.2004	0.2551	0.3251	0.3784		
	0.1		0.2122	0.2784	0.3688	0.4343	0.2122	0.2784	0.3688	0.4343		
	0.2		0.2241	0.3039	0.4225	0.5044	0.2241	0.3039	0.4225	0.5044		
	1/3	0	FSDT	0.2053	0.2612	0.3341	0.3926	0.2005	0.2551	0.3252	0.3785	
		0.1		0.2173	0.2849	0.3788	0.4509	0.2122	0.2784	0.3689	0.4344	
		0.2		0.2294	0.3109	0.4336	0.5242	0.2241	0.3040	0.4226	0.5046	
		1/3	0	IHSdT	0.2043	0.2596	0.3318	0.3877	0.2005	0.2551	0.3251	0.3785
			0.1		0.2163	0.2834	0.3766	0.4460	0.2122	0.2784	0.3689	0.4344
			0.2		0.2284	0.3095	0.4316	0.5202	0.2241	0.3040	0.4226	0.5046
1	0	CBT	0.1154	0.1656	0.2477	0.3363	0.1154	0.1656	0.2477	0.3363		
	0.1		0.1254	0.1832	0.2801	0.3847	0.1254	0.1832	0.2801	0.3847		
	0.2		0.1361	0.2026	0.3181	0.4425	0.1361	0.2026	0.3181	0.4425		
	1	0	FSDT	0.1186	0.1708	0.2551	0.3493	0.1154	0.1657	0.2477	0.3364	
		0.1		0.1288	0.1879	0.2882	0.3998	0.1254	0.1832	0.2802	0.3848	
		0.2		0.1397	0.2077	0.3271	0.4604	0.1361	0.2027	0.3182	0.4427	
		1	0	IHSdT	0.1169	0.1678	0.2513	0.3430	0.1154	0.1656	0.2477	0.3363
			0.1		0.1271	0.1856	0.2842	0.3929	0.1254	0.1832	0.2801	0.3848
			0.2		0.1379	0.2052	0.3227	0.4530	0.1361	0.2026	0.3182	0.4426
3/2	0	CBT	0.0752	0.1172	0.1952	0.2993	0.0752	0.1172	0.1952	0.2993		
	0.1		0.0824	0.1300	0.2192	0.3403	0.0824	0.1300	0.2192	0.3403		
	0.2		0.0902	0.1442	0.2466	0.3873	0.0902	0.1442	0.2466	0.3873		
	3/2	0	FSDT	0.0778	0.1209	0.2016	0.3114	0.0752	0.1173	0.1952	0.2995	
		0.1		0.0851	0.1339	0.2263	0.3542	0.0824	0.1301	0.2193	0.3405	
		0.2		0.0930	0.1484	0.2542	0.4035	0.0902	0.1442	0.2467	0.3874	
		3/2	0	IHSdT	0.0761	0.1185	0.1973	0.3043	0.0752	0.1172	0.1952	0.2994
			0.1		0.0833	0.1314	0.2216	0.3461	0.0824	0.1300	0.2193	0.3404
			0.2		0.0912	0.1456	0.2491	0.3943	0.0902	0.1442	0.2466	0.3873
2	0	CBT	0.0512	0.0848	0.1533	0.2625	0.0512	0.0848	0.1539	0.2625		
	0.1		0.0563	0.0941	0.1709	0.2961	0.0563	0.0941	0.1709	0.2961		
	0.2		0.0618	0.1043	0.1904	0.3331	0.0618	0.1043	0.1904	0.3331		
	2	0	FSDT	0.0534	0.0880	0.1590	0.2736	0.0512	0.0848	0.1534	0.2626	
		0.1		0.0585	0.0975	0.1772	0.3088	0.0563	0.0941	0.1710	0.2963	
		0.2		0.0642	0.1079	0.1972	0.3478	0.0619	0.1043	0.1905	0.3332	
		2	0	IHSdT	0.0517	0.0855	0.1546	0.2659	0.0512	0.0848	0.1533	0.2626
			0.1		0.0568	0.0948	0.1723	0.3001	0.0563	0.0941	0.1709	0.2962
			0.2		0.0624	0.1051	0.1918	0.3376	0.0618	0.1043	0.1905	0.3331
Théorie classique	0	CBT	0.2551	0.3729	0.5184	0.6078	0.2551	0.3729	0.5184	0.6078		
	0.1		0.2625	0.3931	0.5678	0.6659	0.2625	0.3931	0.5678	0.6659		
	0.2		0.2699	0.4152	0.6287	0.7389	0.2699	0.4152	0.6287	0.7389		
	Théorie classique	0	FSDT	0.2612	0.3815	0.5321	0.6295	0.2551	0.3729	0.5186	0.6080	
		0.1		0.2687	0.4021	0.5825	0.6904	0.2625	0.3932	0.5679	0.6662	
		0.2		0.2764	0.4246	0.6446	0.7671	0.2701	0.4153	0.6289	0.7392	
		Théorie classique	0	IHSdT	0.2609	0.3814	0.5345	0.6351	0.2551	0.3729	0.5186	0.6081
			0.1		0.2685	0.4021	0.5859	0.7011	0.2625	0.3932	0.5679	0.6663
			0.2		0.2762	0.4247	0.6498	0.7897	0.2701	0.4153	0.6289	0.7395

Dans le (tableau V.3), Les fréquences non-dimensionnelles correspondant au mode de déformation transversale calculé pour différentes valeurs de l'indice de puissance (p), le paramètre de longueur d'échelle (l_c / l_m) et le paramètre de porosité (a) sont présentés. On peut observer que l'influence de k , l_c / l_m et α sont significatifs. L'augmentation du paramètre de porosité conduit à une réduction des fréquences non dimensionnelles. Pour chaque valeur

de l'indice de puissance (p), la fréquence non dimensionnelle diminue considérablement car le paramètre de longueur d'échelle l_c/l_m est réduit.

Tableau V.3 : des fréquences non dimensionnelles fondamentales pour FG micro-poutre, $l_m = 15$, $h/l_m = 2$ et $b/h = 1$.

l_c/l_m	α	Theories des poutres	$L/h = 10$				$L/h = 100$					
			$p = 0.3$	$p = 1$	$p = 3$	$p = 10$	$p = 0.3$	$p = 1$	$p = 3$	$p = 10$		
1/3	0	CBT	6.8537	6.1844	5.5717	5.2252	6.8818	6.2121	5.5998	5.2498		
	0.1		6.8271	6.0727	5.3697	5.0105	6.8559	6.1009	5.3986	5.0357		
	0.2		6.8179	5.9696	5.1579	4.7826	6.8475	5.9986	5.1878	4.8089		
	1/3	0	FSDT	6.7726	6.1127	5.4969	5.1305	6.8819	6.2113	5.5989	5.2488	
		0.1		6.7467	6.0035	5.2996	4.9179	6.8559	6.1013	5.3989	5.0358	
		0.2		6.7378	5.9026	5.0926	4.6919	6.8474	5.9988	5.1882	4.8089	
		1/3	0	IHSdT	6.7888	6.1295	5.5149	5.1619	6.8811	6.2115	5.5992	5.2491
			0.1		6.7618	6.0185	5.3139	4.9439	6.8553	6.1004	5.3980	5.0350
			0.2		6.7518	5.9159	5.1031	4.7096	6.8469	5.9980	5.1873	4.8081
1	0	CBT	9.0328	7.6751	6.3832	5.5429	9.0699	7.7095	6.4155	5.5691		
	0.1		8.8818	7.4865	6.1621	5.3235	8.9193	7.5214	6.1953	5.3504		
	0.2		8.7497	7.3118	5.9437	5.1061	8.7876	7.3473	5.9782	5.1342		
	1	0	FSDT	8.9127	7.5760	6.2914	5.4397	9.0716	7.7111	6.4165	5.5694	
		0.1		8.7662	7.3926	6.0762	5.2228	8.9208	7.5228	6.1963	5.3506	
		0.2		8.6377	7.2225	5.8636	5.0070	8.7890	7.3486	5.9792	5.1344	
		1	0	IHSdT	8.9712	7.6247	6.3369	5.4882	9.0693	7.7090	6.4149	5.5685
			0.1		8.8213	7.4379	6.1179	5.2675	8.9186	7.5209	6.1948	5.3498
			0.2		8.6899	7.2649	5.9017	5.0469	8.7870	7.3468	5.9778	5.1336
3/2	0	CBT	11.1883	9.1220	7.1907	5.8749	11.2343	9.1630	7.2271	5.9026		
	0.1		10.9577	8.8852	6.9647	5.6598	11.0039	8.9267	7.0023	5.6883		
	0.2		10.7465	8.6668	6.7514	5.4581	10.7932	8.7090	6.7907	5.4882		
	3/2	0	FSDT	11.0087	8.9853	7.0777	5.7619	11.2371	9.1653	7.2285	5.9031	
		0.1		10.7878	8.7569	6.8587	5.5492	11.0067	8.9289	7.0037	5.6888	
		0.2		10.5850	8.5460	6.6518	5.3487	10.7957	8.7111	6.7920	5.4885	
		3/2	0	IHSdT	11.1261	9.0744	7.1519	5.8274	11.2337	9.1625	7.2267	5.9021
			0.1		10.8978	8.8402	6.9286	5.6125	11.0033	8.9262	7.0019	5.6878
			0.2		10.6886	8.6243	6.7179	5.4097	10.7926	8.7086	6.7903	5.4876
2	0	CBT	13.5599	10.7269	8.1133	6.2732	13.6157	10.7751	8.1534	6.3028		
	0.1		13.2593	10.4474	7.8866	6.0673	13.3153	10.4963	7.9292	6.0979		
	0.2		12.9791	10.1913	7.6821	5.8855	13.0355	10.2410	7.7269	5.9180		
	2	0	FSDT	13.2865	10.5339	7.9702	6.1470	13.6192	10.7780	8.1562	6.3035	
		0.1		13.0036	10.2676	7.7517	5.9433	13.3188	10.4991	7.9311	6.0986	
		0.2		12.7392	10.0229	7.5544	5.7619	13.0389	10.2438	7.7287	5.9186	
		2	0	IHSdT	13.4945	10.6807	8.0804	6.2328	13.6150	10.7746	8.1539	6.3023
			0.1		13.1973	10.4046	7.8568	6.0281	13.3146	10.4958	7.9289	6.0975
			0.2		12.9202	10.1517	7.6552	5.8468	13.0348	10.2406	7.7266	5.9176
Théorie classique	0	CBT	6.0755	5.1151	4.4118	4.1229	6.1004	5.1380	4.4341	4.1423		
	0.1		6.1387	5.1101	4.3278	4.0461	6.1645	5.1339	4.3511	4.0664		
	0.2		6.2110	5.1075	4.2281	3.9513	6.2379	5.1323	4.2525	3.9730		
	Théorie classique	0	FSDT	6.0037	5.0566	4.3544	4.0507	6.0997	5.1374	4.4335	4.1415	
		0.1		6.0663	5.0525	4.2726	3.9733	6.1638	5.1333	4.3505	4.0657	
		0.2		6.1378	5.0505	4.1754	3.8778	6.2372	5.1317	4.2520	3.9723	
		Théorie classique	0	IHSdT	6.0066	5.0572	4.3446	4.0325	6.0997	5.1374	4.4334	4.1413
			0.1		6.0688	5.0524	4.2599	3.9427	6.1639	5.1333	4.3504	4.0653
			0.2		6.1399	5.0495	4.1587	3.8217	6.2372	5.1317	4.2518	3.9716

Dans la (Figure V.1) variation de la flèche non dimensionnelle est présentée par rapport au rapport (h/l_m) pour différents paramètres de porosité (α) en considérant $L/h=10$, $p=2$ et le paramètre de longueur d'échelle $l_c/l_m=2$.

On peut constater que la diminution du paramètre de porosité conduit à une réduction de la flèche pour les deux charges ponctuelles et uniformes. En outre, augmentation de rapport h/l_m rend la micro-poutre plus souple.

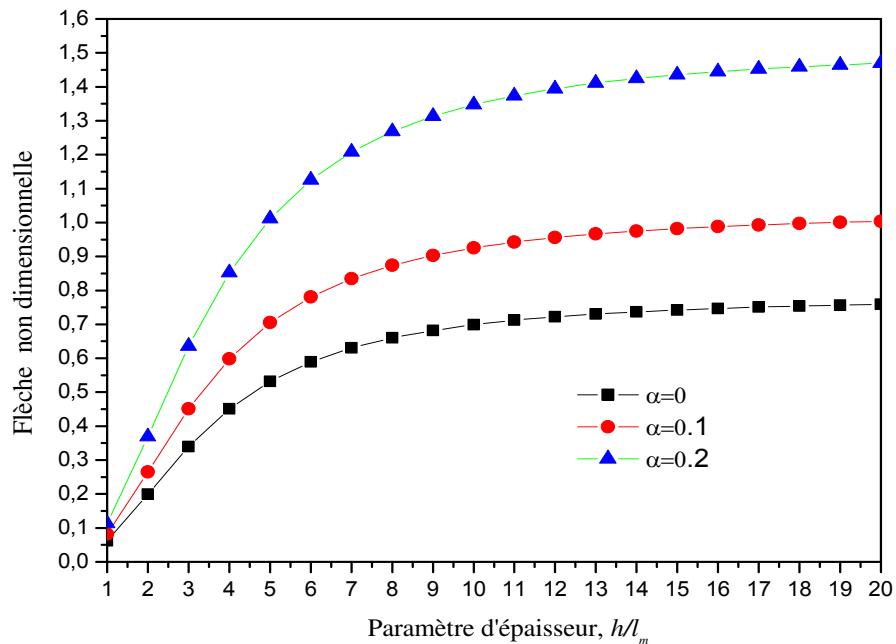


Figure V.1a : Variation de la flèche transversal non dimensionnel du micro-poutre FG pour différentes valeurs de paramètres de porosité $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15\mu\text{m}$, $b/h=1$, $p=2$, Charge ponctuelle

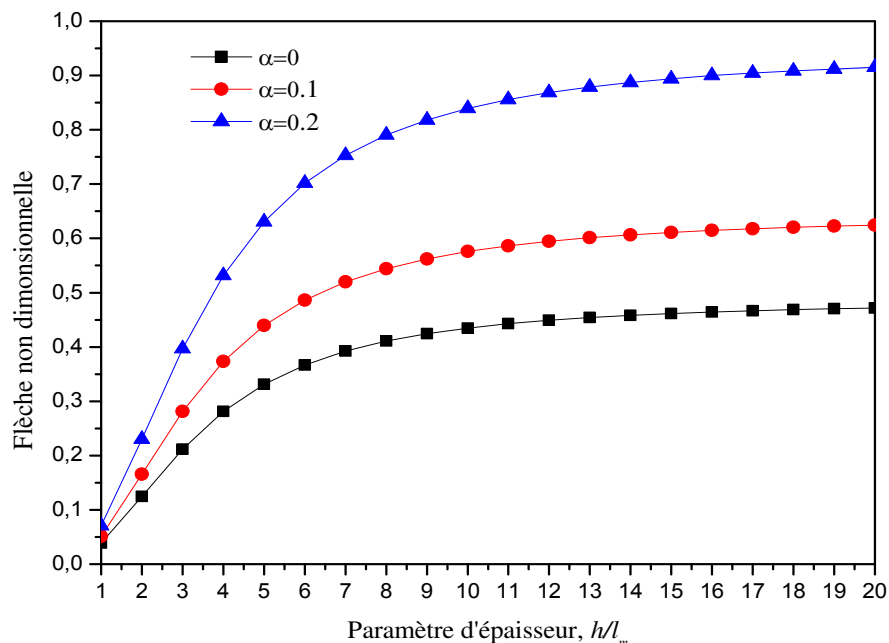


Figure V.1b : Variation de la flèche transversal non dimensionnel du micro-poutre FG pour différentes valeurs de paramètres de porosité $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15\mu\text{m}$, $b/h=1$, $p=2$, Charge uniforme

La (Figure V.2) présente la variation de la flèche non dimensionnelle avec l'indice matériel p pour différents paramètres de porosité (α) et compte tenu de deux valeurs différentes de h/l_m . On constate que l'augmentation de l'indice matériel conduit à une augmentation de la déviation. L'introduction du paramètre de porosité rend la micro-poutre plus souple.

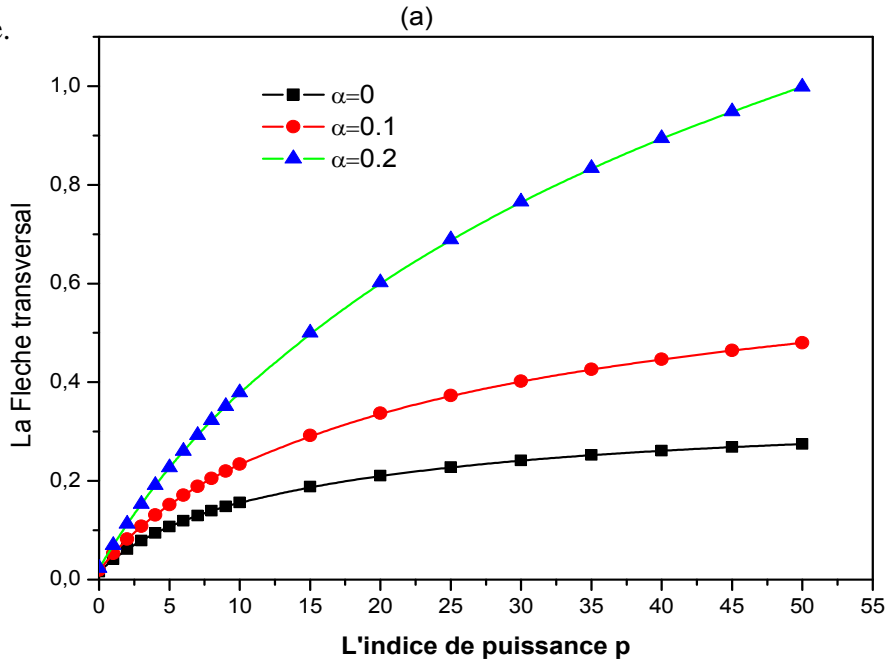


Figure V.2a : Variation de la flèche transversale non dimensionnelle du micro-poutre FG soumis à une charge ponctuelle pour $L/h=10$, $l_m=15\mu m$, $l_1/l_2=2$,

$$h/l_m = 1$$

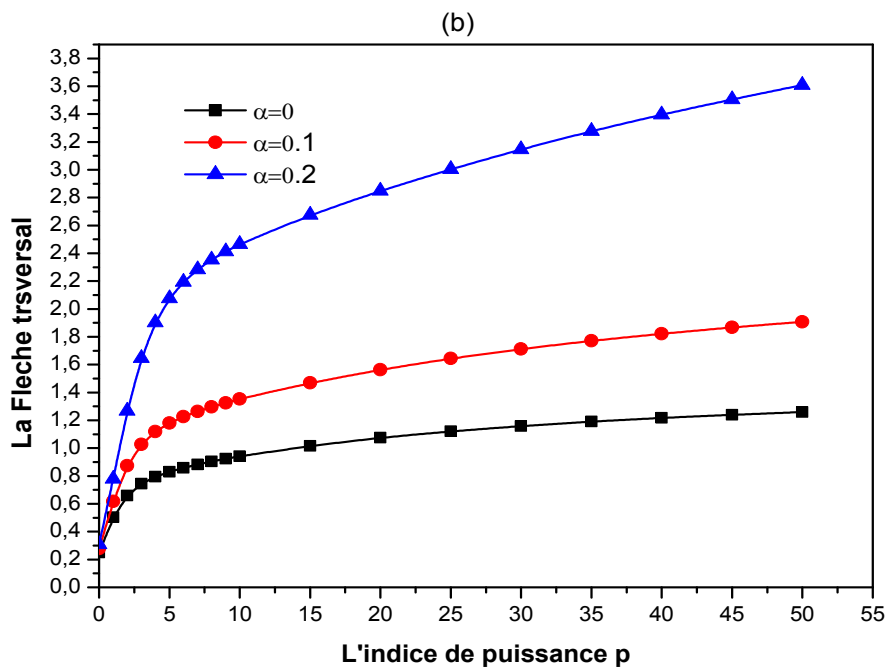


Figure V.2b : Variation de la flèche transversale non dimensionnelle du micro-poutre FG soumis à une charge ponctuelle pour $L/h=10$, $l_m=15\mu m$, $l_1/l_2=2$,

$$h/l_m = 8$$

La (Figure V.3) présente la contrainte normale la micro-poutre FG avec $L/h=10$ à travers l'épaisseur pour différentes valeurs du paramètre de porosité (α) et compte tenu $h/l_m=1$ et 8. On constate que la contrainte normale $\bar{\sigma}_x(L/2, z)$ diminue comme le paramètre porosité est augmenté de 0 à 0.2.

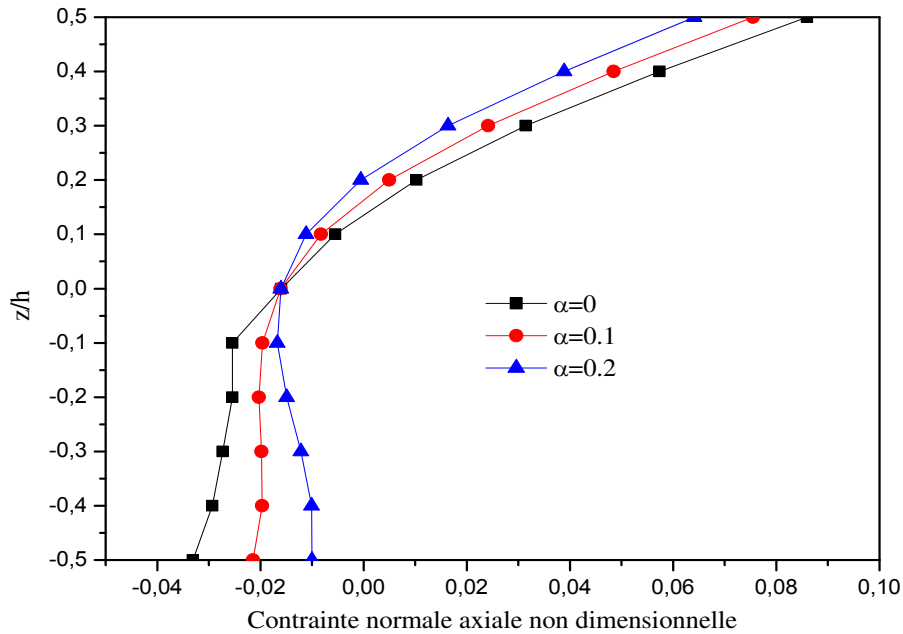


Figure V. 3a : Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_1/l_2 = 2$, $L/h = 10$, $l_2 = 15\mu m$, $b = 2 \times h$, $p = 2$, $h/l_2 = 8$
Charge ponctuelle

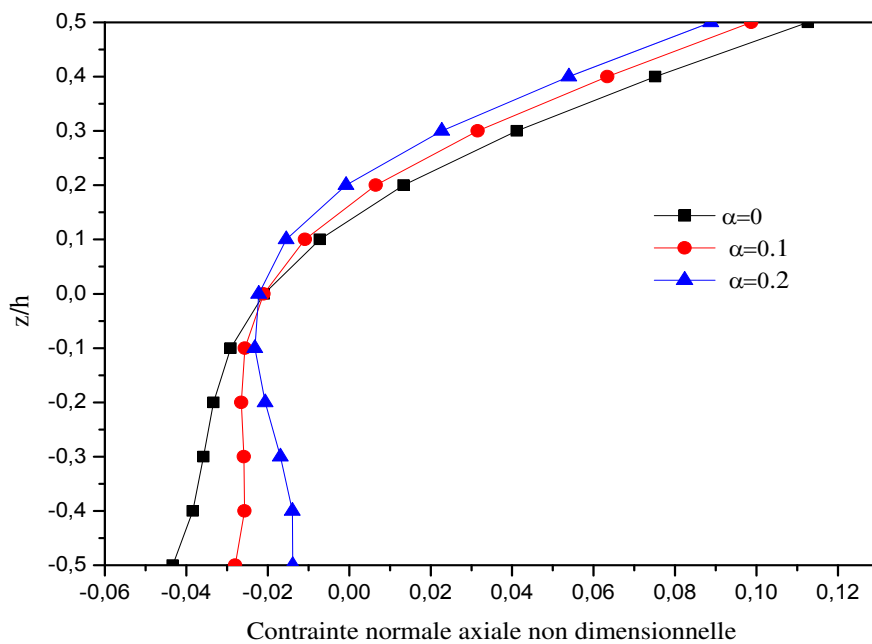


Figure V. 3b : Variation de la contrainte normale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_1/l_2 = 2$, $L/h = 10$, $l_2 = 15\mu m$, $b = 2 \times h$, $p = 2$, $h/l_2 = 8$
Charge uniforme

La (Figure V.4) présente la variation de la contrainte transversale dans l'épaisseur du FG micro-poutre pour différentes valeurs de paramètre de porosité (α) et pour $h/l_m = 1$ et 8. On peut observer que la contrainte transversale augmente avec la diminution du paramètre de porosité.

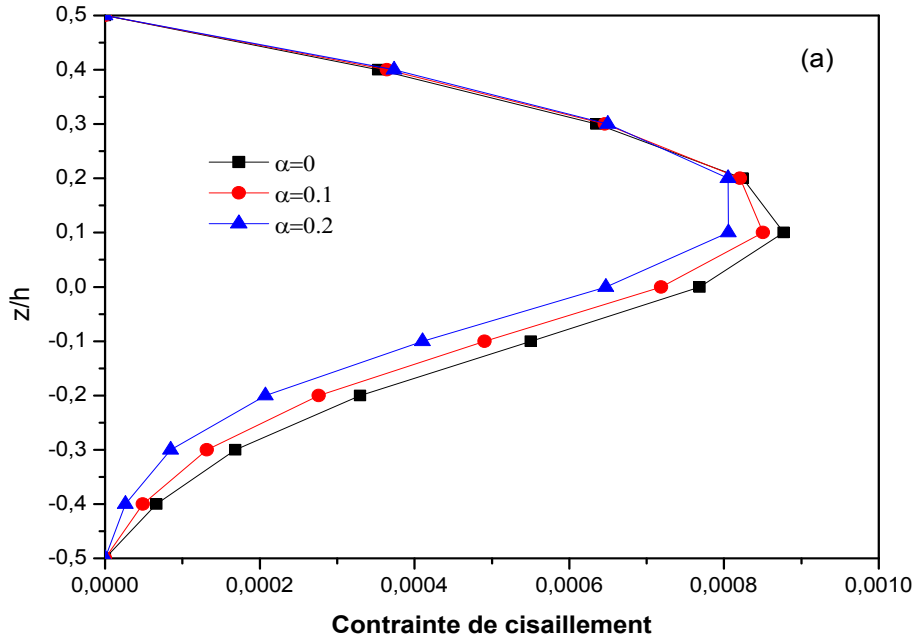


Figure V.4a : Variation de la contrainte transversale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b = 2 * h$, $p = 2$, $h/l_m = 1$

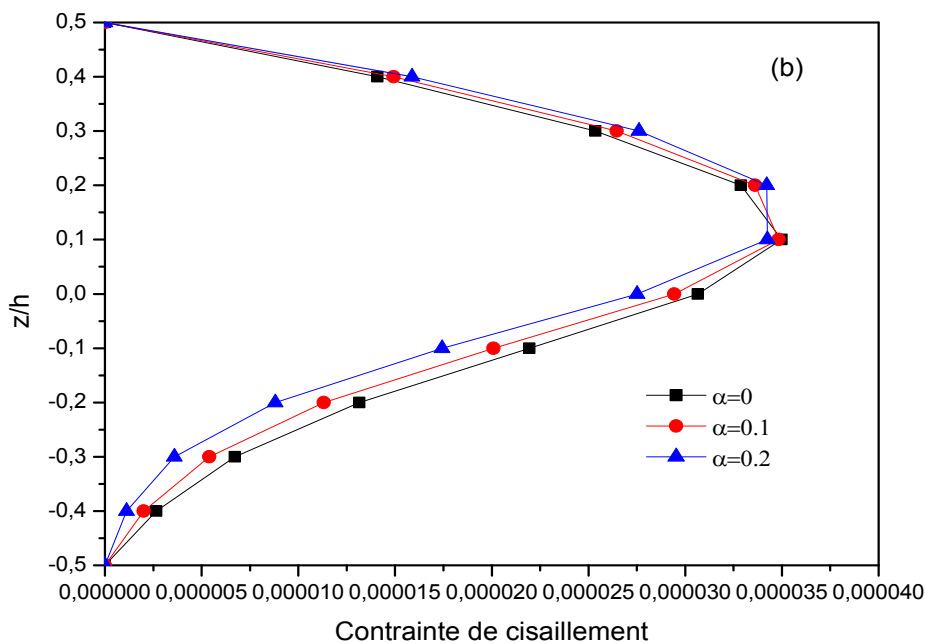


Figure V.4b: Variation de la contrainte transversale à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $l_m = 15\mu m$, $b = 2 * h$, $p = 2$, $h/l_m = 8$

Dans la (Figure V.5), la première et la troisième fréquence sont représentées par rapport au rapport h/l_m pour différents paramètres de porosité (α) en considérant $L/h=10$ et $p=1$. On peut montrer que la réduction du paramètre de porosité (α) conduit à une augmentation des fréquences non dimensionnelle.

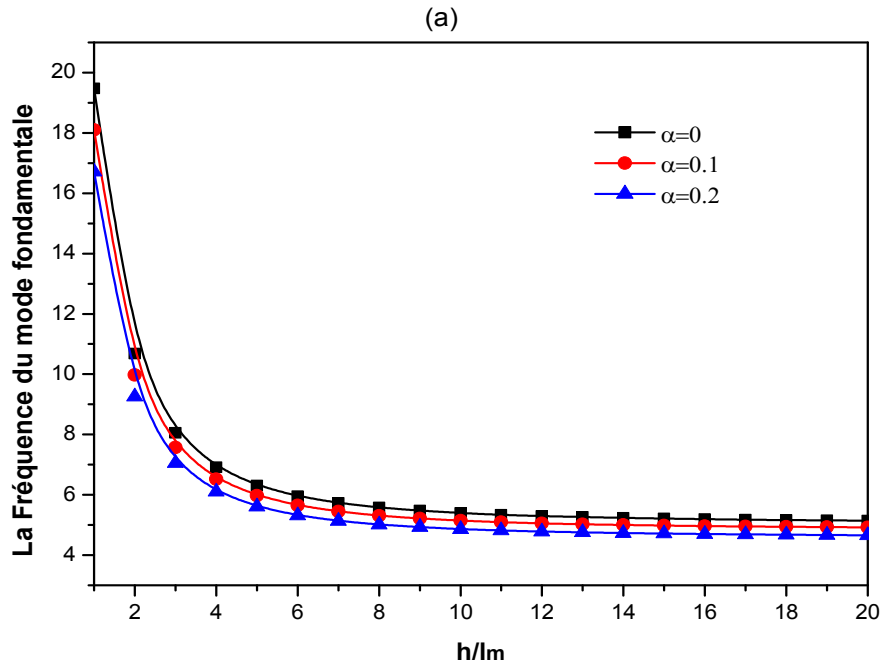


Figure V.5a: Variation de la fréquence non dimensionnelle à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec

$$l_c/l_m = 2, L/h = 10, l_m = 15\mu\text{m}, b = 2 * h, p = 2, \\ h/l_m = 8$$

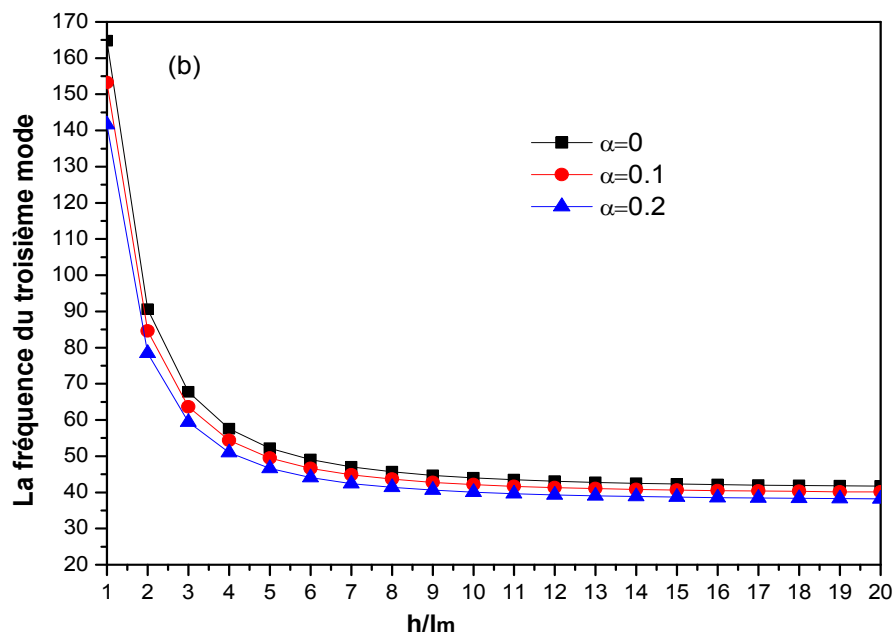


Figure V.5b: Variation de la fréquence non dimensionnelle à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m = 2, L/h = 10, l_m = 15\mu\text{m}, b = 2 * h, p = 2,$

$$h/l_m = 8$$

Figure V.6 illustre la variation de la première fréquence non dimensionnelle par rapport à l'indice matériel p et le paramètre de porosité (α) pour deux valeurs différentes du paramètre matériel non dimensionnel h/l_m . On constate que l'augmentation de l'indice de gradient conduit à une réduction de la fréquence. En outre, On peut montrer que l'augmentation du paramètre de porosité (α) rend la poutre plus souple.

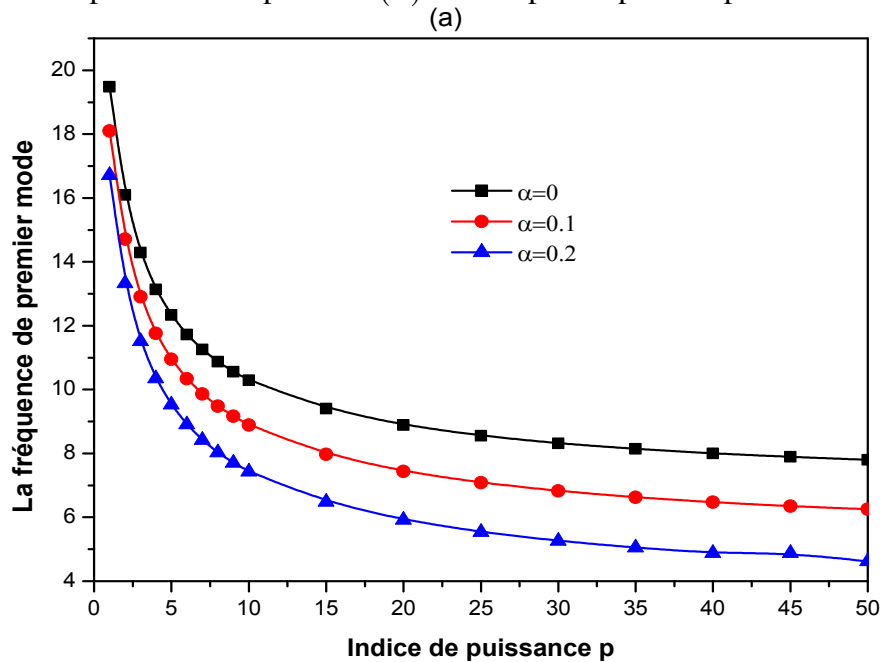


Figure V.6a: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec $l_c/l_m=2, L/h=10,$

$$h/l_m=1, p=2$$

(b)

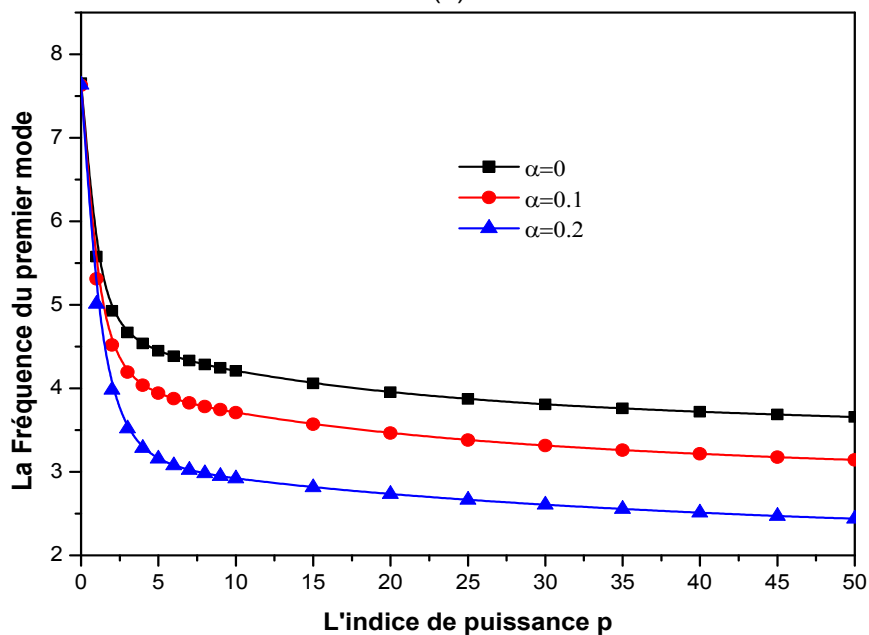


Figure V.6b: Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle à travers l'épaisseur du micro-poutre FG pour différentes valeurs des paramètres de porosité avec

$$l_c/l_m=2, L/h=10, h/l_m=1, p=2,$$

$$h/l_m=8$$

La comparaison entre les valeurs de la flèche pour les micro-poutres FG avec une distribution uniforme et non uniforme de la porosité est affichée dans **Figure V.7** et **Figure V.8**. On peut remarquer que la flèche de la porosité uniforme est plus élevée que FGM-II.

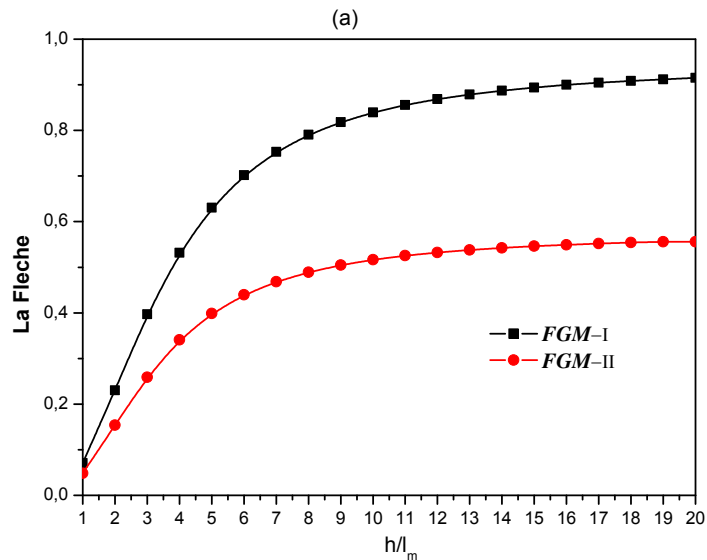


Figure V.7a: Variation de la flèche du micro-poutre FG pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $p = 2$

$$l_m = 15\mu\text{m}, \alpha = 0.2, \text{ Charge ponctuelle}$$

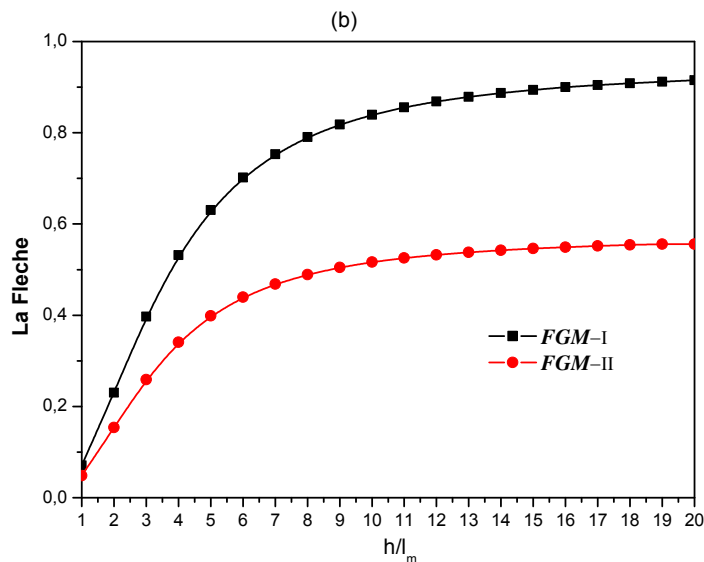


Figure V.7b: Variation de la flèche du micro-poutre FG pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $p = 2$

$$l_m = 15\mu\text{m}, \alpha = 0.2, \text{ Charge uniforme}$$

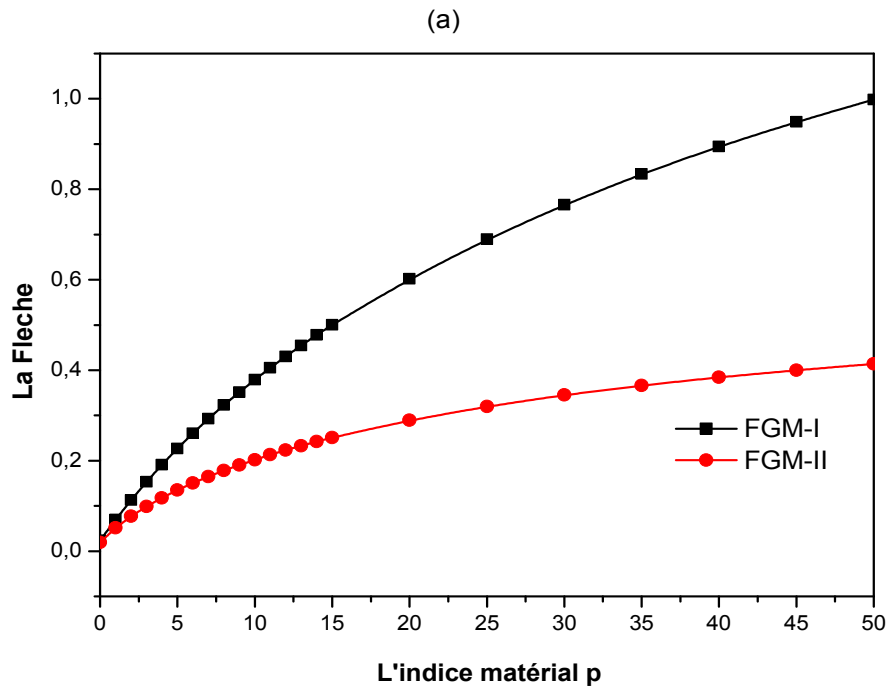


Figure V.8a: Variation de la flèche on fonction de l'indice de puissance du micro-poutre FG pour une charge ponctuelle, pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2, L/h = 10, l_m = 15\mu m, b/h = 1, \alpha = 0.2, h/l_m = 1$

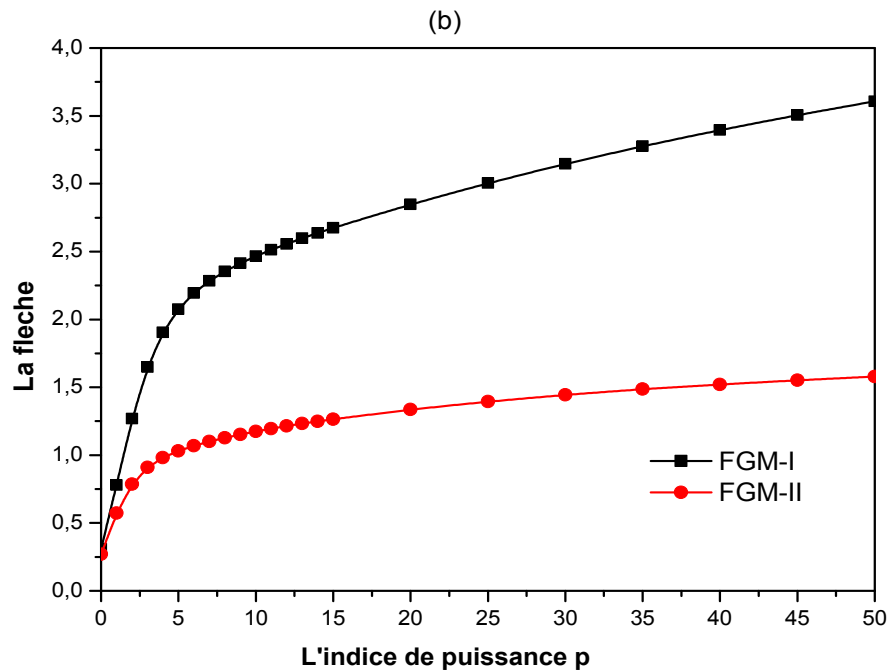


Figure V.8b: Variation de la flèche on fonction de l'indice de puissance du micro-poutre FG pour une charge ponctuelle, pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2, L/h = 10, l_m = 15\mu m, b/h = 1, \alpha = 0.2, h/l_m = 8$

Figure V.9 et **Figure V.10** présente une comparaison entre les valeurs des fréquences pour les micro-poutres FG avec une distribution de porosité uniforme et non uniforme. On peut remarquer que la fréquence de la porosité uniforme est plus faible que FGM-II.

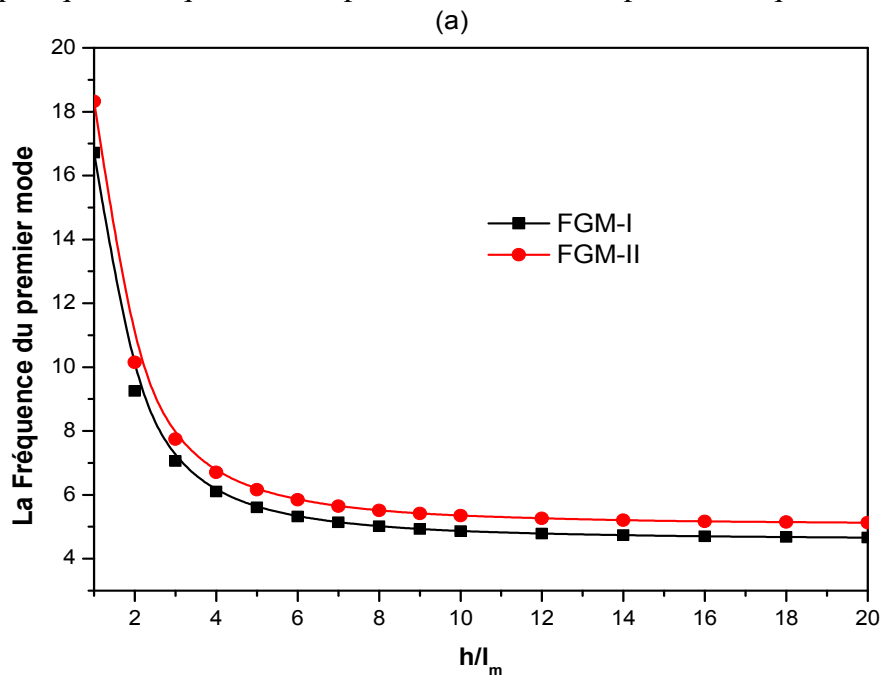


Figure V.9a: Variation de la Fréquence du premier mode micro-poutre FG pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $l_m = 15\mu\text{m}$, $b/h = 1$, $p = 1$, $\alpha = 0.2$.

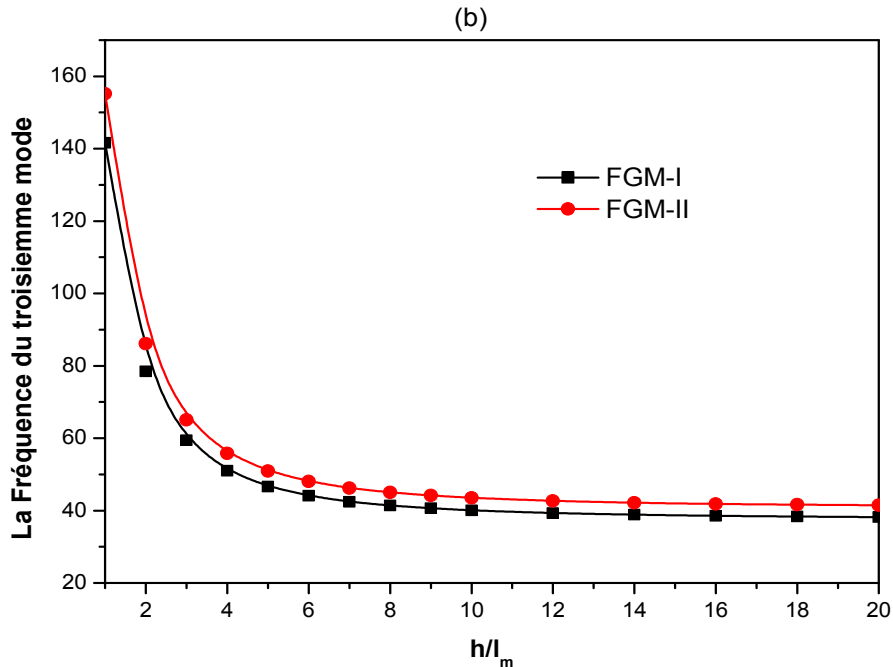


Figure V.9b: Variation de la Fréquence du premier mode micro-poutre FG pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2$, $L/h = 10$, $l_m = 15\mu\text{m}$, $b/h = 1$, $p = 1$, $\alpha = 0.2$.

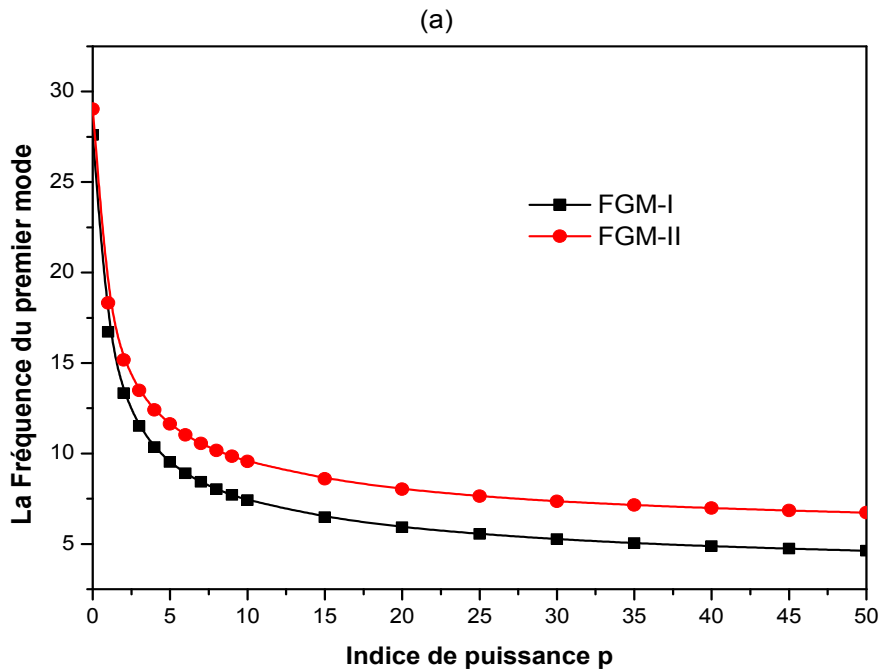


Figure V.10a: Variation de la Fréquence du premier mode de micro-poutre FG pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2, L/h = 10, l_m = 15\mu m, b/h = 1, \alpha = 0.2$, (a) $h/l_m = 1$.

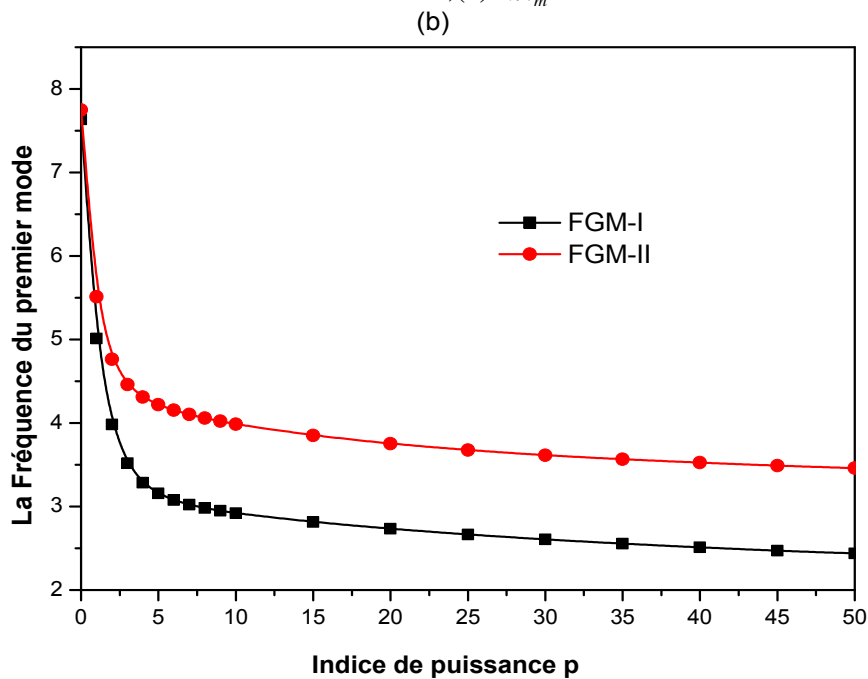


Figure V.10b: Variation de la Fréquence du premier mode de micro-poutre FG pour deux de distribution de porosité (FGM-I, FGM-II) avec $l_c/l_m = 2, L/h = 10, l_m = 15\mu m, b/h = 1, \alpha = 0.2, h/l_m = 8$.

V.3. Cas des micros plaques FGM

Dans cette section, plusieurs exemples numériques de flexion et de comportement dynamique de la microplaque FG sont présentés en fonction de la théorie de contrainte des couples modifiée. Les résultats actuels sont calculés en utilisant la présente théorie de type TSDT avec seulement 4 inconnus. Les résultats sont comparés à ceux rapportés par (Thai *et al.* [83], Yin *et al.* [84] et Tsiatas *et al.* [85]). Les constituants de la microplaque FG utilisés dans cette étude comprennent l'aluminium et l'alumine:

$$\left(E_c = 380\text{GPa}, E_m = 70\text{GPa} \quad \rho_c = 3800\text{kg/m}^3 \quad \rho_m = 2702\text{kg/m}^3 \right)$$

Dans cette étude, nous prenons le paramètre d'échelle de longueur du composant en aluminium $l_m = 15\mu\text{m}$, et dans les autres cas, le rapport l_m/l_c est varié de manière à démontrer l'influence de la variation du paramètre d'échelle de longueur. Les quantités non dimensionnelles suivantes peuvent être définies comme :

$$\bar{w} = \frac{10wE_1}{q_0a^4}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma h}{q_0a}$$

$$\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_1/E_1}$$

Les résultats numériques de la microplaque FG carrée simplement appuyés sont présentés. Examen des tableaux V.4 au V.9 révèle que la théorie actuelle avec seulement quatre variables fournit des résultats similaires à ceux calculés par la théorie de la déformation du cisaillement du troisième ordre de Reddy (TSDT) utilisé par Thai *et al.* [83] et ceci pour toutes les valeurs examinées du paramètre de longueur d'échelle de matériau (l/h) et compte tenu $l_c = l_m = l$.

Tableau V.4 est effectué pour la flèche non dimensionnelle \bar{w} d'une microplaque homogène soumise à une charge sinusoïdale q_0 . Considérons une microplaque simplement appui en époxy avec les propriétés matérielles suivantes par Reddy [86], : $E = 1.44\text{GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1220\text{Kg/m}^3$, $h = 88 \times 10^{-6}\text{m}$. Les flèches calculées sont comparées à celles prédites par Thai *et al.* [83] basé sur TSDT et par Tsiatas [85] basé sur CPT. Les solutions analytiques des CPT est donné comme :

$$w = \frac{q_0}{(D + A_n)(\alpha^2 + \beta^2)}$$

On constate que les résultats calculés se révèlent en excellent accord avec ceux de Thai *et al.* [83]. On voit clairement que la flèche verticale prédite par la CPT de Tsiatas [85] sont indépendantes des différentes valeurs pour le rapport d'aspect a/h parce que dans la théorie de CPT l'effet de cisaillement n'est pas introduit.

Tableau V.4: Comparaison de la flèche non dimensionnée \bar{w} d'une plaque carré homogène $l_c = l_m$, $h = 88 \times 10^{-6} m$.

l_c/h	$a/h=5$			$a/h=20$			$a/h=100$		
	CPT [85]	HSDT [83]	HSDT proposé	CPT [85]	HSDT [83]	HSDT proposé	CPT [85]	HSDT [83]	HSDT Proposé
0	0.2803	0.3433	0.3433	0.2803	0.2842	0.2842	0.2803	0.2804	0.2804
0.2	0.2399	0.2875	0.2875	0.2399	0.2430	0.2430	0.2399	0.2401	0.2401
0.4	0.1676	0.1934	0.1934	0.1676	0.1693	0.1693	0.1676	0.1677	0.1677
0.6	0.1116	0.1251	0.1251	0.1116	0.1124	0.1124	0.1116	0.1116	0.1116
0.8	0.0760	0.0838	0.0838	0.0760	0.0765	0.0765	0.0760	0.0760	0.0760
1	0.0539	0.0588	0.0588	0.0539	0.0542	0.0542	0.0539	0.0539	0.0539

Tableau V.5 présente la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée simplement appuyée. Les résultats obtenus sont comparés à ceux prévus par Thai *et al.* [83] basé sur TSDT de Reddy et Yin *et al.* [102] basé sur CPT. La solution analytique de la CPT est donnée comme :

$$\omega = (\alpha^2 + \beta^2) \sqrt{(D + A_n)/I_0}$$

De nouveau, les résultats calculés se révèlent d'excellents accords avec ceux de Thai *et al.* [83].

Tableau V.5: Comparaison de la fréquence fondamentale non dimensionnée $\bar{\omega}$ d'une plaque carré homogène $l_c = l_m$, $h = 88 \times 10^{-6} m$.

l_c/h	$a/h=5$			$a/h=20$			$a/h=100$		
	CPT [85]	HSDT [83]	HSDT proposé	CPT [85]	HSDT [83]	HSDT proposé	CPT [85]	HSDT [83]	HSDT proposé
0	5.9734	5.2813	5.2813	5.9734	5.9199	5.9199	5.9734	5.9712	5.9712
0.2	6.4556	5.7699	5.7699	6.4556	6.4027	6.4027	6.4556	6.4535	6.4535
0.4	7.7239	7.0330	7.0330	7.7239	7.6708	7.6708	7.7239	7.7217	7.7217
0.6	9.4673	8.7389	8.7389	9.4673	9.4116	9.4116	9.4673	9.4651	9.4651
0.8	11.4713	10.6766	10.6766	11.4713	11.4108	11.4108	11.4713	11.4689	11.4689
1	13.6213	12.7408	12.7408	13.6213	13.5545	13.5545	13.6213	13.6186	13.6186

Dans le Tableau V.6 les flèches non dimensionnelles de la microplaque FG pour la charge sinusoïdale sur la base de la présente formulation pour les valeurs de la fraction volumique p , les différentes valeurs de rapport d'épaisseur a/h , et un paramètre d'échelle de longueur de matériau non dimensionnelle l_m/h . Les résultats obtenus se révèlent un excellent accord avec ceux de Thai *et al.* [83].

Tableau V.6 : Flèche non dimensionnée \bar{w} d'une plaque carré homogène $l_c = l_m$, $h = 88 \times 10^{-6} m$.

a/h	l_m/h	Théorie de la plaque	Indice de puissance p					
			0	0.5	1	2	5	10
5	0	HSDT proposée	0.3433	0.5177	0.6688	0.8671	1.0885	1.2276
		HSDT [83]	0.3433	0.5177	0.6688	0.8671	1.0885	1.2276
	0.2	HSDT proposée	0.2875	0.4275	0.5468	0.7067	0.8981	1.0247
		HSDT [83]	0.2875	0.4275	0.5468	0.7067	0.8981	1.0247
	0.4	HSDT proposée	0.1934	0.2807	0.3535	0.4548	0.5925	0.6908
		HSDT [83]	0.1934	0.2807	0.3535	0.4548	0.5925	0.6908
	0.6	HSDT proposée	0.1251	0.1786	0.2224	0.2855	0.3802	0.4514
		HSDT [83]	0.1251	0.1786	0.2224	0.2855	0.3802	0.4514
	0.8	HSDT proposée	0.0838	0.1183	0.1464	0.1878	0.2539	0.3052
		HSDT [83]	0.0838	0.1183	0.1464	0.1878	0.2539	0.3052
	1	HSDT proposée	0.0588	0.0825	0.1017	0.1304	0.1782	0.2158
		HSDT [83]	0.0588	0.0825	0.1017	0.1304	0.1782	0.2158
10	0	HSDT proposée	0.2961	0.4537	0.5890	0.7573	0.9114	1.0087
		HSDT [83]	0.2961	0.4537	0.5890	0.7573	0.9114	1.0087
	0.2	HSDT proposée	0.2520	0.3798	0.4885	0.6284	0.7743	0.8697
		HSDT [83]	0.2520	0.3798	0.4885	0.6284	0.7743	0.8697
	0.4	HSDT proposée	0.1742	0.2551	0.3231	0.4161	0.5349	0.6175
		HSDT [83]	0.1742	0.2551	0.3231	0.4161	0.5349	0.6175
	0.6	HSDT proposée	0.1150	0.1649	0.2065	0.2664	0.3538	0.4177
		HSDT [83]	0.1150	0.1649	0.2065	0.2664	0.3538	0.4177
	0.8	HSDT proposée	0.0780	0.1103	0.1372	0.1772	0.2403	0.2879
		HSDT [83]	0.0780	0.1103	0.1372	0.1772	0.2403	0.2879
	1	HSDT proposée	0.0552	0.0774	0.0959	0.1238	0.1702	0.2058
		HSDT [83]	0.0552	0.0774	0.0959	0.1238	0.1702	0.2058
20	0	HSDT proposée	0.2842	0.4377	0.5689	0.7298	0.8669	0.9538
		HSDT [83]	0.2842	0.4377	0.5689	0.7298	0.8669	0.9538
	0.2	HSDT proposée	0.2430	0.3677	0.4737	0.6086	0.7429	0.8303
		HSDT [83]	0.2430	0.3677	0.4737	0.6086	0.7429	0.8303
	0.4	HSDT proposée	0.1693	0.2486	0.3153	0.4063	0.5201	0.5986
		HSDT [83]	0.1693	0.2486	0.3153	0.4063	0.5201	0.5986
	0.6	HSDT proposée	0.1124	0.1614	0.2025	0.2615	0.3470	0.4090
		HSDT [83]	0.1124	0.1614	0.2025	0.2615	0.3470	0.4090
	0.8	HSDT proposée	0.0765	0.1083	0.1349	0.1744	0.2368	0.2834
		HSDT [83]	0.0765	0.1083	0.1349	0.1744	0.2368	0.2834
	1	HSDT proposée	0.0542	0.0761	0.0944	0.1222	0.1681	0.2033
		HSDT [83]	0.0542	0.0761	0.0944	0.1222	0.1681	0.2033
100	0	HSDT proposée	0.2804	0.4326	0.5625	0.7209	0.8527	0.9362
		HSDT [83]	0.2804	0.4326	0.5625	0.7209	0.8527	0.9362
	0.2	HSDT proposée	0.2401	0.3639	0.4689	0.6022	0.7327	0.8176
		HSDT [83]	0.2401	0.3639	0.4689	0.6022	0.7327	0.8176
	0.4	HSDT proposée	0.1677	0.2465	0.3128	0.4031	0.5153	0.5925
		HSDT [83]	0.1677	0.2465	0.3128	0.4031	0.5153	0.5925
	0.6	HSDT proposée	0.1116	0.1603	0.2011	0.2599	0.3448	0.4061
		HSDT [83]	0.1116	0.1603	0.2011	0.2599	0.3448	0.4061
	0.8	HSDT proposée	0.0760	0.1076	0.1341	0.1736	0.2357	0.2820
		HSDT [83]	0.0760	0.1076	0.1341	0.1736	0.2357	0.2820
	1	HSDT proposée	0.0539	0.0756	0.0939	0.1216	0.1675	0.2024
		HSDT [83]	0.0539	0.0756	0.0939	0.1216	0.1675	0.2024

On constate aussi à partir du Tableau V.7 que les résultats numériques de l'analyse des vibrations libres de la microplaque FG sont en bon accord avec ceux de Thai *et al.* [83].

Tableau V.7 : Fréquence non dimensionnée $\bar{\omega}$ d'une plaque carré homogène $l_c = l_m$,

$$h = 88 \times 10^{-6} m$$

a/h	l_m/h	Théorie de la plaque	Indice de puissance p					
			0	0.5	1	2	5	10
5	0	HSDT proposée	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2514
		HSDT [83]	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2514
	0.2	HSDT proposée	5.7699	4.9715	4.5094	4.0755	3.7327	3.5548
		HSDT [83]	5.7699	4.9715	4.5094	4.0755	3.7327	3.5548
	0.4	HSDT proposée	7.0330	6.1339	5.6071	5.0763	4.5862	4.3200
		HSDT [83]	7.0330	6.1339	5.6071	5.0763	4.5862	4.3200
	0.6	HSDT proposée	8.7389	7.6895	7.0662	6.4011	5.7137	5.3335
		HSDT [83]	8.7389	7.6895	7.0662	6.4011	5.7137	5.3335
	0.8	HSDT proposée	10.6766	9.4456	8.7058	7.8861	6.9796	6.4759
		HSDT [83]	10.6766	9.4456	8.7058	7.8861	6.9796	6.4759
	1	HSDT proposée	12.7408	11.3086	10.4397	9.4536	8.3193	7.6895
		HSDT [83]	12.7408	11.3086	10.4397	9.4536	8.3193	7.6895
10	0	HSDT proposée	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6368
		HSDT [83]	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6368
	0.2	HSDT proposée	6.2537	5.3571	4.8526	4.4006	4.0876	3.9162
		HSDT [83]	6.2537	5.3571	4.8526	4.4006	4.0876	3.9162
	0.4	HSDT proposée	7.5210	6.5361	5.9664	5.4071	4.9169	4.6464
		HSDT [83]	7.5210	6.5361	5.9664	5.4071	4.9169	4.6464
	0.6	HSDT proposée	9.2543	8.1295	7.4619	6.7580	6.0447	5.6487
		HSDT [83]	9.2543	8.1295	7.4619	6.7580	6.0447	5.6487
	0.8	HSDT proposée	11.2396	9.9398	9.1537	8.2863	7.3338	6.8030
		HSDT [83]	11.2396	9.9398	9.1537	8.2863	7.3338	6.8030
	1	HSDT proposée	13.3651	11.8682	10.9511	9.9101	8.7135	8.0448
		HSDT [83]	13.3651	11.8682	10.9511	9.9101	8.7135	8.0448
20	0	HSDT proposée	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.7622
		HSDT [83]	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.7622
	0.2	HSDT proposée	6.4027	5.4744	4.9568	4.5006	4.2005	4.0323
		HSDT [83]	6.4027	5.4744	4.9568	4.5006	4.2005	4.0323
	0.4	HSDT proposée	7.6708	6.6585	6.0756	5.5082	5.0199	4.7488
		HSDT [83]	7.6708	6.6585	6.0756	5.5082	5.0199	4.7488
	0.6	HSDT proposée	9.4116	8.2630	7.5817	6.8661	6.1457	5.7453
		HSDT [83]	9.4116	8.2630	7.5817	6.8661	6.1457	5.7453
	0.8	HSDT proposée	11.4108	10.0895	9.2887	8.4062	7.4397	6.9013
		HSDT [83]	11.4108	10.0895	9.2887	8.4062	7.4397	6.9013
	1	HSDT proposée	13.5545	12.0372	11.1042	10.0450	8.8286	8.1494
		HSDT [83]	13.5545	12.0372	11.1042	10.0450	8.8286	8.1494
100	0	HSDT proposée	5.9712	5.0575	4.5579	4.1445	3.9299	3.8058
		HSDT [83]	5.9712	5.0575	4.5579	4.1445	3.9299	3.8058
	0.2	HSDT proposée	6.4535	5.5142	4.9922	4.5346	4.2394	4.0725
		HSDT [83]	6.4535	5.5142	4.9922	4.5346	4.2394	4.0725
	0.4	HSDT proposée	7.7217	6.7000	6.1126	5.5425	5.0552	4.7840
		HSDT [83]	7.7217	6.7000	6.1126	5.5425	5.0552	4.7840
	0.6	HSDT proposée	9.4651	8.3084	7.6224	6.9027	6.1800	5.7782
		HSDT [83]	9.4651	8.3084	7.6224	6.9027	6.1800	5.7782
	0.8	HSDT proposée	11.4689	10.1402	9.3344	8.4467	7.4755	6.9345
		HSDT [83]	11.4689	10.1402	9.3344	8.4467	7.4755	6.9345
	1	HSDT proposée	13.6186	12.0944	11.1560	10.0904	8.8673	8.1846
		HSDT [83]	13.6186	12.0944	11.1560	10.0904	8.8673	8.1846

Le tableau V.8 présente les flèches non dimensionnelle de la microplaque FG en fonction de la théorie actuelle pour diverses valeurs de l'indice de puissance p , les différentes valeurs de rapport d'épaisseur a/h , et paramètre de longueur d'échelle variable l_c/l_m . Les résultats sont fournis pour la charge sinusoïdale. On voit que l'effet de la déformation par cisaillement devient considérable pour la microplaque épaisse (i.e., $a/h=5$). Quand $l_c/l_m=1$, Le paramètre d'échelle de longueur de la microplaque FG est constante selon.

La même équation implique également que, pour les autres cas restants pour lesquels $l_c/l_m \neq 1$, le paramètre de longueur d'échelle varie selon l'épaisseur. Ainsi, le rapport l_c/l_m présente le degré de la variation du paramètre de l'échelle de longueur dans la plaque. On constate que l'augmentation du rapport de paramètres d'échelle de longueur l_c/l_m réduit la flèche et les résultats sont significativement différents du cas où le paramètre de l'échelle de longueur est considéré comme constant $l_c/l_m=1$. Cette observation est également la validation du principe de ce travail selon lequel la validation du paramètre de l'échelle de longueur doit être prise en compte dans l'étude de la microplaque FG. En outre, Il est noté comme l'indice de gradient p augmente, l'augmentation de la flèche se produira dans les mêmes conditions (rapport de paramètre de longueur d'échelle l_c/l_m rapport d'épaisseur a/h).

Tableau V.8 : Flèche non dimensionnée \bar{w} d'une plaque carré homogène $l_m = 15\mu m$,

$$h/l_m = 2, E_c = 380\text{GPa}, E_m = 70\text{GPa}, \bar{w} = \frac{10wE_1h^3}{q_0a^4}$$

l_c/l_m	Théorie des plaques	$a/h=5$				$a/h=100$			
		$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$	$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$
1/3	CPT	0.29610	0.38165	0.47966	0.55014	0.29610	0.38165	0.47966	0.55014
	HSDT proposé	0.34711	0.44033	0.55941	0.65065	0.29623	0.38180	0.47986	0.55040
1	CPT	0.17466	0.25019	0.36800	0.49092	0.17466	0.25019	0.36800	0.49092
	HSDT proposé	0.19732	0.27940	0.41002	0.55714	0.17472	0.25027	0.36811	0.49109
3/2	CPT	0.11525	0.17827	0.29175	0.43895	0.11525	0.17827	0.29175	0.43895
	HSDT proposé	0.12783	0.19502	0.31586	0.48362	0.11528	0.17832	0.29181	0.43907
2	CPT	0.07906	0.12955	0.23041	0.38684	0.07906	0.12955	0.23041	0.38684
	HSDT proposé	0.08671	0.13968	0.24447	0.41610	0.07908	0.12958	0.23045	0.38692
TC	CPT	0.37256	0.56227	0.79168	0.93546	0.37256	0.56227	0.79168	0.93546
	HSDT proposé	0.44910	0.66876	0.97432	1.22755	0.37275	0.56254	0.79214	0.93619

TC : désigne la Théorie Classique

Tableau V.9 présente la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\bar{\omega}$ de la micro plaque pour différente valeur de gradient index P , pour différentes valeurs de longueur d'échelle paramètre l_c/l_m et pour deux valeurs différentes du rapport d'aspect ($a/h = 5, 100$). On peut observer que pour chaque valeur de l'indice de gradient, la fréquence non dimensionnelle diminue avec la réduction de rapport l_c/l_m . Cependant, la réduction de l'indice de gradient conduit à une augmentation de la fréquence non dimensionnelle. Encore, à partir de ce tableau, il peut être confirmé la nécessité d'examiner la variation du paramètre de l'échelle de longueur l dans la microplaque dans l'analyse dynamique de FG.

Tableau V.9 : Fréquence non dimensionnée $\bar{\omega}$ d'une plaque carrée homogène
 $l_m = 15\mu m$, $h/l_m = 2$, $E_c = 380GPa$, $E_m = 70GPa$ $\rho_c = 3800kg/m^3$ $\rho_m = 2702kg/m^3$

l_c/l_m	Théorie des plaques	$a/h=5$				$a/h=100$			
		$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$	$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$
1/3	CPT	5.82675	5.34605	4.95904	4.78176	6.01484	5.53362	5.15855	4.96468
	HSDT proposée	5.43179	5.02603	4.65008	4.45554	6.01352	5.53253	5.15745	4.96351
1	CPT	7.58646	6.60186	5.66038	5.06159	7.83156	6.83441	5.88936	5.25562
	HSDT proposée	7.20308	6.30583	5.42015	4.80523	7.83026	6.83339	5.88849	5.25470
3/2	CPT	9.33883	7.81959	6.35557	5.35235	9.64093	8.09646	6.61437	5.55801
	HSDT proposée	8.94753	7.54243	6.16451	5.14885	9.63957	8.09548	6.61366	5.55727
2	CPT	11.27448	9.17047	7.14902	5.70080	11.63994	9.49764	7.44277	5.92053
	HSDT proposée	10.86201	8.90560	6.90560	5.54215	11.63850	9.49668	7.44219	5.91995
TC	CPT	5.19465	4.40481	3.86101	3.66791	5.36228	4.55900	4.01530	3.80729
	HSDT proposée	4.77631	4.07809	3.52566	3.25135	5.36090	4.55792	4.01414	3.80580

Dans la (Figure V.11), la variation de la Flèche transversales non dimensionnelles est présentée par rapport au h/l_m pour le rapport de paramètre d'échelle de longueur différent l_c/l_m pour la plaque carrée. On peut voir à partir de cette figure que les déviations données par le modèle de plaque classique sont indépendantes du paramètre d'échelle de longueur de matériau h/l_m et ils sont toujours plus grands que ceux calculés par l'intermédiaire du modèle de plaque de non-classique avec la contrainte de couple. Ceci démontre que l'incorporation de l'effet de contrainte de couple rend une plaque plus rigide, et donc, conduit à une diminution de la Flèche. Toutefois, cette influence peut être ignorée lorsque le paramètre de l'échelle de longueur matérielle h/l_m prendre des valeurs élevées comme indiqué à la (Figure V.11).

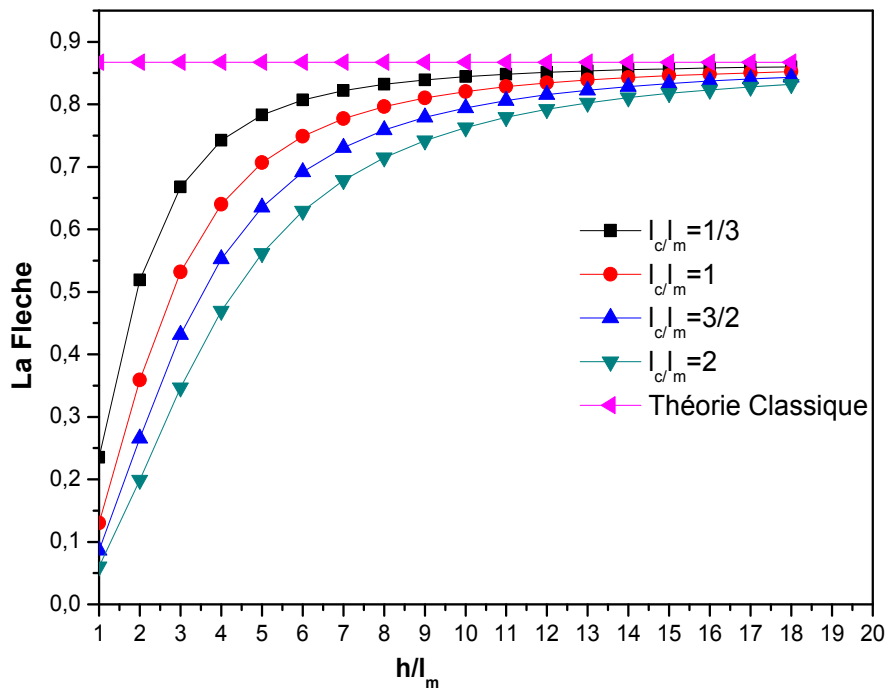


Figure V.11 : Variation de la flèche transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre d'échelle, $a/h = 5$, $l_m = 15\mu m$, $a = b$, $p = 2$, $h/l_m = 1$

La (Figure V.12) présente la variation de la Fleche non dimensionnelle avec l'indice de matériel P et le rapport de paramètre d'échelle de longueur l_c/l_m pour deux valeurs différentes du paramètre de matériau non dimensionnel h/l_m et pour ($a/h = 5$). On peut observer que l'augmentation de l'indice de puissance conduit à une augmentation de la flèche. Cependant, l'influence du rapport de paramètre de l'échelle de longueur l_c/l_m sur les flèche n'est pas évident pour $h/l_m = 8$ comparativement au cas où $h/l_m = 1$. Ainsi, la sensibilité de la flèche non dimensionnelle aux variations de h/l_m devient plus remarquable que ce rapport prend de petites valeurs.

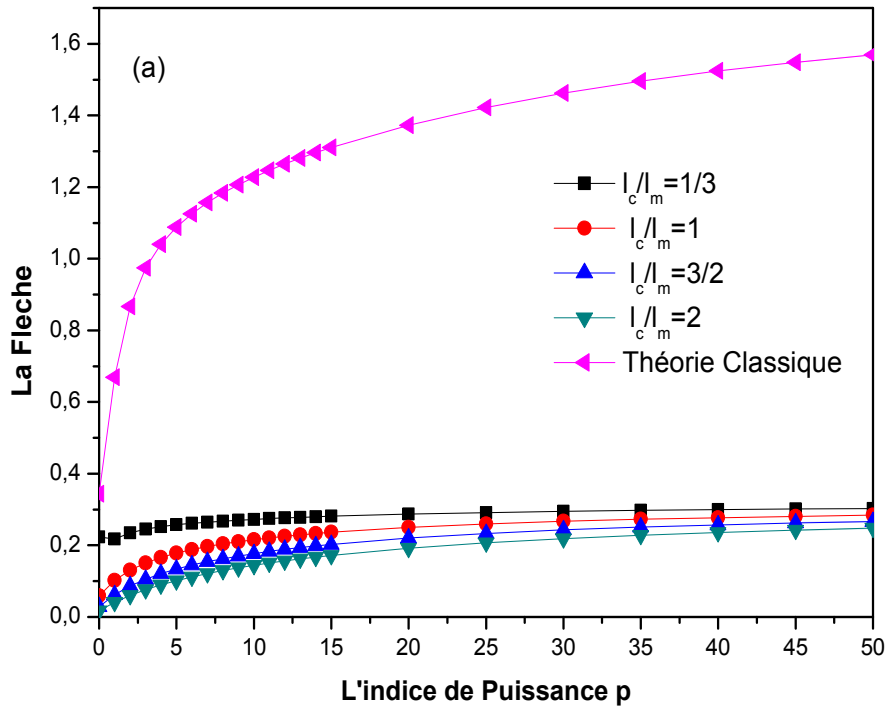


Figure V.12a : Variation de la flèche transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_c/l_m , $a/h = 5$,

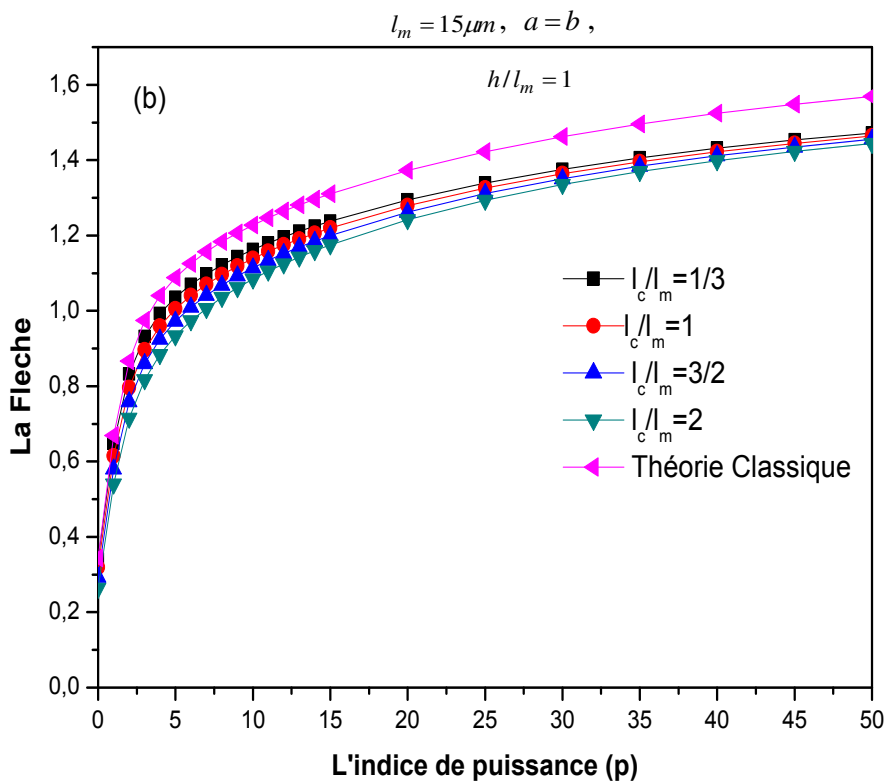


Figure V.12b : Variation de la flèche transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_c/l_m , $a/h = 5$,

$$l_m = 15\mu m, a = b,$$

$$h/l_m = 8$$

Dans la (Figure V.13), la variation de la contrainte normale axiale non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, z\right)$ de la plaque micro FG avec $(a/h=5)$ dans l'épaisseur est présenté pour différentes valeurs du rapport de paramètre d'échelle de longueur l_c/l_m . La contrainte normale axiale non dimensionnelle diminue lorsque le rapport h/l_m est augmenté de 1/3 à 2. La réduction est beaucoup plus importante lorsque $h/l_m=1$, c'est-à-dire que le rapport est relativement plus faible.

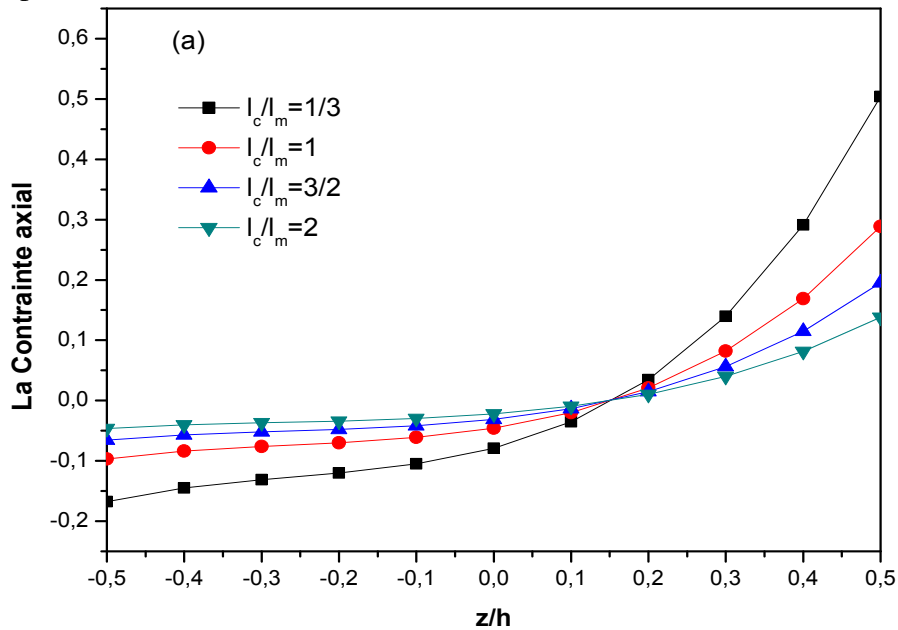


Figure V.13a. Variation de la contrainte normale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre d'échelle, $a/h = 5$, $l_m = 15\mu m$, $a = b$

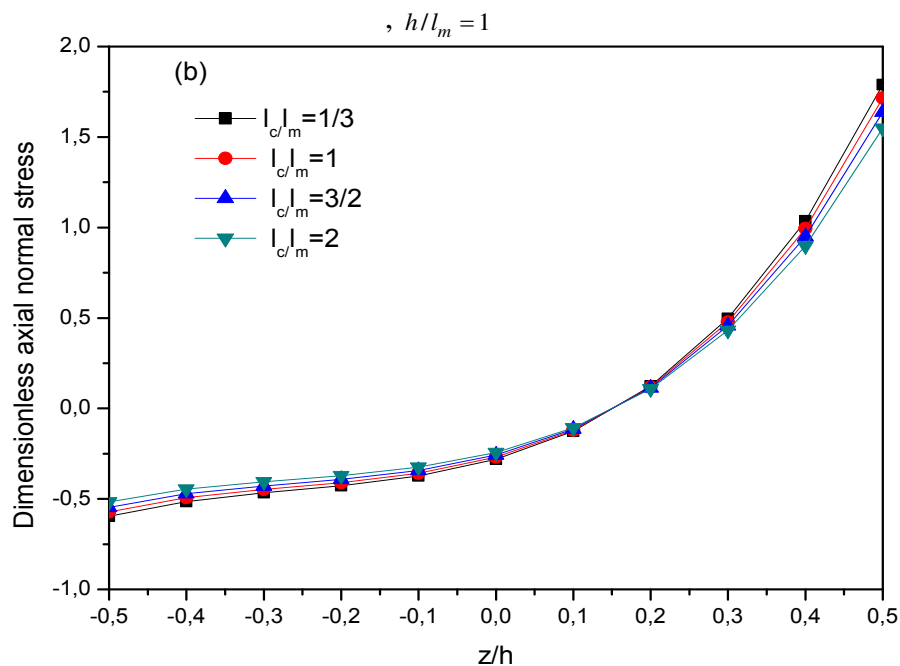


Figure V.13b. Variation de la contrainte normale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre d'échelle, $a/h = 5$, $l_m = 15\mu m$, $a = b$,

$h/l_m = 8$

La (Figure V.14) montre la variation de l'effort de cisaillement transversal $\bar{\tau}_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, z\right)$ de la plaque micro FG pour différentes valeurs de paramètre de longueur d'échelle l_c/l_m . On peut voir que la contrainte transversale augmente lorsque le rapport de paramètre d'échelle de longueur l_c/l_m diminue. Ce résultat démontre aussi la nécessité d'examiner la variation du paramètre de l'échelle de longueur l dans la microplaque dans l'étude des microplaques FG à petite échelle.

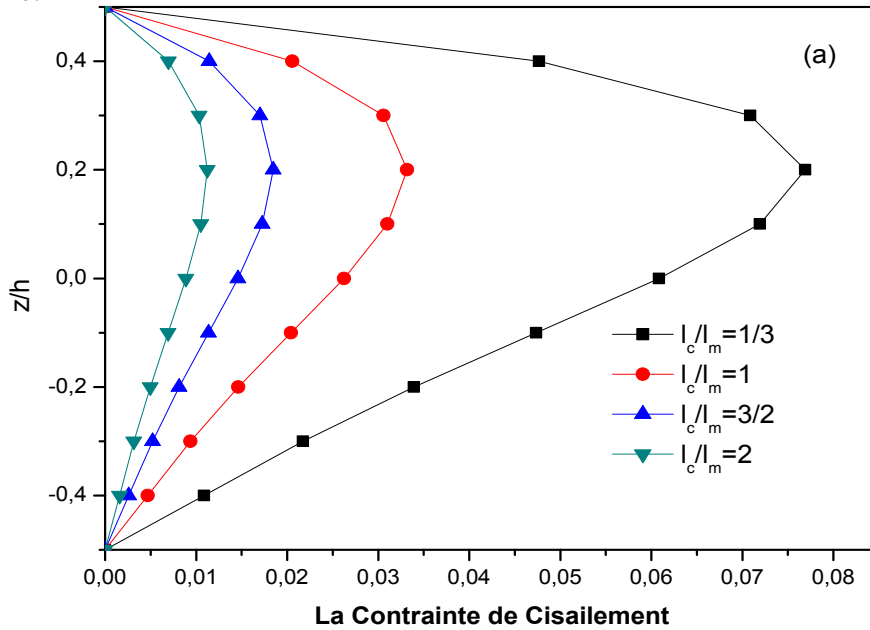


Figure V.14a : Variation de la contrainte de cisaillement transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_c/l_m , $a/h = 5$, $l_m = 15\mu m$, $a = b$, $p = 2$, $h/l_m = 1$

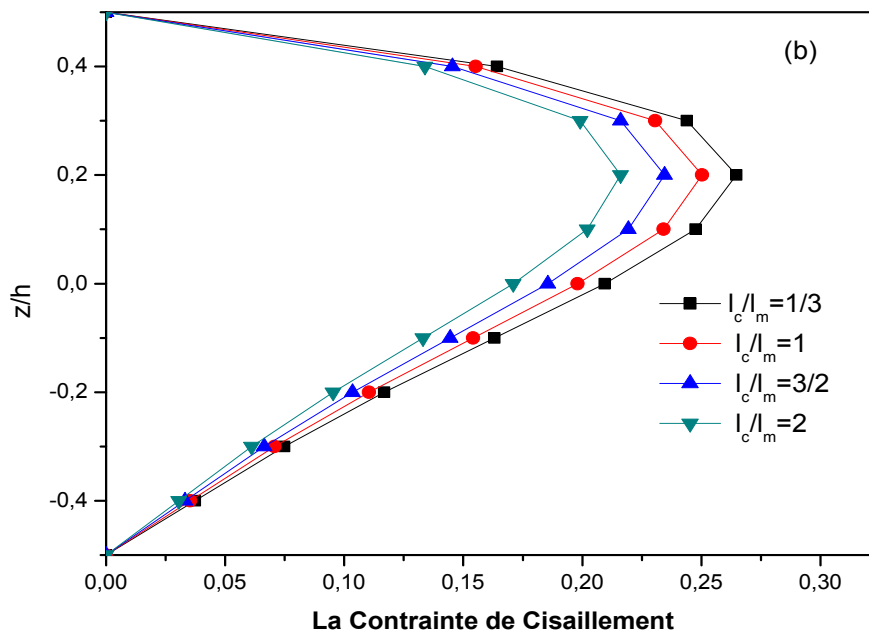


Figure V.14b : Variation de la contrainte de cisaillement transversale non dimensionnel de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre pour l_c/l_m , $a/h = 5$, $l_m = 15\mu m$, $a = b$, $p = 2$, $h/l_m = 8$

Dans la (Figure V.15), la première et la troisième mode de fréquence non dimensionnelle sont présentées en fonction du rapport h/l_m avec différent rapport de paramètre d'échelle l_c/l_m . On peut voir que la fréquence calculée par le modèle classique de plaque est indépendante du paramètre d'échelle et ils sont toujours inférieurs à ceux calculés.

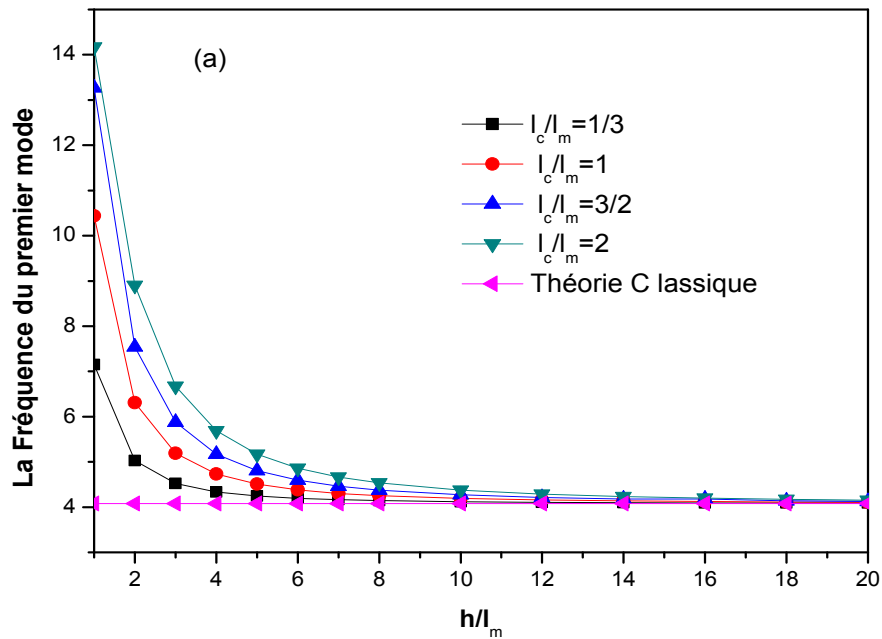


Figure V.15a : Variation de la fréquence non dimensionnelle de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre de longueur pour l_c/l_m , $a/h = 5$, $l_m = 15\mu m$, $a = b$, $p = 1$, $m = n = 1$

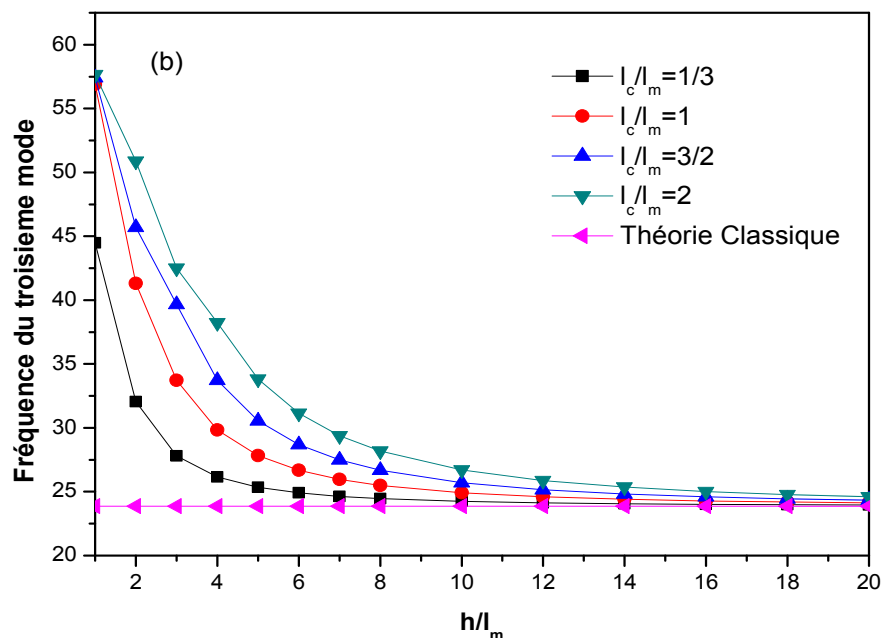


Figure V.15b : Variation de la fréquence non dimensionnelle de la micro plaque FG pour différente valeur de paramètre de longueur l_c/l_m , $a/h = 5$, $l_m = 15\mu m$, $a = b$, $p = 1$

V.4. Conclusion

Ce travail présente une nouvelle formulation de plaque et de poutre dépendant de l'effet d'échelle et qui sont basées sur la théorie modifiée de contrainte de couple.

La formulation considère le paramètre de longueur d'échelle comme étant variable puisque le matériau considéré est fonctionnellement gradué. Un modèle dépendant de la taille réduite est développé pour l'analyse statique et dynamique des microstructures FG. Les équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton.

Les solutions analytiques pour les problèmes de flexion et de vibration sont déterminées pour les structures plaque et poutre.

On peut conclure à travers les exemples numériques que l'analyse de flexion et de vibration des microstructures est influencée par plusieurs facteurs tels que :

- l'épaisseur de la poutre ou la plaque.
- l'effet d'échelle.
- paramètre de porosité de la poutre.

Conclusion générale & Perspectives

Conclusion générale

Les matériaux fonctionnellement gradués sont la matière de l'avenir qui offre des possibilités d'études et d'applications supplémentaires. Des études expérimentales moindres sont menées dans ce domaine et il n'y a que très peu d'implémentations pratiques jusqu'à présent, même si les exemples naturels sont nombreux. La nature coûteuse de ces matériaux constitue également un obstacle à son développement. D'autres études devraient permettre d'améliorer encore l'acceptabilité et l'application des FGM.

Le concept, les propriétés, l'historique de développement et l'application des FGM en ingénierie, une estimation des propriétés effectives, les modèles microstructures, une base théorique et des méthodes de calcul pour des structures FGM ont été discutés dans cette thèse.

Dans cette recherche, une nouvelle dimension dépendante d'une micro-poutre poreuse FG avec deux distributions de porosité est présentée pour l'analyse de flexion et de vibration. Les équations du mouvement sont obtenues basé sur une nouvelle théorie hyperbolique de déformation du cisaillement et une théorie de couple de contrainte modifiée. La formulation actuelle considère un paramètre d'échelle de longueur variable. Les résultats de cette étude a démontré que l'inclusion de l'influence du couple de contrainte et le paramètre de porosité rend la micro-poutre plus rigide et conduit ainsi à une diminution de la flèche et une augmentation de la fréquence. Il est conclu que divers facteurs tel que le paramètre de porosité, distribution de porosité et indice matériel ont un effet considérable sur la flèche et fréquence non dimensionnelles des micro-poutres FG avec porosité qui souligne l'importance pour examiner l'influence de la fraction de volume de la porosité.

Ce travail présente aussi une nouvelle formulation de plaque dépendant de la taille basée sur la théorie de couple de contrainte modifiée avec seulement 4 inconnus. La théorie considère un paramètre d'échelle de longueur variable. Un modèle dépendant de la taille est développé pour l'analyse de flexion et de vibration des microplaques FG. des équations de mouvement sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton. Des solutions analytiques pour des problèmes de flexion et de vibration sont obtenues pour une plaque simplement appuyés. Ce travail justifie également le développement d'une approche générale pour l'analyse de la microplaque FG ayant un paramètre d'échelle de longueur variable. Il a été confirmé que le paramètre montrant le degré de variation du paramètre de longueur d'échelle.

L'originalité de notre recherche a permis d'étudier la porosité dans l'échelle micro poutre.

Les structures parfait et imparfait sont considéré afin de voir l'influence de la porosité sur les propriétés statique et dynamique des structures FG.

Finalement, nous pouvons dire que les présentes théories sont exactes pour résoudre les problèmes des structures à l'échelle micro en matériau fonctionnellement graduées.

Les publications relatives à cette thèse sont : Hanifi Hachemi Amar et al. (2017), Hanifi Hachemi Amar et al. (2018).

Perspectives

Cette étude de modélisation multi échelle des structures des matériaux en FGM ouvre de nombreuses perspectives de recherche, parmi lesquelles on peut citer :

- L'effet thermique des microstructures
- La propagation des ondes des microstructures
- Les flambements des microstructures.

Annexes

On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams with porosities

Lemya Hanifi Hachemi Amar^{*1,2}, Abdelhakim Kaci^{1,3} and Abdelouahed Tounsi^{3,4,5}

¹Faculté de Technologie, Département de Génie Civil et Hydraulique, Université Dr Tahar Moulay, BP 138 Cité En-Nasr 20000 Saida, Algérie

²Laboratoire des Ressources Hydriques et Environnement, Université Dr Tahar Moulay, BP 138 Cité En-Nasr 20000 Saida, Algérie

³Material and Hydrology Laboratory, Faculty of Technology, Civil Engineering Department, University of Sidi Bel Abbes, Algeria

⁴Department of Civil and Environmental Engineering, King Fahd University of Petroleum & Minerals, 31261 Dhahran, Eastern Province, Saudi Arabia

⁵Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-échelle, Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Département de Physique, Université de Sidi Bel Abbés, Algeria

(Received March 1, 2017, Revised May 23, 2017, Accepted May 25, 2017)

Abstract. In this work, a new hyperbolic shear deformation beam theory is proposed based on a modified couple stress theory (MCST) to investigate the bending and free vibration responses of functionally graded (FG) micro beam made of porous material. This non-classical micro-beam model introduces the material length scale coefficient which can capture the size influence. The non-classical beam model reduces to the classical beam model when the material length scale coefficient is set to zero. The mechanical material properties of the FG micro-beam are assumed to vary in the thickness direction and are estimated through the classical rule of mixture which is modified to approximate the porous material properties with even and uneven distributions of porosities phases. Effects of several important parameters such as power-law exponents, porosity distributions, porosity volume fractions, the material length scale parameter and slenderness ratios on bending and dynamic responses of FG micro-beams are investigated and discussed in detail. It is concluded that these effects play significant role in the mechanical behavior of porous FG micro-beams.

Keywords: shear deformation theory; bending; vibration; micro beam; porosity; functionally graded material

1. Introduction

Functionally graded materials (FGMs) are inhomogeneous composites presenting a smooth and continuous variations in both compositional profile and material characteristics that allow them to be employed in a wide range of applications in many engineering devices (Shahrjerdi *et al.* 2011, Ait Amar Meziane *et al.* 2014, Kar and Panda 2015, Akbaş 2015, Houari *et al.* 2016, Bellifa *et al.* 2017a, Ait Atmane *et al.* 2017, Menasria *et al.* 2017, Zaoui *et al.* 2017, Abualnour *et al.* 2018). Using FGMs lead to uniform stress variation in the structures and overcome the problems such as jump in stress components between layers, interfacial debonding, matrix cracking, etc. In the last decade, the trend of employing beams and plates made of FGMs for engineering structures has considerably increased. Consequently, understanding the behavior of structures fabricated by porous FGMs under a variety of mechanical and thermal loadings is very important for their accurate design.

Many studies have been proposed by researchers on the bending and vibration response of functionally graded (FG) beams (Sankar 2001, Ying *et al.* 2008, Xiang and Yang 2008, Kapuria *et al.* 2008, Li 2008, Prakash *et al.* 2009,

Jomehzadeh *et al.* 2009, Ould Larbi *et al.* 2013). Sankar (2001) proposed an elasticity solution for FG beams. Two-dimensional elasticity solution of an FG beam with simply supported edges is studied by Ying *et al.* (2008) and natural frequencies and mode shapes are presented by employing state space method. Xiang and Yang (2008) investigated free and forced vibration of a laminated FG beam of variable thickness under thermally induced initial stresses. The influence of various boundary conditions was examined and beam was considered to be subjected to one-dimensional steady heat conduction in the thickness direction before undergoing dynamic deformation. Kapuria *et al.* (2008) discussed the vibration behavior of laminated FG beams and results were compared with experimental results. Li (2008) presented a novel unified formulation for investigating the bending and vibration response of FG beams including rotary inertia and shear deformation. All of the reviewed studies are based on the classical theory of elasticity which has acceptable predictions for bending and vibration behavior of macro-scaled structures. According to the classical theory of elasticity, anticipated mechanical responses are absolutely independent of the structure size when they are stated in proper dimensionless forms.

FGMs are widely employed in micro- and nano-structures such as thin films in the form of shape memory alloys (Craciunescu and Wuttig 2003, Fu *et al.* 2003), micro- and nano-electromechanical systems (MEMS and NEMS) (Fu *et al.* 2004, Witvrouw and Mehta 2005, Lee *et*

*Corresponding author, Ph.D.
E-mail: lamiacci@hotmail.com

et al. 2006), atomic force microscopes (AFMs) (Rahaeifard *et al.* 2009) and also FG nanostructures (Janghorbana and Zareb 2011, Belkorissat *et al.* 2015, Zemri *et al.* 2015, Karami and Janghorban 2016, Ahouel *et al.* 2016, Barati and Shahverdi 2016, Bounouara *et al.* 2016, Mouffoki *et al.* 2017, Besseghier *et al.* 2017, Bouafia *et al.* 2017, Karami *et al.* 2017a, b). Beams employed in MEMS, NEMS and AFMs, have the thickness in the order of microns and sub-microns. The size-dependent bending and dynamic response in micro scales are experimentally checked. For example in the micro-torsion test of thin copper wires, Fleck *et al.* (1992) demonstrated that decrease of wires diameter results in a noteworthy enhancement of the torsional hardening. Stolken and Evans (1998) indicated a considerable increase of plastic work hardening induced by the decrease of beam thickness in the micro bending test of thin nickel beams. Also, size-dependent behaviors are shown in some kinds of polymers. For instance, during micro bending tests of beams fabricated from epoxy polymers, Lam *et al.* (1999) observed a notable enhancement of bending rigidity induced by the beam thickness reduction. McFarland and Colton (2005) found an important difference between the stiffness values predicted by the classical beam theory and the stiffness values determined during a bending test of polypropylene micro-cantilever. According to the previous experimental outcomes, it can be concluded that size-dependent behavior is an inherent property of materials which appears for a beam when the characteristic size such as thickness or diameter is close to the internal material length scale parameter (Kong *et al.* 2008).

In 1960s some scientific authors proposed the couple stress elasticity theory (Mindlin 1994, Mindlin and Tiersten 1962, Toupin 1962). In the constitutive equation of this theory, we find in addition to the two classical Lamé constants, two higher-order material length scale parameters. Zhou and Li (2001) used this theory to study the bending and dynamic behavior of a micro-bar in torsional loading. Kang and Xi (2007) investigated the resonant frequencies of a micro-beam and indicated that these frequencies are size-dependent.

To reduce the problems encountered in determining length scale parameters of materials by experiments, Yang *et al.* (2002) used the modified couple stress theory, which in its constitutive equation only one material length scale parameter appears. Employing the modified couple stress theory, Park and Gao (2006) examined the static behavior of an Euler-Bernoulli beam and discussed the outcomes of an epoxy polymeric beam bending test. Kong *et al.* (2008) presented the governing equation, initial and boundary conditions of an Euler-Bernoulli beam via the modified coupled stress theory and the Hamilton principle. They showed that the natural frequencies of the beam are size-dependent. Also, the difference between the natural frequencies computed by the classical beam theory and those obtained by the modified couple stress theory is considerable when the beam property size is comparable to the internal material length scale parameter.

Because of the vast applications of functionally graded materials in MEMS and NEMS, and also the fact that the classical continuum theory is unable to predict size-

dependent mechanical responses of microstructures, the use of the non-classical theory of elasticity to the microstructures made of FGMs seems to have great merits. Recently, Lü *et al.* (2009a) developed a generalized refined theory introducing surface effects in order to study the size-dependent elastic response of FGM ultra-thin films. Lü *et al.* (2009b) also assessed size-dependent elastic mechanical responses of nano-scaled FGM films by employing the Kirchhoff hypothesis and the continuum theory of surface elasticity. Not only FGM thin films but also FGM microbeams are often used in MEMS and NEMS. More recently, Al-Basyouni *et al.* (2015) proposed a novel unified beam formulation and a modified couple stress theory (MCST) that considers a variable length scale parameter in conjunction with the neutral axis concept to study bending and dynamic behaviors of FG micro beam. Thus, a study on the size-dependent mechanical response of a micro-beam made of FGMs by employing an appropriate non-classical continuum theory capable of capturing small scale effects seems to be crucial.

With the rapid advancement in technology of structure components, structures with graded porosity can be considered as one of the latest developments in FGMs. The structures consider pores into microstructures by taking the local density into account. Moreover, a great opportunity in a wide range of engineering applications comes into result. Researchers have their eyes on development in preparation techniques of FGMs such as powder metallurgy, vapor deposition, self-propagation, centrifugal casting, and magnetic separation (Khor and Gu 2000, Seifried *et al.* 2001, Watanabe *et al.* 2001, Peng *et al.* 2007, Song *et al.* 2007). These techniques have some disadvantages such as high costs and complexity of the method. One of the simple and suitable ways to fabricate FGM is sintering process. During this process, because of the big difference in solidification between the material constituents, however, porosities or micro voids through material can be produced regularly (Zhu *et al.* 2001). A thorough study has been carried out on porosities appearing inside FGM samples fabricated by a multistep sequential infiltration method (Wattanasakulpong *et al.* 2012). Porosity may be modify the elastic and mechanical properties. Based on this information about porosities in FGMs, it is important to consider the porosity influence when designing FGM structures. However, researches on the mechanical response of porous FG structures, are still limited in number. The wave propagation of an infinite FG plate having porosities has been studied by Ait Yahia *et al.* (2015) using various simple higher-order shear deformation theories. Ait Atmane *et al.* (2015) presented a computational shear displacement model for vibrational analysis of FG beams with porosities. Wattanasakulpong and Ungbhakorn (2014) examined linear and nonlinear vibrations responses of porous Euler FG beams with elastically restrained ends. Material properties of FG beam have been described by a modified rule of mixture. Ebrahimi and Mokhtari (2015) investigated transverse vibration behavior of rotating Timoshenko FG beams with porosities. DTM was used to solve the equations of motion. It was demonstrated that porosity volume fractions play a considerable role in vibrations of

porous FG beams. Moreover, Wattanasakulpong and Chaikittiratana (2015) discussed flexural vibration of porous FG beams via Timoshenko beam theory. Chebyshev collection technique was employed for solving equations. They expressed the porosities yield reduction in the mass and strength of FG beams. Ebrahimi and Zia (2015) studied the large amplitude nonlinear dynamic of porous FG Timoshenko beams. Galerkin and multiple scales techniques were used to solve motion equations. Ait Atmane *et al.* (2016) proposed an efficient beam theory to investigate static, dynamic, and buckling behavior of porous FG beams on elastic foundations. Most recently, Ebrahimi *et al.* (2016) investigated the dynamic response of porous FG Euler beams under thermal loading.

It should be signaled that in, the abovementioned work, there is no study on porous FG micro-beam. So, in the present work, a modified couple stress theory is proposed to investigate the static and dynamic behaviors of porous FG micro-beams on the basis on a hyperbolic shear deformation beam theory. The micro-scale beam model includes the material length scale parameter which can capture the size influence. The material properties of the FG micro-beams including the length scale parameter are supposed to vary in the thickness direction according to power-law distribution which is modified to approximate the porous material properties with even and uneven distributions of porosities phases. An analytical solution is employed to solve the governing equations derived from Hamilton’s principle. Several numerical and illustrative results are presented to indicate the influences of the material length scale parameter, gradient index, and porosity parameters on the static and dynamic responses of porous FG micro-beams

2. Theory and formulation

2.1 Modified couple stress theory

The strain energy, U can be expressed using the modified couple stress theory (Yang *et al.* 2002) by

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

Where σ is the stress tensor, ε is the strain tensor, m is the deviatoric part of the couple stress tensor, and χ is the symmetric curvature .these tensors are given by

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

where u_i is the displacement vector, and θ is the rotation vector that can be defined as

$$\theta = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (4)$$

where e_{ijk} is the permutation symbol.

2.2 Kinematic relations and constitutive relations

The displacement field of the conventional HSDT is given as follows

$$u(x, z, t) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (5a)$$

$$v(x, z, t) = 0 \quad (5b)$$

$$w(x, z, t) = w_b(x, t) + w_s(x, t) \quad (5c)$$

where u_0 ; w_b ; w_s , are three unknown displacements of the mid-plane of the plate, such as w_b is the bending part and w_s is the shear one.

$f(z)$ represents shape function defining the variation of the transverse shear strains and stresses across the thickness.

In this article, the shape function is considered given by Nguyen (2015) as

$$f(z) = z - \sinh^{-1} \left(\frac{3z}{h} \right) + \frac{6z}{h\sqrt{13}} \quad \text{and} \quad (6)$$

$$g(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz}$$

The nonzero strains of the present refined beam theory are presented as

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = 2g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$$

In addition, Eqs. (5) and (4),the components of the rotation vector are obtained as

$$\theta_y = -\frac{\partial w_b}{\partial x} - \frac{1}{2} \psi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (8)$$

$$\theta_x = \theta_z = 0$$

With, $\psi(z)=1+f'(z)$

Substituting Eq. (8) into Eq. (3), the components of the curvature tensor take the form

$$\chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \psi(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}$$

$$\chi_{yz} = -\frac{1}{4} f''(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (9)$$

$$\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{xz} = 0$$

2.3 Constitutive relations

Consider a FG plate made of two constituent functionally graded materials, the material properties of the beam such as Young’s modulus E , masse density ρ and the length scale parameter l are considered to change continuously across the thickness according to a power law distribution. The effective material properties of FG beams with two kinds of porosity distributions which are distributed identically in two phases of ceramic and metal can be expressed by using the modified rule of mixtures as

(Ait Yahia *et al.* 2015, Wattanasakulpong and Ungbhakorn 2014, Benferhat *et al.* 2016)

$$p = p_c \left(v_c - \frac{\alpha}{2} \right) + p_m \left(v_m - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (10)$$

Where α is the volume fraction of porosity ($\alpha \ll 1$), for perfect FGM, α is set to zero, P_c and P_m are the material properties of ceramic and metal and v_c and v_m are the volume fraction of ceramic and metal separately; the compositions are represented in relation to

$$v_c + v_m = 1 \quad (11)$$

In this project, imperfect FGM has been investigated with two types of porosity distributions (even and uneven) through the micro-beam thickness due to defect during fabrication.

For the even distribution of porosities FGM-I, the effective material properties are determined as follows

$$E(z) = (E_c - E_m)v_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \quad (12a)$$

$$I(z) = (I_c - I_m)v_c + I_m - \frac{\alpha}{2}(I_c + I_m) \quad (12b)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)v_c + \rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \quad (12c)$$

Where $v_c = (0.5 + z/h)^p$ is the volume fraction of ceramic.

For FGM-II defined as uneven porosities the effective material properties are replaced by following form (Wattanasakulpong and Ungbhakorn 2014)

$$E(z) = (E_c - E_m)v_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (13a)$$

$$I(z) = (I_c - I_m)v_c + I_m - \frac{\alpha}{2}(I_c + I_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (13b)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)v_c + \rho_m - \frac{\alpha}{2}(\rho_c + \rho_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad (13c)$$

The constitutive relations can be written as

$$m_{ij} = 2\mu(z)[I(z)]^2 \chi_{ij} \quad (14a)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(z)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(z)\varepsilon_{ij} \quad (14b)$$

Where δ_{ij} is the Kronecker delta, l is the material length scale parameter which reflects the effect of couple stress, λ and μ are Lamé's constants given by (Al-Basyouni *et al.* 2015)

$$\lambda(z) = \frac{E(z)\nu(z)}{[1+\nu(z)][1-2\nu(z)]} \quad \text{and} \quad \mu(z) = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]} \quad (15)$$

2.4. Equations of motion

Hamilton's principle is employed in this work to determine the equations of motion. The principle can be expressed in analytical form as (Mahi *et al.* 2015, Attia *et al.* 2015, Adda Bedia *et al.* 2015, Bellifa *et al.* 2016,

Boukhari *et al.* 2016, Meksi *et al.* 2017, Zidi *et al.* 2017)

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (16)$$

Where δU is the virtual strain energy, δV is the virtual work done by external loads, and δK is the virtual kinetic energy. The virtual strain energy is expressed by (see Eq. (1))

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + m_{ij} \delta \chi_{ij}) dz dx \\ &+ \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} \\ &+ 2m_{xy} \delta \chi_{xy} + 2m_{yz} \delta \chi_{yz}) dz dx \\ &= \int_0^L \left(N \frac{d\delta u_0}{dx} - (M_b + Y_1) \frac{d^2 \delta w_b}{dx^2} \right. \\ &\quad \left. - \left(M_s + \frac{1}{2} Y_1 + \frac{1}{2} Y_2 \right) \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(Q - \frac{1}{2} Y_3 \right) \frac{d\delta w_s}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (17)$$

Where L is the length of the micro-scale beam and the following stress resultants are expressed as

$$(N, M_b, M_s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_x dz \quad (18a)$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} g \tau_{xz} dz \quad (18b)$$

$$(Y_1, Y_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, f) m_{xy} dz, \quad Y_3 = \int_{-h/2}^{h/2} f'' m_{yz} dz \quad (18c)$$

The variation of the work done by the external applied forces can be expressed as

$$\delta V = - \int_0^L q \delta (w_b + w_s) dx \quad (19)$$

Where q is the transverse load.

The variation of kinetic energy is expressed as

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) [\dot{u}_x \delta \dot{u}_x + \dot{u}_y \delta \dot{u}_y] dz dx \\ &= \int_0^L \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + (\dot{w}_b + \dot{w}_s) (\delta \dot{w}_b + \delta \dot{w}_s)] \right. \\ &\quad \left. - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} + \frac{d\dot{w}_b}{dx} \delta \dot{u}_0 \right) \right. \\ &\quad \left. + I_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) - J_1 \left(\dot{u} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \delta \dot{u} \right) \right. \\ &\quad \left. + K_2 \left(\frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} \right) \right. \\ &\quad \left. + J_2 \left(\frac{d\dot{w}_b}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_s}{dx} + \frac{d\dot{w}_s}{dx} \frac{d\delta \dot{w}_b}{dx} \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (20)$$

Where dot-superscript convention denotes the differentiation with respect to the time variable t ; $\rho(z)$ is the mass density; and $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$ are the mass inertias defined as

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g) \rho(z) dz \quad (21)$$

Substituting Eqs. (17), (19) and (20) into Eq. (16) and integrating by parts, and collecting the coefficients of $(\delta u_0, \delta w_b, \delta w_s)$, the following equations of motion are obtained

$$\delta u_0 : \frac{dN}{dx} = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & \frac{d^2 M_b}{dx^2} + \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + q \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} \\ & - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (22b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : & \frac{d^2 M_s}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y_2}{dx^2} \\ & - \frac{1}{2} \frac{dY_3}{dx} + \frac{dQ}{dx} + q \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} \\ & - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (22c)$$

2.5 Equations of motion in terms of displacements

By employing Eqs. (18) and (22), the equations of motion in terms of the displacements are obtained as

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B^s_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} \\ & = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{d\ddot{w}_b}{dx} - J_1 \frac{d\ddot{w}_s}{dx} \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & -(D_{11} + A_{13}) \frac{d^4 w_b}{dx^4} \\ & - \left(D^s_{11} + \frac{1}{2} (A_{13} + B_{13}) \right) \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + I_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} \\ & - I_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (23b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : & B^s_{11} \frac{d^3 u_0}{dx^3} - \left(D^s_{11} + \frac{1}{2} (A_{13} + B_{13}) \right) \frac{d^4 w_b}{dx^4} \\ & - \left(H^s_{11} + \frac{1}{4} (A_{13} + 2B_{13} + D_{13}) \right) \frac{d^4 w_s}{dx^4} \\ & + \left(A^s_{55} + \frac{1}{4} E_{13} \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q \\ & = I_0 (\ddot{w}_b + \ddot{w}_s) + J_1 \frac{d\ddot{u}_0}{dx} \\ & - J_2 \frac{d^2 \ddot{w}_b}{dx^2} - K_2 \frac{d^2 \ddot{w}_s}{dx^2} \end{aligned} \quad (23c)$$

Where A_{11}, D_{11} , etc., are the beam stiffness, defined by

$$\begin{aligned} (A_{11}, D_{11}, B^s_{11}, D^s_{11}, H^s_{11}) = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \frac{1-\nu(z)}{\nu(z)} \\ & \times [1, z^2, f, zf, f^2] dz \end{aligned} \quad (29)$$

and

$$\begin{aligned} (A_{13}, B_{13}, D_{13}, E_{13}) = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1, f', (f')^2, (f'')^2] \\ & \times \mu(z) l(z)^2 dz \\ A^s_{55} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(z) g(z)^2 dz \end{aligned} \quad (30)$$

$$A^s_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(z) g(z)^2 dz \quad (31)$$

2.6 Analytical solutions

In this section, analytical solutions for bending and free vibration are presented for a simply supported rectangular beam under transverse load q . It is noted that other boundary conditions can be treated (Bennai *et al.* 2015, Bellifa *et al.* 2017b). Based on the Navier approach, the solutions are assumed as

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_n \cos(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{bn} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \\ W_{sn} \sin(\lambda x) e^{i\omega t} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

where U_n, W_{bn} and W_{sn} are arbitrary parameters to be determined ω is the eigenfrequency associated with n th eigenmode, and $\lambda = n\pi/L$ the transverse load q is also expanded in Fourier series as

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin(\lambda x) \quad (33)$$

Where Q_n is the load amplitude calculated from

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin(\lambda x) dx \quad (34)$$

The coefficient Q_n are given below for some typical loads

$$Q_n = q_0, \quad n=1 \text{ for sinusoidal load,} \quad (35a)$$

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi}, \quad n=1, 2, 3, \dots \text{ for point load } P \text{ at the} \quad (35b)$$

midspan,

Substituting the expansions of U_0, W_b, W_s and q from Eqs. (27) and (28) into the equations of motion Eq. (25), the analytical solutions can be determined from the following equations

$$\begin{bmatrix} s_{11} & 0 & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_n \\ W_{bn} \\ W_{sn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_n \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Table 1 Dimensionless transverse deflection of the FG micro-beam for point load, $l_m=15$, $h/l_m=2$, $b/h=1$

l_c/l_m	α	Beam theory	$L/h=10$				$L/h=100$			
			$k=0.3$	$k=1$	$k=3$	$k=10$	$k=0.3$	$k=1$	$k=3$	$k=10$
1/3	0	CBT	0.3207	0.4081	0.5201	0.6054	0.3207	0.4081	0.5201	0.6054
	0.1		0.3395	0.4454	0.5901	0.6948	0.3395	0.4454	0.5901	0.6948
	0.2		0.3585	0.4863	0.6759	0.8070	0.3585	0.4863	0.6759	0.8070
	FSDT	0	0.3302	0.4199	0.5376	0.6329	0.3208	0.4083	0.5203	0.6057
		0.1	0.3495	0.4581	0.6095	0.7269	0.3396	0.4455	0.5903	0.6951
		0.2	0.3690	0.4999	0.6975	0.8454	0.3586	0.4865	0.6762	0.8074
	IHSdT	0	0.3281	0.4169	0.5331	0.6233	0.3208	0.4082	0.5202	0.6056
		0.1	0.3474	0.4551	0.6051	0.7173	0.3396	0.4455	0.5903	0.6951
		0.2	0.3670	0.4970	0.6936	0.8371	0.3586	0.4864	0.6761	0.8074
1	0	CBT	0.1846	0.2649	0.3963	0.5380	0.1846	0.2649	0.3963	0.5380
	0.1		0.2006	0.2931	0.4481	0.6155	0.2006	0.2931	0.4481	0.6155
	0.2		0.2177	0.3242	0.5090	0.7080	0.2177	0.3242	0.5090	0.7080
	FSDT	0	0.1908	0.2736	0.4106	0.5631	0.1847	0.2651	0.3964	0.5383
		0.1	0.2071	0.3023	0.4639	0.6447	0.2007	0.2932	0.4483	0.6157
		0.2	0.2247	0.3342	0.5263	0.7425	0.2178	0.3243	0.5092	0.7083
	IHSdT	0	0.1877	0.2692	0.4032	0.5509	0.1847	0.2650	0.3963	0.5382
		0.1	0.2039	0.2977	0.4559	0.6312	0.2006	0.2931	0.4482	0.6157
		0.2	0.2213	0.3292	0.5178	0.7279	0.2177	0.3242	0.5091	0.7082
3/2	0	CBT	0.1203	0.1876	0.3123	0.4789	0.1203	0.1876	0.3123	0.4789
	0.1		0.1318	0.2081	0.3508	0.5445	0.1318	0.2081	0.3508	0.5445
	0.2		0.1443	0.2307	0.3945	0.6196	0.1443	0.2307	0.3945	0.6196
	FSDT	0	0.1252	0.1947	0.3247	0.5020	0.1204	0.1877	0.3124	0.4792
		0.1	0.1369	0.2157	0.3643	0.5712	0.1318	0.2081	0.3509	0.5448
		0.2	0.1498	0.2389	0.4093	0.6509	0.1444	0.2309	0.3947	0.6199
	IHSdT	0	0.1219	0.1899	0.3164	0.4883	0.1204	0.1876	0.3123	0.4790
		0.1	0.1335	0.2106	0.3552	0.5555	0.1318	0.2081	0.3508	0.5446
		0.2	0.1462	0.2335	0.3993	0.6329	0.1443	0.2308	0.3946	0.6198
2	0	CBT	0.0819	0.1356	0.2453	0.4200	0.0819	0.1357	0.2453	0.4200
	0.1		0.0900	0.1505	0.2736	0.4738	0.0900	0.1505	0.2736	0.4738
	0.2		0.0989	0.1669	0.3047	0.5329	0.0989	0.1669	0.3047	0.5328
	FSDT	0	0.0861	0.1418	0.2562	0.4412	0.0819	0.1357	0.2454	0.4203
		0.1	0.0944	0.1571	0.2854	0.4982	0.0901	0.1505	0.2737	0.4741
		0.2	0.1036	0.1739	0.3176	0.5611	0.0989	0.1669	0.3048	0.5332
	IHSdT	0	0.0829	0.1371	0.2477	0.4266	0.0819	0.1357	0.2453	0.4201
		0.1	0.0910	0.1519	0.2761	0.4812	0.0900	0.1505	0.2736	0.4739
		0.2	0.1000	0.1684	0.3073	0.5414	0.0989	0.1669	0.3047	0.5329
Classical theory	0	CBT	0.4081	0.5966	0.8295	0.9725	0.4081	0.5967	0.8295	0.9725
	0.1		0.4199	0.6289	0.9085	1.0655	0.4199	0.6289	0.9084	1.0655
	0.2		0.4319	0.6644	1.0059	1.1823	0.4319	0.6644	1.0059	1.1823
	FSDT	0	0.4203	0.6137	0.8568	1.0158	0.4083	0.5968	0.8298	0.9729
		0.1	0.4324	0.6469	0.9378	1.1144	0.4201	0.6292	0.9088	1.0660
		0.2	0.4448	0.6830	1.0377	1.2385	0.4321	0.6646	1.0063	1.1828
	IHSdT	0	0.4196	0.6133	0.8610	1.0259	0.4083	0.5968	0.8298	0.9730
		0.1	0.4318	0.6466	0.9441	1.1343	0.4201	0.6292	0.9088	1.0662
		0.2	0.4443	0.6831	1.0473	1.2813	0.4321	0.6646	1.0064	1.1834

Where

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= A_{11}\lambda^2, \quad s_{22} = (D_{11} + A_{13})\lambda^4, \\
 s_{13} &= -B^s_{11}\lambda^3, \quad s_{23} = \left(D^s_{11} + \frac{1}{2}(A_{13} + B_{13}) \right)\lambda^4, \\
 s_{33} &= \left(H^s_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(A_{13} + D_{13}) + B_{13} \right) \right)\lambda^4, \\
 &+ \left(A^s_{55} + \frac{1}{4}E_{13} \right)\lambda^2, \\
 m_{11} &= I_0, \quad m_{12} = -I_1\lambda, \quad m_{13} = -J_1\lambda, \\
 m_{22} &= I_0 + I_2\lambda^2, \quad m_{23} = I_0 + J_2\lambda^2, \\
 m_{33} &= I_0 + K_2\lambda^2
 \end{aligned} \tag{31}$$

Table 2 Dimensionless transverse deflection of the FG micro-beam for uniform load, $l_m=15, h/l_m=2, b/h=1$

l_c/l_m	α	Beam theory	$L/h=10$				$L/h=100$			
			$k=0.3$	$k=1$	$k=3$	$k=10$	$k=0.3$	$k=1$	$k=3$	$k=10$
1/3	0	CBT	0.2004	0.2551	0.3251	0.3784	0.2004	0.2551	0.3251	0.3784
	0.1		0.2122	0.2784	0.3688	0.4343	0.2122	0.2784	0.3688	0.4343
	0.2		0.2241	0.3039	0.4225	0.5044	0.2241	0.3039	0.4225	0.5044
	0	FSDT	0.2053	0.2612	0.3341	0.3926	0.2005	0.2551	0.3252	0.3785
	0.1		0.2173	0.2849	0.3788	0.4509	0.2122	0.2784	0.3689	0.4344
	0.2		0.2294	0.3109	0.4336	0.5242	0.2241	0.3040	0.4226	0.5046
	0	IHSdT	0.2043	0.2596	0.3318	0.3877	0.2005	0.2551	0.3251	0.3785
	0.1		0.2163	0.2834	0.3766	0.4460	0.2122	0.2784	0.3689	0.4344
	0.2		0.2284	0.3095	0.4316	0.5202	0.2241	0.3040	0.4226	0.5046
1	0	CBT	0.1154	0.1656	0.2477	0.3363	0.1154	0.1656	0.2477	0.3363
	0.1		0.1254	0.1832	0.2801	0.3847	0.1254	0.1832	0.2801	0.3847
	0.2		0.1361	0.2026	0.3181	0.4425	0.1361	0.2026	0.3181	0.4425
	0	FSDT	0.1186	0.1708	0.2551	0.3493	0.1154	0.1657	0.2477	0.3364
	0.1		0.1288	0.1879	0.2882	0.3998	0.1254	0.1832	0.2802	0.3848
	0.2		0.1397	0.2077	0.3271	0.4604	0.1361	0.2027	0.3182	0.4427
	0	IHSdT	0.1169	0.1678	0.2513	0.3430	0.1154	0.1656	0.2477	0.3363
	0.1		0.1271	0.1856	0.2842	0.3929	0.1254	0.1832	0.2801	0.3848
	0.2		0.1379	0.2052	0.3227	0.4530	0.1361	0.2026	0.3182	0.4426
3/2	0	CBT	0.0752	0.1172	0.1952	0.2993	0.0752	0.1172	0.1952	0.2993
	0.1		0.0824	0.1300	0.2192	0.3403	0.0824	0.1300	0.2192	0.3403
	0.2		0.0902	0.1442	0.2466	0.3873	0.0902	0.1442	0.2466	0.3873
	0	FSDT	0.0778	0.1209	0.2016	0.3114	0.0752	0.1173	0.1952	0.2995
	0.1		0.0851	0.1339	0.2263	0.3542	0.0824	0.1301	0.2193	0.3405
	0.2		0.0930	0.1484	0.2542	0.4035	0.0902	0.1442	0.2467	0.3874
	0	IHSdT	0.0761	0.1185	0.1973	0.3043	0.0752	0.1172	0.1952	0.2994
	0.1		0.0833	0.1314	0.2216	0.3461	0.0824	0.1300	0.2193	0.3404
	0.2		0.0912	0.1456	0.2491	0.3943	0.0902	0.1442	0.2466	0.3873
2	0	CBT	0.0512	0.0848	0.1533	0.2625	0.0512	0.0848	0.1539	0.2625
	0.1		0.0563	0.0941	0.1709	0.2961	0.0563	0.0941	0.1709	0.2961
	0.2		0.0618	0.1043	0.1904	0.3331	0.0618	0.1043	0.1904	0.3331
	0	FSDT	0.0534	0.0880	0.1590	0.2736	0.0512	0.0848	0.1534	0.2626
	0.1		0.0585	0.0975	0.1772	0.3088	0.0563	0.0941	0.1710	0.2963
	0.2		0.0642	0.1079	0.1972	0.3478	0.0619	0.1043	0.1905	0.3332
	0	IHSdT	0.0517	0.0855	0.1546	0.2659	0.0512	0.0848	0.1533	0.2626
	0.1		0.0568	0.0948	0.1723	0.3001	0.0563	0.0941	0.1709	0.2962
	0.2		0.0624	0.1051	0.1918	0.3376	0.0618	0.1043	0.1905	0.3331
Classical theory	0	CBT	0.2551	0.3729	0.5184	0.6078	0.2551	0.3729	0.5184	0.6078
	0.1		0.2625	0.3931	0.5678	0.6659	0.2625	0.3931	0.5678	0.6659
	0.2		0.2699	0.4152	0.6287	0.7389	0.2699	0.4152	0.6287	0.7389
	0	FSDT	0.2612	0.3815	0.5321	0.6295	0.2551	0.3729	0.5186	0.6080
	0.1		0.2687	0.4021	0.5825	0.6904	0.2625	0.3932	0.5679	0.6662
	0.2		0.2764	0.4246	0.6446	0.7671	0.2701	0.4153	0.6289	0.7392
	0	IHSdT	0.2609	0.3814	0.5345	0.6351	0.2551	0.3729	0.5186	0.6081
	0.1		0.2685	0.4021	0.5859	0.7011	0.2625	0.3932	0.5679	0.6663
	0.2		0.2762	0.4247	0.6498	0.7897	0.2701	0.4153	0.6289	0.7395

3. Numerical results and discussion

3.1 Verification studies

In this section, static bending and dynamic of FG micro-beam are proposed based on the modified couple stress theory and porosity distribution.

The FG micro-beams are composed of metal ($Al: E_m=70$

GPa, $\rho_m=2702 \text{ kg/m}^3, \nu_m=0.3$) and ceramic ($SiC: E_m=427$ GPa, $\rho_c=3100 \text{ kg/m}^3, \nu_m=0.17$) (Ansari *et al.* 2011).

The employed non-dimensional quantities are:

Non-dimensional transverse deflection:

$$\bar{w} = 100w \frac{E_m I}{PL^3} \text{ for point load}$$

$$\bar{w} = 100w \frac{E_m I}{q_0 L^4} \text{ for uniform load}$$

Table 3 Dimensionless fundamental frequency of the FG micro-beam, $l_m=15$, $h/l_m=2$, $b/h=1$

l_c/l_m	α	Beam theory	$L/h=10$				$L/h=100$			
			$k=0.3$	$k=1$	$k=3$	$k=10$	$k=0.3$	$k=1$	$k=3$	$k=10$
1/3	0	CBT	6.8537	6.1844	5.5717	5.2252	6.8818	6.2121	5.5998	5.2498
	0.1		6.8271	6.0727	5.3697	5.0105	6.8559	6.1009	5.3986	5.0357
	0.2		6.8179	5.9696	5.1579	4.7826	6.8475	5.9986	5.1878	4.8089
	0	FSDT	6.7726	6.1127	5.4969	5.1305	6.8819	6.2113	5.5989	5.2488
	0.1		6.7467	6.0035	5.2996	4.9179	6.8559	6.1013	5.3989	5.0358
	0.2		6.7378	5.9026	5.0926	4.6919	6.8474	5.9988	5.1882	4.8089
	0	IHSdT	6.7888	6.1295	5.5149	5.1619	6.8811	6.2115	5.5992	5.2491
	0.1		6.7618	6.0185	5.3139	4.9439	6.8553	6.1004	5.3980	5.0350
	0.2		6.7518	5.9159	5.1031	4.7096	6.8469	5.9980	5.1873	4.8081
1	0	CBT	9.0328	7.6751	6.3832	5.5429	9.0699	7.7095	6.4155	5.5691
	0.1		8.8818	7.4865	6.1621	5.3235	8.9193	7.5214	6.1953	5.3504
	0.2		8.7497	7.3118	5.9437	5.1061	8.7876	7.3473	5.9782	5.1342
	0	FSDT	8.9127	7.5760	6.2914	5.4397	9.0716	7.7111	6.4165	5.5694
	0.1		8.7662	7.3926	6.0762	5.2228	8.9208	7.5228	6.1963	5.3506
	0.2		8.6377	7.2225	5.8636	5.0070	8.7890	7.3486	5.9792	5.1344
	0	IHSdT	8.9712	7.6247	6.3369	5.4882	9.0693	7.7090	6.4149	5.5685
	0.1		8.8213	7.4379	6.1179	5.2675	8.9186	7.5209	6.1948	5.3498
	0.2		8.6899	7.2649	5.9017	5.0469	8.7870	7.3468	5.9778	5.1336
3/2	0	CBT	11.1883	9.1220	7.1907	5.8749	11.2343	9.1630	7.2271	5.9026
	0.1		10.9577	8.8852	6.9647	5.6598	11.0039	8.9267	7.0023	5.6883
	0.2		10.7465	8.6668	6.7514	5.4581	10.7932	8.7090	6.7907	5.4882
	0	FSDT	11.0087	8.9853	7.0777	5.7619	11.2371	9.1653	7.2285	5.9031
	0.1		10.7878	8.7569	6.8587	5.5492	11.0067	8.9289	7.0037	5.6888
	0.2		10.5850	8.5460	6.6518	5.3487	10.7957	8.7111	6.7920	5.4885
	0	IHSdT	11.1261	9.0744	7.1519	5.8274	11.2337	9.1625	7.2267	5.9021
	0.1		10.8978	8.8402	6.9286	5.6125	11.0033	8.9262	7.0019	5.6878
	0.2		10.6886	8.6243	6.7179	5.4097	10.7926	8.7086	6.7903	5.4876
2	0	CBT	13.5599	10.7269	8.1133	6.2732	13.6157	10.7751	8.1534	6.3028
	0.1		13.2593	10.4474	7.8866	6.0673	13.3153	10.4963	7.9292	6.0979
	0.2		12.9791	10.1913	7.6821	5.8855	13.0355	10.2410	7.7269	5.9180
	0	FSDT	13.2865	10.5339	7.9702	6.1470	13.6192	10.7780	8.1562	6.3035
	0.1		13.0036	10.2676	7.7517	5.9433	13.3188	10.4991	7.9311	6.0986
	0.2		12.7392	10.0229	7.5544	5.7619	13.0389	10.2438	7.7287	5.9186
	0	IHSdT	13.4945	10.6807	8.0804	6.2328	13.6150	10.7746	8.1539	6.3023
	0.1		13.1973	10.4046	7.8568	6.0281	13.3146	10.4958	7.9289	6.0975
	0.2		12.9202	10.1517	7.6552	5.8468	13.0348	10.2406	7.7266	5.9176
Classical theory	0	CBT	6.0755	5.1151	4.4118	4.1229	6.1004	5.1380	4.4341	4.1423
	0.1		6.1387	5.1101	4.3278	4.0461	6.1645	5.1339	4.3511	4.0664
	0.2		6.2110	5.1075	4.2281	3.9513	6.2379	5.1323	4.2525	3.9730
	0	FSDT	6.0037	5.0566	4.3544	4.0507	6.0997	5.1374	4.4335	4.1415
	0.1		6.0663	5.0525	4.2726	3.9733	6.1638	5.1333	4.3505	4.0657
	0.2		6.1378	5.0505	4.1754	3.8778	6.2372	5.1317	4.2520	3.9723
	0	IHSdT	6.0066	5.0572	4.3446	4.0325	6.0997	5.1374	4.4334	4.1413
	0.1		6.0688	5.0524	4.2599	3.9427	6.1639	5.1333	4.3504	4.0653
	0.2		6.1399	5.0495	4.1587	3.8217	6.2372	5.1317	4.2518	3.9716

Non-dimensional stresses:

$$(\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xz}) = \left(\frac{\sigma_x A}{P}, \frac{\tau_{xz} A}{P} \right) \text{ for point load}$$

Non-dimensional frequency:

$$\varpi = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$$

Results tabulated in Tables 1 and 2, show the non-

dimensionless deflections of the porous FG micro-beam (FGM-I) for the point load and uniform load respectively. It can be seen increasing the power law index leads to an increase of the non-dimensional deflection for two different values of the aspect ratio ($L/h=10, 100$). The same remark is observed for the porosity parameter (α). Consequently, these two parameters make the micro beam more flexible. The ratio (l_c/l_m) represents the degree of length scale

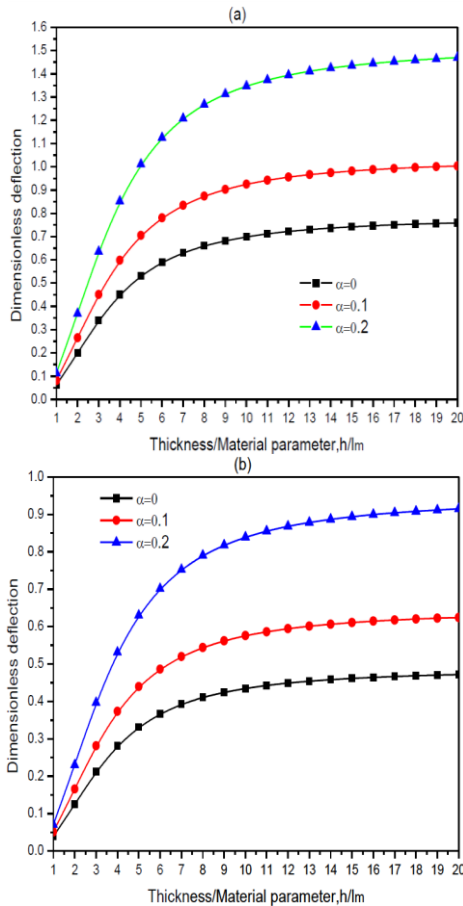


Fig. 1 Variation of the dimensionless transverse deflections of the FG micro-beam for different values of the parameter porosity $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu m$, $b/h=1$, $k=2$: (a) point load, (b) uniform load

parameter variation within on the beam. It is observed that increase of (l_c/l_m) leads to a reduction deflection and the results are significantly different to the case where the length scale parameter is considered to be a constant ($l_c/l_m=1$). This remark is also a confirmation that the variation of the length scale parameter needs to be taken into account in to investigation of FG micro-beam. In addition, it can be concluded that the consideration of the variation of ratio (l_c/l_m) make the micro beam more stiffer when increasing (l_c/l_m) . It is found that the CBT underestimates the velour of deflections because this theory neglects the shear deformation effect. Also the introduction of the length scale parameter leads to increase of deflection comparatively to a classical theory.

In Table 3, the dimensionless frequencies corresponding to the transverse deformation mode calculated for various values of the gradient index (k), the length scale parameter (l_c/l_m) and the porosity parameter (α) are presented. It can be observed that the influence of k , l_c/l_m and α are significant. Increasing the porosity parameter leads to a reduction of the non-dimensional frequencies. For each value of the gradient index k , the non-dimensional frequency diminishes considerably as the length scale parameter l_c/l_m is reduced.

In Fig. 1, the non-dimensional transverse deflection are presented versus the ratio (h/l_m) for different porosity

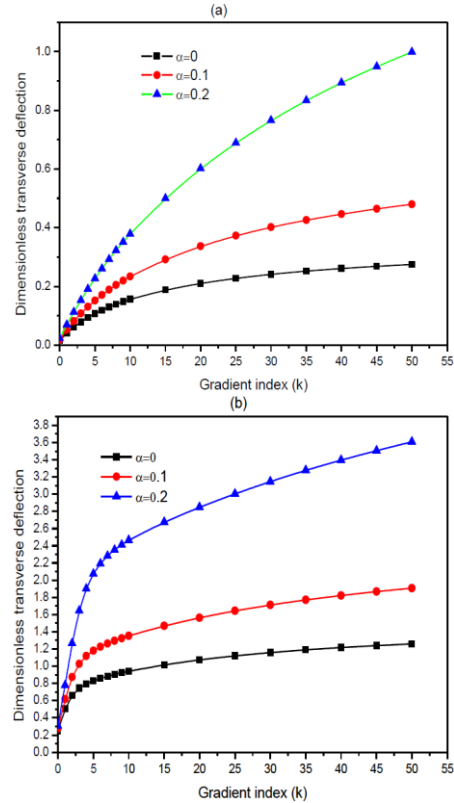


Fig. 2 Variation of the dimensionless transverse deflections of the FG micro-beam subjected to a point load exponent for $L/h=10$, $l_m=15 \mu m$, $l_c/l_m=2$, (a) $h/l_m=1$, (b) $h/l_m=8$

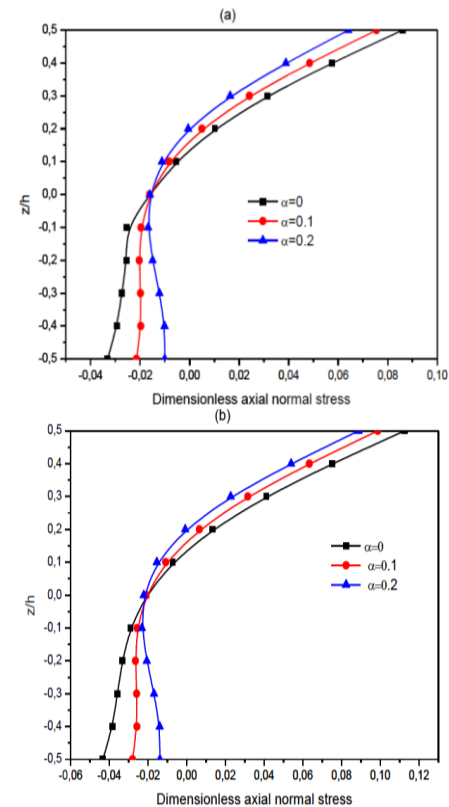


Fig. 3 Variation of the normal stress across the thickness of the FG micro-beam for different values of the parameter porosity with $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu m$, $b=2h$, $k=2$ (a) $h/l_m=1$ (b) $h/l_m=8$: (a) point load, (b) uniform load

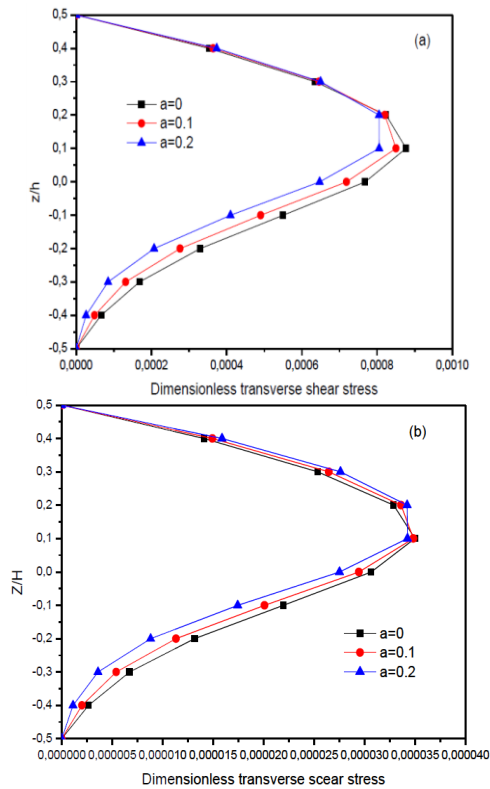


Fig. 4 Variation of the transverse stress across the thickness of the FG micro-beam under point load for different values of the parameter porosity with $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu\text{m}$, $b=2h$, $k=2$ (a) $h/l_m=1$, (b) $h/l_m=8$

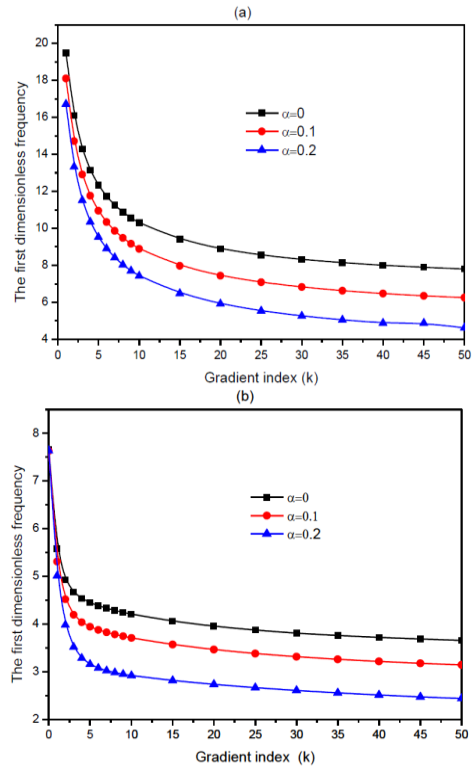


Fig. 6 Variation of the first dimensionless frequency of the FG micro-beam for different values of the parameter porosity versus the volume fraction exponent for $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, (a) $h/l_m=1$, (b) $h/l_m=8$

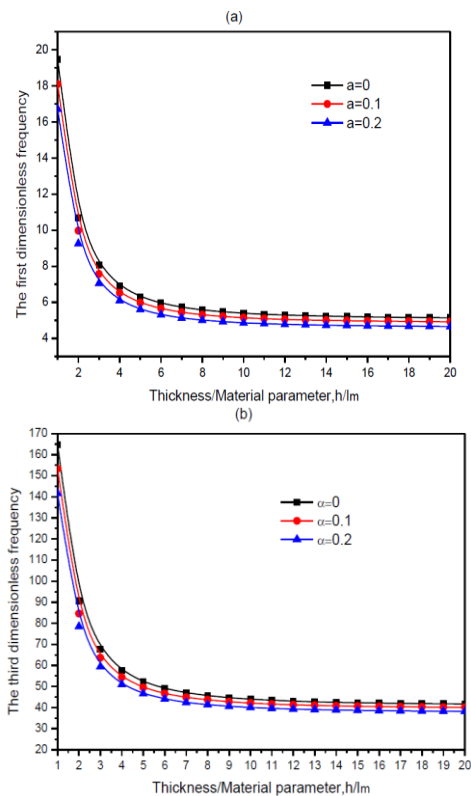


Fig. 5 Variation of the dimensionless frequencies the thickness of the FG micro-beam for different values of the parameter porosity with $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu\text{m}$, $b/h=1$, $k=1$ (a) the first frequency, (b) the third frequency

parameter (α) with considering $L/h=10$, $k=2$ and the length scale parameter $l_c/l_m=2$. It can be found that decreasing the porosity parameter leads to a reduction of deflection for both the point load and uniform load. In addition, increasing the ratio h/l_m makes the micro-beam more flexible.

Fig. 2 presents the variation of the non-dimensional deflection with the gradient index k for different porosity parameter (α) and with considering two different values of h/l_m . It can be observed that the increase of the gradient index leads to an increase of the deflection. The introduction of the porosity parameter makes the micro-beam more flexible.

Fig. 3 presents the normal stress of the FG micro-beam with $L/h=10$ across the thickness for different values of the porosity parameter (α) and with considering $h/l_m=1$ and 8. It can be seen that the normal stress $\bar{\sigma}_x(L/2, z)$ decreases as the parameter porosity is increased from 0 to 0.2.

Fig. 4 presents the variation of the transverse stress across the thickness of FG micro-beam for different values of porosity parameter (α) and for $h/l_m=1$ and 8. It can be observed that the transverse stress increases with decreasing the porosity parameter (α).

In Fig. 5, both the first and the third frequency are plotted versus the ratio h/l_m for different porosity parameter (α) with considering $L/h=10$ and $k=1$. It can be shown that the reduction of the porosity parameter (α) leads to increases of dimensionless frequencies.

Fig 6 illustrates the variation of non-dimensional first frequency against the gradient index (k) and the porosity

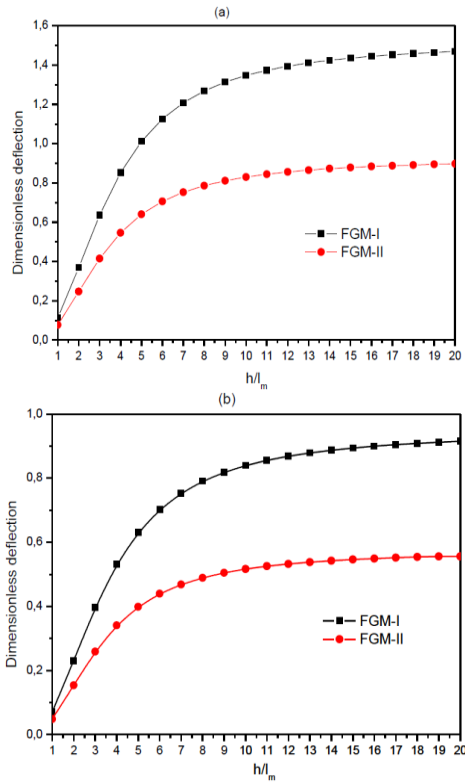


Fig. 7 Variation of the dimensionless transverse deflection of the FG micro-beam for two porosity distribution (FGM-I,FGM-II) with $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu\text{m}$, $b/h=1$, $k=2$, $\alpha=0.2$, (a) point load, (b) uniform load

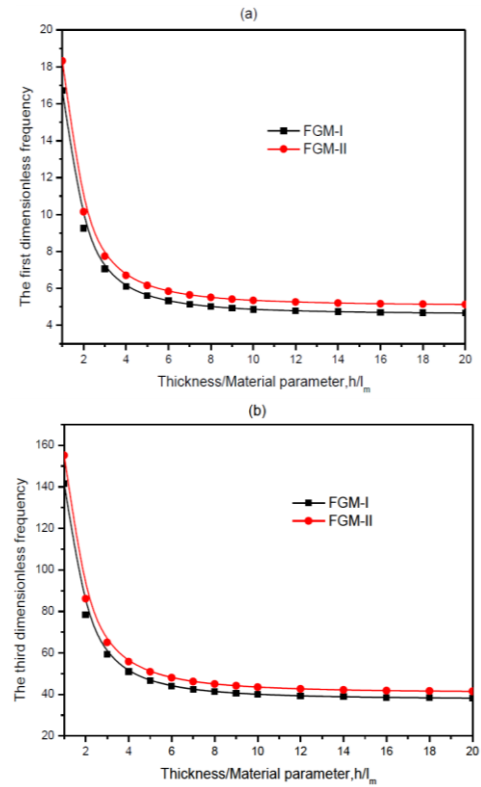


Fig. 9 Variation of the dimensionless frequencies of the FG micro-beam for two porosity distribution (FGM-I,FGM-II) with $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu\text{m}$, $b/h=1$, $k=1$, $\alpha=0.2$ (a) the first frequency.(b)the third frequency

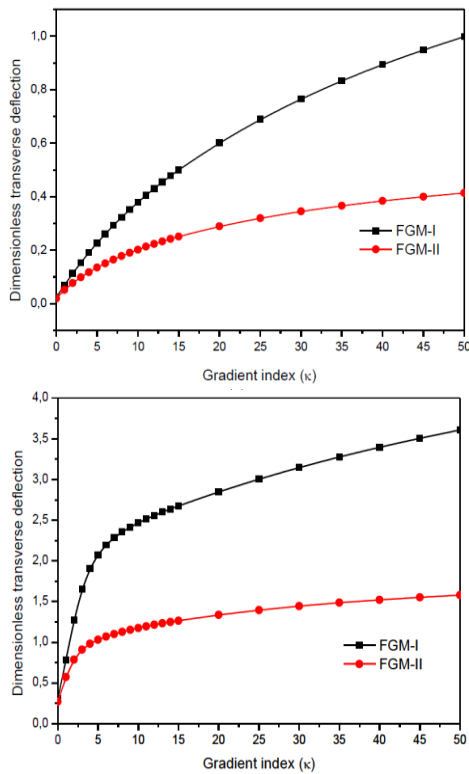


Fig. 8 Variation of the dimensionless transverse deflection of the FG micro-beam subjected to a point load with the volume fraction exponent for two porosity distribution with $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu\text{m}$, $b/h=1$, $k=2$, $\alpha=0.2$, (a) $h/l_m=1$, (b) $h/l_m=8$

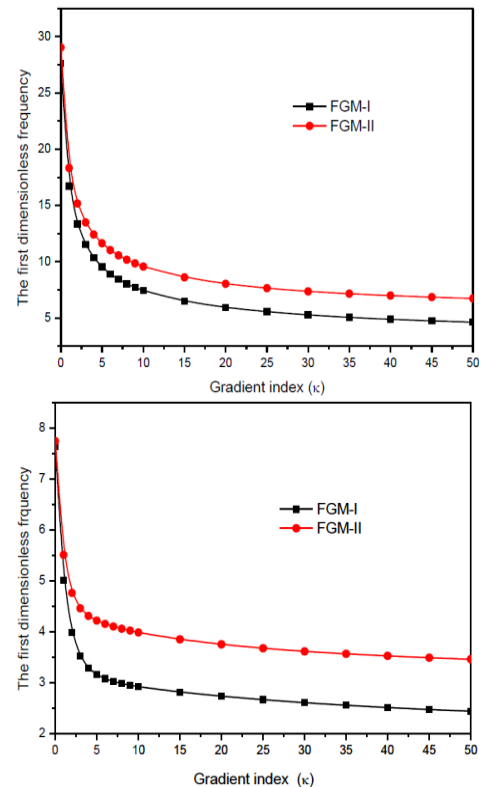


Fig. 10 Variation of the first dimensionless frequencies of the FG micro-beam versus the volume fraction exponent for two porosity distribution (FGM-I,FGM-II) with $l_c/l_m=2$, $L/h=10$, $l_m=15 \mu\text{m}$, $b/h=1$, $k=1$, $\alpha=0.2$ (a) $h/l_m=1$ (b) $h/l_m=8$

parameter (α) for two different values of the non-dimensional material parameter h/l_m . It can be seen that the increase of gradient index leads to a reduction of the frequency. In addition, it can be shown that the increase of the porosity parameter (α) makes the micro-beams more flexible. The comparison between the values of the deflection for FG micro-beams with even and uneven porosity distribution is shown in Figs. 7 and 8. It can be observed that the deflections of the even porosity are higher and than uneven ones.

Figs. 9 and 10 present a comparison between the values of the frequencies for FG micro-beams with even and uneven porosity distribution. It can be remarked that the frequency of the even porosity are lower and than uneven ones.

5. Conclusions

In this research, a novel size -dependent FG porous micro-beams with two porosity distributions is presented for bending and vibration analysis. The equations of motion are obtained based on a new hyperbolic shear deformation theory and a modified couple stress theory. The present formulation considers a variable length scale parameter. The findings of this study demonstrated that the inclusion of couple stress influence and the porosity parameter makes a micro-beam stiffer and thus leads to a decrease of the deflection and an increase of the frequency. It is concluded that various factors such as porosity parameter, porosity distribution and gradient index have a considerable effect on the non-dimensional deflection and frequency of FG micro-beams with porosity which emphasizes the importance of inspected porosity volume fraction influence. An improvement of present formulation will be included in the future investigation to consider the thickness stretching effect by using quasi-3D shear deformation models (Bessaim *et al.* 2013, Bousahla *et al.* 2014, Bourada *et al.* 2015, Belabed *et al.* 2014, Fekrar *et al.* 2014, Hebali *et al.* 2014, Larbi Chaht *et al.* 2014, Bennai *et al.* 2015, Meradjah *et al.* 2015, Hamidi *et al.* 2015, Draiche *et al.* 2016, Bennoun *et al.* 2016, Benahmed *et al.* 2017) and to include the thermo-mechanical effects (Bouderba *et al.* 2013, Tounsi *et al.* 2013, Zidi *et al.* 2014, Taibi *et al.* 2015, Beldjelili *et al.* 2016, Bouderba *et al.* 2016, Bousahla *et al.* 2016, Chikh *et al.* 2017, El-Haina *et al.* 2017, Fahsi *et al.* 2017).

References

Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2018), "A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates", *Compos. Struct.*, **184**, 688-697.

Adda Bedia, W., Benzair, A., Semmah, A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On the thermal buckling characteristics of armchair single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal continuum elasticity", *Brazil. J. Phys.*, **45**(2), 225-233.

Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A.

(2016) "Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept", *Steel Compos. Struct.*, **20**(5), 963-981.

Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16**(3), 293-318.

Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F. (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **13**(1), 71-84.

Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F. (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **13**(1), 71-84.

Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel Compos. Struct.*, **19**(2), 369-384.

Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech.*, **53**(6), 1143-1165.

Akbaş, Ş.D. (2015), "Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments", *Steel Compos. Struct.*, **19**(6), 1421-1447.

Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position", *Compos. Struct.*, **125**, 621-630.

Ansari, R., Gholami, R. and Sahmani, S. (2011), "Free vibration analysis of size-dependent functionally graded micro-beams based on the strain gradient Timoshenko", *Compos. Struct.*, **94**(1), 221-228.

Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel Compos. Struct.*, **18**(1), 187-212.

Barati, M.R. and Shahverdi, H. (2016), "A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions", *Struct. Eng. Mech.*, **60**(4), 707-727.

Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, **60**, 274-283.

Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Struct. Syst.*, **18**(4), 755-786.

Belkhorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model", *Steel Compos. Struct.*, **18**(4), 1063-1081.

Bellifa, H., Bakora, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017a), "An efficient and simple four variable refined plate theory for buckling analysis of functionally graded plates", *Steel Compos. Struct.*, **25**(3), 257-270.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017b), "A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams", *Struct. Eng. Mech.*, **62**(6), 695-702.

Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), "Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the

- concept the neutral surface position”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265-275.
- Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K. and Tounsi, A. (2017), “A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Geomech. Eng.*, **12**(1), 9-34.
- Benferhat, R., Hassaine Daouadji, T., Hadji, L. and Said Mansour, M. (2016), “Static analysis of the FGM plate with porosities”, *Steel Compos. Struct.*, **21**(1), 123-136.
- Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct.*, **19**(3), 521-546.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **23**(4), 423-431.
- Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A new higher order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **15**, 671-703.
- Bessegghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst.*, **19**(6), 601-614.
- Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M.S.A., Benzair, A. and Tounsi, A. (2017), “A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams”, *Smart Struct. Syst.*, **19**(2), 115-126.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013) “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct.*, **14**(1), 85-104.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, **58**(3), 397-422.
- Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **57**(5), 837-859.
- Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*, **20**(2), 227-249.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 409-423.
- Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion”, *Struct. Eng. Mech.*, **60**(2), 313-335.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(6), 1350082.
- Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), “Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT”, *Smart Struct. Syst.*, **19**(3), 289-297.
- Chong, A.C.M. and Lam, D.C.C. (1999), “Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers”, *J. Mater. Res.*, **14**(10), 4103-4110.
- Craciunescu, C.M., Wuttig, M. (2003), “New ferromagnetic and functionally grade shape memory alloys”, *J. Optoelectron. Adv. Mater.*, **5**(1), 139-146.
- Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates”, *Geomech. Eng.*, **11**(5), 671-690.
- Ebrahimi, F. and Mokhtari, M. (2015), “Transverse vibration analysis of rotating porous beam with functionally graded microstructure using the differential transform method”, *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **37**(4), 1435-1444.
- Ebrahimi, F. and Zia, M. (2015), “Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with porosities”, *Acta Astronautica*, **116**, 117-125.
- Ebrahimi, F., Ghasemi, F., Salari, E. (2016), “Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities”, *Meccanica*, **51**(1), 223-249.
- El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **63**(5), 585-595.
- Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Geomech. Eng.*, **13**(3), 385-410.
- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795-810.
- Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F. and Hutchinson, J.W. (1992), “Strain gradient plasticity: theory and experiment”, *J. Acta Metal. Mater.*, **42**(2), 475-487.
- Fu, Y.Q., Du, H.J. and Zhang, S. (2003), “Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films”, *J. Mater. Lett.*, **57**(20), 2995-2999.
- Fu, Y.Q., Du, H.J., Huang, W.M., Zhang, S. and Hu, M. (2004), “TiNi-based thin films in MEMS applications: a review”, *J. Sens. Actuators A*, **112**(2-3), 395-408.
- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(1), 235-253.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “New quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *J. Eng. Mech.*, ASCE, **140**(2), 374-383.
- Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A new simple three -unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, **22**(2), 257-276.
- Janghorbana, M. and Zareb, A. (2011), “Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes with variable thickness by differential quadrature method”, *Physica E: Low Dimens. Syst. Nanostruct.*, **43**(9), 1602-1604.
- Jomehzadeh, E., Saidi, A.R. and Atashipour, S.R. (2009), “An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates”, *J. Mater. Des.*, **30**(9), 3679-3685.
- Kang, X. and Xi, X.F. (2007), “Size effect on the dynamic characteristic of a micro beam based on Cosserat theory”, *J. Mech. Strength*, **29**(1), 1-4.
- Kapurja, S., Bhattacharyya, M. and Kumar, A.N. (2008), “Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: a theoretical model and its experimental validation”, *J. Compos. Struct.*, **82**, 390-402.
- Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015), “Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(3), 693-709.

- Karami, B. and Janghorban, M. (2016), "Effect of magnetic field on the wave propagation in nanoplates based on strain gradient theory with one parameter and two-variable refined plate theory", *Modern Phys. Lett. B*, **30**, 1650421.
- Karami, B., Janghorban, M. and Tounsi, A. (2017b), "Effects of triaxial magnetic field on the anisotropic nanoplates", *Steel Compos. Struct.*, **25**(3), 361-374.
- Karami, B., Shahsavari, D. and Janghorban, M. (2017a), "Wave propagation analysis in functionally graded (FG) nanoplates under in-plane magnetic field based on nonlocal strain gradient theory and four variable refined plate theory", *Mech. Adv. Mater. Struct.* (in Press)
- Khor, K.A., and Gu, Y.W. (2000), "Effects of residual stress on the performance of plasma sprayed functionally graded ZrO₂/NiCoCrAlY coatings", *Mater. Sci. Eng. A*, **277**(1-2), 64-76.
- Kong, S., Zhou, S., Zhifeng, N. and Kai, W. (2008), "The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams", *J. Eng. Sci.*, **46**, 427-437.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 425-442.
- Lee, Z., Ophus, C., Fischer, L.M., Nelson-Fitzpatrick, N., Westra, K.L., Evoy, S. and *et al.* (2006), "Metallic NEMS components fabricated from nanocomposite Al-Mo films", *J. Nanotechnol.*, **17**(12), 3063-3070.
- Li, X.F. (2008), "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams", *J. Sound Vib.*, **318**, 1210-1229.
- Lü, C.F., Chen, W.Q. and Lim, C.W. (2009b), "Elastic mechanical behavior of nano-scaled FGM films incorporating surface energies", *J. Compos. Sci. Technol.*, **69**, 1124-1130.
- Lü, C.F., Lim, C.W. and Chen, W.Q. (2009a), "Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based on generalized refined theory", *J. Solid. Struct.*, **46**, 1176-1185.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Model.*, **39**, 2489-2508.
- McFarland, A.W. and Colton, J.S. (2005), "Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors", *J. Micromech. Microeng.*, **15**(5), 1060-1067.
- Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 1099636217698443.
- Menasria, A., Bouhadra, A., Tounsi, A., Bousahla, A.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates", *Steel Compos. Struct.*, **25**(2), 157-175.
- Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, **18**(3), 793-809.
- Mindlin, R.D. (1994), "Micro-structure in linear elasticity", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **16**(1), 51-78.
- Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F. (1962), "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11**(1), 415-448.
- Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory", *Smart Struct. Syst.*, **20**(3), 369-383.
- Nguyen, T.K. (2015), "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **11**(2), 203-219.
- Ould Larbi, L., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), "An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams", *Mech. Based Des. Struct.*, **41**, 421-433.
- Park, S.K. and Gao, X.L. (2006), "Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory", *J. Micromech. Microeng.*, **16**(11), 2355-2359.
- Peng, X., Yan, M. and Shi, W. (2007), "A new approach for the preparation of functionally graded materials via slip casting in a gradient magnetic field", *Scripta Materialia*, **56**(10), 907-909.
- Prakash, T., Singha, M.K. and Ganapathi, M. (2009), "Thermal snapping of functionally graded materials plates", *J. Mater. Des.*, **30**(10), 4532-4536.
- Rahaeifard, M., Kahrobaian, M.H. and Ahmadian, M.T. (2009), "Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials", *DETC2009-86254, 3rd International Conference on Micro- and Nanosystems (MNS3)*, San Diego, CA, USA, August-September.
- Sankar, B.V. (2001), "An elasticity solution for functionally graded beams", *J. Compos. Sci. Technol.*, **61**, 689-696.
- Seifried, S., Winterer, M. and Hahn, H. (2001), "Nanocrystalline gradient films through chemical vapor synthesis", *Scripta Materialia*, **44**(8-9), 2165-2168.
- Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A. (2011), "Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory", *J. Mech. Sci. Tech.*, **25**(9), 2195-2209.
- Song, C., Xu, Z. and Li, J. (2007), "Structure of in situ Al/Si functionally graded materials by electromagnetic separation method", *Mater. Des.*, **28**(3), 1012-1015.
- Stolken, J.S. and Evans, A.G. (1998), "Microbend test method for measuring the plasticity length scale", *J. Acta Mater.*, **46**(14), 5109-5115.
- Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadja, R., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations", *J. Sandw. Struct. Mater.*, **17**(2), 99-129.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Technol.*, **24**(1), 209-220.
- Toupin, R.A. (1962), "Elastic materials with couple-stresses", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11**(1), 385-414.
- Watanabe, Y., Eryu, H. and Matsuura, K. (2001), "Evaluation of three-dimensional orientation of Al₃Ti platelet in Al-based functionally graded materials fabricated by a centrifugal casting technique", *Acta Materialia*, **49**(5), 775-783.
- Wattanasakulpong, N. and Chaikittiratana, A. (2015), "Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method", *Meccanica*, **50**(5), 1331-1342.
- Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), "Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities", *Aerosp. Sci. Technol.*, **32**(1), 111-120.
- Wattanasakulpong, N., Gangadhara Prusty, B., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), "Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation", *Mater. Des.*, **36**, 182-190.
- Witvrouw, A. and Mehta, A. (2005), "The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications", *J. Function. Grad. Mater.*, **492-493**, 255-260.

- Xiang, H.J. and Yang, J. (2008), "Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction", *J. Compos. Part B*, **39**, 292-303.
- Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. (2002), "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *J. Solid. Struct.*, **39**(10), 2731-2743.
- Ying, J., Lü, C.F. and Chen, W.Q. (2008), "Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations", *J. Compos. Struct.*, **84**(3), 209-219.
- Zaoui, F.Z., Tounsi, A. and Ouinas, D. (2017), "Free vibration of functionally graded plates resting on elastic foundations based on quasi-3D hybrid-type higher order shear deformation theory", *Smart Struct. Syst.*, **20**(4), 509-524.
- Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Struct. Eng. Mech.*, **54**(4), 693-710.
- Zhou, S.J. and Li, Z.Q. (2001), "Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar", *J. Shandong Univ. Technol.*, **31**(5), 401-407.
- Zhu, J., Lai, Z., Yin, Z., Jeon, J. and Lee, S. (2001), "Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy", *Mater. Chem. Phys.*, **68**(1-3), 130-135.
- Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct. Eng. Mech.*, **64**(2), 145-153.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Tech.*, **34**, 24-34.

A new four-unknown refined theory based on modified couple stress theory for size-dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro-plate

Lemya Hanifi Hachemi Amar^{1,2}, Abdelhakim Kaci^{*1,3}, Redha Yeghnem^{1,3} and Abdelouahed Tounsi³

¹Faculté de Technologie, Département de Génie Civil et Hydraulique, Université Dr Tahar Moulay, BP 138 Cité En-Nasr 20000 Saida, Algérie

²Laboratoire des Ressources Hydrauliques et Environnement, Université Dr Tahar Moulay, BP 138 Cité En-Nasr 20000 Saida, Algérie

³Material and Hydrology Laboratory, University of Sidi Bel Abbès, Faculty of Technology, Civil Engineering Department, Algeria

(Received January 25, 2017, Revised September 24, 2017, Accepted September 29, 2017)

Abstract. This work investigates a novel plate formulation and a modified couple stress theory that introduces a variable length scale parameter is presented to discuss the static and dynamic of functionally graded (FG) micro-plates. A new type of third-order shear deformation theory of Reddy that use only 4 unknowns by including undetermined integral variables is proposed in this study. The equations of motion are derived from Hamilton's principle. Analytical solutions are obtained for a simply supported micro-plate. Numerical examples are presented to examine the effect of the length scale parameter on the responses of micro-plates. The obtained results are compared with the previously published results to demonstrate the correctness of the present formulation.

Keywords: micro-plate; modified couple stress theory; the length scale parameter; functionally graded material

1. Introduction

The first FGM was developed in Japan in 1984 as the result of a space plane project where the FGMS have gained wide application in variety branches of engineering such as mechanical, aerospace, chemical, electrical etc (El-Haina *et al.* 2017, Laoufi *et al.* 2016, Houari *et al.* 2016, Bousahla *et al.* 2016, Abdelbari *et al.* 2016, Abdelhak *et al.* 2016, Bounouara *et al.* 2016, Boudierba *et al.* 2016, Barati and Shahverdi, 2016, Barka *et al.* 2016, Beldjelili *et al.* 2016, Kar and Panda, 2015, Darılmaz, 2015, Belkorissat *et al.* 2015, Akbaş, 2015, Zidi *et al.* 2014, Tounsi *et al.* 2013). Functionally graded materials (FGMs) are the advanced materials in the family of engineering composites made from a mixture of ceramic and metal in which the ceramic component provides high-temperature resistance because of its low thermo conductivity, on the other hand, the ductile metal component prevents fracture due to thermal load. Compared with classical laminated composites, FGMS avoid the inter-laminar stress gaps that are induced by mismatches in the characteristics of two different materials. Such materials were introduced to gain benefits of the desired physical characteristics of each constituent material without interface problems. With the advance of technology, FGMS are started to be employed in micro/nano-electromechanical systems (MEMS/NEMS), such in the form of shape memory alloy thin films with a global thickness in micro-or nano-scale (Lü *et al.* 2009)

electrically actuated MEMS devices (Zhang and Fu 2012) and atomic force microscopes (AFM) (Kahrobaiyan *et al.* 2010, Kahrobaiyan *et al.* 2011, Kahrobaiyan *et al.* 2012, Asghari *et al.* 2010).

In this context, the practical studies show as the thickness of the structures becomes on the magnitude of microns and sub-microns, the scale effect of material takes a considerable role in mechanical behaviors of such structures (Fleck and Hutchinson 1993, Lam *et al.* 2003, Mindlin 1963, Mindlin and Tiersten 1962, Toupin 1962). The classical continuum mechanics theory cannot be utilized to interpret the size-dependent effect as it does not constrain any material length scale parameter. Thus, size-dependent plate models such as the classical couple stress theory having internal material length scale parameter are necessary (Mindlin 1963, Mindlin and Tiersten 1962, Toupin 1962).

Based on the modified couple stress theory, several size-dependent plate models have been developed.

Park and Gao (2006), Ma *et al.* (2008) studied Euler-Bernoulli and Timoshenko beams via a modified couple stress theory. These models are used to analyze the behavior characteristics of microtubules (Ma *et al.* 2008, Kong *et al.* 2008, Xia *et al.* 2010, Ke and Wang 2011) and micro tubes conveying fluid (Ke *et al.* 2011, Ahangar *et al.* 2011, Wang 2010, Xia and Wang 2010).

Simsek and Reddy (2013) discussed the bending and vibration of FG micro-beam using a new higher order beam theory and the modified couple stress theory. Al-Basyouni *et al.* (2015) proposed a novel unified beam formulation with a modified couple stress theory that consider a variable length scale parameter to study bending and dynamic behavior of FG micro-beam.

*Corresponding author, Ph.D.

E-mail: kaci_abdelhakim@yahoo.fr

In this article, a new analytical formulation based on the modified couple stress theory is proposed to study the bending and vibration behaviors of FG micro-plate having a variable length scale parameter by employing a novel form of the third-order shear deformation theory of Reddy (TSDT). The addition of the integral term in the displacement field leads to a reduction in the number of variables and governing equations. The governing equations and related boundary conditions are deduced by employing the Hamilton's principle. The influences of the length scale parameter, the power law indices, shear deformation on the bending and dynamic behavior of FG micro-scale plates are examined in this work. The present results are also compared with previously published results to confirm the validity of the present approach.

2. Theoretical formulation

2.1 modified couple stress theory

Based on the modified couple stress theory (Yang *et al.* 2002), the strain energy, U , for a linear elastic material occupying region Ω is related to strain and curvature tensors and can written as

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

Where σ is the stress tensor, ε is the strain tensor, m is the deviatoric part of the couple stress tensor and χ is the symmetric curvature. these tensors are given by

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

where u is the displacement vector, and θ is the rotation vector that can be defined as

$$\theta = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j} \quad (4)$$

where e_{ijk} is the permutation symbol.

2.2 Kinematic relations and constitutive relations

The displacement field of the conventional TSDT of Reddy is given as follows (Boukhari *et al.* 2016)

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x, y) \quad (5a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + f(z) \varphi_y(x, y) \quad (5b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (5c)$$

where $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y$, are five unknown displacements of the mid-plane of the plate, and $f(z)$ represents shape function defining the variation of the transverse shear strains and stresses across the thickness.

In this article, the conventional TSDTs of Reddy is modified by proposing some simplifying suppositions so that the number of unknowns is reduced as follows (Hebali *et al.* 2016, Merdaci *et al.* 2016, Besseghier *et al.* 2017, Chikh *et al.* 2017, Khetir *et al.* 2017, Fahsi *et al.* 2017)

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y) dx \quad (6a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y) dy \quad (6b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (6c)$$

The coefficients k_1 and k_2 depend on the geometry. In this article, the shape function is considered given by Reddy (1984) as

$$f(z) = z \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad \text{and} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (7)$$

where (u_0, v_0, w_0, θ) are four unknown displacements of the mid-plane of the plate, and h is the plate thickness. The nonzero linear strains are

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}$$

where

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy \\ k_1 \int \theta dx \end{Bmatrix} \quad (10)$$

The integrals used in the above equations shall be resolved by a Navier type method and can be written as follows

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad (11)$$

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

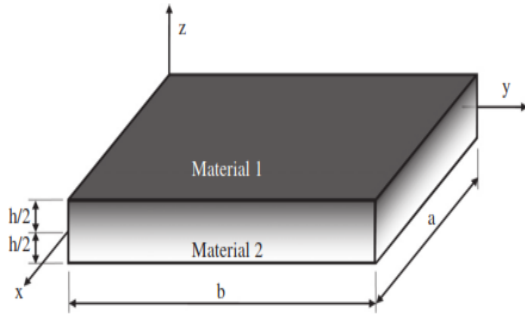


Fig. 1 Geometry of a FGM plate

where the coefficients A' and B' are expressed according to the type of solution employed, in this case by using Navier. Therefore, A' and B' are expressed as follows

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (12)$$

where α and β are defined in expression (31).

In addition, using Eqs. (5) and (4), the components of the rotation vector are obtained as

$$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{1}{2} k_2 B' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (13a)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{1}{2} k_1 A' g(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (13b)$$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (13c)$$

Substituting Eq. (13) into Eq. (3), the components of the curvature tensor take the form

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} k_2 B' g(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (14a)$$

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} k_1 A' g(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (14b)$$

$$\chi_z = \frac{1}{2} (k_2 B' - k_1 A') g(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \quad (14c)$$

$$\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{4} g(z) \left(k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \quad (14d)$$

$$\chi_{xz} = -\frac{1}{4} k_2 B' g'(z) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{4} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \quad (14e)$$

$$\chi_{yz} = \frac{1}{4} k_1 A' g'(z) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{4} f(z) (k_2 B' - k_1 A') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \quad (14f)$$

2.3 Constitutive relations

Consider a FG plate made of two constituent functionally graded materials as shown in Fig. 1. The material properties of the plate such as Young's modulus E

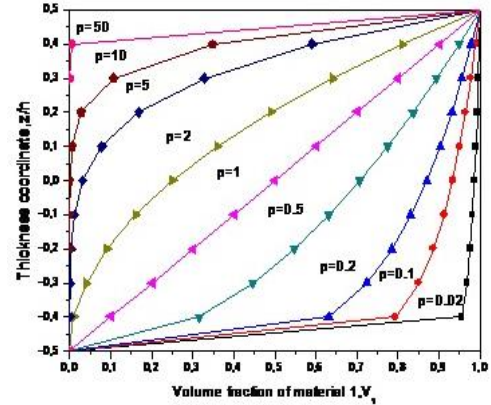


Fig. 2 Variation of volume fraction V_1 through the thickness of a FG plate for various gradient index p

and mass density ρ are considered to change continuously across the thickness by power law and the length scale parameter l are given by the rule of mixtures as (Hanifi Hachemi Amar *et al.* 2017, Bellifa *et al.* 2016, Boudierba *et al.* 2013).

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2) V_1 \quad (15a)$$

$$\rho(z) = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) V_1 \quad (15b)$$

$$l(z) = l_2 + (l_1 - l_2) V_1 \quad (15c)$$

Where $V_1 = (0.5 + z/h)^p$ is the volume fraction of material 1, the subscripts 1 and 2 indicate the two materials employed, and p is the gradient index indicating the volume fraction of material. The variation of the volume fraction V_1 across the thickness of the plate is plotted in Fig. 2 for various values of the power law index. The linear elastic constitutive relations are

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (16a)$$

$$m_{ij} = \frac{E(z)}{1+\nu} [l(z)^2] \chi_{ij} \quad (16b)$$

Where ν is the poisson's ratio considered to be constant, l is the material length scale parameter which reflects the influence of couple stress.

2.4 Equations of motion

Hamilton's principle is employed in this work to determine the equations of motion. The principle can be expressed in analytical form as (Ait Amar Meziane *et al.* 2014, Attia *et al.* 2015, Ait Atmane *et al.* 2015, Mahi *et al.* 2015, Zemri *et al.* 2015, Taibi *et al.* 2015, Saidi *et al.* 2016, Ahouel *et al.* 2016, Klouche *et al.* 2017, Mouffoki *et al.*

2017, Meksi *et al.* 2017, Bellifa *et al.* 2017, Zidi *et al.* 2017).

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (17)$$

Where δU is the virtual strain energy, δV is the virtual work done by external loads, and δK is the virtual kinetic energy. The virtual strain energy is expressed by (see Eq. (1))

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \epsilon_x + m_y \delta \epsilon_y + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \delta \gamma_{yz}) dA dz \\ & + \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (m_x \delta \chi_x + m_y \delta \chi_y + m_z \delta \chi_z + 2m_{xy} \delta \chi_{xy} \\ & + 2m_{xz} \delta \chi_{xz} + 2m_{yz} \delta \chi_{yz}) dA dz \\ = & \int_A \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} X_{yz} \left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} X_{xz} \left(\frac{\partial^2 \delta v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \delta u_0}{\partial y \partial x} \right) + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} \\ & - \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} (M_x + X_{xy}) + \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} (X_{xy} - M_y) \\ & + \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} (X_x - 2M_{xy} - X_y) - S_x k_1 \theta \\ & + \frac{1}{2} Y_{yz} (k_1 A' - k_2 B') \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x \partial y^2} \\ & + \frac{1}{2} Y_{xz} (k_1 A' - k_2 B') \frac{\partial^3 \delta w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ & - S_y k_2 \theta - S_{xy} \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} + k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \right) \\ & - Q_{yz} k_2 B' \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} - Q_{xz} k_1 A' \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \\ & + \frac{1}{2} Z_x k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} Z_y k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{1}{2} Z_{xy} k_2 B' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial y^2} - \frac{1}{2} Z_{xy} k_1 A' \frac{\partial^2 \delta \theta}{\partial x^2} \\ & \left. - \frac{1}{2} W_{yz} k_1 A' \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} W_{xz} k_2 B' \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} \right] dx dy \quad (18) \end{aligned}$$

there N, M, S, Q, X, Z , and W are the stress resultants defined by

$$(N_i, M_i, S_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, i = x, y, xy \quad (19a)$$

$$Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \sigma_i dz, i = xy, yz \quad (19b)$$

$$(X_i, Y_i, Z_i, W_i) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, f, g, g') m_i dz, i = x, y, xy, xz, yz \quad (19c)$$

The variation of the work done by the external applied forces can be expressed as

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA = - \int_A q \delta w_0 dA \quad (20)$$

Where q is the transverse load.

The variation of kinetic energy is expressed as

$$\begin{aligned} \delta K = & \int_{A-h/2}^{h/2} \rho(z) [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] dz dA \\ = & \int_A \left\{ I_0 [\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0] \right. \\ & - I_1 \left[\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right] \\ & + I_1 \left[\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right] \\ & - J_1 \left[k_1 A' \dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \delta \dot{u}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right. \\ & \left. + k_2 B' \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \delta \dot{v}_0 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\ & + J_2 \left[k_1 A' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_1 A' \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \right. \\ & \left. + k_2 B' \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + k_2 B' \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \right] \\ & \left. + K_2 \left[k_1^2 A'^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right] \right\} dA \quad (21) \end{aligned}$$

where dot-superscript convention denotes the differentiation with respect to the time variable t , $\rho(z)$ is the masse density, and $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2)$ are the masse inertias defined as

$$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, g) \rho(z) dz \quad (22)$$

Substituting Eqs. (18), (20) and (21) into Eq. (17) and integrating by parts, and collecting the coefficients of $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta)$, the following equations of motion are obtained

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X_{yz}}{\partial y^2} \right) = \\ & I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\ \delta v_0 : & \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_{yz}}{\partial x \partial y} \right) = \\ & I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\ \delta w_0 : & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\ & + \frac{1}{2} (k_1 A' - k_2 B') \left(\frac{\partial^3 Y_{xz}}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 Y_{yz}}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & + \frac{\partial^2 X_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial y} + q = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right) \\
 \delta \theta : & k_1 S_x + k_2 S_y + (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} \\
 & - k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \\
 & + \frac{1}{2} k_1 A' \left(\frac{\partial^2 Z_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial W_{yz}}{\partial x} \right) \\
 & - \frac{1}{2} k_2 B' \left(\frac{\partial^2 Z_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z_{xy}}{\partial y^2} - \frac{\partial W_{xz}}{\partial y} \right) = \\
 & J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - J_3 \left(k_1^2 A'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

2.5 Equations of motion in terms of displacements

Substituting Eq. (19) into Eq. (23), the equations of motion can be expressed in terms of generalized displacements (δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$) as

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \\
 & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
 & - B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{4} A_n \\
 & \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{4} (k_1 A' - k_2 B') \left[B_n \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - D_n \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} \right] \\
 & = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{24a}$$

$$\begin{aligned}
 \delta v_0 : & A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \\
 & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
 & - B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{4} A_n \\
 & \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \right] \\
 & - \frac{1}{4} (k_1 A' - k_2 B') \left[B_n \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - D_n \frac{\partial^3 \theta}{\partial x^2 \partial y} \right] \\
 & = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{24b}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_0 : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - \frac{B_n}{4} (k_1 A' - k_2 B') \nabla^2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \\
 & - A_n \nabla^4 w_0 - (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{C_n}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)^2 \\
 & - 2(k_1 A' - 2k_2 B') D_{66}^s \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \\
 & \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{C_n}{2} \left(k_1 A' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 \theta \\
 & + \frac{F_n}{4} (k_1 A' - k_2 B')^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
 & - \frac{E_n}{4} (k_1 A' - k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} + L_a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + q \\
 & = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \\
 & - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{24c}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \theta : & (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
 & + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
 & + \frac{D_n}{4} (k_2 B' - k_1 A') \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
 & - (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 & - 2D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{C_n}{2} \left[k_1 A' \nabla^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + k_2 B' \nabla^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\
 & - (H_{11}^s k_1^2 + 2H_{12}^s k_1 k_2 + H_{22}^s k_2^2) \theta \\
 & - H_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')^2 \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} - k_1 A' A_{55}^s \left(-k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \\
 & - k_2 B' A_{44}^s \left(-k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - \frac{E_n}{4} (k_1 A' - k_2 B')^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + \frac{H_n}{4} k_1 A' \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + \frac{H_n}{4} k_2 B' \left(k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\
 & - \frac{G_n}{4} \nabla^2 \left[k_1 A' \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + k_2 B' \left(k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right] \\
 & + \frac{G_n}{4} (k_1 A' - k_2 B') (3k_2 B' - 2k_1 A') \\
 & \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^2 \partial y^2} = J_1 \left(k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\
 & - J_2 \left(k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) - J_3 \left(k_1^2 A'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2^2 B'^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{24d}$$

Where A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} , etc., are the plate stiffness, defined by

$$\begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ \Theta_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda(z) \left[1, z, z^2, f, zf, f^2 \right] \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{2} \\ \nu \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{pmatrix} dz \quad (25)$$

and

$$(A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1, f, g, g', fg', f^2, g^2, g'^2] \mu(z) l^2 dz \quad (26)$$

Where

$$\lambda(z) = \frac{E(z)\nu(z)}{[1+\nu(z)][1-2\nu(z)]} \quad \text{and} \quad \mu(z) = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]} \quad (27)$$

2.6 Analytical solutions

In this section, analytical solutions for bending and free vibration are presented for a simply supported rectangular plate under transverse load q . Based on the Navier approach, the solutions are assumed as

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \\ \theta(x, y, t) \end{cases} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i\omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \\ \Theta_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (28)$$

where $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, \Theta_{mn}$ are Fourier coefficients to be determined for each pair of m and n and $i = \sqrt{-1}$ with

$$\alpha = m\pi/a, \quad \beta = n\pi/b \quad (29)$$

The transverse load q is expanded in the double-Fourier sine series as

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (30)$$

Where

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y dx dy$$

$$= \begin{cases} q_0 & \text{for sinusoidally distributed load,} \\ \frac{16q_0}{mn\pi^2} & \text{for uniformly distributed load} \end{cases} \quad (31)$$

Substituting Eqs. (28) and (30) into Eq. (24), the analytical solutions can be obtained from the following equations

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}$$

Where

$$\begin{aligned} s_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2 + \frac{A_n}{4}\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \\ s_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta - \frac{A_n}{4}\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) \\ s_{13} &= \frac{B_n}{4}(k_2B' - k_1A')\alpha\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \\ &\quad - (B_{12} + 2B_{66})\alpha\beta^2 - B_{11}\alpha^3 \\ s_{14} &= (B_{11}^s k_1 + B_{12}^s k_2)\alpha - B_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha\beta^2 \\ &\quad - \frac{D_n}{4}(k_1A' - k_2B')\alpha\beta^2 \\ s_{22} &= A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2 + \frac{A_n}{4}\alpha^2(\alpha^2 + \beta^2) \\ s_{23} &= -B_{22}\beta^3 - (2B_{66} + B_{12})\alpha^2\beta \\ &\quad + \frac{B_n}{4}(k_1A' - k_2B')\alpha^2\beta(\alpha^2 + \beta^2) \\ s_{24} &= (B_{12}^s k_1 + B_{22}^s k_2)\beta - B_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha^2\beta \\ &\quad + \frac{D_n}{4}(k_1A' - k_2B')\alpha^2\beta \\ s_{33} &= D_{11}\alpha^4 + D_{22}\beta^4 + 2(2D_{66} + D_{12})\alpha^2\beta^2 \\ &\quad + A_n(\alpha^2 + \beta^2)^2 \\ &\quad + \frac{F_n}{4}(k_1A' - k_2B')^2\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) \\ s_{34} &= 2D_{66}^s(k_1A' + k_2B')\alpha^2\beta^2 - k_2(D_{12}^s\alpha^2 + D_{22}^s\beta^2) \\ &\quad - k_1(D_{11}^s\alpha^2 + D_{12}^s\beta^2) \\ &\quad + \frac{C_n}{2}(k_1A'\alpha^2 + k_2B'\beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) \\ &\quad + \frac{E_n}{4}(k_1A' - k_2B')^2\alpha^2\beta^2 \\ s_{44} &= H_{11}^s k_1^2 + H_{22}^s k_2^2 + 2H_{12}^s k_1 k_2 \\ &\quad + H_{66}^s(k_1A' - k_2B')^2\alpha^2\beta^2 \\ &\quad + A_{55}^s k_1^2 \alpha^2 + A_{44}^s k_2^2 \beta^2 \\ &\quad + G_n \left(k_1^2 A'^2 + k_2^2 B'^2 - \frac{3}{2} k_1 A' k_2 B' \right) \alpha^2 \beta^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} G_n (k_1^2 A'^2 \alpha^4 + k_2^2 B'^2 \beta^4) - \frac{H_n}{4} k_2^2 B'^2 \beta^2 \\ m_{11} &= I_0, m_{12} = 0, m_{13} = -I_1 \alpha, \\ m_{14} &= -J_1 k_1 A' \alpha, m_{22} = I_0, \\ m_{23} &= -I_1 \beta, m_{24} = -J_1 k_2 B' \beta, \\ m_{33} &= I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \\ m_{34} &= J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \\ m_{44} &= J_3 (k_1^2 A'^2 \alpha^2 + k_2^2 B'^2 \beta^2) \end{aligned} \quad (33)$$

Table 1 Comparison of non-dimensional \bar{w} of a homogeneous square plate ($l_1=l_2, h=88.h^{-6}m$)

l_1/h	$a/h=5$			$a/h=20$			$a/h=100$		
	CPT ^(a)	Ref ^(b)	Present theory	CPT ^(a)	Ref ^(b)	Present theory	CPT ^(a)	Ref ^(b)	Present theory
0	0.2803	0.3433	0.3433	0.2803	0.2842	0.2842	0.2803	0.2804	0.2804
0.2	0.2399	0.2875	0.2875	0.2399	0.2430	0.2430	0.2399	0.2401	0.2401
0.4	0.1676	0.1934	0.1934	0.1676	0.1693	0.1693	0.1676	0.1677	0.1677
0.6	0.1116	0.1251	0.1251	0.1116	0.1124	0.1124	0.1116	0.1116	0.1116
0.8	0.0760	0.0838	0.0838	0.0760	0.0765	0.0765	0.0760	0.0760	0.0760
1	0.0539	0.0588	0.0588	0.0539	0.0542	0.0542	0.0539	0.0539	0.0539

(a) Tsiatas (2009)

(b) Thai and Thai *et al.* (2013)

Table 2 Comparison of non-dimensional fundamental frequency $\bar{\omega}$ of a homogeneous square plate ($l_1=l_2, h=88.h^{-6}m$)

l_1/h	$a/h=5$			$a/h=20$			$a/h=100$		
	CPT(a)	Ref(b)	Present theory	CPT(a)	Ref(b)	Present theory	CPT(a)	Ref(b)	Present theory
0	5.9734	5.2813	5.2813	5.9734	5.9199	5.9199	5.9734	5.9712	5.9712
0.2	6.4556	5.7699	5.7699	6.4556	6.4027	6.4027	6.4556	6.4535	6.4535
0.4	7.7239	7.0330	7.0330	7.7239	7.6708	7.6708	7.7239	7.7217	7.7217
0.6	9.4673	8.7389	8.7389	9.4673	9.4116	9.4116	9.4673	9.4651	9.4651
0.8	11.4713	10.6766	10.6766	11.4713	11.4108	11.4108	11.4713	11.4689	11.4689
1	13.6213	12.7408	12.7408	13.6213	13.5545	13.5545	13.6213	13.6186	13.6186

(a) Yin *et al.* (2010)

(b) Thai and Thai *et al.* (2013)

3. Numerical results and discussion

3.1 Verification studies

In this section, several numerical examples of bending and dynamic behaviour of FG micro-plate are presented based on modified couple stress theory. The present results are computed using the present theory type TSDT with only 4 unknowns. The results are compared with those reported by Thai *et al.* (2013), Yin *et al.* (2010) and Tsiatas *et al.* (2009). The constituents of the FG micro-plate used in this study include aluminum as material 2 and alumina as material 1 with the following properties:

$$E_1=380 \text{ GPa}, E_2=70 \text{ GPa}, \rho_1=3800 \text{ kg/m}^3 \text{ and } \rho_2=2702 \text{ kg/m}^3.$$

In this study, we take the length scale parameter of the aluminum component l_2 as $15\mu m$, and in the other cases the ratio l_2/l_1 is varied so as to demonstrate the influence of the variation of the length scale parameter. The following dimensionless quantities can be defined for the convenience

$$\bar{w} = \frac{10wE_1}{q_0a^4}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma h}{q_0a}, \quad \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\rho_1/E_1}$$

3.1 Parameter studies

The numerical results of simply supported square FG micro plate are presented. Examination of Tables 1-4 reveals that the present theory with only four variables provides similar results to those computed by the third-order shear deformation theory of Reddy (TSDT) used by

Thai *et al.* (2013) and this for all examined values of the material length scale parameter (l/h) and with considering $l_2=l_1=l$.

Table 1 is performed for the dimensionless deflection \bar{w} of a homogeneous micro plate subjected to a sinusoidal load q_0 . Consider a simply supported micro plate made of epoxy with the following material properties (Reddy 2011):

$$E=1.44 \text{ GPa}, \nu=0.3, \rho=1220 \text{ Kg/m}^3, h=88 \times 10^{-6} \text{ m}$$

The calculated deflections are compared with those predicted by Tai *et al.* (2013) based on the TSDT and by Tsiatas (2009) based on CPT. the analytical solutions of the

$$\text{CPT is given as } w = \frac{q_0}{(D + A_n)(\alpha^2 + \beta^2)}.$$

It can be seen that the computed results are found to be in excellent agreement with those of Thai *et al.* (2013). It can be seen clearly that the vertical deflection predicted by the CPT (Tsiatas 2009) are independent of the different values for the aspect ratio a/h because in CPT theory the shear effect is not introduced.

Table 2 presents the non-dimensional fundamental frequency $\bar{\omega}$ of a simply supported square plate. The obtained results are compared with those predicted by Tai *et al.* (2013) based on the TSDT of Reddy and Yin *et al.* (2010) based on CPT. The analytical solution of the CPT is given as $\omega = (\alpha^2 + \beta^2) \sqrt{(D + A_n)/I_0}$. Again, the computed results are found to be excellent agreements with those Thai *et al.* (2013).

In Table 3 the non-dimensional deflections of the FG micro plate for the sinusoidal load based on the present formulation for values of the volume fraction exponent p ,

Table 3 Non-dimensional deflection \bar{w} of a simply supported square plate ($l_1=l_2, h=88.h^{-6}m$)

a/h	l_2/h	Plate theory	Gradient index (p)					
			0	0.5	1	2	5	10
5	0	Present theory	0.3433	0.5177	0.6688	0.8671	1.0885	1.2276
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.3433	0.5177	0.6688	0.8671	1.0885	1.2276
	0.2	Present theory	0.2875	0.4275	0.5468	0.7067	0.8981	1.0247
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.2875	0.4275	0.5468	0.7067	0.8981	1.0247
	0.4	Present theory	0.1934	0.2807	0.3535	0.4548	0.5925	0.6908
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1934	0.2807	0.3535	0.4548	0.5925	0.6908
	0.6	Present theory	0.1251	0.1786	0.2224	0.2855	0.3802	0.4514
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1251	0.1786	0.2224	0.2855	0.3802	0.4514
	0.8	Present theory	0.0838	0.1183	0.1464	0.1878	0.2539	0.3052
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0838	0.1183	0.1464	0.1878	0.2539	0.3052
	1	Present theory	0.0588	0.0825	0.1017	0.1304	0.1782	0.2158
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0588	0.0825	0.1017	0.1304	0.1782	0.2158
10	0	Present theory	0.2961	0.4537	0.5890	0.7573	0.9114	1.0087
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.2961	0.4537	0.5890	0.7573	0.9114	1.0087
	0.2	Present theory	0.2520	0.3798	0.4885	0.6284	0.7743	0.8697
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.2520	0.3798	0.4885	0.6284	0.7743	0.8697
	0.4	Present theory	0.1742	0.2551	0.3231	0.4161	0.5349	0.6175
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1742	0.2551	0.3231	0.4161	0.5349	0.6175
	0.6	Present theory	0.1150	0.1649	0.2065	0.2664	0.3538	0.4177
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1150	0.1649	0.2065	0.2664	0.3538	0.4177
	0.8	Present theory	0.0780	0.1103	0.1372	0.1772	0.2403	0.2879
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0780	0.1103	0.1372	0.1772	0.2403	0.2879
	1	Present theory	0.0552	0.0774	0.0959	0.1238	0.1702	0.2058
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0552	0.0774	0.0959	0.1238	0.1702	0.2058
20	0	Present theory	0.2842	0.4377	0.5689	0.7298	0.8669	0.9538
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.2842	0.4377	0.5689	0.7298	0.8669	0.9538
	0.2	Present theory	0.2430	0.3677	0.4737	0.6086	0.7429	0.8303
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.2430	0.3677	0.4737	0.6086	0.7429	0.8303
	0.4	Present theory	0.1693	0.2486	0.3153	0.4063	0.5201	0.5986
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1693	0.2486	0.3153	0.4063	0.5201	0.5986
	0.6	Present theory	0.1124	0.1614	0.2025	0.2615	0.3470	0.4090
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1124	0.1614	0.2025	0.2615	0.3470	0.4090
	0.8	Present theory	0.0765	0.1083	0.1349	0.1744	0.2368	0.2834
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0765	0.1083	0.1349	0.1744	0.2368	0.2834
	1	Present theory	0.0542	0.0761	0.0944	0.1222	0.1681	0.2033
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0542	0.0761	0.0944	0.1222	0.1681	0.2033
100	0	Present theory	0.2804	0.4326	0.5625	0.7209	0.8527	0.9362
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.2804	0.4326	0.5625	0.7209	0.8527	0.9362
	0.2	Present theory	0.2401	0.3639	0.4689	0.6022	0.7327	0.8176
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.2401	0.3639	0.4689	0.6022	0.7327	0.8176
	0.4	Present theory	0.1677	0.2465	0.3128	0.4031	0.5153	0.5925
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1677	0.2465	0.3128	0.4031	0.5153	0.5925
	0.6	Present theory	0.1116	0.1603	0.2011	0.2599	0.3448	0.4061
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.1116	0.1603	0.2011	0.2599	0.3448	0.4061
	0.8	Present theory	0.0760	0.1076	0.1341	0.1736	0.2357	0.2820
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0760	0.1076	0.1341	0.1736	0.2357	0.2820
	1	Present theory	0.0539	0.0756	0.0939	0.1216	0.1675	0.2024
		Thai <i>et al.</i> (2013)	0.0539	0.0756	0.0939	0.1216	0.1675	0.2024

the different values of thickness ratio a/h , and dimensionless material length scale parameter l_2/h . The obtained results are found to be excellent agreement with those of Thai *et al.* (2013).

It is also observed from Table 4 that the numerical results of the free vibration analysis of FG micro-plate are in good agreement with those of Tai *et al.* (2013).

Table 5 presents the non-dimensional deflections of

Table 4 Non-dimensional frequency $\bar{\omega}$ of a simply supported square plate ($l_1=l_2, h=88.h^{-6}m$)

a/h	l_2/h	Plate theory	Gradient index (p)					
			0	0.5	1	2	5	10
5	0	Present theory	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2514
		Thai <i>et al.</i> (2013)	5.2813	4.5180	4.0781	3.6805	3.3938	3.2514
	0.2	Present theory	5.7699	4.9715	4.5094	4.0755	3.7327	3.5548
		Thai <i>et al.</i> (2013)	5.7699	4.9715	4.5094	4.0755	3.7327	3.5548
	0.4	Present theory	7.0330	6.1339	5.6071	5.0763	4.5862	4.3200
		Thai <i>et al.</i> (2013)	7.0330	6.1339	5.6071	5.0763	4.5862	4.3200
	0.6	Present theory	8.7389	7.6895	7.0662	6.4011	5.7137	5.3335
		Thai <i>et al.</i> (2013)	8.7389	7.6895	7.0662	6.4011	5.7137	5.3335
	0.8	Present theory	10.6766	9.4456	8.7058	7.8861	6.9796	6.4759
		Thai <i>et al.</i> (2013)	10.6766	9.4456	8.7058	7.8861	6.9796	6.4759
	1	Present theory	12.7408	11.3086	10.4397	9.4536	8.3193	7.6895
		Thai <i>et al.</i> (2013)	12.7408	11.3086	10.4397	9.4536	8.3193	7.6895
10	0	Present theory	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6368
		Thai <i>et al.</i> (2013)	5.7694	4.9014	4.4192	4.0090	3.7682	3.6368
	0.2	Present theory	6.2537	5.3571	4.8526	4.4006	4.0876	3.9162
		Thai <i>et al.</i> (2013)	6.2537	5.3571	4.8526	4.4006	4.0876	3.9162
	0.4	Present theory	7.5210	6.5361	5.9664	5.4071	4.9169	4.6464
		Thai <i>et al.</i> (2013)	7.5210	6.5361	5.9664	5.4071	4.9169	4.6464
	0.6	Present theory	9.2543	8.1295	7.4619	6.7580	6.0447	5.6487
		Thai <i>et al.</i> (2013)	9.2543	8.1295	7.4619	6.7580	6.0447	5.6487
	0.8	Present theory	11.2396	9.9398	9.1537	8.2863	7.3338	6.8030
		Thai <i>et al.</i> (2013)	11.2396	9.9398	9.1537	8.2863	7.3338	6.8030
	1	Present theory	13.3651	11.8682	10.9511	9.9101	8.7135	8.0448
		Thai <i>et al.</i> (2013)	13.3651	11.8682	10.9511	9.9101	8.7135	8.0448
20	0	Present theory	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.7622
		Thai <i>et al.</i> (2013)	5.9199	5.0180	4.5228	4.1100	3.8884	3.7622
	0.2	Present theory	6.4027	5.4744	4.9568	4.5006	4.2005	4.0323
		Thai <i>et al.</i> (2013)	6.4027	5.4744	4.9568	4.5006	4.2005	4.0323
	0.4	Present theory	7.6708	6.6585	6.0756	5.5082	5.0199	4.7488
		Thai <i>et al.</i> (2013)	7.6708	6.6585	6.0756	5.5082	5.0199	4.7488
	0.6	Present theory	9.4116	8.2630	7.5817	6.8661	6.1457	5.7453
		Thai <i>et al.</i> (2013)	9.4116	8.2630	7.5817	6.8661	6.1457	5.7453
	0.8	Present theory	11.4108	10.0895	9.2887	8.4062	7.4397	6.9013
		Thai <i>et al.</i> (2013)	11.4108	10.0895	9.2887	8.4062	7.4397	6.9013
	1	Present theory	13.5545	12.0372	11.1042	10.0450	8.8286	8.1494
		Thai <i>et al.</i> (2013)	13.5545	12.0372	11.1042	10.0450	8.8286	8.1494
100	0	Present theory	5.9712	5.0575	4.5579	4.1445	3.9299	3.8058
		Thai <i>et al.</i> (2013)	5.9712	5.0575	4.5579	4.1445	3.9299	3.8058
	0.2	Present theory	6.4535	5.5142	4.9922	4.5346	4.2394	4.0725
		Thai <i>et al.</i> (2013)	6.4535	5.5142	4.9922	4.5346	4.2394	4.0725
	0.4	Present theory	7.7217	6.7000	6.1126	5.5425	5.0552	4.7840
		Thai <i>et al.</i> (2013)	7.7217	6.7000	6.1126	5.5425	5.0552	4.7840
	0.6	Present theory	9.4651	8.3084	7.6224	6.9027	6.1800	5.7782
		Thai <i>et al.</i> (2013)	9.4651	8.3084	7.6224	6.9027	6.1800	5.7782
	0.8	Present theory	11.4689	10.1402	9.3344	8.4467	7.4755	6.9345
		Thai <i>et al.</i> (2013)	11.4689	10.1402	9.3344	8.4467	7.4755	6.9345
	1	Present theory	13.6186	12.0944	11.1560	10.0904	8.8673	8.1846
		Thai <i>et al.</i> (2013)	13.6186	12.0944	11.1560	10.0904	8.8673	8.1846

the FG micro plate based on the present theory for various values of the volume fraction exponent p , the different values of thickness ratio a/h , and variable length scale parameter l_1/l_2 . Results are provided for the sinusoidal load. It is seen that the effect of the shear deformation becomes

considerable for the thick micro plate (i.e., $a/h=5$). When $l_1/l_2=1$, the length scale parameter of the FG micro plate is a constant according to Eq. (15c).

The same equation also implies that, for the other remaining cases for which $l_1/l_2 \neq 1$, the length scale

Table 5 Non-dimensional deflection \bar{w} of a simply supported square plate ($l_2=15 \mu\text{m}$, $h/l_2=2$)

l_1/l_2	Plate theory	$a/h=5$				$a/h=100$			
		$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$	$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$
1/3	CPT	0.29610	0.38165	0.47966	0.55014	0.29610	0.38165	0.47966	0.55014
	Present	0.34711	0.44033	0.55941	0.65065	0.29623	0.38180	0.47986	0.55040
1	CPT	0.17466	0.25019	0.36800	0.49092	0.17466	0.25019	0.36800	0.49092
	Present	0.19732	0.27940	0.41002	0.55714	0.17472	0.25027	0.36811	0.49109
3/2	CPT	0.11525	0.17827	0.29175	0.43895	0.11525	0.17827	0.29175	0.43895
	Present	0.12783	0.19502	0.31586	0.48362	0.11528	0.17832	0.29181	0.43907
2	CPT	0.07906	0.12955	0.23041	0.38684	0.07906	0.12955	0.23041	0.38684
	Present	0.08671	0.13968	0.24447	0.41610	0.07908	0.12958	0.23045	0.38692
Classical theory	CPT	0.37256	0.56227	0.79168	0.93546	0.37256	0.56227	0.79168	0.93546
	Present	0.44910	0.66876	0.97432	1.22755	0.37275	0.56254	0.79214	0.93619

Table 6 Non-dimensional frequency $\bar{\omega}$ of a simply supported square plate ($l_2=15 \mu\text{m}$, $h/l_2=2$)

l_1/l_2	Plate theory	$a/h=5$				$a/h=100$			
		$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$	$p=0.3$	$p=1$	$p=3$	$p=10$
1/3	CPT	5.82675	5.34605	4.95904	4.78176	6.01484	5.53362	5.15855	4.96468
	Present	5.43179	5.02603	4.65008	4.45554	6.01352	5.53253	5.15745	4.96351
1	CPT	7.58646	6.60186	5.66038	5.06159	7.83156	6.83441	5.88936	5.25562
	Present	7.20308	6.30583	5.42015	4.80523	7.83026	6.83339	5.88849	5.25470
3/2	CPT	9.33883	7.81959	6.35557	5.35235	9.64093	8.09646	6.61437	5.55801
	Present	8.94753	7.54243	6.16451	5.14885	9.63957	8.09548	6.61366	5.55727
2	CPT	11.27448	9.17047	7.14902	5.70080	11.63994	9.49764	7.44277	5.92053
	Present	10.86201	8.90560	6.90560	5.54215	11.63850	9.49668	7.44219	5.91995
Classical theory	CPT	5.19465	4.40481	3.86101	3.66791	5.36228	4.55900	4.01530	3.80729
	Present	4.77631	4.07809	3.52566	3.25135	5.36090	4.55792	4.01414	3.80580

parameter varies within the thickness. Thus, the ratio l_1/l_2 presents the degree of the length scale parameter variation within the plate. It is observed that increasing the length scale parameter ratio l_1/l_2 reduces the deflection and the results are significantly different to the case where the length scale parameter is considered to be constant ($l_1/l_2=1$). This observation is also validation of the premise of this work that the validation of the length scale parameter needs to be taken into consideration in the investigation of FG micro-plate. In addition, it is noted as the gradient index p increases, the increase of the deflection will be occur at the same conditions (length scale parameter ratio l_1/l_2 slenderness ratio a/h).

Table 6 presents the non-dimensional fundamental frequency $\bar{\omega}$ of FG micro plate for values of the gradient index p , for different values of the length scale parameter ratio (l_1/l_2) and for two different values of the aspect ratio ($a/h=5,100$). It can be observed that for each values of the gradient index, the non-dimensional frequency decreases with the reduction of the ration (l_1/l_2). However, the reduction of the gradient index leads to increase of the non-dimensional frequency. Again, from this Table it can be confirmed the need to consider the variation of the length scale parameter l within the micro-plate in dynamic analysis of FG micro-plate.

In Fig. 3, the variation of non-dimensional transverse deflections is presented versus the ratio (h/l_2) for different length scale parameter ratio (l_1/l_2) for square plate. It can be

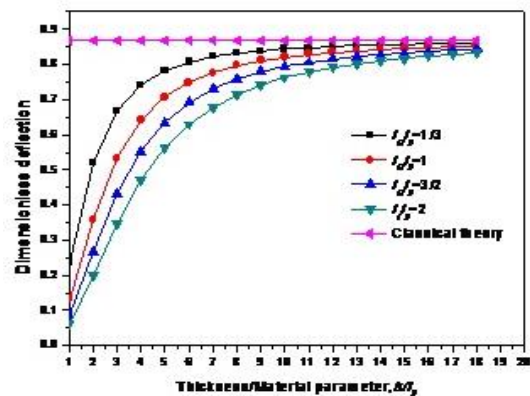


Fig. 3 Variation of the dimensionless transverse deflection of the FG micro-plate for different values of the length parameter ratio l_1/l_2 ($a/h=5$, $l_2=15 \mu\text{m}$, $a=b$, $p=2$)

seen from Fig. 3 that the deflections given by the classical plate model are independent of the material length scale parameter (h/l_2) and they are always larger than those computed via the non-classical plate model with the couple stress. This demonstrates that the incorporation of couple stress effect makes a plate stiffer, and hence, leads to a diminution of deflection. However, this influence can be ignored when the material length scale parameter (h/l_2) take high values as is shown in Fig. 3.

Fig. 4 presents the variation of the non-dimensional deflection with the gradient index p and the length scale

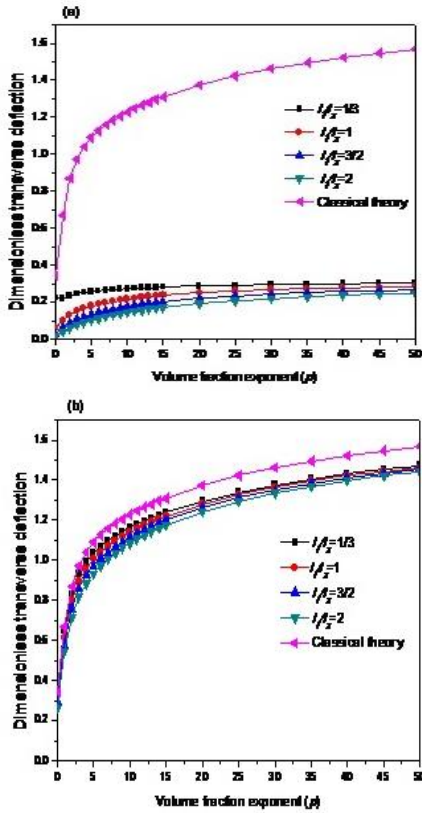


Fig. 4 Variation of the dimensionless transverse deflection of the FG micro-plate for different values of the volume fraction exponent for $a/h=5$, $l_2=15 \mu\text{m}$ and $a=b$, (a) $h/l_2=1$, (b) $h/l_2=8$

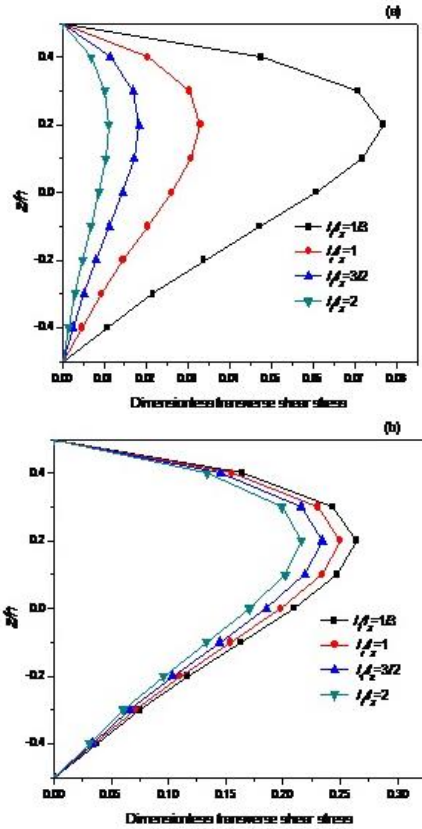


Fig. 6 Variation of the transverse stress across the thickness of the FG micro-plate for different values of the length parameter ratio with ($a/h=5$, $l_2=15 \mu\text{m}$, $a=b$, $p=2$) (a) $h/l_2=1$, (b) $h/l_2=8$

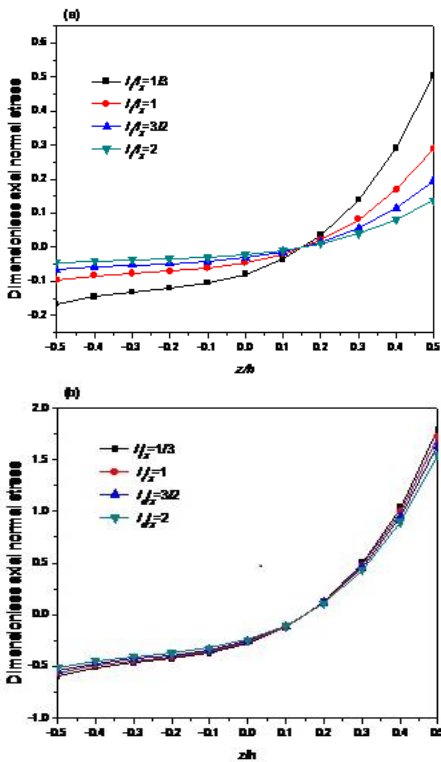


Fig. 5 Variation of the normal stress across the thickness of the FG micro-plate for different values of the length parameter ratio with ($a/h=5$, $l_2=15 \mu\text{m}$, $a=b$, $p=2$) (a) $h/l_2=1$, (b) $h/l_2=8$

parameter ratio (l_1/l_2) for two different values of the non-dimensional material parameter (h/l_2) and for ($a/h=5$).

It can be observed that the increase of the gradient index leads to an increase in the deflection. However, the influence of the length scale parameter ratio (l_1/l_2) on the deflections is not obvious for $h/l_2=8$ comparatively to the case where $h/l_2=1$. Thus, the sensitivity of the non-dimensional deflection to the variations in (h/l_2) becomes rather remarked as this ratio takes small values.

In Fig. 5, the variation of the non-dimensional axial normal stress $\bar{\sigma}_x(a/2, b/2, z)$ of the FG micro plate with ($a/h=5$) within the thickness is presented for different values of the length scale parameter ratio (l_1/l_2).

Non-dimensional axial normal stress decreases when the ratio (h/l_2) is increased from 1/3 to 2. The reduction is much more significant when $h/l_2=1$, i.e., the ratio is relatively smaller.

Fig. 6 shows the variation of the dimensionless transverse shear stress $\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, z)$ of the FG micro plate for different values of the length scale parameter ratio (l_1/l_2). It can be observed that the transverse stress increases as the length scale parameter ratio (l_1/l_2) decreases. This result demonstrates also the need to consider the variation of the length scale parameter l within the micro plate in the investigation of small-scale FG micro-plates.

In Fig. 7, the first and the third non-dimensional frequency are presented as a function of the ratio (h/l_2) for

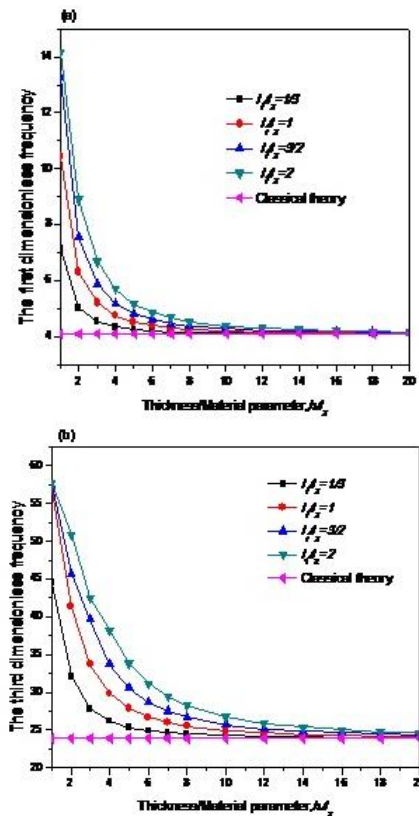


Fig. 7 Variation of the dimensionless frequencies of the FG micro-plate for different values of the length parameter ratio with ($a/h=5$, $l_2=15 \mu\text{m}$, $a=b$, $p=1$): (a) the first frequency, (b) the third frequency

different length scale parameter ratio (l_1/l_2) with considering $a/h=5$ and $p=1$. It can be seen that the frequency computed by the classical plate model are independent of the material length scale parameter (h/l_2) and they are always lower than those calculated by employing the non-classical plate model with the couple stress.

5. Conclusions

This work presents a novel size-dependent plate formulation based on the modified couple stress with only 4 unknowns. The theory considers a variable length scale parameter. A size-dependent model is developed for bending and vibration analysis of FG micro plates. The equations of motion are obtained using Hamilton's principle. Analytical solutions for bending and free vibration problems are obtained for a simply supported plate. This work justifies also the development of a general approach for the analysis of FG micro plate having a variable length scale parameter. It was confirmed that the parameter showing the degree of length scale parameter variation. An improvement of present formulation will be considered in the future work to consider the thickness stretching effect by using quasi-3D shear deformation models (Bessaim *et al.* 2013, Bousahla *et al.* 2014, Belabed *et al.* 2014, Fekrar *et al.* 2014, Hebali *et al.* 2014, Bennai *et al.* 2015, Meradjah *et al.* 2015, Larbi Chaht *et al.* 2015,

Hamidi *et al.* 2015, Bourada *et al.* 2015, Bennoun *et al.* 2016, Draiche *et al.* 2016, Benbakhti *et al.* 2016, Benahmed *et al.* 2017, Ait Atmane *et al.* 2017, Benchohra *et al.* 2017, Bouafia *et al.* 2017) and the wave propagation problem (Mahmoud *et al.* 2015, Ait Yahia *et al.* 2015, Boukhari *et al.* 2016).

References

- Abdelbari, S., Fekrar, A., Heireche, H., Saidi, H., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2016), "An efficient and simple shear deformation theory for free vibration of functionally graded rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundations", *Wind Struct.*, **22**(3), 329-348.
- Abdelhak, Z., Hadji, L., Hassaine Daouadji, T. and Adda Bedia, E.A. (2016), "Thermal buckling response of functionally graded sandwich plates with clamped boundary conditions", *Smart Struct. Syst.*, **18**(2), 267-291.
- Ahangar, S., Rezazadeh, G., Shabani, R., Ahmadi, G. and Toloei, A. (2011), "On the stability of a microbeam conveying fluid considering modified couple stress theory", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, **7**(4), 327-342.
- Ahouel, M., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2016) "Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept", *Steel Compos. Struct.*, **20**(5), 963-981.
- Ait Amar Meziane, M., Abdelaziz, H.H. and Tounsi, A. (2014), "An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions", *J. Sandw. Struct. Mater.*, **16**(3), 293-318.
- Ait Atmane, H., Tounsi, A., Bernard, F. and Mahmoud, S.R. (2015), "A computational shear displacement model for vibrational analysis of functionally graded beams with porosities", *Steel Compos. Struct.*, **19**(2), 369-384.
- Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), "Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories", *Struct. Eng. Mech.*, **53**(6), 1143-1165.
- Akbaş, Ş.D. (2015), "Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments", *Steel Compos. Struct.*, **19**(6), 1421-1447.
- Asghari, M., Ahmadian, M.T., Kahrobaiyan, M.H. and Rahaeifard, M. (2010), "On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams", *Mater. Des.*, **31**, 2324-2329.
- Attia, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel Compos. Struct.*, **18**(1), 187-212.
- Barati, M.R. and Shahverdi, H. (2016), "A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions", *Struct. Eng. Mech.*, **60**(4), 707-727.
- Barka, M., Benrahou, K.H., Bakora, A. and Tounsi, A. (2016), "Thermal post-buckling behavior of imperfect temperature-dependent sandwich FGM plates resting on Pasternak elastic foundation", *Steel Compos. Struct.*, **22**(1), 91-112.
- Belabed, Z., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Anwar Bég, O. (2014), "An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates", *Compos. Part B*, **60**, 274-283.
- Beldjelili, Y., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric

- plate theory”, *Smart Struct. Syst.*, **18**(4), 755-786.
- Belkorissat, I., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), “On vibration properties of functionally graded nano-plate using a new nonlocal refined four variable model”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(4), 1063-1081.
- Bellifa, H., Benrahou, K.H., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for nonlinear postbuckling of nanobeams”, *Struct. Eng. Mech.*, **62**(6), 695-702.
- Bellifa, H., Benrahou, K.H., Hadji, L., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “Bending and free vibration analysis of functionally graded plates using a simple shear deformation theory and the concept the neutral surface position”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **38**, 265-275.
- Benahmed, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S., Belakhdar, K. and Tounsi, A. (2017), “A novel quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation”, *Geomech. Eng.*, **12**(1), 9-34.
- Benbakhti, A., Bachir Bouiadjra, M., Retiel, N. and Tounsi, A. (2016), “A new five unknown quasi-3D type HSDT for thermomechanical bending analysis of FGM sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, **22**(5), 975-999.
- Benchohra, M., Driz, H., Bakora, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A new quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Struct. Eng. Mech.* (Accepted)
- Bennai, R., Ait Atmane, H. and Tounsi, A. (2015), “A new higher-order shear and normal deformation theory for functionally graded sandwich beams”, *Steel Compos. Struct.*, **19**(3), 521-546.
- Bennoun, M., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2016), “A novel five variable refined plate theory for vibration analysis of functionally graded sandwich plates”, *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **23**(4), 423-431.
- Bessaim, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R. and Adda Bedia, E.A. (2013), “A new higher order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets”, *J. Sandw. Struct. Mater.*, **15**, 671-703.
- Besseghier, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “Free vibration analysis of embedded nanosize FG plates using a new nonlocal trigonometric shear deformation theory”, *Smart Struct. Syst.*, **19**(6), 601-614.
- Bouafia, K., Kaci, A., Houari, M.S.A., Benzair, A. and Tounsi, A. (2017), “A nonlocal quasi-3D theory for bending and free flexural vibration behaviors of functionally graded nanobeams”, *Smart Struct. Syst.*, **19**(2), 115-126.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2013), “Thermomechanical bending response of FGM thick plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations”, *Steel Compos. Struct.*, **14**(1), 85-104.
- Bouderba, B., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory”, *Struct. Eng. Mech.*, **58**(3), 397-422.
- Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **57**(5), 837-859.
- Boukhari, A., Ait Atmane, H., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2016), “An efficient shear deformation theory for wave propagation of functionally graded material plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **57**(5), 837-859.
- Bounouara, F., Benrahou, K.H., Belkorissat, I. and Tounsi, A. (2016), “A nonlocal zeroth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded nanoscale plates resting on elastic foundation”, *Steel Compos. Struct.*, **20**(2), 227-249.
- Bourada, M., Kaci, A., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 409-423.
- Bousahla, A.A., Benyoucef, S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion”, *Struct. Eng. Mech.*, **60**(2), 313-335.
- Bousahla, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A novel higher order shear and normal deformation theory based on neutral surface position for bending analysis of advanced composite plates”, *Int. J. Comput. Meth.*, **11**(6), 1350082.
- Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H. and Mahmoud, S.R. (2017), “Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT”, *Smart Struct. Syst.*, **19**(3), 289-297.
- Darılmaz, K. (2015), “Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 395-408.
- Draiche, K., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A refined theory with stretching effect for the flexure analysis of laminated composite plates”, *Geomech. Eng.*, **11**(5), 671-690.
- El-Haina, F., Bakora, A., Bousahla, A.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A simple analytical approach for thermal buckling of thick functionally graded sandwich plates”, *Struct. Eng. Mech.*, **63**(5), 585-595.
- Fahsi, A., Tounsi, A., Hebali, H., Chikh, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), “A four variable refined nth-order shear deformation theory for mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates”, *Geomech. Eng.*, **13**(3), 385-410.
- Fekrar, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2014), “A new five-unknown refined theory based on neutral surface position for bending analysis of exponential graded plates”, *Meccanica*, **49**, 795-810.
- Fleck, H.A. and Hutchinson, J.W. (1993), “A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity”, *J. Mech. Phys. Solid.*, **41**, 1825-1857.
- Hamidi, A., Houari, M.S.A., Mahmoud, S.R. and Tounsi, A. (2015), “A sinusoidal plate theory with 5-unknowns and stretching effect for thermomechanical bending of functionally graded sandwich plates”, *Steel Compos. Struct.*, **18**(1), 235-253.
- Hanifi Hachemi Amar, L., Kaci, A. and Tounsi, A. (2017), “On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams with the effect of porosities”, *Struct. Eng. Mech.* (in Press)
- Hebali, H., Bakora, A., Tounsi, A. and Kaci, A. (2016), “A novel four variable refined plate theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, **22**(3), 473-495.
- Hebali, H., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Bessaim, A. and Adda Bedia, E.A. (2014), “A new quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for the static and free vibration analysis of functionally graded plates”, *ASCE J. Eng. Mech.*, **140**(2), 374-383.
- Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2016), “A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel Compos. Struct.*, **22**(2), 257-276.
- Kahrobaiyan, M.H., Asghari, M., Rahaeifard, M. and Ahmadian, M. T. (2011), “A nonlinear strain gradient beam formulation”, *Int. J. Eng. Sci.*, **49**, 1256-1267.
- Kahrobaiyan, M.H., Asghari, M., Rahaeifard, M. and Ahmadian, M.T. (2010), “Investigation of the size-dependent dynamic characteristics of atomic force microscope microcantilevers based on the modified couple stress theory”, *Int. J. Eng. Sci.*, **48**, 1985-1994.
- Kahrobaiyan, M.H., Rahaeifard, M., Tajalli, S.A. and Ahmadian,

- M.T. (2012), "A strain gradient functionally graded Euler-Bernoulli beam formulation", *Int. J. Eng. Sci.*, **52**, 65-76.
- Kar, V.R. and Panda, S.K. (2015), "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", *Steel Compos. Struct.*, **18**(3), 693-709.
- Ke, L.L., Wang, Y.S. and Wang, Z.D. (2011), "Thermal effect on free vibration and buckling of size-dependent microbeams", *Phys. E: Low-Dimens. Syst. Nanostruct.*, **43**(7), 1387-1393.
- Ke, L.L. and Wang, Y.S. (2011), "Flow-induced vibration and instability of embedded double-walled carbon nanotubes based on a modified couple stress theory", *Phys. E: Low-Dimens. Syst. Nanostruct.*, **43**(5), 1031-1039.
- Khetir, H., Bachir Bouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", *Struct. Eng. Mech.*, **64**(4), 391-402.
- Klouche, F., Darcherif, L., Sekkal, M., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "An original single variable shear deformation theory for buckling analysis of thick isotropic plates", *Struct. Eng. Mech.*, **63**(4), 439-446.
- Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K. (2008), "The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams", *Int. J. Eng. Sci.*, **46**(5), 427-437.
- Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. (2003), "Experiments and theory in strain gradient elasticity", *J. Mech. Phys. Solid.*, **51**, 1477-1508.
- Laoufi, I., Ameer, M., Zidi, M., Adda Bedia, E.A. and Bousahla, A.A. (2016), "Mechanical and hygrothermal behaviour of functionally graded plates using a hyperbolic shear deformation theory", *Steel Compos. Struct.*, **20**(4), 889-911.
- Larbi Chaht, F., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Anwar Bég, O. and Mahmoud, S.R. (2015), "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos. Struct.*, **18**(2), 425-442.
- Lü, C.F., Lim, C.W. and Chen, W.Q. (2009), "Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based on generalized refined theory", *Int. J. Solid. Struct.*, **46**, 1176-1185.
- Ma, H.M., Gao, X.L. and Reddy, J.N. (2008), "A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory", *J. Mech. Phys. Solid.*, **56**(12), 3379-3391.
- Mahi, A., Adda Bedia, E.A. and Tounsi, A. (2015), "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Appl. Math. Model.*, **39**, 2489-2508.
- Mahmoud, S.R., Abd-Alla, A.M., Tounsi, A. and Marin, M. (2015), "The problem of wave propagation in magneto-rotating orthotropic non-homogeneous medium", *J. Vib. Control*, **21**(16), 3281-3291.
- Meksi, R., Benyoucef, S., Mahmoudi, A., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2017), "An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates", *J. Sandw. Struct. Mater.*, 1099636217698443.
- Meradjah, M., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A new higher order shear and normal deformation theory for functionally graded beams", *Steel Compos. Struct.*, **18**(3), 793-809.
- Merdaci, S., Tounsi, A. and Bakora, A. (2016), "A novel four variable refined plate theory for laminated composite plates", *Steel Compos. Struct.*, **22**(4), 713-732.
- Mindlin, R.D. (1963), "Influence of couple-stresses on stress concentrations", *Exper. Mech.*, **3**, 1-7.
- Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F. (1962), "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11**, 415-448.
- Mouffoki, A., Adda Bedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory", *Smart Struct. Syst.*, **20**(3), 369-383.
- Park, S. and Gao, X. (2006), "Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory", *J. Micromech. Microeng.*, **16**, 2355.
- Reddy, J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *ASME J. Appl. Mech.*, **51**, 745-752.
- Reddy, J.N. (2011), "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams", *J. Mech. Phys. Solid.*, **59**(11), 2382-2399.
- Saidi, H., Tounsi, A. and Bousahla, A.A. (2016), "A simple hyperbolic shear deformation theory for vibration analysis of thick functionally graded rectangular plates resting on elastic foundations", *Geomech. Eng.*, **11**(2), 289-307.
- Taibi, F.Z., Benyoucef, S., Tounsi, A., Bachir Bouiadjra, R., Adda Bedia, E.A. and Mahmoud, S.R. (2015), "A simple shear deformation theory for thermo-mechanical behaviour of functionally graded sandwich plates on elastic foundations", *J. Sandw. Struct. Mater.*, **17**(2), 99-129.
- Thai, H.T. and Kim, S.E. (2013), "A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory", *Compos. Part B*, **45**, 1636-1645.
- Tounsi, A., Houari, M.S.A., Benyoucef, S. and Adda Bedia, E.A. (2013), "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerosp. Sci. Tech.*, **24**, 209-220.
- Toupin, R.A. (1962), "Elastic materials with couple stresses", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **11**, 385-414.
- Tsiatas, G.C. (2009), "A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory", *Int. J. Solid. Struct.*, **46**(13), 2757-2764.
- Wang, L. (2010), "Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes", *J. Fluid. Struct.*, **26**(4), 675-684.
- Xia, W. and Wang, L. (2010), "Microfluid-induced vibration and stability of structures modeled as microscale pipes conveying fluid based on non-classical Timoshenko beam theory", *Microfluid. Nanofluid.*, **9**(4), 955-962.
- Xia, W., Wang, L. and Yin, L. (2010), "Nonlinear non-classical microscale beams: static bending, postbuckling and free vibration", *Int. J. Eng. Sci.*, **48**(12), 2044-2053.
- Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. (2002), "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *Int. J. Solid. Struct.*, **39**, 2731-2743.
- Yin, L., Qian, Q., Wang, L. and Xia, W. (2010), "Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory", *Acta Mech Solida Sin.*, **23**(5), 386-393.
- Zemri, A., Houari, M.S.A., Bousahla, A.A. and Tounsi, A. (2015), "A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: an assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory", *Struct. Eng. Mech.*, **54**(4), 693-710.
- Zhang, J. and Fu, Y. (2012), "Pull-in analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on a modified couple stress theory", *Meccanica*, **47**, 1649-1658.
- Zidi, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Bessaim, A. and Mahmoud, S.R. (2017), "A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams", *Struct. Eng. Mech.*, **64**(2), 145-153.
- Zidi, M., Tounsi, A., Houari, M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég, O. (2014), "Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory", *Aerosp. Sci. Tech.*, **34**, 24-34.

References Bibliographies

- [1] Craciunescu, C.M., Wuttig, M. (2003), “New ferromagnetic and functionally grade shape memory alloys”, *J. Optoelectron. Adv.*
- [2] Fu, Y.Q., Du, H.J. and Zhang, S. (2003), “Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films”, *J. Mater. Lett.*, 57(20), 2995-2999.
- [3] Rahaeifard, M., Kahrobaiyan, M.H. and Ahmadian, M.T. (2009), “Sensitivity analysis of atomic force microscope cantilever made of functionally graded materials”, DETC2009-86254, 3rd International Conference on Micro-and Nanosystems (MNS3), San Diego, CA, USA, August-September.
- [4] Fleck, N.A., Muller, G.M., Ashby, M.F. and Hutchinson, J.W. (1992), “Strain gradient plasticity: theory and experiment”, *J. Acta Metal. Mater.*, 42(2), 475-487.
- [5] Stolken, J.S. and Evans, A.G. (1998), “Microbend test method for measuring the plasticity length scale”, *J. Acta Mater.*, 46(14), 5109-5115.
- [6] Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. (2003), “Experiments and theory in strain gradient elasticity”.
- [7] McFarland, A.W. and Colton, J.S. (2005), “Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors”, *J. Micromech. Microeng.*, 15(5), 1060-1067.
- [8] Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K. (2008), “The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams”, *Int.J.Eng.Sci.*, 46(5), 427-437.
- [9] Mindlin, R.D. (1994), “Micro-structure in linear elasticity”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16(1), 51-78.
- [10] Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F. (1962), “Effects of couple-stresses in linear elasticity”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11(1), 415-448.
- [11] Toupin, R.A. (1962), “Elastic materials with couple-stresses”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11(1), 385-414.
- [12] Zhou, S.J. and Li, Z.Q. (2001), “Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar”, *J. Shandong Univ. Technol.*, 31(5), 401-407.
- [13] Kong, S., Zhou, S., Zhifeng, N. and Kai, W. (2008), “The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams”, *J. Eng. Sci.*, 46, 427-437.
- [14] Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. (2002), “Couple stress based strain gradient theory for elasticity”, *J. Solid. Struct.*, 39(10), 2731-2743.
- [15] Park, S.K. and Gao, X.L. (2006), “Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory”, *J. Micromech. Microeng.*, 16(11), 2355-2359.
- [16] Kong, S., Zhou, S., Zhifeng, N. and Kai, W. (2008), “The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler micro-beams”, *J. Eng. Sci.*, 46, 427-437.

- [17] Lü, C.F., Chen, W.Q. and Lim, C.W. (2009b), “Elastic mechanical behavior of nano-scaled FGM films incorporating surface energies”, *J. Compos. Sci. Technol.*, 69, 1124-1130.
- [18] Lü, C.F., Lim, C.W. and Chen, W.Q. (2009a), “Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based on generalized refined theory”, *J. Solid. Struct.*, 46, 1176-1185.
- [19] Al-Basyouni, K.S., Tounsi, A. and Mahmoud, S.R. (2015), “Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory and neutral surface position”, *Compos. Struct.*, 125, 621-630.
- [20] Khor, K.A., and Gu, Y.W. (2000), “Effects of residual stress on the performance of plasma sprayed functionally graded ZrO₂/NiCoCrAlY coatings”, *Mater. Sci. Eng. A*, 277(1-2), 64-76.
- [21] Seifried, S., Winterer, M. and Hahn, H. (2001), “Nanocrystalline gradient films through chemical vapor synthesis”, *Scripta Materialia*, 44(8-9), 2165-2168.
- [22] Watanabe, Y., Eryu, H. and Matsuura, K. (2001), “Evaluation of three-dimensional orientation of Al₃Ti platelet in Al-based functionally graded materials fabricated by a centrifugal casting technique”, *Acta Materialia*, 49(5), 775-783.
- [23] Peng, X., Yan, M. and Shi, W. (2007), “A new approach for the preparation of functionally graded materials via slip casting in a gradient magnetic field”, *Scripta Materialia*, 56(10), 907-909.
- [24] Song, C., Xu, Z. and Li, J. (2007), “Structure of in situ Al/Si functionally graded materials by electromagnetic separation method”, *Mater. Des.*, 28(3), 1012-1015.
- [25] Zhou, S.J. and Li, Z.Q. (2001), “Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar”, *J. Shandong Univ. Technol.*, 31(5), 401-407.
- [26] Wattanasakulpong, N., Gangadhara Prusty, B., Kelly, D.W. and Hoffman, M. (2012), “Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation”, *Mater. Des.*, 36, 182-190.
- [27] Ait Yahia, S., Ait Atmane, H., Houari, M.S.A. and Tounsi, A. (2015), “Wave propagation in functionally graded plates with porosities using various higher-order shear deformation plate theories”, *Struct. Eng. Mech.*, 53(6), 1143-1165.
- [28] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2014), “Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities”, *Aerosp. Sci. Technol.*, 32(1), 111-120.
- [29] Ebrahimi, F. and Mokhtari, M. (2015), “Transverse vibration analysis of rotating porous beam with functionally graded microstructure using the differential transform method”, *J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 37(4), 1435-1444.
- [30] Wattanasakulpong, N. and Chaikittiratana, A. (2015), “Flexural vibration of imperfect functionally graded beams based on Timoshenko beam theory: Chebyshev collocation method”, *Meccanica*, 50(5), 1331-1342.
- [31] Ebrahimi, F. and Zia, M. (2015), “Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams with porosities”, *Acta Astronautica*, 116, 117-125.

- [32] Ait Atmane, H., Tounsi, A. and Bernard, F. (2017), "Effect of thickness stretching and porosity on mechanical response of a functionally graded beams resting on elastic foundations", *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 13(1), 71-84.
- [33] Ebrahimi, F., Ghasemi, F., Salari, E. (2016), "Investigating thermal effects on vibration behavior of temperature-dependent compositionally graded Euler beams with porosities," *Meccanica*, 51(1), 223-249.
- [34] Overall view of the P/M fabrication of functionally gradient materials. Proceedings of first international symposium on functionally gradient materials, Sendai, Japan, pp.59–64.
- [35] The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, 34, 3–10.
- [36] Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan, *Materials Science Forum*, 308–311, 509–514.
- [37] Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine, *International Journal of Thermal Science*, 40, 255-261.
- [38] The activities of FGM on new applications. *Materials Science Forum*, 423–425, 1–10.
- [39] Rajesh K., Bhangale, N., Ganesan, Chandramouli Padmanabhan, Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006) 341–371
- [40] Z. Zhong., T. Yu, Analytical solution of cantilever functionally graded beam. *Composites science and Technology*; 67 (3-4): 481-488, 2007.
- [41] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu 520-21. Japan
- [42] T. K. Nguyen., K. Sab., G. Bonnet, Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575, 2007.
- [43] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9, 1991.
- [44] L. Lostec, Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L, Thèse de l'université de Limoges, 1997.
- [45] B. KIEBACK, A. NEUBRAND, H. Riedel «Processing techniques for functionally graded materials», *Materials Science and Engineering A362* (2003) 81–105
- [46] WILLIAMS, J.C., Doctor-Blade Process, in *Treatise on Materials Science and Technology*, New York: Academic Press, 1976, p. 173-98.
- [47] BOCH, P., CHARTIER, T. & HUTTEPAIN, M., Tape Casting of Al₂O₃/ZrO₂ Laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1986, Vol. 69, N°. 8, p. C-191-C-192.
- [48] BOCH, P. Tape Casting of Layered Composites, in *Processing of Advanced Ceramics*. Edited by J. S. Moya and S. de Aza. Sociedad Espanola de Ceramica y Vidrio, Madrid, Spain, 1987, p. 103-112.
- [49] MISTLER, R.E., High Strength Alumina Substrates Produced by a Multiple-Layer Casting Technique, *Am. Ceram. Soc. Bull.*, 1973, Vol. 52, N°. 11, p. 850-54.

- [50] MOYA, J. S., SANCHEZ-HERENCIA, A. J., REQUENA, J. & MORENO, R., Functionally Gradient Ceramics by Sequential Slip Casting, *Materials Letters*, 1992, Vol. 14, p.333-35.
- [51] ABDIZADEH, H., *Elaboration Et Caractérisation De Composites Duplex «Composites Laminaires Tri-Couches A Base D'Alumine»*, Thèse Docteur d'Etat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I-France, 1997, 212p.
- [52] BISHOP, A, LIN, C. Y., NAVARATNAM, M., RAWLINGS, R.D., & McSHANE, H.B., A Functionally Gradient Material Produced by a Powder Metallurgical Process, *Journal of Materials Science Letters*, 1993, Vol. 12, p.1516-18.
- [53] STEFFENS, H. D., DVORAK, M. & WEWEL, M., Plasma Sprayed Functionally Gradient Materials-Processing and Applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 1990, p. 139-43.
- [54] KAWAI, C., WAKAMATSU, S., SAKAGAMI, S., & IGARASHI, T., Oxidation Resistant Coating with TiC-SiC Gradient Composition on Carbon Fiber Reinforced Composites by CVD, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 1990, p. 77-82.
- [55] TAKAHASHI, M., ITOH, Y. & KASHIWAYA, H., Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 1990, p.129-34.
- [56] YUKI, M., MURAYAMA, T. & IRISAWA, T., Temperature Gradient Sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by Laser Beam Heating, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*, 1991, p.203
- [57] G. Bao., L. Wang, Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int.J; Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [58] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multilayered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics*; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [59] L. Lostec, *Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L*, Thèse de l'université de Limoges, 1997.
- [60] Herrmann M, Sobek W (2017) —Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components. *Struct Concr*, 18
- [61] Gasik MM. (2010)—Functionally graded materials: bulk processing techniques. *Int J Mater Prod Technol*;39(1–2):20–9.
- [62] K.S. Afaq, M. Karama & S. Mistou. Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches. In *Comptes-rendus des 13 emes Journées Nationales sur les Composites*, pages 289-292. Strasbourg, March 2003
- [63] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis*. CRC

Press, Boca Raton, 1997.

- [64] F.B. Hildebrand., E. Reissner., G.G. Thomas, Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells. NACA T. N. N°:1833, 1949.
- [65] P. M. Naghdi, On the theory of thin elastic shells. Quarterly Appl. Math, 14: 369-380 1957.
- [66] E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, Int. J. Solids Structures; 25 (5):495-502, 1975.
- [67] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, Journal of Applied Mechanics; 51 (4): 745-752, 1984.
- [68] T. Kant., K. Swaminathan, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite Structure; 56 (4): 329-344, 2002.
- [69] M. Touratier, An efficient standard plate theory, Int. J. Eng. Sc; 29 (8): 901-916, 1991.
- [70] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity, Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [71] Mindlin, R. D., Tiersten, H. F., 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rational Mech. Anal. 11, 415–488. [53]et
- [72] Koiter, W. T., 1964. Couple stresses in the theory of elasticity, I and II. Proc. Ned. Akad. Wet. (B) 67, 17-44.
- [73] Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. Théorie des corps déformables (Theory of Deformable Bodies).
- [74] Hadjesfandiari, A. R., Dargush, G. F., 2015a. Foundations of consistent couple stress theory.
- [75] Hadjesfandiari, A. R., Dargush, G. F., 2015b. Evolution of generalized couple-stress continuum theories: a critical analysis. Preprint arXiv: 1501.03112.
- [76] Eringen, A. C., 1968. Theory of micropolar elasticity, Fracture, vol 2, ed. H. Liebowitz, Academic Press, New York, 662-729.
- [77] Yang, F., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., Tong P., 2002. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. Int. J. Solids Struct. 39 (10), 2731–2743.
- [78] Hadjesfandiari, A. R., Dargush, G. F., 2016. Comparison of theoretical elastic couple stress predictions with physical experiments for pure torsion. Preprint arXiv: 1605.02556.
- [79] Hadjesfandiari, A. R., Hajesfandiari, A., Dargush, G. F., 2016. Pure plate bending in couple stress theories. Preprint arXiv: 1606.02954.
- [80] Hadjesfandiari, A. R., Dargush, G. F., 2011. Couple stress theory for solids. Int. J. Solids Struct.48 (18), 2496-2510.
- [81] Nguyen, T.K. (2015), “A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials”, Int. J. Mech. Mater. Des., 11(2), 203-219.

- [82] Reddy, J.N. (1984), "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *ASME J.Appl.Mech.*, 51, 745-752.
- [83] Thai, H.T.andKim, S.E. (2013), "A size-dependent functionally graded Reddy plate model based on a modified couple stress theory", *Compos.Part B*, 45, 1636-1645.
- [84] Yin, L., Qian, Q., Wang, L. andXia, W. (2010), "Vibration analysis of microscale plates based on modified couple stress theory", *Acta Mech Solida Sin*, 23(5), 386-393. et
- [85] Tsiatas, G.C. (2009), "A new Kirchhoff plate model based on a modified couple stress theory", *Int.J.Solid.Struct.*, 46(13), 2757-2764.
- [86] Reddy, J.N. (2011), "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams", *J.Mech.Phys.Solid.*, 59(11), 2382-2399.
- [87] Levinson, M., "An Accurate, Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plates," *Mech. Res. Comm.*, 7, 342-350 (1980)