الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة سعيدة الدكتور مولاي الطاهر
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية و علوم التسيير

مطبوعة بعنوان:

دروس في الاحصاء 4

موجهة إلى طلبة السنة الثانية

ليسانس ل. م. د

علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

وفق المقرر المعتمد من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

من اعداد: الدكتورة بوتليليس مختارية

السنة الجامعية: 2025 – 2026

العرض التكويني للمقياس

السداسي : الرابع

وحدة التعليم :منهجية

المادة : إحصاء 4

الرصيد:5

المعامل: 3

نمط التعليم: حضوري

أهداف التعليم: يتمثل الهدف العام من هذه المادة التعليمية في النقاط الآتية:

- التعرف على مختلف المفاهيم الأساسية للمقياس، القدرة على توظيف الأساليب الإحصائية المناسبة لاستدلال الإحصائي.
- تمكين الطالب من فهم آلية الانتقال من العينة إلى المجتمع انطلاقا من التقدير النقطي ثم التقدير بالمجال وصولا إلى اختبار الفرضيات، وهذا المقياس جد مهم نظرا لارتباطه بالدراسات الاستطلاعية والمسحية.

بينما تتمثل المهارات المراد الوصول إليها من خلال هذه المادة التعليمية إلى ما يلي:

- استيعاب المفاهيم الرياضية والإحصائية المتعلقة بالعينة والمجتمع وأهم الخصائص.
- فهم أهم النظريات الاحتمالية والرياضية للمعاينة ومتتاليات المتغيرات العشوائية التي تعتبر بمثابة ركيزة وقاعدة يعتمد عليها الطلبة في فهم محتوى إحصاء 04.
- فهم التقديرات المستخرجة من العينة وخصائصها المختلفة.
- إكساب الطالب القدرة على تطبيق الاختبارات الإحصائية واتخاذ القرار لمختلف الظواهر.
- تنمية القدرة على استخدام بعض البرامج الإحصائية المستخدمة في هذا المجال.

المعارف المسبقة المطلوبة: الرياضيات، الإحصاء الوصفي والاحتمالات

محتوى المادة:

المحور الأول:نظرية المعاينة وتوزيعاتها

المحور الثاني:نظرية التقدير

المحور الثالث:اختبار الفرضيات الإحصائية

طريقة التقييم : تقيم مستمر+امتحان نهائي ويقاس معدل المادة بالوزن الترجيحي للدروس(60%) والأعمال الموجهة (40%).

فهرس المحتويات

العنوان	رقم الصحفة
مقدمة	4
المحور1: نظرية المعاينة وتوزيعاتها	8
المحور2: نظرية التقدير	52
المحور3: اختبار الفرضيات الإحصائية	82
الملاحق	115
المراجع	121

مقدمة

يشهد العالم المعاصر تسارعًا علميًا ومعرفيًا يفرض على الباحثين والطلبة الإسهام الفعّال في تطوير المعرفة الإنسانية وخدمة المجتمع. ويُعد علم الإحصاء من الركائز الأساسية التي يعتمد عليها البحث العلمي الحديث، لما يوفره من أدوات منهجية دقيقة تساعد على فهم الظواهر المختلفة وتحليلها بصورة علمية موضوعية.

يقوم الإحصاء على جمع البيانات المتعلقة بظواهر متعددة، ثم تنظيمها وعرضها في صورة رقمية واضحة، بما يسمح باستخلاص المؤشرات العامة واكتشاف العلاقات القائمة بينها. ولا يتوقف دوره عند هذا الحد، بل يتعداه إلى تحليل النتائج واستنتاج أحكام يمكن تعميمها من خلال دراسة عينات ممثلة للمجتمع الأصلي، وهو ما يُعرف بالإحصاء الاستدلالي.

وقد أصبح الإحصاء الاستدلالي عنصرًا محوريًا في تطور العديد من التخصصات، سواء في العلوم الاقتصادية أو التجارية أو التربوية أو الهندسية أو الطبية، وغيرها من المجالات التي تعتمد على التحليل الكمي في اتخاذ

القرارات. فهو يمكّن الباحث من اختبار الفرضيات، وتقدير المعلمات، وبناء استنتاجات تستند إلى أسس علمية دقيقة.

وانطلاقًا من الحاجة إلى مراجع جامعية باللغة العربية تتناول هذا المجال بأسلوب مبسط وممنهج، جاءت هذه المطبوعة لتكون مدخلًا منظمًا لدراسة الإحصاء الاستدلالي، مع التركيز على الجانب التطبيقي إلى جانب التأصيل النظري. وقد روعي في إعدادها أن تكون ملائمة لمستوى الطلبة الجامعيين، وأن تساعدهم على تنمية مهارات التحليل والاستنتاج والاعتماد على النفس في البحث العلمي.

تم إعداد هذه المطبوعة لتكون دعامة بيداغوجية لمقياس الإحصاء 4، الموجّه لطلبة السنة الثانية بكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير بجامعة جامعة سعيدة الدكتور مولاي الطاهر، كما يمكن أن يستفيد منها طلبة الكليات والمعاهد والمدارس التي يتضمن برنامجها الدراسي هذا المقياس ضمن وحداتها التعليمية.

وقد أُنجزت هذه المطبوعة وفقًا للمنهاج المعتمد من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، بما يتماشى مع الأهداف البيداغوجية للمقياس، والتي تتمثل في تمكين الطلبة من التحكم في مفاهيم وأدوات الإحصاء الاستدلالي وتطبيقاته، خاصة ما يتعلق بتوزيعات المعاينة، وأساليب التقدير،

وبناء مجالات الثقة، واختبار الفرضيات، وصولًا إلى اتخاذ القرار الإحصائي السليم.

ويهدف هذا المقياس إلى تعزيز قدرات الطلبة على تحليل البيانات الكمية ومعالجتها بطريقة علمية دقيقة، وتوظيف الأساليب الإحصائية في دراسة الظواهر الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، بما يدعم تكوينهم الأكاديمي ويؤهلهم لمتطلبات البحث العلمي والممارسة المهنية.

سعينا إلى تقديم هذه المطبوعة بأسلوب مبسّط ومنهجي ومتدرّج، لذلك تم تقسيمها إلى ثلاثة فصول مترابطة، تتدرج من المفاهيم الأساسية إلى الموضوعات الأكثر تعمقًا، وذلك على النحو الآتي:

1. **نظرية المعاينة وتوزيعاتها**: يتناول هذا الفصل أساليب اختيار العينات العشوائية، ودراسة توزيعات المعاينة، وبيان أثرها في تفسير النتائج الإحصائية.
2. **نظرية التقدير**: يعالج طرق تقدير معلمات المجتمع الإحصائي اعتمادًا على بيانات العينة، مع التركيز على مفهومي الدقة والكفاءة.
3. **اختبار الفرضيات الإحصائية**: يوضح منهجية اختبار الفرضيات المتعلقة بالمجتمع الإحصائي في ضوء الأدلة المستمدة من العينة، واتخاذ القرار الإحصائي المناسب.

وفي نهاية كل فصل من المطبوعة قدمنا مجموعة من التمارين المحلولة بغية مساعدة الطلبة للتحكم الجيد في المقياس.

المحور1: نظرية المعاينة وتوزيعاتها

1.1 نظرية المعاينة

المعاينة هي أسلوب إحصائي يُستخدم لاختيار مجموعة محدودة من الأفراد أو العناصر من مجتمع كبير بقصد دراستها وتحليل خصائصها، ثم تعميم النتائج المتحصل عليها على المجتمع بأكمله. وتقوم فكرتها على أن العينة، إذا اختيرت بطريقة علمية صحيحة، يمكن أن تعكس صفات المجتمع الحقيقي بدرجة مقبولة من الدقة. وتُستعمل المعاينة لتوفير الوقت والجهد والتكاليف بدل دراسة جميع أفراد المجتمع، خاصة عندما يكون المجتمع كبيرًا أو يصعب حصره كاملًا. كما تعتمد المعاينة على مبادئ الاحتمالات والإحصاء لضمان أن النتائج المستخلصة من العينة تكون قريبة قدر الإمكان من النتائج الحقيقية للمجتمع الأصلي.

1.1.1 تعاريف أساسية في نظرية المعاينة

أ. **المجتمع:** هو مجموعة من العناصر أو الأفراد الذين ينصب عليهم الاهتمام في دراسة معينة، ويعني آخر هو جميع العناصر التي تتعلق بمشكلة البحث.

مثال: قد يكون المجتمع:

- أشخاصًا (طلاب، موظفون، مرضى)
- أشياءً (منتجات مصنع)
- أحداثًا (حوادث المرور)
- قياسات (درجات حرارة)

خصائص المجتمع:

- قد يكون محدودًا: مثل عدد طلاب قسم معين.
- أو غير محدود: مثل نتائج رمي قطعة نقدية عددًا لا نهائيًا من المرات
- يرمز لحجم المجتمع غالبًا بالرمز: **N**

ب . **الفرد الاحصائي**: هو أصغر عنصر داخل المجتمع تُجمع منه البيانات مباشرة.

مثال:

- في دراسة طلاب الجامعة ← الطالب هو الفرد الإحصائي .
- في دراسة السيارات ← السيارة هي الفرد الإحصائي .

ت. العينة: هي مجموعة جزئية من المجتمع، ويكون حجم العينة هو عدد مفرداتها، وعادة تجرى الدراسة على العينة ومن ثم تعمم النتائج على المجتمع.

يرمز لحجم العينة غالبًا بـ: n

نستخدم العينة: لأن دراسة المجتمع كاملًا قد تكون:

- باهظة التكلفة،
- تستغرق وقتًا طويلًا،
- أو مستحيلة عمليًا.

ث. الصفة الإحصائية: هي الخاصية التي ندرسها عند أفراد المجتمع.

مثل:

- العمر،
- الطول،
- الدخل،
- المستوى الدراسي .

تنقسم إلى:

1) صفات كمية : يمكن قياسها عدديًا:

- الوزن،
- العمر،
- عدد الأطفال .

2) صفات نوعية: تعبر عن وصف أو تصنيف:

- الجنس،
- اللون،
- الحالة الاجتماعية .

ج. اطار المعاينة: هو القائمة أو المصدر الذي يحتوي على جميع أفراد المجتمع الممكن اختيار العينة منهم.

مثال:

- قائمة الطلاب المسجلين في الجامعة .
- سجل الموظفين في شركة .

إذا كان إطار المعاينة ناقصًا ← تظهر أخطاء في النتائج.

ح. المعلمة الإحصائية: هي قيمة عددية تصف المجتمع كله.

مثل:

- متوسط أعمار جميع الطلاب،
- نسبة البطالة في دولة .

خ . الإحصاء العيني: هو قيمة تُحسب من بيانات العينة فقط، وتُستخدم لتقدير معلمات المجتمع.

مثل:

- متوسط أعمار العينة،
- نسبة النجاح في العينة .

د . خطأ المعاينة:هو الفرق بين نتائج العينة والنتائج الحقيقية للمجتمع بسبب اختيار جزء فقط من المجتمع.

كلما كانت العينة:

- أكبر حجمًا،
- وأكثر تمثيلًا،

قلّ خطأ المعاينة .

ذ . التحيز: هو خطأ منهجي يجعل العينة غير ممثلة للمجتمع.

مثال:

- إجراء استطلاع عبر الإنترنت فقط قد يستبعد فئات لا تستخدم الإنترنت .

ر. حجم العينة: عدد الأفراد المختارين من المجتمع.

اختياره يعتمد على:

- حجم المجتمع،
- درجة الدقة المطلوبة،
- الوقت والتكلفة .
- **العينة الممثلة**: هي العينة التي تعكس خصائص المجتمع الحقيقي دون انحراف واضح.

مثال:
إذا كان المجتمع يحتوي:

- 60%إناث،
- 40%ذكور،

فالعينة الجيدة يجب أن تكون قريبة من هذه النسب.

3.1.1 أنواع المعاينة

تنقسم المعاينة في الإحصاء إلى نوعين رئيسيين:

1.3.1.1 المعاينة العشوائية

هي المعاينة التي يكون فيها لكل عنصر من عناصر المجتمع فرصة متساوية ومعروفة للاختيار، وتعتمد على قوانين الاحتمالات، لذلك تُعد أكثر دقة وموضوعية في تمثيل المجتمع.

ومن أهم أنواعها:

أ. المعاينة العشوائية البسيطة

يتم اختيار الأفراد بطريقة عشوائية مباشرة بحيث تكون فرص الاختيار متساوية بين الجميع.

مثال:
اختيار 50 طالبًا من قائمة طلاب باستخدام القرعة أو الحاسوب.

ب. المعاينة الطبقية

يُقسَّم المجتمع إلى طبقات متجانسة حسب صفة معينة، ثم تُختار عينة من كل طبقة.

مثال01:
تقسيم الطلاب إلى ذكور وإناث ثم اختيار عينة من كل فئة.

مثال 02: لنفرض أن لدينا مجتمع إحصائي حجمه مجهول، علما أن وحداته مقسمة على 8 طبقات متجانسة فيما بينها، ونريد سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 40 وحدة، فإن حجم العينة المناسب لكل طبقة هو: $n_i = \frac{}{8} = 5$

مثال 03: إذا كان عدد المسجلين من طلاب السنة الأولى في جامعة معينة 5400 طالبا موزعين على الكليات التالية:

كلية الآداب 1200 طالب;

كلية الحقوق 2000 طالب;

كلية الاقتصاد 1400 طالب;

كلية العلوم 800 طالب.

نريد سحب عينة عشوائية مكونة من 1080 طالب على أن تكون جميع الكليات ممثلة في العينة بطريقة نسبية، فإن حجم العينة المناسب لكل كلية يعطى كما يلي:

حجم العينة المناسب في كلية الآداب هو:

$$n_1 = (^{1200}/_{5400})1080 = 240$$

حجم العينة المناسب في كلية الحقوق هو:

$$n_2 = (^{2000}/_{5400})1080 = 400$$

حجم العينة المناسب في كلية الاقتصاد هو:

$$n_3 = (^{1400}/_{5400})1080 = 280$$

حجم العينة المناسب في كلية العلوم هو:

$$n_4 = (^{800}/_{5400})1080 = 160$$

وبعد تحديد أحجام العينات نختار عينة حجمها 240 من كلية الآداب بطريقة عشوائية بسيطة، وتكرار هذه العملية لاختيار جميع العينات الأخرى.

مثال 04 :بنفس معطيات المثال السابق، فما هو حجم العينة المناسب لكل كلية مستخدما طريقة نييمان، علما أن الانحراف المعياري لمعدل المسجلين يختلف من كلية لأخرى، حسب الجدول التالي:

	الآداب	الحقوق	الاقتصاد	العلوم	المجموع
حجم الطبقة N_i	1200	2000	1400	800	5400
الانحراف المعياري σ_i	1.5	1.2	2	2.5	/
$N_i\ \sigma_i$	1800	2400	2800	2000	9000

فإن حجم العينة المناسب لكل كلية يعطى كما يلي:

حجم العينة المناسب في كلية الآداب هو:

$$n_1 = (1800/9000)1080 = 216$$

حجم العينة المناسب في كلية الحقوق هو:

$$n_2 = (2400/9000)1080 = 288$$

حجم العينة المناسب في كلية الاقتصاد هو:

$$n_3 = (2800/9000)1080 = 336$$

حجم العينة المناسب في كلية العلوم هو:

$$n_4 = (2000/9000)1080 = 240$$

مثال 05: بنفس معطيات المثال السابق، فما هو حجم العينة المناسب لكل كلية مستخدما طريقة التوزيع الأمثل، علما أن تكلفة الحصول على بيانات المسجلين تختلف من كلية لأخرى، حسب الجدول التالي:

ج. المعاينة المنتظمة

يتم اختيار الأفراد وفق نظام ثابت بعد تحديد نقطة بداية عشوائية.

مثال:
اختيار كل خامس اسم من قائمة الموظفين.

د. المعاينة العنقودية

يُقسَّم المجتمع إلى مجموعات أو عناقيد، ثم يتم اختيار بعض العناقيد عشوائيًا ودراسة جميع عناصرها أو جزء منها.

مثال:
اختيار عدد من المدارس عشوائيًا ثم دراسة طلابها.

2.3.1.1. المعاينة غير العشوائية

هي المعاينة التي لا تعتمد على الاحتمالات بشكل كامل، ولا تكون فرص الاختيار متساوية بين جميع الأفراد، لذلك قد تتأثر بالتحيز الشخصي.

ومن أنواعها:

أ. المعاينة القصدية

يختار الباحث أفرادًا يراهم مناسبين للدراسة وفق هدف معين.

أمثلة:

- دراسة عن **مرض معين** ←اختيار أطباء مختصين فقط بهذا المرض .
- بحث عن **الإدمان على الهاتف** ←اختيار طلاب يُعرف أنهم يستخدمون الهاتف بكثرة .
- دراسة عن **نجاح مشروع تجاري** ←اختيار أصحاب شركات ناجحة فقط.

ب. معاينة الحصص

يتم تحديد عدد معين من الأفراد من كل فئة ثم اختيارهم بطريقة غير عشوائية.

أمثلة:

- استطلاع رأي 100 شخص :
  - 50رجال
  - 50نساء

  ثم اختيارهم من الشارع أو المقاهي دون قرعة .
- دراسة طلاب :
  - 30من تخصص العلوم

- 20من الآداب

ثم اختيار أول من يتم مقابلتهم .

ج. المعاينة الميسرة

يتم اختيار الأفراد المتوفرين أو السهل الوصول إليهم.

مثال01:
استطلاع آراء الأشخاص الموجودين في مكان معين فقط.

مثال02:

- استبيان داخل قسم الجامعة ← سؤال أول الطلاب الموجودين فقط .
- دراسة عن عادات الأكل ← سؤال الأصدقاء أو أفراد العائلة .
- استطلاع في الشارع ← سؤال أول المارة دون تنظيم .

4.1.1 مصادر أخطاء الدراسات بطريقة المعاينة

عند استعمال **طريقة المعاينة** في أي دراسة إحصائية، فإن النتائج لا تكون خالية من الخطأ، لأننا لا ندرس المجتمع كله بل جزءًا منه فقط. لذلك تظهر نوعان أساسيان من الأخطاء، ولكل نوع طبيعة مختلفة تمامًا من حيث السبب والتأثير وطرق المعالجة.

1.4.1.1 أخطاء المعاينة :هي الأخطاء التي تنتج عن اختيار عينة من المجتمع الإحصائي بدل دراسة جميع أفراده، وهي ترتبط بمدى تمثيل هذه العينة للمجتمع الأصلي. ويتأثر مقدار هذه الأخطاء بحجم العينة، حيث يقل متوسطها كلما زاد حجم العينة، أي أن العلاقة بينهما عكسية. وفي حالة كون المجتمع غير متجانس ويظهر فيه تباين كبير بين أفراده، فإنه يُفضل تقسيمه إلى طبقات أو مجموعات أكثر تجانسًا، ثم اختيار أسلوب المعاينة المناسب لكل طبقة بهدف تقليل التباين داخل العينة، وبالتالي تقليل أخطاء المعاينة. كما أن من أبسط الطرق لرفع دقة النتائج هو زيادة حجم العينة مع اختيار طريقة معاينة ملائمة لطبيعة المجتمع المدروس.

2.4.1.1 اخطاء أخرى :وهي جميع الأخطاء التي قد يقع فيها الباحث أثناء تنفيذ الدراسة باستثناء أخطاء المعاينة، حيث لا ترتبط بعملية اختيار العينة بحد ذاتها. وهذه الأخطاء لا تزول حتى عند إجراء تعداد شامل لكل أفراد المجتمع، لأنها قد تنتج عن عوامل متعددة مثل اختلاف القائمين على جمع البيانات، أو تأثير الظروف الشخصية للمستجيب أثناء الإجابة، أو سوء فهم الأسئلة، أو ظروف خارجية مثل الطقس أو البيئة المحيطة. كما يمكن أن تتسبب هذه العوامل في تشويه البيانات بشكل يجعل نتائج الدراسة غير دقيقة أو غير ذات دلالة إحصائية، وقد تزداد هذه الأخطاء إذا لم يتم التحكم الجيد في إجراءات جمع البيانات وتنظيمها.

5.1.1 حجم العينة المناسب للدراسة: يعتبر تحديد حجم العينة المناسب للدراسة من أهم المواضيع عند الاستدلال الإحصائي، وذلك لما يترتب عليه من إيجابيات كتوفير الوقت اللازم من جهة والتحكم في التكاليف من جهة أخرى، فضلا عن ذلك الحصول على النتائج الجيدة.

الجدير بالذكر، أن الباحث يأخذ بعين الاعتبار الآلية المتبعة في اختياره لعينة البحث كما هو موضح:

1.5.1.1 المسح الكلي :في هذه الحالة يقوم الباحث يجمع جميع بيانات المجتمع المستهدف، غير أن بعض الدراسات حددت النسبة المقبولة من المجتمع الكلي.

2.5.1.1 اختيار عينة من المجتمع :في هذه الحالة يحدد الباحث نوع العينة احتمالية أو غير احتمالية كما ذكرنا سابقا، ومن ثم يحدد حجم العينة ويتم جمع البيانات بقدر حجم العينة مع مراعاة نوعها (عمدية، حصصية، مصادفة، كرة الثلج، عشوائية بسيطة عشوائية، طبقية عشوائية، عنقودية، عشوائية منتظمة ...).

هناك عدة طرق الحساب حجم العينة:

ففي الدراسات المسحية؛ يلجأ كثير من الباحثين إلى اختيار حوالي 20% من المجتمع الأصلي الصغير (500 – 1000) و5% إذا كان المجتمع كبير.

كما يمكن استخدام هذه الصيغة:

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\left(Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\sigma}{e}\right)^2 \Bigg/ \left[1 + \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{\left(Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)\sigma}{e}\right)^2\right]$$

حيث يتوجب علينا معرفة:

- حجم المجتمع N المراد دراسته؛
- مستوى الدلالة المسموح به (α)؛
- الانحراف المعياري σ وهو عبارة عن الجدر التربيعي لتباين المتغير الذي تهدف الدراسة لإيجاد متوسطه إذا كان معروفاً من دراسات سابقة أو تقدير له يحسب من عينة استقصائية، ويمكن اعتبارها فيما بعد كجزء من حجم العينة الضروري المحسوب؛

مستوى الخطأ المسموح به e ، وهو إلا الفرق بين المقدار والتقدير $e = \bar{x} - u$

ويمثل مقدار الخطأ المسموح به في تقدير المتوسط أو النسبة (ويساوي مضروب القيمة المعيارية عند مستوى ثقة معين في الخطأ المعياري للمتوسط أو مضروباً في الخطأ المعياري للنسبة في حالة تقدير النسبة). وفي بعض الدراسات يستخدم هذا الخطأ المسموح به بدلالة معامل الاختلاف Coefficient of variation وفي حالة النسبة يحدد الخطأ بنسبة مئوية مثلاً 1% .ويقترن عادة تحديد هذا الخطأ باحتمال أو درجة ثقة معينة (مثلاً 95%) أو أن الخطأ في تقدير معلمة المجتمع سيكون ضمن المدى ±1%.

وفي حالة المتوسط (متوسط إنتاج الدولة من القمح مثلاً) يحدد الخطأ بقيمة مطلقة معينة كأن يقع المتوسط في مدى ± 10 كغم عند مستوى ثقة معين (95% مثلاً)؛

- $\left(Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$القيمة المعيارية التي تقابل مستوى ثقة معين والتي تستخرج من جداول التوزيع الطبيعي المعياري.

في الدراسات التجريبية والارتباطية؛ يجب ألا يقل حجم العينة عن 30.
في الدراسات المقارنة؛ يجب ألا يقل عدد أفراد العينة في كل مجموعة عن 10 أفراد.
في الدراسات التي تعتمد على تقدير المتوسط أو نسبة صفة في المجتمع نميز ما يلي:

لتقدير متوسط المجتمع: يتم تحديد حجم العينة كما يلي: **علما أن حجم المجتمع مجهول**

$$\mathbf{n} = \left(\boldsymbol{Z}_{\left(\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)}\right)^{\mathbf{2}} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{e}}\right)^{\mathbf{2}}$$

حيث يتوجب علينا معرفة مستوى الدلالة المسموح به (α)، والانحراف المعياري σ ومستوى الخطأ

المسموح به e.

تجدر الإشارة إلى أن هذه الصيغة تستخدم في الدراسات التي تعتمد على عينات غير مستقلة، وفي حالة العينات المستقلة فإن حجم العينة يحدد كما يلي:

$$\mathbf{n} = \mathbf{(2)} \left(\boldsymbol{Z}_{\left(\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)}\right)^{\mathbf{2}} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{e}}\right)^{\mathbf{2}}$$

لتقدير النسبة المئوية: يتم تحديد حجم العينة كما يلي:

$$\mathbf{n} = \frac{\left(\mathbf{Z}_{\left(\mathbf{1}-\frac{\alpha}{\mathbf{2}}\right)}\right)^{\mathbf{2}} \boldsymbol{P}(\mathbf{1}-\boldsymbol{P})}{\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}}}$$

حيث يتوجب علينا معرفة مستوى الدلالة المسموح به(α) ، ومستوى الخطأ المسموح بهe ، نسبة تواجد الظاهرة في المجتمع P هذه الأخيرة يتم الحصول عليها من خلال الدراسات السابقة أو دراسة تجريبية، فإن تعذر ذلك فإننا نقدرها ب 0.5.

علما أن:

- P النسبة المقدرة لخاصية معينة التي تتناولها الدراسة وهي تحدد من دراسات ومعرفة سابقة لتكرار حدوث الخاصية المحددة أو من خلال عينة عشوائية استقصائية Pilot survey ويمكن اعتبارها فيما بعد كجزء من حجم العينة الضروري المحسوب.
- q المكمل للنسبة وتساوي (1-P) وتمثل نسبة من لا تتوفر فيهم الخاصية المعينة.

من المعلوم وبشكل عام أنه كلما زادت درجة الثقة زاد حجم العينة، أي أن هناك علاقة طردية بين درجة الثقة وحجم العينة، كما أن هناك علاقة عكسية بين مستوى الدلالة وحجم العينة، حيث تعطى أهم الدرجات المعيارية $\left(Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right)$ عند مستويات الدلالة (α) كما يلي:

الجدول (02): درجات معيارية للتوزيع الطبيعي عند مستويات دلالة شائعة الاستخدام

مستوى المعنوية (α)	الدرجة المعيارية $\left(\mathbf{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$
%1	2.575
%5	1.96
%10	1.645

المصدر: من الملحق رقم 01

مثال 09: الدراسة مدى اختلاف متوسطين حول ظاهرة اقتصادية ما لعينة غير مستقلة ذات وسط u قدر اقتصادي الانحراف المعياري ب σ = 4 (دراسات سابقة). إذا اعتبرنا أن هذا التقدير صحيح كم يكون حجم العينة عند مستوى معنوية (α = 5) ثم (α = 10%) علما أن الخطأ المسموح به لا يزيد عن 1.

حجم العينة عند مستوى % 5 هو:

$$\mathbf{n} = \left(\boldsymbol{Z}_{\left(\mathbf{1}-\frac{0.05}{\mathbf{2}}\right)}\right)^{\mathbf{2}} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{e}}\right)^{\mathbf{2}} = (\mathbf{1.96})^{\mathbf{2}} \left(\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{1}}\right)^{\mathbf{2}} \cong \mathbf{984}$$

حجم العينة عند مستوى % 10 هو:

$$\mathbf{n} = \left(Z_{\left(1-\frac{0.1}{2}\right)}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{e}\right)^2 = (1.645)^2 \left(\frac{16}{1}\right)^2 \cong 693$$

يلاحظ أنه كلما زادت درجة الثقة زاد حجم العينة. أي أن هناك علاقة طردية بين درجة الثقة وحجم العينة، كما أن هناك علاقة عكسية بين مستوى المعنوية وحجم العينة.

مثال 10: بنفس معطيات المثال السابق، كم يكون حجم العينة عند مستوى معنوية (α = 10%) علما أن الدراسة موجهة لعينتين مستقلة.

حجم العينة عند مستوى 10% هو:

$$\mathbf{n} = 2\left(Z_{\left(1-\frac{0.1}{2}\right)}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{e}\right)^2 = 2\,(1.645)^2 \left(\frac{16}{1}\right)^2 \cong 1386$$

مثال 11: كم يكون حجم العينة المناسب لدراسة ظاهرة اجتماعية ما عند مستوى معنوية (α = 10%) علما أن الخطأ المسموح به لا يزيد عن 5%.

$$\mathbf{n} = \frac{(1.645)^2\,(0.5)(0.5)}{(0.05)^2} = 271$$

مثال 12: ما هو مقدار الخطأ المسموح به لدراسة ما عند مستوى معنوية (α = 5%) علما أن حجم العينة يساوي 30 وحجم المجتمع هو 800، والانحراف المعياري ب $\boldsymbol{\sigma}$ = 4 .

الخطأ المسموح به هو:

$$|e| = (1.96)\,\frac{4}{\sqrt{6}} = \pm\, 1.43.$$

5.1.1 الهدف من المعاينة

المعاينة في الإحصاء تهدف أساسًا إلى الحصول على معلومات دقيقة عن مجتمع كبير من خلال دراسة جزء صغير منه (العينة). من الأهداف الأساسية للمعاينة:

1. تقدير خصائص المجتمع

أي معرفة قيم تقريبية عن المجتمع مثل:

- المتوسط الحسابي
- النسب المئوية
- التباين

مثال:
تقدير متوسط طول جميع طلاب الجامعة من خلال عينة صغيرة فقط.

2. تقليل الوقت والجهد

دراسة المجتمع كاملًا قد تكون:

- طويلة جدًا
- مرهقة
- غير عملية

المعاينة تختصر ذلك بشكل كبير.

3. تقليل التكلفة

جمع البيانات من جميع أفراد المجتمع يحتاج:

- مال كثير
- موارد كبيرة

بينما العينة أقل تكلفة بكثير.

4. الحصول على نتائج سريعة

المعاينة تسمح بالحصول على:

- نتائج أولية بسرعة
- مفيدة لاتخاذ قرارات عاجلة

5. إمكانية دراسة مجتمعات كبيرة أو غير محدودة

بعض المجتمعات:

- ضخمة جدًا (مثل سكان دولة)
- أو غير محدودة (مثل عمليات إنتاج مستمرة)

وهنا تصبح المعاينة ضرورية.

6. تحسين دقة الدراسة أحيانًا

في بعض الحالات، دراسة العينة تكون:

- أكثر دقة من دراسة المجتمع كله
بسبب تقليل الأخطاء الإدارية أو البشرية .

الهدف من المعاينة هو:

الحصول على معلومات دقيقة وقابلة للتعميم عن المجتمع الإحصائي بأقل وقت وجهد وتكلفة ممكنة، مع الحفاظ على درجة عالية من الدقة.

2.1 توزيعات المعاينة

يُعتبر موضوع توزيعات المعاينة من الموضوعات المحورية والأساسية في مجال الإحصاء الاستدلالي، حيث يشكل الأساس الذي يُبنى عليه فهم كيفية الانتقال من البيانات الجزئية المستخرجة من العينة إلى استخلاص استنتاجات حول المجتمع الإحصائي بأكمله. ويهتم هذا المجال بدراسة العلاقة الرياضية والإحصائية بين معالم المجتمع مثل المتوسط السكاني μ ، والانحراف المعياري السكاني σ، ونسبة تواجد خاصية معينة في المجتمع P، وبين الإحصاءات المقابلة لها في العينة مثل متوسط العينة $\overline{X}$ ، والانحراف المعياري للعينة S، ونسبة العينة P.

ويقوم جوهر الاستدلال الإحصائي على فكرة أساسية تتمثل في أن دراسة المجتمع بأكمله قد تكون صعبة أو غير ممكنة في كثير من الحالات، لذلك يتم الاعتماد على عينة عشوائية ممثلة لهذا المجتمع، ومن خلالها يتم حساب مجموعة من الإحصاءات التي تستخدم لتقدير المعالم الحقيقية غير المعروفة. إلا أن هذه الإحصاءات لا تكون ثابتة، بل تتغير من عينة إلى أخرى نتيجة لاختلاف الأفراد المختارين في كل مرة، حتى وإن كانت العينات مأخوذة من نفس المجتمع وبنفس الحجم.

ومن هنا تظهر أهمية نظرية الاحتمالات في تفسير هذا التغير، حيث توفر الإطار الرياضي الذي يسمح بفهم طبيعة التباين في الإحصاءات الناتجة عن العينات المختلفة. فعند تكرار عملية السحب العشوائي لعدد كبير من العينات، كل واحدة منها ذات حجم ثابت n، نحصل في كل مرة على قيمة مختلفة لنفس الإحصاء (مثل المتوسط أو النسبة أو الانحراف المعياري)، وبالتالي يمكن دراسة هذه القيم جميعها معًا من خلال توزيع احتمالي خاص بها.

ويُعرف هذا التوزيع باسم **توزيع المعاينة للإحصائية**، وهو يمثل التوزيع الاحتمالي لجميع القيم الممكنة التي يمكن أن تأخذها الإحصائية عند تكرار سحب عينات عشوائية مستقلة من نفس المجتمع وبحجم ثابت. وبمعنى آخر، فهو يصف كيفية تذبذب الإحصاء من عينة إلى أخرى، ويُظهر درجة الاستقرار أو التغير فيه.

وتكمن أهمية توزيعات المعاينة في كونها تمكّن الباحث من قياس مقدار الخطأ العيني أو التباين الناتج عن استخدام العينة بدلًا من المجتمع الكامل، كما تساعد في بناء أدوات الاستدلال الإحصائي مثل فترات الثقة واختبارات الفرضيات، مما يسمح باتخاذ قرارات مبنية على أسس علمية دقيقة.

وبذلك فإن فهم توزيعات المعاينة لا يقتصر فقط على الجانب النظري، بل يمتد ليشكل حجر الأساس في التطبيقات العملية للإحصاء، سواء في مجالات العلوم الطبيعية أو الاجتماعية أو الاقتصادية، حيث يتم الاعتماد عليها بشكل كبير في تفسير البيانات واتخاذ القرارات في ظل وجود عدم يقين.

إذا اعتبرنا أن الإحصائية محل الدراسة هي الوسط الحسابي، وكان لدينا مجتمع إحصائي كبير مكوّن من عدد كبير من المفردات N، ويتبع هذا المجتمع توزيعًا احتماليًا معينًا، فإننا نبدأ بسحب عينة عشوائية من هذا المجتمع حجمها n، ثم نحسب المتوسط الحسابي لهذه العينة فنحصل على قيمة نرمز لها بـ $\overline{X_1}$ بعد ذلك نعيد عملية السحب مرة ثانية من نفس المجتمع وبنفس الحجم n، ولكن بعينة مختلفة عن السابقة، ثم نحسب متوسطها الحسابي فنحصل على قيمة ثانية $\overline{X_2}$ ونستمر في تكرار هذه العملية عددًا كبيرًا من المرات، بحيث في كل مرة نحصل على عينة جديدة مستقلة ونحسب متوسطها الحسابي.

ومع تكرار هذه العملية بشكل كبير، نحصل على مجموعة واسعة من القيم الخاصة بالوسط الحسابي، حيث تمثل كل قيمة نتيجة عينة معينة من العينات الممكنة. وعند جمع هذه القيم ودراستها، يتبين أنها لا تمثل مجرد أعداد منفصلة، بل يمكن اعتبارها تشكّل مجتمعًا إحصائيًا جديدًا يتكون من جميع القيم الممكنة للوسط الحسابي الناتج عن سحب العينات من المجتمع الأصلي.

وبهذا يمكن النظر إلى الوسط الحسابي باعتباره متغيرًا عشوائيًا، لأنه لا يأخذ قيمة ثابتة، وإنما يتغير حسب العينة المختارة في كل مرة، وبالتالي فهو يخضع لتوزيع احتمالي خاص به قد يختلف في خصائصه عن توزيع المجتمع الأصلي.

ويُطلق على هذا التوزيع اسم توزيع المعاينة للوسط الحسابي، وهو التوزيع الذي يصف جميع القيم الممكنة التي يمكن أن يأخذها متوسط العينة عند تكرار سحب عينات عشوائية مستقلة من نفس المجتمع وبحجم ثابت n.

وبشكل عام، فإن توزيع المعاينة لأي إحصائية مثل الوسط الحسابي أو النسبة أو التباين، هو التوزيع الاحتمالي الذي يصف سلوك هذه الإحصائية عند الانتقال من عينة إلى أخرى، وليس وصفًا للقيم الفردية داخل العينة نفسها، بل هو وصف لتغير الإحصاء عبر جميع العينات الممكنة، وهو ما يجعله أداة أساسية في فهم التباين وبناء الاستدلال الإحصائي.

1.2.1 أنواع توزيعات المعاينة

1.1.2.1 توزيع المعاينة للمتوسطات

كما سبق ذكره فإن سحب عينات متكرر من مجتمع ما، وحساب متوسط كل عينة سيسمح لنا بالحصول على مجتمع من المتوسطات $\bar{}$ ، ويسمى هذا المجتمع الجديد **"بتوزيع المعاينة للمتوسطات"**.

وتجدر الاشارة إلى أنه لتوزيع المعاينة للمتوسطات وسط يرمز له ب$u_{\bar{X}}$ وتباين^2 $\sigma_{\bar{X}}$.

ويمكن الحصول على متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات كما يلي:

$$\mu_{\bar{X}} = \mathbf{E}(\bar{X}) = \mathbf{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}{\mathbf{n}}$$

$$= \frac{\mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \cdots + \mathbf{E}(X_n)}{\mathbf{n}}$$

$$= \frac{\mu + \mu + \cdots + \mu}{\mathbf{n}}$$

$$= \mu$$

وهو متوسط $(\bar{X})$ توزيع المعاينة للمتوسط، أي أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة تساوي الوسط الحقيقي للمجتمع μ .

ومن النتيجة السابقة يمكننا اشتقاق تباين المتوسط $\bar{X}$ (تباين توزيع المعاينة للمتوسط):

$$\left(\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$\mathbf{Var}[\bar{X}_i] = \sigma_i^{\,2}$$ وان

$$\mathbf{Var}[\bar{X}] = \mathbf{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$$

وحسب خواص التباين

$$\mathbf{Var}(a.X) = a^2\,\mathbf{Var}(X)$$

فان

$$(1/n)^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{\,2}$$

$$= \frac{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \cdots + \sigma_n{}^2}{n^2}$$

$$\mathbf{Var\ [\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}}$$

ومنه فإن الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ هو $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.والانحراف المعياري التوزيع المعاينة للمتوسط $\bar{X}$ يدعى أيضا **الخطأ المعياري** (standard error) ل $\bar{X}$ (الخطأ المعياري التوزيع المعاينة للمتوسط) .

- **المعاينة الغير النفاذية (السحب بالإرجاع).**

مثال لدينا مجتمع إحصائي يتكوّن من 5 قيم تمثل أطوال بعض القطع (بالسنتيمتر):

{4 ، 7 ، 9 ، 12 ، 15}

نقوم بسحب عينات عشوائية حجمها n=2 مع الإرجاع، ونريد دراسة توزيع متوسط العينة.

1. أحسب وسط عناصر المجتمع μ .
2. أحسب عدد العينات التي يمكن استخراجها ثم حددها.
3. أحسب وسط كل عينة.
4. أحسب الوسط الحسابي لعناصر المجتمع الجديد (مجتمع المتوسطات).
5. أحسب تباين عناصر المجتمع الجديد (مجتمع المتوسطات) $\sigma_{\bar{X}}{}^2$.
6. ماذا تلاحظ؟

الحل:

1. حساب وسط عناصر المجتمع

$$\mu = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{4+7+9+12+15}{5} = 9.4$$

2. استخراج كل العينات التي يمكن استخراجها

بما أن السحب بالإرجاع فإن عدد العينات الممكنة يساوي 25 عينة: $N^n = 5^2 = 25$

جميع العينات الممكنة:

(4,4) (7,4) (15,15)
(4,7) (7,7)
(12,7) (15,4)
(12,9) (12,4)
(12,12) (15,7)
(12,15) (15,9)
(4,9) (7,9)

(4,12) (7,12)
(4,15) (7,15)
(9,4) (9,12)
(9,7) (9,15)
(9,9) (15,12)

3. حساب متوسط كل عينة:

- $(4,4) \rightarrow 4$
- $(4,7) \rightarrow 5.5$
- $(4,9) \rightarrow 6.5$
- $(4,12) \rightarrow 8$
- $(4,15) \rightarrow 9.5$
- $(7,7) \rightarrow 7$
- $(7,9) \rightarrow 8$
- $(7,12) \rightarrow 9.5$
- $(7,15) \rightarrow 11$
- $(9,9) \rightarrow 9$
- $(9,12) \rightarrow 10.5$
- $(9,15) \rightarrow 12$
- $(12,12) \rightarrow 12$
- $(12,15) \rightarrow 13.5$
- $(15,15) \rightarrow 15$

وبقية التركيبات بنفس الطريقة حتى نكمل 25 قيمة

والمجتمع الجديد مجتمع الأوساط الحسابية للعينات الممكنة يعرف **بمجتمع توزيع المعاينة للوسط الحسابي** في حالة السحب بإرجاع (معاينة غير نفادية).

4. حساب الوسط الحسابي للمجتمع الجديد (مجتمع توزيع المعاينة للوسط الحسابي)

$$\mathbf{E\ (\overline{X})} = \frac{\sum \mathbf{X_i}}{\mathbf{n}} = \frac{235}{\mathbf{25}} = \mathbf{9.4}$$

5. حساب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات (المعاينة غير نفاذية)

$$\boldsymbol{\sigma_{\overline{X}}}^{\mathbf{2}} = \frac{\sum \overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{i}}^{\ 2}}{\mathbf{n}} - [\mathbf{E}\ (\overline{\boldsymbol{X}})\ ]^{\mathbf{2}} = 7.24$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\overline{X}}} = \sqrt{\mathbf{7.24}} = \mathbf{2.69}$$

6. الملاحظة:

- يلاحظ أن $\mathbf{E(\bar{X}) = \mu = 9.4}$
- كما يلاحظ أن $\mathbf{\sigma^{-2} = 7.24}$

أي ان $\mathbf{\sigma_{\bar{X}} = 2.69}$

نظرية 1: إذا سحبنا عينات عشوائية حجمها n من مجتمع ذو متوسط μ وانحراف معياري σ ، فان توزيع المعاينة للمتوسطات $\bar{X}$ في حالة المعاينة الغير نفاديه (السحب بإرجاع) يكون له الخصائص التالية:

توقع (متوسط) E(X) مساوي المتوسط المجتمع، وتكتب $\mathbf{E(\bar{X}) = \mu^{-} = \mu}$

وانحراف معياري (خطأ معياري) $\mathbf{\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

- **المعاينة النفاذية (السحب بدون ارجاع)**

مثال: أوجد نفس مطالب المثال الأول في حالة السحب بدون ارجاع.

الحل:

1. **استخراج كل العينات التي يمكن استخراجها**

بما أن السحب بدون إرجاع فإن عدد العينات الممكنة يساوي 10 عينة:

$$\boldsymbol{C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$\boldsymbol{C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!\,4!\,3!}{3!2!1!} = \frac{20}{2} = 10}$$

(4 ، 7) (4 ، 9) (4 ، 12) (4 ، 15) (7 ، 9) (7 ، 12) (7 ، 15) (9 ، 12)

(9 ، 15) (12 ، 15)

2. **حساب الأوساط الحسابية للعينات الممكنة (مجتمع المتوسطات)**

متوسط العينة:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

فنحسب:

$\overline{X}_1 = 5.5$ $\overline{X}_2 = 6.5$ $\overline{X}_3 = 8$ $\overline{X}_4 = 9.5$

$\overline{X}_5 = 8$ $\overline{X}_6 = 9.5$ $\overline{X}_7 = 11$

$\overline{X}_8 = 10.5$ $\overline{X}_9 = 12$

$\overline{X}_{10} = 13.5$

مجتمع الأوساط الحسابية للعينات الممكنة **(مجتمع توزيع المعاينة الحسابي)** في حالة السحب. للوسط بدون إرجاع (معاينة نفادية).

3. حساب القيمة المتوقعة للوسط الحسابي لمجتمع توزيع المعاينة للوسط الحسابي (م. نفادية).

$$\mathbf{E(\overline{X}) = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{94}{10} = 9.4 = \mu}$$

4. حساب تباين توزيع المعاينة للمتوسطات (معاينة نفادية).

$$\boldsymbol{\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sum \overline{X}_i^2}{n} - [E(\overline{X})]^2} = 5.49$$

$$\boldsymbol{\sigma_{\overline{X}}} = \sqrt{5.49} = 2.34$$

نلاحظ أن:

1. متوسط مجتمع المتوسطات يساوي متوسط المجتمع الأصلي أي متوسط توزيع متوسطات العينات يساوي متوسط المجتمع الأصلي.

2. تباين متوسطات العينات أصغر من تباين المجتمع الأصلي أي أن المتوسطات تكون أقل تشتتًا من القيم الأصلية.

نظرية 2: إذا سحبنا عينات عشوائية حجمها n من مجتمع ذو متوسط μ وانحراف معياري σ فان توزيع المعاينة للمتوسطات $\bar{X}$ في حالة **المعاينة النفادية** (السحب بدون إرجاع) له الخصائص التالية:

✓ توقع (متوسط) E $(\bar{X})$ مساوي المتوسط المجتمع، ونكتب $\mathbf{E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu}$

$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$ وانحراف معياري (خطأ معياري).

ملاحظة: تجدر الاشارة إلى أن النسبة $\frac{N-n}{N-1}$ تسمى **معامل الارجاع أو معامل التصحيح**، وعادة يتم استخدامها عند حساب التباين (أو الانحراف المعياري) في حالة السحب بدون ارجاع (معاينة نفادية) أو اذا كان حجم المجتمع N صغير أو منته، حيث أن N صغيرة مقارنة ب n

$$(0.05 \leq \frac{n}{N})$$

وكلما كان حجم المجتمع كبيرا أو غير منته حيث أن N كبيرة مقارنة ب ($\frac{n}{N}$ < 0.05)

أو في حالة المعاينة الغير نفاديه (السحب بالإرجاع)، فإن قيمة النسبة $\frac{N-n}{N-1}$ تقترب من الواحد الصحيح .

- **طبيعة توزيع مجتمع توزيع المعاينة للمتوسطات**

يتحدد شكل التوزيع الاحتمالي لمتوسطات العينات العشوائية وفقًا لطبيعة توزيع المجتمع الأصلي الذي تم السحب منه. فإذا كان المجتمع الأصلي يتبع توزيعًا طبيعيًا، فإن متوسطات العينات المسحوبة منه ستكون كذلك موزعة توزيعًا طبيعيًا مهما كان حجم العينة، بشرط أن تكون العينات عشوائية ومستقلة. وبالتالي فإن خصائص توزيع المعاينة ترتبط ارتباطًا مباشرًا بخصائص المجتمع الإحصائي الأصلي. أي أنه في حالة ما إذا كان المجتمع موزعا توزيعا طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسط أيضا يتبع

التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ونكتب $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}})$.

عندما يكون شكل توزيع المجتمع الأصلي غير معروف، فإن توزيع إحصاءات العينة، وخاصة متوسطات العينات، يقترب تدريجيًا من التوزيع الطبيعي كلما كان حجم العينة n كبيرًا. وتُعرف هذه الخاصية في الإحصاء باسم **نظرية النهاية المركزية**، والتي تنص على أن زيادة

حجم العينة تجعل توزيع المعاينة يميل إلى الشكل الطبيعي بغض النظر عن طبيعة توزيع المجتمع الأصلي.

نظرية 3 : النهاية المركزية تنص نظرية النهاية المركزية على أنه في كل متتالية من محاولات السحب المكررة من مجتمع ذو متوسط μ وتباين σ^2 لكن ليس بالضرورة موزع توزيعا طبيعيا، فإن متوسط العينة المعياري $z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}/\sqrt{n}}$ يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري وذلك كلما زاد عدد المحاولات أي كلما كان n كبيرا $(n \geq 30)$ ونكتب$z \sim N(0, 1)$

ملاحظة: المتغير $z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}/\sqrt{n}}$ يسمى المتغير المتمركز المختصر.

مثال:

- مجتمع إحصائي يتكوّن من 8000عنصر، متوسطه الحسابي:
- $\mu=75$

وانحرافه المعياري:

$\sigma=24$

- أوجد الوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط الحسابي عندما يكون حجم العينة:

أ $n=64$
ب $n=500$

- ثم احسب احتمال أن يكون متوسط العينة $\bar{x}$ محصورًا بين:

$$73 \leq \bar{x} \leq 77$$

في كلتا الحالتين.

الحل:

ايجاد توزيع المعاينة للمتوسط.

الحالة 1 حجم العينة n = 64

N = 8000 $\mu = 75$ $\sigma_X = 24$

1) القيمة المتوقعة لمتوسط توزيع المعاينة للمتوسط $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu = 75$

2) قبل حساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط لابد من اختبار النسبة n/N

$\frac{n}{N} = \frac{64}{8000} = 0.008 < \mathbf{0.05}$ إذا نهمل معامل التصحيح

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{24}{\sqrt{64}} = 3}$$

ونكتب $\bar{X} \sim N(75, 3^2)$.

الحالة 2 حجم العينة n = 500

1) **القيمة المتوقعة المتوسط توزيع المعاينة للمتوسط** $E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu = 75$

2) قبل حساب الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسط لابد من اختبار النسبة n/N

إذا نستعمل معامل التصحيح $\frac{n}{N} = \frac{500}{8000} = 0.0625 > \mathbf{0.05}$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{24}{\sqrt{500}}\sqrt{\frac{8000-500}{8000-1}}} = 1.039$$

ونكتب $\bar{X} \sim N(75, 1.039^2)$.

إيجاد احتمال أن يكون $73 \leq \bar{X} \leq 77$

الحالة 1 حجم العينة n = 64

$$P(73 < \bar{X} < 77) = P(\frac{73-75}{3} < Z < \frac{77-75}{3})$$
$$= P(-0.667 < Z < 0.667)$$
$$= 2(0.7475) - 1$$
$$= 0.495$$

الحالة 1 حجم العينة n =500

$$P(73 < \overline{X} < 77) = P(\frac{73-75}{1.039} < Z < \frac{77-75}{1.039})$$
$$= P(-1.92 < Z < 1.92)$$
$$= 2(0.9726) - 1$$
$$= 0.9452$$

- **حالة خاصة لتوزيع ($\overline{X}$) في حالة تباين المجتمع مجهول(σ^2):**

في كثير من الأحيان نجهل الانحراف المعياري للمجتمع (σ_x) فنقوم باستبداله بالانحراف المعياري للعينة (s^2) و تصبح الصيغة التالية تتبع قانون ستيودنت و خصوصا إذا كان حجم العينة صغير ($n \leq 30$).

$$\Rightarrow \frac{(\overline{X} - \mu_X)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

* إذا كان ($n \geq 30$) يمكن تقريب قانون ستيودنت إلى القانون الطبيعي.

مثال:

نفترض أن أوزان أكياس السكر في مصنع معيّن تتبع توزيعًا طبيعيًا بمتوسط 50كغ.
أُخذت عينة عشوائية مكونة من 16 كيسًا، فكان الانحراف المعياري 6كغ.

1. حدّد القانون الاحتمالي لمتوسط العينة .
2. احسب احتمال أن يكون متوسط أوزان العينة محصورًا بين 48كغ و 52كغ.

الحل:

بما أن حجم العينة صغير ($n<30$) والانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، فإننا نستعمل توزيع ستودنت.

لدينا:

$$\mu=50, n=16, S=6$$

1. القانون الاحتمالي لمتوسط العينة

في حالة المجتمع الطبيعي مع مجهولية الانحراف المعياري:

$$T = \frac{(\overline{X} - \mu_X)}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

أي:

$$T \sim t(15)$$

لأن:

$$n-1=16-1=15n-1=16-1=15n-1=16-1=15$$

2. حساب الاحتمال

نريد حساب:

$$P(48 \leq X \leq 52)$$

$$T \sim t(15)$$

$$P(\frac{48-50}{1.5} \leq T \leq \frac{52-50}{1.5}) = P(-1.33 \leq T \leq 1.33) = (0.898) - 1 = 0.796$$

2.1.2.1 توزيع المعاينة للنسبة

في بعض الأحيان يبدو من الضروري تقدير أو اتخاذ قرار يتعلق بنسبة عناصر أو مفردات المجتمع الاحصائي التي تحمل صفة معينة، فمثلا نسبة المصابين بمرض معين في مجتمع ما، أو نسبة العاطلين عن العمل، أو نسبة التلف في الانتاج السلعة ما ... إلخ، إن إحصاءه العينة التي عادة ما تستخدم لإعطاء معلومات عن نسبة مفردات المجتمع الاحصائي التي تحمل صفة معينة يطلق عليه تسمية معاينة النسبة.

ونقصد بالنسبة في المجتمع الكسر $P = \frac{N_a}{N}$ حيث أن N تمثل حجم المجتمع، وN_aعدد المفردات التي تتحقق فيها صفة ما.

ونقصد بالنسبة في العينة $\hat{P} = \frac{n_a}{n}$ حيث أن n تمثل حجم العينة، وn_aعدد مفردات العينة التي تحقق نفس الصفة.

نظرية 4: إذا كانت P نسبة صفة معينة في مجتمع ما وسحبنا عينات عشوائية حجم كل منها n، فإن مختلف النسب $\hat{P}_i$ (i =1 ;.... ; n) تشكل توزيع المعاينة للنسبة، ويتميز التوزيع النظري لمعاينة النسبة $\hat{P}$ بالخصائص التالية:

توقع (متوسط توزيع المعاينة للنسبة) $E(\hat{P}) = \mu_{\hat{P}} = P$

وخطأ معاينة (الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للنسبة $\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

ونكتب $\boldsymbol{\hat{P} \sim N\ (p,\ \sigma_{\hat{P}}^{\ 2})}$ (في حالة $n \geq 30$ أو في حالة مجتمع طبيعي)

ملاحظة: إذا كانت المعاينة نفادية، أو حجم المجتمع محدود ($n > 0.05N$) فإن:

$$\boldsymbol{\sigma_{\hat{P}}^{\ 2} = \frac{pq}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}}$$

بصفة عامة يمكن القول بأنه كلما زاد حجم العينة ($n \sim 30$) كلما اقترب توزيع المعاينة للنسبة $(\hat{P})$ من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية.

ونكتب $z = \frac{\hat{P} - \mu_{\hat{P}}}{\sigma_{\hat{P}}} \sim N\ (0, 1)$.

القاعدة العامة لتطبيق هذه النظرية تقول لكي يكون التقريب باستخدام التوزيع الطبيعي مقبولاً يجب أن يتحقق ما يلي:

$$n \geq 30$$

مثال: في إحدى المدن، تبيّن أن احتمال امتلاك الأسرة لاتصال بالإنترنت هو 0.75 أُخذت عينة عشوائية حجمها 64 أسرة.

أوجد احتمال أن تكون نسبة الأسر التي تمتلك اتصالًا بالإنترنت في العينة محصورة بين 68% و 82%.

الحل:

لدينا:

- احتمال امتلاك الأسرة لاتصال بالإنترنت :

$$p= 0.75$$

- حجم العينة :

$$n=64$$

نريد حساب:

$$P(0.68\leq \hat{P} \leq 0.82)$$

حيث $\hat{P}$ تمثل النسبة العينية.

القانون الاحتمالي للنسبة العينية:

بما أن حجم العينة كبير فإن النسبة العينية تتبع تقريبًا التوزيع الطبيعي:

$$\hat{P} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$$

نحسب التباين:

$$\boldsymbol{\sigma_{\hat{P}}^2 = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.75(1-0.75)}{64} = 0.00293}$$

ونكتب $\hat{P} \sim N(P, \sigma_{\hat{P}}^2) \rightarrow \hat{P} \sim N(0.75, 0.00293)$.

2. حساب الاحتمال

نحوّل إلى المتغير المعياري:

$$Z = \frac{(\hat{P} - P)}{\sigma_{\hat{P}}}$$

$$P(0.68 \leq \hat{P} \leq 0.82) = P(-1.30 \leq Z \leq 1.30) = 0.8064$$

3.1.2.1 توزيع المعاينة للفرق بين متوسطسن

إذا كانت الإحصائية S_X والإحصائية S_Y تمثلان متوسطي عينتين مسحوبتين من مجتمعين مستقلين طبيعيين معلومي التباين $\sigma_{S_X}^2$ و$\sigma_{S_Y}^2$ على التوالي، فإن:

- **الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينتين** هو الفرق بين متوسطي المجتمعين، ونكتب:

$$\mu_{\overline{X}-\overline{Y}} = \mu_{\overline{X}} - \mu_{\overline{Y}} = \mu_X - \mu_Y$$

- **تباين توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين** يكتب كما يلي:

$$\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}} = \frac{\sigma^2_{\overline{X}}}{n} + \frac{\sigma^2_{\overline{Y}}}{m}$$

نظرية 5 :في حالة $n, m \geq 30$فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطين يتوزع تقريبًا وفق التوزيع الطبيعي، وتكتب:

$$(\overline{X} - \overline{Y}) \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}})$$

وعليه فإن توزيع المتغير المعياري $(\overline{X} - \overline{Y})$يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري، ونكتب:

$$Z = \frac{(\overline{X}-\overline{Y}) - (\mu_{\overline{X}} - \mu_{\overline{Y}})}{\sqrt{\frac{\sigma^2_{\overline{X}}}{n} + \frac{\sigma^2_{\overline{Y}}}{m}}} \sim N(0, 1)$$

مثال:

سحبت عينتين عشوائيتين من شركتين مختلفتين لإنتاج العلف الزراعية و كانت الأجور المدفوعة من قبلهما تتبع التوزيع الطبيعي بمعدل 230 دج و بانحراف معياري 36 دج بالنسبة للشركة A . و بمعدل 186 دج و انحراف معياري 40 دج للشركة B . إذا أخذنا عينة عشوائية من 36 ، 49 عامل من الشركتين على التوالي.

- احسب احتمال أن معدل الأجور المدفوعة من قبل الشركة A لها متوسط على الأقل 40 دج فأكثر من متوسط الأجور المدفوعة للشركة B

الحل:

لدينا:

- الشركة :A

$$\mu_1 = 230, \quad \sigma_1 = 36, \quad n_1 = 36$$

- الشركة :B

$$\mu_2 = 186,\ \ \sigma_2 = 40,\ \ n_2 = 49$$

نريد حساب:

$$P(X_A - X_B \geq 40)$$

1. توزيع الفرق بين المتوسطين

بما أن المجتمعين طبيعيان:

$$(\overline{X} - \overline{Y}) \sim \mathbf{N}\ (\mu_X - \mu_Y, \sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}})$$

$$\overline{X}_A - \overline{X}_B \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2})$$

$$\sim N(44, 68.65)$$

2. حساب الاحتمال

$$P(X_A - X_B \geq 40) = 0.6844$$

ملاحظة: إذا كان المجتمعين مجهولي التباين فإننا نميز بين حالتين:

أولا: إذا كان حجم العينتين كبير $(30 \leq m, n)$ فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_X - \mu_Y$ وتباين $\sigma^2_{\overline{X}-\overline{Y}} = \frac{S^2_{\overline{X}}}{n} + \frac{S^2_{\overline{Y}}}{m}$ ويكون التوزيع الاحتمالي كالتالي:

$$\mathbf{Z} = \frac{(\overline{\mathbf{X}} - \overline{\mathbf{Y}}) - (\mu_{\overline{\mathbf{X}}} - \mu_{\overline{\mathbf{Y}}})}{\sqrt{\frac{\mathbf{S^2_{\overline{X}}}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{S^2_{\overline{Y}}}}{\mathbf{m}}}} \sim \mathbf{N\ (0,\ 1)}$$

ثانيا: اذا كان حجم احدى العينتين أو كلاهما صغير(أقل من 30) ، والمجتمعين موزعين توزيعا

طبيعيا فإن توزيع المعاينة للفرق بين متوسطي عينتين يتبع توزيع ستودنت بمتوسط μ_X - وتباينμ_Y

$\sigma^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{S^2}{n} + \frac{S^2}{m}$ ويكون التوزيع الاحتمالي كالتالي :

$$T = \frac{\left(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{Y}}\right) - \left(\boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}} - \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{Y}}}\right)}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{S}^2}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{S}^2}{\boldsymbol{m}}}} \sim t(n-1)$$

حيث أن S^2 تدعى التباين المشترك لتبايني العينتين S_X^2وS_Y^2 وتحسب كما يلي:

$$\mathbf{S^2} = \frac{\mathbf{(n-1)\ S_X^2 + (m-1)\ S_Y^2}}{\mathbf{n+m-2}}$$

4.1.2.1 توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين

إذا كان اهتمامنا منصبا حول دراسة توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين، وكانت الاحصائية S_Xوالاحصائية S_Yتمثلان نسبتي عينتين مسحوبتين من مجتمعين مستقلين طبيعيين، وكان حجم العينتين كبيرا $(30 \leq m, n)$ فان:

متوسط توزيع المعاينة لنسبة عينتين هو:

$$\boldsymbol{\mu_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y}} = \boldsymbol{\mu_{\hat{P}_X}} - \boldsymbol{\mu_{\hat{P}_Y}} = \mathbf{P_X - P_Y}$$

وتباين هذا التوزيع يكتب كما يلي:

$$\boldsymbol{\sigma^2_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y}} = \frac{\boldsymbol{P_X(1-P_X)}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{P_Y(1-P_Y)}}{\boldsymbol{m}}$$

نظرية 6: توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين حجمهما كبير $(30 \leq m, n)$ ومسحوبتين من مجتمعين مستقلين، فإن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين يتبع التوزيع الطبيعي تقريبا، وتكتب:

$$\left(\hat{P}_X - \hat{P}_Y\right) \sim N\left(\mu_{P_X} - \mu_{P_Y}, \sigma^2_{P_X - P_Y}\right)$$

وعليه فإن توزيع المتغير المعياري للفرق بين نسبتي عينين يقترب من التوزيع الطبيعي المعياري ونكتب

$$\mathbf{Z} = \frac{\left(\hat{P}_X - \hat{P}_Y\right) - \boldsymbol{\mu}_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2_{\hat{P}_X - \hat{P}_Y}}} \sim \mathbf{N\ (0,\ 1)}$$

مثال:

إذا علمت أن نسبة البطالة في منطقة ما تمثل 30% بالنسبة للإناث، و% 20 بالنسبة للذكور، تم سحب عينتين عشوائيتين من مجتمع الذكور ومجتمع الاناث حجمها $n_1 = n_2 = 100$.

- أحسب احتمال أن الفرق بين نسبة البطالة بين الاناث ونسبة البطالة بين الذكور أكبر من 20%.

الحل:

بما أن حجم العينتين كبير $n1 = n2 = 100 > 30$ و

$$\begin{cases} n_1P_1 = 100(0.3) = 30 > 5 \\ n_1q_1 = 100(0.7) = 70 > 5 \end{cases}$$ و

$$\begin{cases} n_2P_2 = 100(0.2) = 20 > 5 \\ n_2q_2 = 100(0.8) = 80 > 5 \end{cases}$$

وعليه فإن توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي العينتين $P_1 - P_2$ يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط:

$$\boldsymbol{\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \mu_{\hat{P}_1} - \mu_{\hat{P}_2} = 0.3 - 0.2 = 0.1}$$

وخطا معياري:

$$\boldsymbol{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{P_1q_1}{n_1} + \frac{P_2q_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.3*0.7}{100} + \frac{0.2*0.8}{100}} = 0.061}$$

حساب احتمال أن يكون الفرق بين نسبة البطالة بين الاناث ونسبة البطالة بين الذكور أكبر من 20%.

$$\boldsymbol{P\left[\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) > 0.2\right] \rightarrow P\left[\frac{\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2\right)-\left(\mu_{\hat{P}_1} - \mu_{\hat{P}_2}\right)}{\sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2}} > \frac{0.2-0.1}{0.061}\right]}$$

$$\boldsymbol{= P\,(Z > 1.64) = 1 - P\,(Z \leq 1.64)}$$

$$\boldsymbol{= 1 - F\,(1.64) = 1 - 0.9495 = 0.0505}$$

5.1.2.1 توزيع المعاينة للتباين

نظرية 7: إذا كان X المتغير العشوائي من مجتمع ما و S^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة مسحوبة من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة يعطى كالتالي:

$$E(S^2)\begin{cases}\boldsymbol{\mu_{S^2}=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)} & \text{1) السحب بدون ارجاع}\\ & \text{أ. إذا كان حجم المجتمع غير منته}\\ & \text{ب. إذا كانت نسبة حجم العينة}\\ & \text{إلى المجتمع } (n/N) < 0.05\\ \boldsymbol{\mu_{S^2}=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N-n}{N}\right)} & \text{1) السحب بالإرجاع}\\ & \text{إذا كان السحب بدون ارجاع}\\ & \text{أو إذا كان حجم المجتمع N صغير أو منته}\\ & \text{أي ان } (n/N) \le 0.05\end{cases}$$

ملاحظة :تجدر الاشارة إلى أنه كلما زاد حجم المجتمع N فإن قيمة معامل التصحيح ستؤول إلى الواحد $\left[1 \approx \left(\frac{N-n}{N}\right)\right]$كما أنه كلما كان حجم العينة كبيرا $(n \ge 30)$ فإن$E(S) \simeq \boldsymbol{\sigma^2}$.

نظرية 8: انطلاقا من عينة عشوائية حجمها nمن المشاهدات المستقلة مسحوبة من مجتمع طبيعي

بتباين σ_X^2 فان:

$$\boldsymbol{\chi_v^2 = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}}$$

تتبع توزيع كاي مربع (chi-square) بدرجة حرية $v = n - 1$.

مثال:

أخذت عينة عشوائية حجمها 15 من توزيع طبيعي معدله μ وتباينه $\sigma^2=49$ وكانت s^2 تباين العينة . فأوجد احتمال ان تكون s^2 اقل من 82.9

الحل

$$P(s^2 \le 82.9) = ?$$

نعلم ان

$$\boldsymbol{\chi_v^2 = \frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2}}$$

$$P(S^2 \le 82.9) = P(\chi^2 \le 23.685)$$

من جدول قانون كاي تربيع وتحت درجة حرية 14 فان:

$$P(S^2 \le 82.9) = P(\chi^2 \le 23.685) = 95\%$$

6.1.2.1 توزيع المعاينة لنسبة تباييني عينتين.

إذا كان لدينا $X \sim \chi^2_{v_1}$ و $Y \sim \chi^2_{v_2}$ مستقلان عن بعضهما، $Z = \frac{(X/n)}{(Y/m)}$ يتبع توزيع F (Fisher) بدرجتي حرية v_1 وv_2 ($v_1 = n - 1, v_2 = m - 1$) ونكتب $Z \sim F_{v1v2}$
ويشير v_1 إلى درجة حرية البسط وv_2 يشير إلى درجة حرية المقام.

ومما سبق نستنتج أن توزيع المعاينة لنسبة تباييني عينتين مستقلتين يتبع توزيع فيشر، ويمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية 9 أن نسبة تباين عينتين مستقلتين حجمهما على الترتيب n و m، مسحوبتين من مجتمعين طبيعيين تبايناهما و σ_Y^2 σ_X^2 على التوالي تكتب كما يلي:

$$F = \frac{\frac{nS_X^2}{\sigma_X^2(n-1)}}{\frac{mS_Y^2}{\sigma_Y^2(m-1)}} \sim F_{(v1,v2)}$$

مثال:

سُحبت عينتان عشوائيتان مستقلتان من مجتمعين طبيعيين، حيث كان:

- حجم العينة الأولى 12 وتباين المجتمع الأول 25
- حجم العينة الثانية 15 وتباين المجتمع الثاني 16

أوجد احتمال أن يكون تباين العينة الأولى أكبر من 1.5 ضعف تباين العينة الثانية.

لدينا:

- n=12
- m=15
- σ_X^2 =25
- σ_Y^2 =16

نريد حساب

$$P(S_1^2 > 1.5 S_2^2)$$

P(F>0.96) =0.48

تمارين مع الحلول

التمرين 1:

يسحب محلل مالي عينة من بنك حجمها 10% من مجتمع متكون من 300 حساب بنكي. فيجد أن متوسط قيود الحسابات لهذه العينة هو 148.50 دج وانحرافها المعياري هو 35,75 دج. تعتبر متوسط كل القيود البنكية هو 138 دج.

- أحسب توزيع المعاينة الطبقية المتوسط العينات المسحوبة
- أحسب توزيع المعاينة الطبقية للانحراف المعياري
- أحسب احتمال أن يكون $\bar{}$ محصوراً بين 131.47 و144,53

التمرين 2

في دراسة الأرصدة عملاء بنك ما تبين أنها تتبع التوزيع الطبيعي بـ $\mu = 13600DA$ و $\sigma = 600$ DA. إذا قمنا بسحب 60 عينة حجم كل منها 9 حسابات من مجموع الحسابات المفتوحة وعددها 6000 حساب.

- أحسب $\mu -$ و $\sigma_{\bar{X}}$ في حالة السحب بالإرجاع والسحب بغير إرجاع.
- ما هي نسبة وعدد العينات التي يكون فيها $\bar{}$ محصوراً بين 13600 و13800؟ أقل من 13800؟

التمرين 3

مجتمع إحصائي متكون من مصابيح كهربائية ولتكن Xi مدة حياة هذه المصابيح ونفترض أنها تتبع القانون الطبيعي بمتوسط 10 وتباين 4. ولتكن$\bar{i}$ توزيع متوسط مدة حياة هذه المصابيح لعينات حجمها 4 ومحسوبة من مجتمع حجمه 100

- أحسب احتمال اختيار مصباح عشوائي تتراوح مدة حياته ما بين 8 ساعات و12 ساعة
- أحسب احتمال اختيار متوسط عينة مدة حياتها محصورة ما بين 8 ساعات و12 ساعة

التمرين 4

مجتمع إحصائي غير محدود (غير منته) موزع طبيعيا معالمه كما يلي :

$X_i \sim N(\mu = 60 ; \sigma^2 = 100)$ سحبت منه عينات عشوائية وطلب منا حساب القياسات الإحصائية كما هو ممثل في الجدول أدناه

الحجم	توزيع معاينة المتوسط $\bar{i}$			
n	$\mu_{\bar{X}}$	$\sigma_{\bar{X}}^2$	$\sigma_{\bar{X}}$	P ($\bar{X}_n >$ 63)
4	60	25	5	0.2742
8	….	….	….	….
16	….	….	….	….
32	….	….	….	….
64	….	….	….	….
100	….	….	….	….

أكمل الجدول مع تبرير النتائج بإجراء الحسابات

التمرين5: يحتوي احدى المستشفيات على 800 مريض من بينهم 320 مريض 40مريض يعاني من مرض مزمن ، اذا سحبنا عينة من بدون ارجاع .

1. ماهي طبيعة توزيع المرضى المصابين بمرض مزمن في العينة
2. ما هو احتمال ان تكون نسبة المصابين بمرض مزمن في العينة أقل من 50 %

التمرين6:

اذا كان $X_1 \to N(30,25)$ و سحبت من مجتمعه عينة حجمها 30 مشاهدة و $X_2 \to N(20,16)$

و سحبت من مجتمعه عينة حجمها 35 مشاهدة أوجد توزيع الفرق بين متوسطي العينتين. ثم احسب الاحتمال :

$$(X_1 - X_2 < 12)$$

التمرين7:

اذا كانت نسبة النجاح في امتحان توجهي في مدرسة للبنات P هي 0.7 و كانت نسبة النجاح في ذلك الامتحان في مدرسة للذكور(ب) هي 0.65اخذت عينة عشوائية حجمها $n1=70$ من المدرسة (ا) و أخذت عينة عشوائية

حجمها $n2=35$ من المدرسة (ب) فما احتمال ان تزيد نسبة انجاح في المدرسة (ا) على نسبة النجاح في المدرسة (ب) بمقدار 0.10 على الاكثر ؟

التمرين8:

مصنع A ينتج مصابيح كيربائية متوسط عمرها 1400 ساعة عمل و بإنحراف معياري 200 ساعة.بينما ينتج مصنع B مصابيح كيربائية متوسط عمرها 1200 ساعة عمل و بإنحراف معياري 100 ساعة.فإذا أخذت عينتين عشوائيين كل منيا 125 مصباح من المصنعينA و B
ماهو إحتمال أن تكون العينة ذا متوسط عمر يبلغ على الاقل :
1- 160 ساعة أكثر من العينة B
2- 250 ساعة أكثر من العينة B

التمرين9:

سحبت عينتين عشوائيتين من مؤسستين تتبع التوزيع الطبيعي،و كان متوسط الاجر المدفوع من قبل المؤسسة الاولى ل 49 عامل يساوي 23000 دج بإنحراف معياري 3200دج،أما متوسط الاجر المدفوع من قبل المؤسسة الثانية ل 64 عامل يساوي 21000 دج بإنحراف معياري 1500دج.
المطلوب: أحسب إحتمال أن متوسط الاجر المدفوع من قبل المؤسسة الاولى لها متوسط على الاقل 3000أكثر من متوسط الاجر المدفوع من المؤسسة الثانية.

حلول التمارين

التمرين 1:

S = 35.75 $\bar{X}$= 148.5 n = 0.1N = 0.1×300 = 30 N = 300 μ = 138

1. حساب توزيع المعاينة الطبقية لمتوسط العينات المسحوبة

أولاً يجب معرفة طبيعة السحب الذي قام به المحلل المالي بتطبيق القاعدة التالية:

- إذا كان حجم العينة أكبر أو يساوي 5% نقول بأن المجتمع منته أو محدود أي أن السحب تم بدون إرجاع
- إذا كان حجم العينة أصغر من 5% نقول بأن المجتمع غير منته أو غير محدود أي أن السحب تم بالإرجاع

%5N = 0, 5 * 300 = 15

n = 30 > 5% N

إذن المجتمع منته ومنه السحب تم بدون إرجاع.

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 138$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{35.75}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{300-30}{300-1}} = 6.20$$

2. حساب احتمال أن يكون $\bar{X}$ محصوراً بين 131,47 و144.53

$$P\,(131.47 \le \bar{X} \le 144.53) = P\left(\frac{\bar{X}_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} \le Zi \le \frac{\bar{X}_2-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}\right)$$

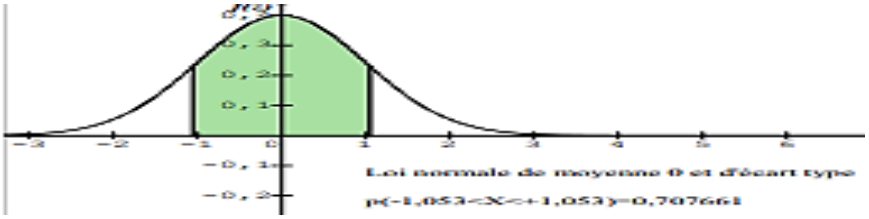
$$= P\left(\frac{131.47-138}{6.2} \le Zi \le \frac{144.53-138}{6.2}\right) = P\,(-1.053 \le Zi \le +1.053)$$

$$= 2 \times P\,(0 \le Zi \le +1.053)$$

$$= 2 \times 0.3538$$

$$= 0.7076$$

الشكل المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P\,(-1.053 \le Zi \le +1.053)$



التمرين2:

n = 9 $\grave{n}$= 60 N = 6000 μ = 1360

حساب $\mu_{\bar{X}}$ و $\sigma_{\bar{X}}$ في حالة السحب بالإرجاع

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 13600$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{600}{\sqrt{9}}\sqrt{\frac{6000-9}{6000-1}} = 199.86$$

ايجاد نسبة وعدد العينات التي يكون فيها $\bar{X}$ محصوراً بين 13600 و13800.

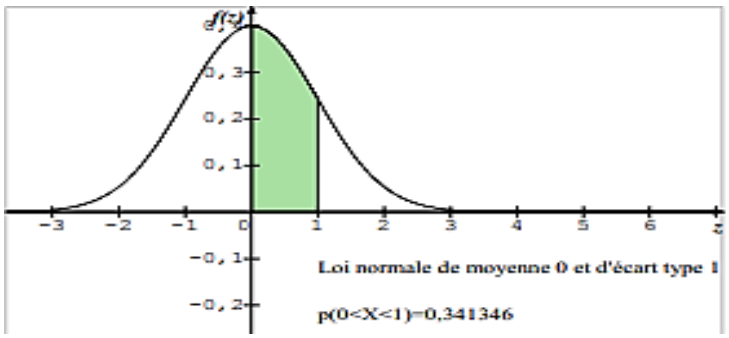
$$P\,(13600 \le \bar{X} \le 13800) = P\left(\frac{\bar{X}_1-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le Zi \le \frac{\bar{X}_2-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(\frac{13600-13600}{\frac{600}{\sqrt{9}}} \le Zi \le \frac{13800-13600}{\frac{600}{\sqrt{9}}}\right)$$

$$= P\,(0 \le Zi \le 1)$$

$$= 0.3413$$

الشكل: المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P\,(0 \le Zi \le 1)$



إذن نسبة العينات التي يكون فيها $\bar{X}$ محصوراً بين 13600 و13800. هو 34,13%

عدد العينات = الاحتمال مضروب في عدد العينات المسحوبة من المجتمع

عدد العينات = 0.3413* 60

عدد العينات =20,478 ≈ 21 عينة.

ايجاد نسبة وعدد العينات التي يكون فيها $\overline{X}$أقل من 13800.

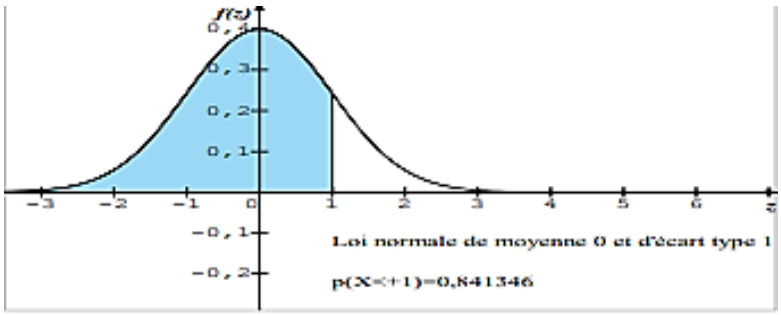
$$P(\overline{X} \leq 13800) = P\left(Zi \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(Zi \leq \frac{13800-13600}{\frac{600}{\sqrt{9}}}\right)$$

$$= P(Zi \leq +1)$$

$$= 0.8413$$

الشكل: المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال$P(Zi \leq +1)$



إذن نسبة العينات التي يكون فيها $\overline{X}$ أقل من 13800. هو 84,13%

عدد العينات = الاحتمال مضروب في عدد العينات المسحوبة من المجتمع

عدد العينات = 0.38413*60

عدد العينات = 50.478≈51 عينة.

التمرين3:

$\mu = 10$ $\sigma^2 = 4$ $n = 4$ $N = 100$ $\sigma = 2$

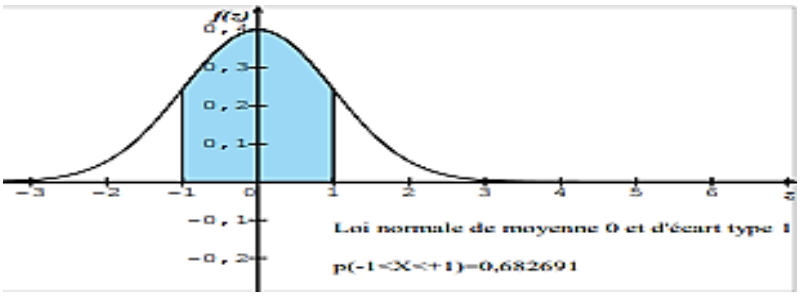
1. حساب احتمال اختيار مصباح عشوائي تتراوح مدة حياته ما بين 8 ساعات و12 ساعة

$$P(8 \leq Xi \leq 12) = P(Z_1 \leq Z_i \leq Z_2)$$

$$Z_1 = \frac{X_1-\mu}{\sigma} = \frac{8-10}{2} = -1$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{12-10}{2} = +1$$

الشكل: المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال $P(-1 \leq Z_i \leq 1)$



$$P(8 \leq Xi \leq 12) = P(-1 \leq Z_i \leq +1)$$

$$= 2 \times P(0 \leq Zi \leq +1)$$

$$= 2 \times 0.3413$$

$$= 0.6826$$

2. احتمال اختيار متوسط عينة مدة حياتها محصورة ما بين 8 ساعات و12 ساعة

يجب معرفة هل المجتمع منته أو غير منته أي هل السحب تم بالإرجاع أو بدون إرجاع

لدينا:

$\%5N = 0,05 * 100 = 5$

$n = 4 < 5\% N$

إذن نقول بأن المجتمع غير منته أي أن السحب تم بالإرجاع وعليه:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P(8 \leq Xi \leq 12) = P(Z_1 \leq Z_i \leq Z_2)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Zi \leq \frac{\bar{X}_2 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(\frac{8-10}{\frac{2}{\sqrt{4}}} \leq Zi \leq \frac{12-10}{\frac{2}{\sqrt{4}}}\right)$$

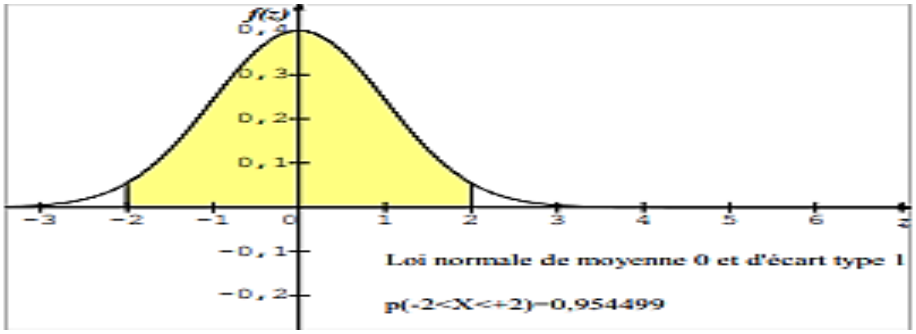
$$= P(-2 \leq Z_i \leq 2)$$

$$= 2 \times P(0 \leq Zi \leq +2)$$

$= 2 \times 0.4772$

$= 0.9544$

الشكل: المساحة تحت المنحنى الطبيعي للاحتمال$P\ (-2 \leq Z_i \leq 2)$



التمرين 4:

لدينا المجتمع الإحصائي غير محدود (غير منته) موزع طبيعياً معالمه كما يلي:

$X_i \sim N\ (\mu = 60\ ;\ \sigma^2 = 100)$

توزيع معاينة المتوسط $\bar{i}$				الحجم
$P\ (\bar{X}_n >$ **63)**	$\sigma_{\bar{X}}$	$\sigma_{\bar{X}}^2$	$\mu_{\bar{X}}$	**N**
0.2742	5	25	60	4
0.1979	$\sqrt{\frac{100}{8}} =$ 3.53	$\frac{100}{8} =$ 12.5	60	8
0.1150	$\sqrt{\frac{100}{16}}$ =2.5	$\frac{100}{16} =$ 6.25	60	16
0.0448	$\sqrt{\frac{100}{32}} =$ 1.767	$\frac{100}{32} =$ 3.125	60	32
0.0081	$\sqrt{\frac{100}{64}} =$ 1.25	$\frac{100}{64} =$ 1.5625	60	64
0.0013	$\sqrt{\frac{100}{100}} = 1$	$\frac{100}{100} = 1$	60	100

تبرير النتائج

مهما كان حجم العينة ومهما كان السحب بالإرجاع أو بدون إرجاع فإن:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 60$$

مادام أن المجتمع غير محدود فإن السحب تم بالإرجاع أي:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

n = 8 ➔ $P(\bar{X}_8 > 63) = P\left(Z > \frac{\bar{X}_8 - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(Z > \frac{63-60}{3.53}\right) = P(Z > 0.849) =$ 0.1979

n = 16 ➔ $P(\bar{X}_{16} > 63) = P\left(Z > \frac{\bar{X}_{16} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(Z > \frac{63-60}{2.5}\right) = P(Z > 1.2) =$ 0.1150

n = 32 ➔ $P(\bar{X}_{32} > 63) = P\left(Z > \frac{\bar{X}_{32} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(Z > \frac{63-60}{1.767}\right) = P(Z > 1.69) =$ 0.0448

n = 64 ➔ $P(\bar{X}_{64} > 63) = P\left(Z > \frac{\bar{X}_{64} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(Z > \frac{63-60}{1.25}\right) = P(Z > 2.4) =$ 0.0081

n = 100 ➔ $P(\bar{X}_{100} > 63) = P\left(Z > \frac{\bar{X}_{100} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right) = P\left(Z > \frac{63-60}{1}\right) = P(Z > 3) =$ 0.0013

التمرين05:

$$n = 40 \quad , \quad N = 800 \quad , \quad P = \frac{N_a}{N} = \frac{320}{800} = 0.4$$

-نلاحظ ان حجم العينة $(n = 40 \geq 30)$ وعليه فان توزيع المعاينة النسبة $\bar{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية مع $n(1-P) = 40(1-0.4) = 24 > 5$

-بما اننا في حالة السحب بدون ارجاع تكون الكتابة الاحصائية كالتالي:

$$\bar{P} \rightarrow N\left(P, \frac{P(1-P)}{n}\frac{(N-n)}{(N-1)}\right)$$

مع

$$\mu_P = P = 0.4$$

$$\sigma_P = \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}\frac{(N-n)}{(N-1)}} = \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{40}\frac{(800-40)}{(800-1)}} = 0.75$$

$$\overline{P} \rightarrow N(0.4,(0.75)^2)$$

نسبة المصابين بمرض مزمن في العينة أقل من50 % :

$$P(\overline{P} < 0.5) = P(Z < \frac{0.5-0.4}{0.75}) = P(Z < 0.13) = 0.5517$$

التمرين06:

لدينا

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \rightarrow N(\mu_1 - \mu_2;\ \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

من المعطيات :

المعالم	المجتمع الاول	المجتمع الثاني
التباين	$\sigma_2^2 = 25$	$\sigma_1^2 = 16$
المتوسط	$\mu_1 = 30$	$\mu_2 = 20$
حجم العينة	$n_1 = 30$	$n_2 = 35$

فنحصل على:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \rightarrow N(30-20;\ \frac{25}{30} + \frac{16}{35})$$

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \rightarrow N(10;1.29)$$

وبالتالي

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \le 12) = P(\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - 10}{\sqrt{1.29}} \le \frac{12-10}{\sqrt{1.29}}) = P(Z \le 1.76) = 0.9608$$

التمرين07:

نحسب

$$P(\overline{P}_1 - \overline{P}_2 < 0.10)$$

$$P(\overline{P}_1 - \overline{P}_2 < 0.10) = P\left(\frac{(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} < \frac{0.10 - (0.70 - 0.65)}{\sqrt{\frac{0.70\ (1-0.70)}{70} + \frac{0.65\ (1-0.65)}{35}}}\right) = P(Z < 0.51) = 0.6950$$

التمرين08:

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}}$$

$$1.\ Z = \frac{(160) - (1400\text{-}1200)}{\sqrt{\frac{200^2}{125} + \frac{100^2}{125}}} = -2$$

$$P(Z > -2) = P(Z < 2) = 0.9772$$

$$2.\ Z = \frac{(250) - (1400\text{-}1200)}{\sqrt{\frac{200^2}{125} + \frac{100^2}{125}}} = 2.5$$

$$P(Z > 2.5) = 1\text{-}P(Z < 2.5) = 0.0062$$

التمرين09:

$n_1 = \mathbf{49} \quad \mu_1 = \mathbf{23000} \quad \sigma_1 = \mathbf{3200}$

$n_2 = \mathbf{64} \quad \mu_2 = \mathbf{21000} \quad \sigma_2 = \mathbf{1500}$

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 = \mu_1 - \mu_2 = 23000 - 21000 = 2000$$

$$\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} = \frac{\mathbf{3200}}{\sqrt{49}} + \frac{\mathbf{1500}}{\sqrt{64}} = 494.10$$

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \geq 3000) = P\left(Z \geq \frac{3000 - 2000}{494.10}\right) = P(Z \geq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

المحور2: نظرية التقدير

تمهيد:

يمثل التقدير الأداة التي تسمح لنا بإجراء استدلالات حول معالم المجتمع انطلاقا من عينة مسحوبة منه هذا الاستدلال لا يصح إلا في ظل شروط محددة، تتعلق أساسا بفرضيات تتمحور حول طبيعة بيانات المجتمع والعينة.

لذا سنتطرق في هذا المحور الى أهم المفاهيم الأساسية المتعلقة بالتقدير ثم نتناول مختلف مجالات الثقة للمعالم الإحصائية.

1.2 مفاهيم أساسية

1.1.2 مفهوم التقدير

المقصود بالتقدير estimation هو تقدير معالم المجتمع أو (التوزيع الاحتمالي) والتي غالبا ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها من معطيات العينة، وعلى سبيل المثال تقدير متوسط نمو السكان أو تقدير متوسط عمر فئة معينة من المجتمع، وعموما هناك نوعين من التقدير الاول التقدير النقطي point estimation ويسمى الثاني تقدير بمجال Intervalle estimation.

أ. حالة التقدير النقطي:

نحصل على قيمة واحدة من العينة وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لوسيط المجتمع المجهولة فمثال لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة.

ب. حالة التقدير بمجال:

أما في تقدير المجال فنتحصل على مجال معرف بحدين (حد أدنى وحد أعلى) نحصل عليهما من العينة فمثال إذا قدرنا الوسط الحسابي ألعمار الناخبين يتراوح ما بين 34 و46 سنة أي يتراوح بين 34 سنة كحد أدنى و46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير مجال للوسط الحسابي ألعمار الناخبين في المجتمع

ويحتوي المجال على أكثر من قيمة بل قيد يكون غير نهائي وغير محدود غالبا، ويسمى التقدير بمجال الثقة ايضا لأنه هذه الفترات تعتمد في تكوينها الإحصائي على درجات أو مستويات ثقة معينة مثل 95% أو 99%.

2.1.2خصائص المقدر الجيد:

بصفة عامة يعتبر المقدر جيدا إذا توفرت فيه الخصاص التالية:

أ. الدقة وعدم الانحياز

يعرف عدم الانحياز بتساوي الوسيط المراد تقديره ɵ مثال مع توقع وسيط للتقدير $\hat{\theta}$أن مقدار الخطأ في التقدير يساوي صفرا وبعبارة رياضية نجد أن شرط عدم الانحياز هو:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ويعتبر شرط عدم التحيز أهم شروط التقديرات الوسيطية.

مثال 01:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_6$ هي عناصر عشوائية مستقلة من مجتمع احصائي طبيعي التوزيع بمتوسط μ وتباينσ^2 .

- أحسب قيمة Cحيث يكون وسيط.

$$T = C\,[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2]$$

غير منحاز لتباين المجتمع σ^2.

الحل:

ليكن الوسيط T غير منحاز يتوجب أن يكون:

$$E(T) - \sigma^2 = 0$$

$$E(T) = E\,[C\,[(X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2]]$$

بإضافة μ وطرح μ نجد:

$$E(T) = CE\,[((X_1 - \mu) - (X_2 - \mu))^2 + ((X_3 - \mu) - (X_4 - \mu))^2 + ((X_5 - \mu) - (X_6 - \mu))^2]$$

$$= CE\,[\sum_{i=n}^{6}(X_1 - \mu)^2 - 2(X_1 - \mu)(X2 - \mu)) - 2(X_3 - \mu)(X_4 - \mu)) - 2(X_5 - \mu)(X_6 - \mu))]$$

$$= CE[\sum_{i=n}^{6}(X_1 - \mu)^2 - 2[(X_1 - \mu)(X_2 - \mu)) + (X_3 - \mu)(X_4 - \mu)) + (X_5 - \mu)(X_6 - \mu))]$$

$$= CE[\sum_{i=n}^{6}(Xi - \mu)^2 - 2[cov(X_1, X_2) - cov(X_3, X_4) - cov(X_5, X_6)] = \sigma^2$$

ومنه نجد أن:

$$C=\frac{\sigma^2}{\sum_1^6 \sigma^2 - 2\sum_{i=1.2.3} cov(X_i, X_{i+1})}$$

وبما ان:

$$\sum_1^6 \sigma^2 = 6$$

$$cov\,(X_i, X_j) = 0,\ (i \neq j)$$

فان:

$$C=\frac{\sigma^2}{6\sigma^2}=\frac{1}{6}$$

ب. الكفاءة:

نظرا للمشكل المذكور في خاصية عدم التحيز يساوي بعض خاصية الكفاءة مع أصغر وسط مربع الخطأ وبعض يعرف الكفاءة للعينات الكبيرة فقط إذا كان لدينا أكثر من مقدر لمعلمة معينة فنقول أن المقدر الأكفأ هو المقدر الذي له أقل تباين، فكفاءة خاصية نسبية تستخدم للمقارنة بين المقدرات المختلفة لنفس المعلمة و بنفس حجم العينة، و يكون المقدر الأكفأ هو الذي يعطي تقديرات قريبة من المعلمة المجهولة فاذا كان لدين مقدرين $\hat{\theta}_1$و $\hat{\theta}_2$ لمعلمتين θ_1و θ_2 على الترتيب فان $\hat{\theta}_1$ أكفأ من $\hat{\theta}_2$ إذا كان:

$$\mathbf{V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)}$$

ويتم حساب كفاءة المقدر d من العلاقة:

$$\mathbf{e(d)} = \frac{1}{V(d)nE(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial \theta})^2}$$

أو بصورة مكافئة:

$$\mathbf{e(d)} = \frac{1}{V(d)nE(\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial \theta^2})^2}$$

مثال2:

اذا كان X متغير عشوائي بحيث $X \rightarrow b\,(1,\theta)$ فابحث عن كفاءة المقدر :

$$\mathbf{d= X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

الحل:

ان التوزيع المذكور هو توزيع برنولي وهو حالة خاصة من توزيع ذي الحدين عندما تكون n = 1 حيث القراءة الاحتمالية هو:

$$f(x, \theta) = \theta^{x}(1-\theta)^{1-x}$$

مع:

$$E(x) = \theta \qquad V(x) = \theta(1-\theta)$$

وبالتالي:

$$\ln(x, \theta) = X\ln\theta + (1-X)\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} = \frac{X}{\theta} - \frac{1-X}{1-\theta} = \frac{X-\theta}{\theta(1-\theta)}$$

$$E\left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} \cdot E(X-\theta)^2$$

$$= \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} \cdot V(X) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$V(d) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

$$E(d) = \frac{1}{\frac{\theta(1-\theta)}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{\theta(1-\theta)}} = 1$$

وتعتبر هذه القيمة جيدة وبالتالي يكون هذا المقدر غير متحيز والأكفأ.

ج. خاصية الاتساق:

نقول عن المقدر T ان مقدر متسق (معقول) للوسيط θ اذا تحقق (لكل ثابت موجب) الشرط التالي:

$$\lim_{n\to\infty} P[|T_n - \theta| \geq \partial] = 0$$

أو بصورة أخرى:

$$\lim_{n\to\infty} P[|T_n - \theta| < \partial] = 1$$

اذا جعلنا $\partial \to 0$ فهذا يعني أن انطباق T_n على θ هو حدث مؤكد عندما $n \to \infty$ ، ومن المفيد ذكره

الآن أنه يمكن الاستفادة من متراجحة تشيبتشيف(Chebyshev's inequalit) إثبات ما اذا كان مقدرا ما متسقا أم لا ؟ كما هو في المثال التالي:

مثال03:

بين أن المتغير الإحصائي $\overline{X}$ هو مقدر متسق للوسيط μ:

نذكر متراجحة(Chebyshev's inequalit) التي تنص على اذا كان X متغيرا عشوائيا توقعه الرياضي μ و تباينه σ فان لكل ثابت موجب C يكون :

$$P[|x-\mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2(x)}{C^2}$$

فاذا وضعنا $x = \bar{x}$ يكون:

$$P[|\bar{x}-\mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2(\bar{x})}{C^2}$$

ولكن $\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$ وبالتالي:

$$P[|\bar{x}-\mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2}{nC^2}$$

ويأخذ نهاية الطرفين عندما تؤول n الى مالا نهاية نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty} P[|\bar{x}-\mu| \geq C] = 0$$

و هذا ما يثبت (حسب تعريف الاتساق) أن $\bar{X}$مقدر متسق للوسيط μ .

د. الكفاية:

يقال للمقدر$\hat{\theta}$ بأنه مقدر كاف لتقدير θ بأنه ذلك المقدر الذي يستعمل كل معلومات العينة ومن ثم فان أي مقدر أخر لا يمكنه أن يضيف جديدا بالاستخدام نفس العينة فمثال إذا كان التوزيع التكراري للعينة

$(X_1,\ldots\ldots, X_n)$ والمشروط بالشرط $\hat{\theta} = k$ لا يعتمد على الوسيط θ ذاته و لكافة قيم k و الكفاية تعني عدم الحاجة الى اضافة عناصر أو المعلومات أخرى من المجتمع الإحصائي لأن هذه العناصر الاضافية سوف لن تعطي من المعلومات أكثر مما أعطاه المقدر $\hat{\theta}$ نفسه و لو افترضنا بأن هناك مقدرا اخر مثل $\widehat{B}$ $(X_1,\ldots\ldots, X_n)$ لتقدير θ فإننا سنجد أن $\hat{B}$ يعتمد أو يرتبط بشكل ما بالمقدر $\hat{\theta}$ نفسه وليس مستقلا عنه .

3.1.2 طرق التقدير:

يمكن أن نميز بين طريقتين كلاسيكيتين للتقدير وهما التقدير النقطي والتقدير بفترة أو مجال:

أ. التقدير النقطي:

يعرف التقدير النقطي لأي وسيط مثل ϴ بالتقدير العددي المفرد الذي يحدد قيمة معينة واحدة فقط مثل $\hat{\theta}$ لذلك الوسيط.

مثال04:

لتقدير عدد الكلمات في أحد الكتب أخذت عينة حجما 10 صفحات عشوائيا من ذلك الكتاب، وتم عد الكلمات فيها فكان كما يلي:(400 ،260،320، 340 ،242 204،470، 480، 368، 410)

المطلوب:

1. أوجد التقدير النقطي لمتوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة؟
2. إذا كان الكتاب يحتوي 240 صفحة فكم تقدر عدد الكلمات فيه؟

الحل:

$$\mu = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{400 + 260 + 320 + 340 + 242 + 204 + 470 + 480 + 368 + 416}{10} = 350$$

وبالتالي يتم تقدير متوسط عدد كلمات في الصفحة الواحدة ب 301 كلمة أي أن $\mu = 301$

أما تقدير عدد الكلمات في الكتاب فهو:

$$350*240 = 84000$$

ب. التقدير بمجال:

ان التقدير النقطي لمتوسط المجتمع والذي يمثل $\bar{X}$ لا يعبر حقيقة عن μ لذلك يتم استخدام التقدير بمجال حيث لنا قيمة دنيا وقيمة عليا.

2.2فترة الثقة للمتوسط والفرق بين وسطين

1.2.2فترة الثقة لمتوسط

أ. فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معلوم:

نعلم إذا كان (μ^{-}, σ^2) N $\rightarrow$ $^{-}$ فان $\bar{X}$ N $\rightarrow$ $(\mu_{\bar{x}}, \frac{\sigma_2}{n})$ و كذلك N (0,1) $\rightarrow$ $\frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ =Z فنعر فترة الثقة % (α-1) أو نقول (فترة الثقة عند مستوى معنوية α) بأنها الفترة التي تحقق ما يلي :

$$P(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1- \alpha$$

وبتبسيط فترة الاحتمال التالي:

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

نحصل على:

$$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

حيث يسمى المقدار: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حد (α - 1)% الخطأ في تقدير وسط المجتمع.

ملاحظة:

حيث $\frac{\alpha}{2}$ هي قيمة المتغير الطبيعي المعياري (الدرجة المعيارية الحرجة) التي تقع على يمينها مساحة تساوي $\frac{\alpha}{2}$ و من الجدير بالانتباه في الحسابات العادية هو أن الاحتمال P= 1- α الشائع في هذا الصدد هو P = 0.95 أي أن α = 0.05 و من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد:

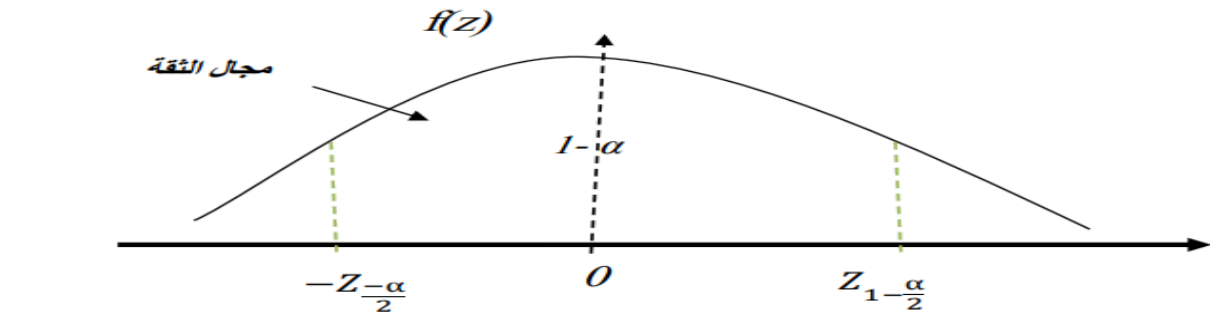
$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{5\%}{2}} = Z_{0.025} = 1.96$$

أي:

$$p\,(Z > \lambda) = \frac{\alpha}{2} = \frac{5\%}{2} = 0.025$$
$$1 - p\,(Z < \lambda) = 0.025$$
$$p\,(Z < \lambda) = 1 - 0.025 = 0.975$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري كما بينا في المحور الاول من المطبوعة وبطريقة القراءة العكسية نحصل على:

$\lambda = 1.96$ وهذا عند مستوى معنوية 5%.



التمثيل البياني لفترة الثقة لتوزيع الطبيعي.

أما الجدول ادناه يبين باقي القيم:

جدول: جدول يوضح بعض قيم مستوى الثقة ومعامل الثقة.

مستوى الثقة 1- α	0.99	0.98	0.95	0.90	0.8	0.5
مستوى المعنوية α	0.01	0.02	0.05	0.10	0.2	0.5
الاحتمال $1-\frac{\alpha}{2}$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75
معامل الثقة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	2.58	2.326	1.96	1.645	1.282	0.674

المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على جدول التوزيع الطبيعي المعياري والعالقة الرياضية أعاله.

وبالتالي إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذات توزيعا طبيعيا وتباينه معروفا أو كانت العينة كبيرة أي أكثر من 30 فان توزيع المعاينة للوسط الحسابي يتبع التوزيع الطبيعي، ويرمز لفترة الثقة كما يلي:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} . Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

مثال 05:

مجتمع موزع توزيعا طبيعيا، انحرافه المعياري $\sigma = 10$ سحبت منه عينة عشوائية حجمها $n = 24$ وكان متوسط العينة $\bar{X} = 56$ ، أحسب متوسط تقدير المجتمع بثقة قدرها 95%.

الحل :

لدينا

مستوى الثقة: $1-\alpha = \%95$ ، مستوى الخطأ او المعنوية : 5%

لدينا: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

بالتعويض في العلاقة أعلاه:

$$56 - 1.96.\frac{10}{\sqrt{24}} < \mu < 56 + 1.96.\frac{10}{\sqrt{24}}$$

$$51.99916 < \mu < 60.00083$$

ونكتب:

$$IC_{\mu} = \left[56 \mp \frac{10}{\sqrt{24}} . 1.96\right]$$

أي عند الثقة مقدارها 95% ستكون قيمة متوسط عند المجال: [51.99916 , 60.00083]

كخلاصة عامة لفترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه معلوم تتم ووفق مراحل مثل ما هو مبين في جدول ادناه:

الجدول: جدول يوضح مراحل بناء فترة الثقة لمتوسط مجتمع.

المرحلة الاولى	حساب الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$
المرحلة الثانية	حساب الانحراف المعياري للمتوسط $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
المرحلة الثالثة	ضرب الانحراف المعياري للمتوسط في معامل الثقة المناسب $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ حسب درجة الثقة المطلوبة
المرحلة الرابعة	طرح حاصل ضارب المرحلة من الوسط الحسابي للعينة فنحصل على حد أدنى وحدة أعلى لفترة التقدير.
المرحلة الخامسة	بناء فترة الثقة : $IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{\sigma}{\sqrt{n}} . Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

المصدر: من اعداد الباحث اعتمادا على المعطيات والعالقات السابقة.

ب. فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي او $n \geq 30$ و تباينه مجهول :

لاحظنا فيما سبق فترة الثقة لمتوسط μ إذا كانت المعاينة من مجتمع طبيعي ذي تباين σ^2 معلوم أما الان سنتطرق الى طريقة بناء فترة الثقة للوسط μ ان لم يكن المجتمع خاضع للتوزيع طبيعي ان نظرية

نهاية المركزية تعطينا حجر الأساس حيث $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ يخضع لتوزيع طبيعي معياري تقريبا إذا كانت n كبيرة ولذلك نستطيع القول إذا اخذنا عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه μ وتباينه σ^2 معلومة فان فترة الثقة % $100(1-\alpha)$ للمعلمة μ هي تقريبا:

$$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$$

إذا كانت $n \geq 30$، نستعمل الانحراف المعياري للعينة $\sigma_{\bar{X}}$ بدل المجتمع σ ويصبح لدينا:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

في كثير من الاحيان لا تكون σ^2 معلومة ولذلك نستعمل $\sigma_{\bar{X}}{}^2$ (تبيان العينة كتقدير ل σ^2) وهذا اذا كان حجم العينة كبير $n \geq 30$.

مثال 06:

عينة عشوائية حجمها n =81 ، أعطت $\sigma_{\bar{X}} = 6$ ، $\bar{X} = 73$

أوجد فترة الثقة 98 % لوسط المجتمع μ .

الحل:

يتضح أن تباين σ^2 المجتمع مجهول لكن حجم العينة أكبر من 30 ولذلك نستعمل الانحراف المعياري للعينة $\sigma_{\bar{X}}$ بدل المجتمع σ .

مستوى الثقة : $1-\alpha = 98\%$ ، مستوى الخطأ او المعنوية : 2%

لدينا: $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.23$

$$\bar{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$$

بالتعويض في العالقة أعلاه:

$$73 - 2.33. \frac{6}{\sqrt{81}} < \mu < 73 + 2.33. \frac{6}{\sqrt{81}}$$

$$51.99916 < \mu < 60.00083$$

ونكتب:

$$IC_{\mu} = \left[73 \mp \frac{6}{\sqrt{81}} . 2.33\right]$$

أي عند فترة الثقة مقدارها 98% على المجال: [71.447 , 74.553]

ج. فترة الثقة لمتوسط مجتمع طبيعي تباينه مجهول و $n \leq 30$:

إذا كانت العينة صغيرة بمعنى $n < 30$، و الانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي مجهول فإن التوزيع الإحصائي المتبع في مثل هذه الحالات هو ما يطلق عليه توزيع ستيودنت أو ما يعرف بتوزيع العينات الصغيرة و كلما زادت درجة حريته اقترب من توزيع طبيعي المعياري ، وفي هذه الحالة يتم فيها استبدال الانحراف المعياري للمجتمع σ بالانحراف المعياري للعينة $\sigma_{\bar{X}}$ لأن الانحراف المعياري يقترب من قيمة التباين و نستخدم قيمة توزيع t ستودنت بدل Z التوزيع الطبيعي المعياري وعليه فان مجال الثقة للوسط الحسابي عند مستوى معنوية α هو كالتالي:

$$\bar{X} - t_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)} \cdot \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$$

يصبح:

$$IC_{\mu} = \left[\bar{X} \mp \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}} . t_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}\right]$$

مثال 07:

إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منه عينة عشوائية حجمها 10 أفراد، بمتوسط $\bar{X} = 72$ وانحراف معياري للعينة $\sigma_{\bar{X}} = 6.4$

المطلوب:

أوجد مجال الثقة للوسط الحسابي لجميع الأفراد بمستوى ثقة 95%.

الحل:

لدينا

$$72 - t_{(1-\frac{0.05}{2},10-1)} \cdot \frac{6.4}{\sqrt{10}} < \mu < 72 + t_{(1-\frac{0.05}{2},10-1)} \cdot \frac{6.4}{\sqrt{10}}$$

$$67.42 < \mu < 76.54$$

حيث تم حساب $t_{(1-\frac{0.05}{2},10-1)}$ من جدول توزيع ستودنت $t_{(0.975,\ 9)}$ والتي تقابل القيمة: 2.262

ويصبح لدينا مجال الثقة كالتالي:

$$IC_{\mu} = \left[72 \mp \frac{6.4}{\sqrt{10}} . 2.262\right]$$

إذا الوسط الحسابي للمداخيل يتراوح ما بين 67.42 كحد أدنى و76.54 كحد أعلى.

ملاحظة:

في حالة فترة الثقة لمتوسط مجتمع تباينه مجهول وتوزيعه مجهول في مثل هذه الحالة عندما يكون حجم العينة $n \geq 30$ فقد وجد حسب نظرية النهاية المركزية بأن متوسط العينة $\overline{X}$ يقارب التوزيع الطبيعي، وعليه نقوم بتقدير الانحراف المعياري للمجتمع σ بدلالة الانحراف المعياري للعينة $\sigma_{\overline{X}}$.

1. تحديد حجم العينة اللازم للتقدير:

بعد دراستنا لكيفية ايجاد فترات الثقة، ينشأ لدينا السؤال التالي: قبل اجراء التجربة وتسجيل قيم المشاهدات في العينة، ما هو حجم العينة المطلوبة كي نحصل على فترة ثقة بطول معلوم أو بطأ محدد لا نريد أن نتجاوزه .

لاحظ انه إذا كانت المعاينة من توزيع طبيعي تباينه معلوم أو من توزيع ما تباينه معلوم وحجم العينة كبير فان فترة القفة % 100(1-α) للوسط μ هي:

$$\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

وطول هذه الفترة أو ما يسمى حد الخطأ يساوي $d = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ فاذا أردنا طول الفترة لا يزيد عن d فذلك يعني:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{d}{\sigma . Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow \sqrt{n} \leq \frac{\sigma . Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}$$

$$n \geq \left(\frac{\sigma . Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2$$

مثال 08:

أوجد حجم العينة التي يجب أخذها من توزيع طبيعي للحصول على فترة 95 % للوسط وبطول خطأ لا يزيد عن 1.6وانحراف معياري 10.

الحل:

من المعطيات: $Z_{(1-\alpha/2)} = 1.96$ $1-\alpha = 95\%$ $d = 1.6$

بالتعويض في العلاقة نجد:

$$n \geq \left(\frac{10*1.96}{1.6}\right)^2$$

$$n = 150$$

ويمكن تلخيص الحالات السابقة لبناء فترة الثقة في الجدول التالي:

الجدول: جدول يوضح حالات بناء فترة الثقة حسب معلومية التباين والتوزيع الإحصائي.

$\bar{X}$	σ	N	تباين المجتمع	قانون المجتمع
$\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	n <30 او n ≥30	معلوم	طبيعي
$\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}})$	$\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$	n ≥30	مجهول	
$t_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}$	$\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$	n <30		
$\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	n ≥30	معلوم	غير معلوم
$\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}})$	$\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\sqrt{n}}$	n ≥100	مجهول	

2.2.2 فترة الثقة للفرق بين وسطين:

أ. فترة الثقة للفرق بين وسطين مع معلومية تباين المجتمعين:

إذا كان المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وفق العلاقة التالية:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \rightarrow N(\mu_1 - \mu_2 ; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

وبالتالي:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu 1 - \mu 2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightarrow N(0;1)$$

فتكون فترة الثقة $\%\ (1-\alpha)$ كالتالي:

$$-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu 1 - \mu 2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

وبعد تبسيط المتباينة الى $(\mu_1 - \mu_2)$ نجد أن:

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC_{\mu} - \mu_2 = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

مثال 09:

عينة عشوائية حجمها $n_1=80$ و متوسطها $\bar{X}_1=1680$ وعينة عشوائية ثانية حجمها $n_2=75$ ومتوسطها $\bar{X}_2=1200$ وكان الانحراف المعياري للمجتمعين $\sigma_1^2 = 500$ و $\sigma_2^2 = 600$ على التوالي .

- ماهي فترة الثقة عند 99% للفرق بين متوسطي المجتمعين؟

الحل:

لدينا:

$\bar{X}_1=1680$ $\bar{X}_2=1200$

$\sigma_1^2 = 500$ $\sigma_2^2 = 600$

ومنه فإن فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين بعد التعويض يعطى بالعلاقة التالية:

$$(1680-1200) - Z_{1-\frac{0.01}{2}} \sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}} < (\mu_1 - \mu_2) < (1680-1200) + Z_{1-\frac{0.01}{2}} \sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}}$$

$$250 < \mu_1 - \mu_2 < 710$$

أي عند مستوى ثقة 99% ستكون قيمة الفرق بين متوسط المجتمعين ضمن المجال: [710 − 250]

ب. فترة الثقة للفرق بين وسطين مع مجهولية تباين المجتمعين:

- **إذا كان $(n_1, n_2 \geq 30)$**

إذا كان تباينين مجتمعين σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين وكان حجم العينتين المأخوذين من هذا المجتمعين كبيرا بقدر كاف أي $(n_1, n_2 \geq 30)$ عندئذ يبقى التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي المعياري مع تبديل σ_1^2 و σ_2^2 بتبايني العينة وتصبح العلاقة:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2) < (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC_{\mu} - \mu_2 = \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}} \right]$$

- **إذا كان $(n_1, n_2 < 30)$ أو أحدهما:**

عندما يكون لدينا مجتمعين احصائيين غير معلومي التباين ولكن توزيعها التكراري من النوع الطبيعي وعندما يكون حجم العينتين المأخوذتين من هذين المجتمعين صغير **$(n_1, n_2 < 30)$** فإننا نستخدم عادة متباينة الثقة الخاصة بتوزيع t التالية:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2)$$

$$< (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}}$$

ويتم حساب درجة الحرية وفق هذه للتوزيع ستودنت كالتالي : $V = n_1 + n_2 - 2$ ويقع ضمن متباينة الثقة التالية وذلك بدرجة ثقة $P = (1 - \alpha)\ \%$.

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\mu_1 - \mu_2 = \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \mp t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}} \right]$$

مثل 10:

أعد حل المثال السابق (09) في حالة مجهولية تباين المجتمعين وبافتراض تباين العينتين هما كالتالي:

$$\sigma_2^2 = 600 \qquad \sigma_1^2 = 500$$

$$n_2 = 12 \qquad n_1 = 8$$

الحل:

بتطبيق العالقة التالية:

$$(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}} < (\mu_1 - \mu_2)$$

$$< (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + t_{(1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{\sigma_{\overline{x_1}}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{\overline{x_2}}^2}{n_2}}$$

وبالتعويض نجد:

$$(1680 - 1200) - t_{(1-\frac{0.01}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}} < (\mu_1 - \mu_2)$$

$$< (1680 - 1200) + t_{(1-\frac{0.01}{2}, n_1+n_2-2)} \sqrt{\frac{500^2}{80} + \frac{600^2}{75}}$$

مع: $t_{(1-\frac{0.01}{2}, 8+12-2)} = t_{(0.995, 18)} = 2.878$

أي:

$$223.79 < (\mu_1 - \mu_2) < 736.2066$$

3.2 فترة الثقة لتباين المجتمع والنسبة بين تباينين

1.3.2 فترة الثقة لتباين المجتمع

بالإضافة إلى حصولنا على فترة ثقة لمتوسط ونسبة خاصية معينة، يكون من المفيد أن نحصل على نتائج العينة على فترة للتباين حتى يمكننا ذلك من الحصول على فترة الثقة لتباين المقدرات التي تم الحصول عليها، ولوضع صيغة فترة ثقة لهذا الغرض يتم استخدام توزيع مربع كاي الذي يفترض أن

تكون العينة العشوائية المأخوذة من مجتمع احصائي ذي توزيع طبي، ويمكن الانطلاق من العالقة التالية:

$$\frac{(n-1)\sigma_{\bar{X}}^2}{\sigma^2} \rightarrow X_{n-1}^2$$

وتعرف فترة الثقة لتباين المجتمع بأنها الفترة التي تحقق:

$$p\left(X_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}^2 < \frac{(n-1)\sigma_{\bar{X}}^2}{\sigma^2} < X_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}^2\right) = 1-\alpha$$

وبعد حل المتباينة نجد أن فترة الثقة للتباين كالتالي:

$$\frac{(n-1)\sigma_{\bar{X}}^2}{X_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}^2} < \frac{(n-1)\sigma_{\bar{X}}^2}{X_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}^2}$$

حيث : **n** :حجم العينة، $\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}}^2}$: يمثل تباين العينة العشوائية صغيرة كانت أو كبيرة.

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC\sigma^2 = \left[\frac{(n-1)\sigma_{\bar{X}}^2}{X_{(1-\frac{\alpha}{2},n-1)}^2}, \frac{(n-1)\sigma_{\bar{X}}^2}{X_{(\frac{\alpha}{2},n-1)}^2}\right]$$

مثال 11:

أوجد فترة الثقة 95% لتباين مجتمع سحبت منه عينة حجمها 8 و تباينها 12.6.

الحل:

لدينا من المعطيات:

n=8 $\sigma_{\bar{X}}^2$ =12.6 α=0.05%

من جدول توزيع كاي التربيع نجد:

$$X_{(1-\frac{0.05}{2},\ 8-1)}^2 = X_{(0.025,\ 7)}^2 = 1.69$$

بالتعويض في العلاقة نجد:

$$\frac{(8-1).12.6}{16} < \sigma^2 < \frac{(8-1).12.6}{1.69}$$

$$\sigma^2 < 52.18 \qquad 5.51$$

2.3.2 فترة الثقة للنسبة بين تباينين

في حالة فترة الثقة للنسبة بين تباينين تخضع للتوزيع فيشر $F^{P}_{(n_1-1,\ n_2-1)}$ فاذا كانت

$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ قيم عينة مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu_1 - \sigma_1^2)$ و كانت $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n$ عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي$N(\mu_1 - \sigma_2^2)$ مستقل عن التوزيع الأول فان فترة الثقة عند مستوى $(1 - \alpha)$ للنسبة $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ *فيتم استخدام احصائية فيشر التالية*:

$$F = \frac{\sigma^2_{\bar{X}1}/\sigma_1^2}{\sigma^2_{\bar{X}2}/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 \cdot \sigma^2_{\bar{X}1}}{\sigma_1^2 \cdot \sigma^2_{\bar{X}2}}$$

وبدرجتي حرية $v_1 = n_1 - 1$ ، $v_2 = n_2 - 1$ على الترتيب أي أن:

$$\frac{\sigma^2_{\bar{X}1}}{\sigma^2_{\bar{X}2}} \cdot F^{\frac{\alpha}{2}}_{(n_1-1,\ n_2-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{\sigma^2_{\bar{X}1}}{\sigma^2_{\bar{X}2}} \cdot F^{1-\frac{\alpha}{2}}_{(n_1-1,\ n_2-1)}$$

حيث يمكن تعويض:

$$\frac{\sigma^2_{\bar{X}1}}{\sigma^2_{\bar{X}2}} \cdot F^{\frac{\alpha}{2}}_{(n_1-1,\ n_2-1)} = \frac{\sigma^2_{\bar{X}1}}{\sigma^2_{\bar{X}2}} \cdot \frac{1}{F^{1-\frac{\alpha}{2}}_{(n_2-1,\ n_1-1)}}$$

قمنا بشرح ذلك في المحور الاول من المطبوعة عندما تطرقنا الى اختبار فيشر.

مثال 12:

أخذت عينة حجمها $n_1 = 8$ مسحوبة وتباينها $\sigma^2_{\bar{X}1} = 82$ من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu_1 - \sigma_1^2)$ و عينة أخرى حجمه $n_2 = 11$ مستقلة عن الأولى وتباينها $\sigma^2_{\bar{X}2} = 160$ من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي$N(\mu_1 - \sigma_2^2)$

- ماهي حدود الثقة عند المستوى $(1 - \alpha) = 90\%$ ؟

الحل:

بالتعويض في عالقة فترة الثقة لنسبتين نجد:

$$\frac{82}{160} \cdot F^{\frac{0.1}{2}}_{(8-1,\ 11-1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{82}{160} \cdot F^{1-\frac{0.1}{2}}_{(8-1,\ 11-1)}$$

$$2.49 \quad . 0.28 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2.49 \; . 3.14$$

حيث:

$F_{(7,\ 10)}^{0.95} = 3.14$

$$F_{(7,\ 10)}^{0.05} = 3.14 = \frac{1}{F_{(10,\ 7)}^{0.05}} = \frac{1}{3.57} = 0.28$$

$$0.6972 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 7.81$$

أي عند مستوى ثقة 95 % ستكون فيها قيمة نسبة التباين لمجتمعين تقع ضمن المجال [7.81 , 0.6972]

4.2 فترة الثقة لنسبة خاصية المجتمع والفرق بين نسبتين

1.4.2 فترة الثقة لنسبة خاصية المجتمع P

درسنا في المحور الثاني من مطبوعة نظرية مفادها إذا كانت P تمثل النسبة في المجتمع تحقق خاصية ما و $\bar{}$ تمثل النسبة في العينة التي تحقق نفس الخاصية فان توزيع المعاينة يقترب من التوزيع الطبيعي حسب نظرية النهاية المركزية لما ($n \geq 30$) مع $n(1-P) > 5$.

$\mu_p = P$ التباين: $\sigma_{\bar{p}}^2 = \frac{P(1-p)}{n}$

نعلم ان:

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{n\,P(1-p)}} = \frac{\bar{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}}$$

نعرف فترة الثقة% $(1 - \alpha)$ للنسبة التي تحقق عالقة التالية:

$$p\left(-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha$$

فنحصل على:

$$\bar{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \leq \mathrm{P} \leq \bar{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$\mathrm{IC_p} = \left[\bar{P} \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}\right]$$

مثال 13:

أخذت عينة عشوائية من احدى المجتمعات تتكون من ذكور واناث حجمها 85 وجد منها 10 ذكور، أوجد فترة الثقة لنسبة الذكور في المجتمع P عند فترة الثقة 95%.

الحل:

لدينا : $\bar{P} = \frac{10}{85} = 0.12$ n= 85

$$\bar{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}} \leq \mathrm{P} \leq \bar{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-p)}{n}}$$

بالتعويض:

$$0.12 - Z_{0.025}\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{85}} \leq \mathrm{P} \leq 0.12 + Z_{0.025}\sqrt{\frac{0.12(1-0.12)}{85}}$$

$$0.05 \leq p \leq 0.19$$

أي أن عند ثقة مقدارها 95 % ستكون قيمة نسبة الذكور في المجتمع تقع ضمن المجال[0.19 , 0.05]

2.4.2 فترة الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين(P_1- P_2)

إذا كان $X_1 \rightarrow B(N_1, P_1)$ وسحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_1 \geq 30$ و$X_2 \rightarrow B(N_2, P_2)$

وسحبت من مجتمعه عينة حجمها $n_2 \geq 30$ وكان المجتمعين مستقلين فان:

$$\sigma^2_{\mathrm{p1}} + \sigma^2_{\mathrm{p2}} = \frac{\mathrm{P_1(1-P_1)}}{\mathrm{n_1}} + \frac{\mathrm{P_2(1-P_2)}}{\mathrm{n_2}}$$

$$\frac{(\bar{P}_1-\bar{P}_2)-(P_1-P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}} \rightarrow N(0,1)$$

وتعطى العالقة الخاصة بفترة الثقة كالتالي:

$$(\bar{P}_1-\bar{P}_2)-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \leq (P_1-P_2) \leq (\bar{P}_1-\bar{P}_2)+ Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

ويصبح مجال الثقة كالتالي:

$$IC_{(P_1-P_2)} = \left[(\bar{P}_1-\bar{P}_2) \mp Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1}+\frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}\right]$$

مثال 14:

في احدى المسابقات الرياضية للرماية على هدف ساكن ل 100 مرة أصاب سمير 60مرة وأصاب وائل الهدف25 مرة، فإذا كانت نسبة $(P_1 - P_2)$هي النسبة الصحيحة لإصابة الهدف لكل من سمير ووائل على التوالي، أوجد حدود الثقة لفترة الثقة مقدارها 99% للفرق بين.$(P_1 - P_2)$

الحل:

لدينا: $P_1 = \frac{60}{100} = 0.6$ $P_2 = \frac{25}{100} = 0.25$

بالتعويض علاقة أعلاه نجد:

$$(0.6-0.25)-2.58\sqrt{\frac{0.6(0.4)}{60}+\frac{0.25(0.75)}{25}} \leq (P_1-P_2) \leq (0.6-0.25)+ 2.58\sqrt{\frac{0.6(0.4)}{60}+\frac{0.25(0.75)}{25}}$$

$$0.0733 \leq (P1-P2) \leq 0.6266$$

أي أن عند مستوى ثقة 99 % ستكون قيمة الفرق بين نسبتي مجتمعين تقع ضمن المجال

[0.0733 ،0.6266].

تمارين

التمرين 1:

لتقدير متوسط مستوى المياه في سد معين، أخذت على فترات (عشوائيا) القياسات التالية:

x_i	4.25	4.36	3.99	4.42	4.63

- قدر نقطيا مستوى المياه في السد؛
- أعط تقديرا نقطيا لتباين مستوى المياه في السد.

التمرين 2:

بفرض أن أطوال 100 طالب ذكر في جامعة ما تمثل عينة عشوائية لأطوال الـ 1546 طالباً ذكرا في تلك الجامعة.

الفئات (الطول)	التكرارات المطلقة
$[60-62[$	5
$[63-65[$	18
$[66-68[$	42
$[69-71[$	27
$[72-74[$	8

أوجد التقديرات النقطية لكل من متوسط وتباين المجتمع.

التمرين 3:

على جزء من الطريق حددت سرعة السيارات بـ 90 كلم / سا، نقوم بمراقبة السرعة بجهاز قياس عالي الدقة. نقيس السرعة بـ (كلم/سا) لعينة عشوائية متكونة من 100 سيارة مسحوبة بالإرجاع فتحصلنا على النتائج المدونة في الجدول التالي:

Vitesse (km/h)	$[75-80[$	$[80-85[$	$[85-90[$	$[90-95$	$[95-100[$	$[100-105[$	$[105-110[$
effectif	5	10	20	36	15	8	6

- أحسب كل من المتوسط الحسابي $(\bar{X})$ والانحراف المعياري S لهذه العينة؛

- انطلاقا من النتائج المتحصل عليها من هذه العينة، أقترح تقدير نقطي للمتوسط μوالانحراف المعياري σ للسرعة لمجتمع مشكل من 2500 سيارة
- حدد مجال الثقة لسرعة المتوسط للمجتمع عند مستوى ثقة 99 %
- حدد فترة الثقة للانحراف المعياري للمجتمع عند مستوى خطر 5%

التمرين4:

بائع البصريات (Opticien) مهتم ببيع الأجهزة الفوتوغرافية ذات الضبط التلقائي للصورة مع التكبير (Autofocus avec Zoom)، يريد تقدير مجال الثقة لنسبة المشترين لهذه الأجهزة (P) من طرف زبائنه في عينة متكونة من 100 زبون سحبت بالإرجاع، 60 منهم يشترون مثل هذه الأجهزة.

- أعط تقديرا نقطيا للنسبة P المقدمة من طرف هذه العينة
- أعط التقدير بواسطة مجال الثقة للنسبة P عند مستوى ثقة 95%
- حدد حجم العينة n، بحيث يكون nأكبر من 30 لعينة من الزبائن حتى يكون التقدير النقطي للنسبة Pالمحسوب انفا محصورة في مجال الثقة للنسبة المقدر بـ [0,643 ; 0,557] عند مستوى ثقة 90%

تمرين 5:

ندرس نشاط الأنزيم في الدم بخطر مختلف العوامل في جسم المرأة، النتائج معبر عنها بوحدة القياس الدولية (Litre de sérum) عند مجموعتين من النساء الحوامل وغير الحوامل، تحصلنا على النتائج المبينة في الجدول:

الحوامل Xi	1.5	1.6	1.4	2.9	2.2	1.8	2.7	1.9	2.2	2.8	2.1	1.8	3.7	1.8	2.1
غير الحوامل Yi	4.2	5.5	4.6	5.4	3.9	5.4	2.7	3.9	4.1	4.1	4.6	3.9	3.5	-	-

$\sum X_i = 32.5;$ $\sum X_i^2 = 75.83;$ $\sum Y_i = 55.8;$ $\sum Y_i^2 = 247.32$

- قدر نقطياً معالم المجتمع
- قدر نقطياً الفرق بين متوسطي المجموعتين
- حدد مجال الثقة للفرق بين متوسطي المجموعتين عند مستوى خطر 5%

حلول التمارين

التمرين 1:

						$\sum$
X_i	4.25	4.36	3.99	4.42	4.63	**21.65**
X_i^2	18.0625	19.0096	21.4369	19.5364	15.9201	**93.9655**

1. التقدير النقطي لمتوسط مستوى المياه في السد: $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{21.65}{5} = 4.33$$

2. التقدير النقطي لتباين مستوى المياه في السد: $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{5}{5-1} \cdot \left[\frac{93.9655}{5} - (4.33)^2\right]$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.05525$$

التمرين 2:

الفئات	X_i	f_i	$f_i * X_i$	X_i^2	$f_i * X_i^2$
$[60-62[$	61	5	305	3721	18605
$[63-65[$	64	18	1152	4096	73728
$[66-68[$	67	42	2814	4489	188538
$[69-71[$	70	27	1890	4900	132300
$[72-74[$	73	8	584	5329	42632
$\sum$	/	**100**	**6745**	/	**455803**

1. حساب التقدير النقطي المتوسط المجتمع $\hat{\mu}$
2. حساب التقدير النقطي لتباين المجتمع $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left[\frac{\sum fi * X_i^2}{\sum fi} - \bar{X}^2\right]$$

$$\frac{n}{n-1} \sim 1$$

وبالتالي يصبح

$$\hat{\sigma}^2 \simeq S^2 = \frac{455803}{100} - 67.45^2 = 8.5275$$

التمرين 3:

الفئات	X_i	f_i	$f_i * X_i$	X_i^2	$f_i * X_i^2$
$[75-80[$	77.5	5	387.5	6006.25	30031.25
$[80-85[$	82.5	10	825	6806.25	68062.50
$[85-90[$	87.5	20	1750	7656.25	153125
$[90-95[$	92.5	36	3330	8556.25	308025
$[95-100[$	97.5	15	1462.5	9506.25	142593.75
$[100-105[$	102.5	8	820	10506.25	84050
$[105-110[$	107.5	6	645	11556.25	69337.5
$\sum$	/	**100**	**9220**	/	**855225**

1. حساب المتوسط الحسابي للعينة. $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{\sum fi * X_i}{fi} = \frac{9220}{100} = 92.20$$

2. حساب الانحراف المعياري للعينة S

$$S = \sqrt{\frac{\sum fi * X_i^{\,2}}{\sum fi} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{855225}{100} - 92.20^2} = 7.17$$

3. التقدير النقطي لمتوسط المجتمع $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \overline{X} = 92.20$$

التقدير النقطي للانحراف المعياري σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot S$$

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}} \sim 1$$

$$\sigma = S = 7.17$$

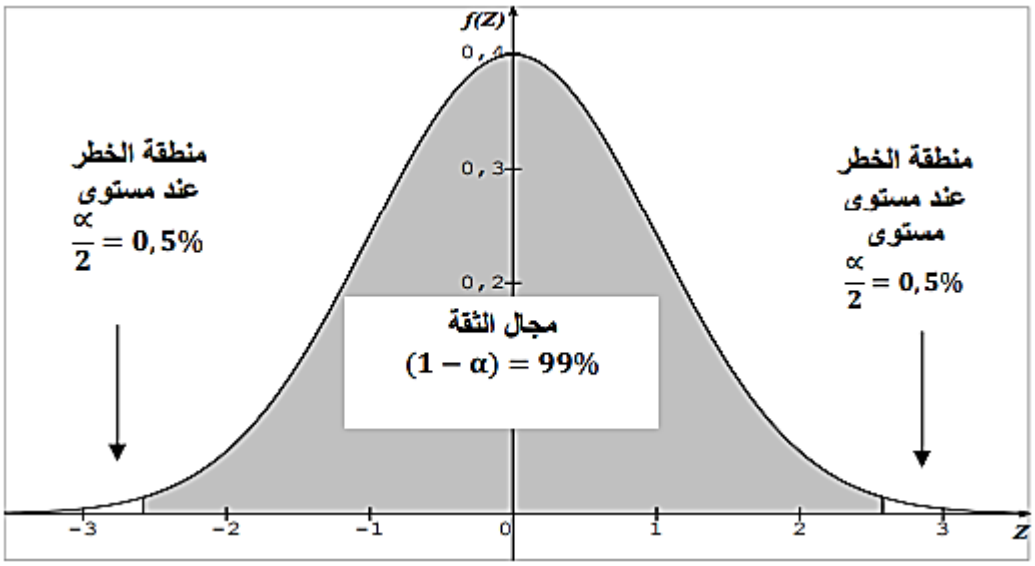
تحديد مجال الثقة لسرعة المتوسط μ للمجتمع عند مستوى ثقة 99%

لدينا $n > 30$ والانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z

حيث

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0.01}{2}\right)} = Z_{0.495} = \pm 2.58$$

الشكل: فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (Z = + 2.58 , Z = - 2.58)



حساب $\sigma_{\bar{X}}$

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$IC_u = \left[\bar{X} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}};\ \bar{X} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}.\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right] = 1 - \alpha$$

$$IC_u = \left[92.20 - 2.58.\frac{\mathbf{1.17}}{\sqrt{\mathbf{100}}};\ 92.20 + 2.58.\frac{\mathbf{1.17}}{\sqrt{\mathbf{100}}}\right] = 0.99$$

$$IC_u = [91.90;\ 92.50] = 0.99$$

4. تحديد فترة الثقة للانحراف المعياري للمجتمع σ عند مستوى خطر 5%.

$$IC_\sigma = \left[S * \sqrt{\frac{(n-1)}{X^2_{\left(n-1,\ \frac{\alpha}{2}\right)}}};\ S * \sqrt{\frac{(n-1)}{X^2_{\left(n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}\right)}}}\right]$$

5. استخراج القيم الجدولية من الجدول الإحصائي X^2

$$X^2_{\left(n-1,\ \frac{\alpha}{2}\right)} = X^2_{(99,\ 0.025)} = 123.85$$

$$X^2_{\left(n-1,1-\frac{\alpha}{2}\right)} = X^2_{(99,\ 0.975)} = 69.93$$

$$IC_\sigma = \left[1.17 * \sqrt{\frac{(100-1)}{123.85}};\ 1.17 * \sqrt{\frac{(100-1)}{69.93}}\right]$$

$$IC_\sigma = [1.05;\ 1.39]$$

التمرين4:

1. التقدير النقطي للنسبة P المقدمة من طرف هذه العينة

$$\overline{P} = \frac{X}{n} = \frac{60}{100} = 0.6$$

2. التقدير بواسطة مجال الثقة للنسبة P عند مستوى ثقة 95%

لدينا $n > 30$ إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع طبيعي وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية Z

$$Z_{th} = Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} = Z_{\left(\frac{1-0.05}{2}\right)} = Z_{0.475} = \pm 1.96$$

$$IC_p = \left[\overline{P} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}};\ \overline{P} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right]$$

$$IC_p = \left[0.6 - 1.96\sqrt{\frac{0.6\,(1-0.6)}{100}};\ 0.6 + 1.96\sqrt{\frac{0.6\,(1-0.6)}{100}}\right]$$

$$IC_p = [0.504;\ 0.696]$$

3. تحديد حجم العينة n، بحيث يكون nأكبر من 30. لعينة من الزبائن حتى يكون التقدير النقطي للنسبة P المحسوب آنفاً محصورة في مجال الثقة للنسبة P المقدر بـ [0,643; 0,557] عند مستوى ثقة 90.%

لدينا طول المجال L يساوي الحد الأعلى للمجال - الحد الأدنى للمجال

$$L = 0.643 - 0.557 = 0.086$$

$$L = \overline{P} + Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}} - \left[\overline{P} - Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right]$$

$$L = 2 * Z_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}$$

$$L = 2 \times 1.65\sqrt{\frac{0.6\,(1-0.6)}{n}} = 0.086$$

$$L = 2 \times 1.65\frac{\sqrt{0.6\,(1-0.6)}}{\sqrt{n}} = 0.086$$

$$\sqrt{n} = 2 \times 1.65\frac{\sqrt{0.6 \times 0.4}}{0.086}$$

$$\sqrt{n} = 18.80$$

$$n = 354$$

التمرين5:

1. التقدير النقطي لمعالم المجتمع

- التقدير النقطي لمتوسط المجتمع $(\hat{\mu}_1)$ ومتوسط المجتمع الثاني$(\hat{\mu}_2)$

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n_1} = \frac{32.5}{15} = 2.17$$

$$\hat{\mu}_2 = \bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n_2} = \frac{55.8}{13} = 4.29$$

- التقدير النقطي للانحراف المعياري للمجتمعين

$$\widehat{\sigma_1} = \sqrt{\frac{n_1}{n_1-1}} \cdot S_1 = \sqrt{\frac{n_1}{n_1-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2}$$

$$\widehat{\sigma_1} = \sqrt{\frac{15}{15-1}} \cdot \sqrt{\frac{75.83}{15} - 2.17^2} = 0.61$$

$$\widehat{\sigma_2} = \sqrt{\frac{n_2}{n_2-1}} \cdot S_2 = \sqrt{\frac{n_2}{n_2-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum Y_i^2}{n} - \bar{Y}^2}$$

$$\widehat{\sigma_2} = \sqrt{\frac{13}{13-1}} \cdot \sqrt{\frac{247.32}{13} - 4.29^2} = 0.82$$

2. حساب التقدير النقطي للفرق بين إنجازي المجموعتين;$(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)$

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \bar{X} - \bar{Y}$$

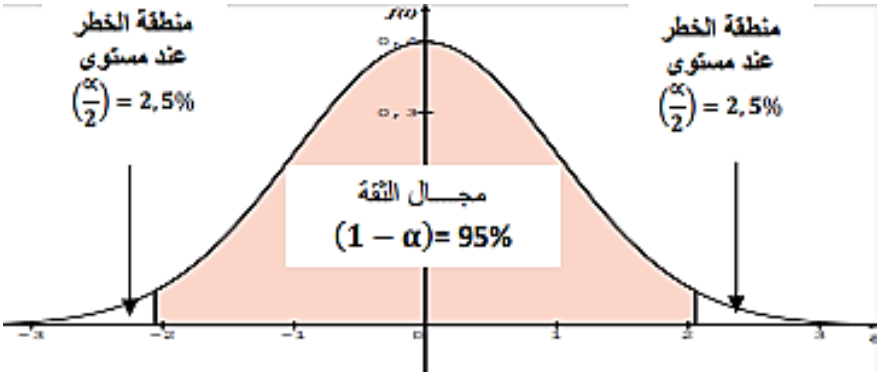
$$= 2.17 - 4.29 = -2.12$$

3. تحديد فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجموعتين عند مستوى خطر 5%.

بما أن $n_1 , n_2 < 30$ وتباينا المجتمعين مجهولين، فإن المجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t حيث:

$$t_{th} = t\left(dL; \frac{\alpha}{2}\right) = t_{\left(15+13-2; \frac{0.05}{2}\right)} = t_{(26;\ 0.025)} = \pm 2.056$$

الشكل: فترة الثقة تحت المنحنى محصورة بين القيمتين (t = + 2.056; t = - 2.056)



$$IC_{\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2} = \left[(\bar{X}-\bar{Y}) \pm \ \mathrm{t}\left(dL; \frac{\alpha}{2}\right).\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1)}{n_2}\right)}\right]$$

$$IC_{\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2} = \left[-2.12 \pm \ 2.056.\sqrt{\frac{(15-1)0.61^2+(13-1)0.82^2}{15+13-2}\left(\frac{1}{15}+\frac{1)}{13}\right)}\right]$$

$$IC_{\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2} = [-2.675;\ -1.654]$$

المحور3: اختبار الفرضيات الإحصائية

تمهيد:

أصبح اختبار الفرضيات الإحصائية أهم الخصائص التي تميز البحوث الميدانية والتجريبية في مجال التربية وعلم النفس والعلوم الإنسانية بصورة عامة والهدف الأساسي من اختبار الفرضيات هو استنتاج خصائص المجتمع أو بعضها من ملاحظة العينة التي أخذت منه وذلك بهدف تعميم ما نتوصل إليه من دراستنا لعينة صغيرة على ذلك المجتمع الذي تمثله تلك العينة والإحصاء الاستدلالي يقوم على لغة الاحتمال.

1.3 مصطلحات ومفاهيم

1.1.3 الفرضية الإحصائية

الفرضية الإحصائية هي عبارة حول معلمة أو أكثر من معالم المجتمع الإحصائي تكون قابلة للاختبار وبالتالي تكون صحتها بحاجة إلى القرار.

2.1.3 اختبار الفروض

يشير اختبار الفروض إلى القبول أو رفض ما عن خاصية غير معلومة للمجتمع مثل أحد المعالم أو شكل توزيع المجتمع.

3.1.3 المنطقة الحرجة

هي مجموعة قيم إحصاء الاختبار التي تؤدي إلى رفض الفرضية الصفرية، حيث أن كل حد من حدود المنطقة الحرجة يسمى قيمة حرجة لإحصاء الاختبار.

4.1.3 مستوى المعنوية

هو مستوى الدلالة الإحصائية أو مستوى الاحتمال (α) أي هو درجة الاحتمال الذي ترفض به الفرضية الصفرية H_0 عندما تكون هي الصحيحة أي هو احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول(α) .

وهي ثلاثة أنواع:

- دال عند 0.05 أي مستوى الثقة 95% والشك 5%
- دال عند 0.01 أي مستوى الثقة 99% والشك 1%
- دال عند 0.001 أي مستوى الثقة 99.9% والشك 0.1%

- درجات الحرية (1 - n): هي عدد القيم ذات الحرية على التغير. وهي تتحدد بعاملين اثنين هما عدد الأفراد وعدد المجموعات كما تختلف تبعا لاختلاف الإحصائي المستخدم. أو يمكن تعريفها بأنها عدد الدرجات التي يمكن أن تتغير حول قيمة ثابتة أو مقياس معين للمجتمع الأصلي. وتستخدم درجات الحرية في الغالب كمفتاح لاستخدام الجداول الإحصائية لتحديد مدى وجود دلالة إحصائية للنتيجة المستخرجة من الاختبار الإحصائي، وبالتالي يقبل الباحث الفرض الذي تبناه أو يرفضه.

2.3 عناصر الاختبار الإحصائي

إن اختبار أي فرضية إحصائية يشتمل على مجموعة من العناصر تتمثل فيما يلي:

1.2.3 الفرضية الصفرية (فرضية العدم)

وهي التي تصاغ بشكل نفي وجود علاقة بين متغيرين أو فروق بين مجموعتين أو أثر المتغير مستقل على آخر تابع، وهي الفرضية التي يجري عليها الاختبار الإحصائي ويبنى القرار على عدم صحتها. ويرمز لها بالرمز: **H_0**.

مثال 01:

- لا توجد فروق ذات دلالة إحصائية في استخدام تكنولوجيا المعلومات تعزي لحجم المؤسسة.
- لا توجد علاقة بين ترويج مبيعات المؤسسة الكترونيا وارتفاع المبيعات.
- لا يوجد أثر دلالة إحصائية لاستخدام تكنولوجيا المعلومات على تطوير إستراتيجية الترويج بالمؤسسة محل الدراسة.

2.2.3 الفرضية البديلة

وهي المعاكسة للفرضية الصفرية والتي يدعمها الباحث حيث تصاغ بشكل وجود علاقة بين متغيرين أو فروق بين مجموعتين أو أثر المتغير مستقل على آخر تابع ويرمز H_1.

فعدم تحقق الفرضية الصفرية H_0 يؤدي إلى رفضها وبالتالي قبول الفرضية البديلة H_1.

مثال 02:

- توجد فروق ذات دلالة إحصائية في استخدام تكنولوجيا المعلومات تعزى الحجم المؤسسة.

- توجد علاقة بين ترويج مبيعات المؤسسة الكترونيا وارتفاع المبيعات.
- يوجد أثر ذو دلالة إحصائية لاستخدام تكنولوجيا المعلومات على تطوير إستراتيجية الترويج.

مثال حول الفرضية الصفرية H_0 والبديلة H_1 :

أراد معلم أن يختبر طريقتين في التدريس فوضع الفرضية التالية بعد اختبار مجموعتين من الأطفال الذين سيقوم بإجراء التجربة عليهم

$$H_0 : M_1 = M_2$$

$$H_1 : M_1 \neq M_2$$

M_1 : متوسط الدرجات التي يحصل عليها الطلاب الذين يستخدمون الطريقة التدريسية الأولى.

M_2: متوسط الدرجات التي يحصل عليها الطلاب الذين يستخدمون الطريقة التدريسية الثانية.

لنفرض أن المعلم قام بالتدريس بالطريقتين التدريسيتين على المجموعتين من التلاميذ. ثم قام بإجراء العمليات الإحصائية اللازمة لاختيار الفرضية الصفرية $M_1 = M_2$فرفضها، أي وجد أن هناك فرقا بين المتوسطين أنهما غير متساويين أي أن $M_1 \neq M_2$ تعرض إلى النمط الأول من الخطأ (يرفض H_0 ويقبل H_1)

أما إذا قبلها أي وجد أن الوسطين ($M_1 = M_2$) فانه سيكون قد وقع في الخطأ من النمط الثاني (يقبل H_0ويرفض H_1).

3.2.3 إحصاء الاختبار (Test Statistic)

احصاء الاختيار هو اقتران إحصائي يساعدنا على اتخاذ قرار حول فرضية إحصائية معينة، ويتم حساب قيمته من بيانات العينة، وبتالي فهو عبارة عن متغير عشوائي تتغير قيمته بتغير بيانات العينة الإحصائية التي تأخذها من المجتمع الإحصائي.

ومن القيمة التي تحصل عليها لإحصاء الاختبار تقرر ما إذا كان هناك سببا قويا لرفض H_0 وقبول H_1 أم لا.

4.2.3 منطقة اتخاذ القرار

تقسم منطقة اتخاذ القرار إلى منطقتين، إحداهما تحوي القيم التي تدعم الفرضية البديلة وتسمى منطقة الرفض (المناطق الحرجة)، وهي مجموعة من القيم التي نستخدمها والتي تمكننا من رفض الفرضية الصفرية، وحدودها يطلق عليها القيم الحرجة، وهي قيم تناظر مستوى الدلالة.. والتي تمثل أعلى احتمالية الرفض الفرضية الصفرية وهي صحيحة صدقة.

والمنطقة الأخرى تحتوي على القيم التي تدعم الفرضية الصفرية وتسمى منطقة القبول، فوقوع قيمة إحصاء الاختبار في منطقة الرفض يؤدي إلى رفض فرضية العدم وبالتالي قبول الفرضية البديلة.

فمنطقة الرفض إذن تتضمن قبول الفرضية البديلة والتي يعبر عنها أما باتجاه واحد على اليمين أو على يسار، أو باتجاهين على جانبي القيمتين الحرجتين.

5.2.3 الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

من المعلوم أنه عند اتخاذ أي قرار إحصائي فان ذلك ينطوي على أخطاء بنسب معينة، حيث انه من المحتمل أن نرفض فرضية معينة في حين أنها صحيحة، والعكس صحيح، لهذا فان هناك نوعان من الأخطاء الإحصائية وهي:

- الخطأ من النوع الأول (α) :هو الخطأ الذي تقع فيه عندما ترفض الفرضية الصفرية H_0 بالرغم من صحتها، ويرمز لاحتمال وقوع هذا الخطأ بالرمزα، و"نسميه مستوى الدلالة الاختبار" أو "مستوى معنوية الاختبار."
- الخطأ من النوع الثاني (β) هو الخطأ الذي نقع فيه عندما تقبل الفرضية الصفرية بالرغم من صحتها، ويرمز إلى احتمال هذا الخطأ بالرمز β .

وعلى العموم يمكن توضيح نوعي الخطأ من خلال الجدول التالي:

الجدول: جدول توضيحي لنوعي الخطأ.

القرار / **الفرض العدمي**	قبول الفرض العدمي H_0	رفض الفرض العدمي H_0
الفرض العدمي H_0 صحيح	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول (α)
الفرض العدمي H_0 خاطئ	خطأً من النوع الثاني (β)	قرار صحيح

استناد إلى هذا الجدول فان الفرض العدمي إما أن يكون صحيحا أو غير صحيحا وهو الظاهر والعمود الأول، وفيما يتعلق بالقرار، فإننا إما نقبل الفرض العدمي أو ترفضه، وبالتالي هناك أربع احتمالات في هذا الشأن وهي:

- قبول H_0 وهو صحيح وهذا يمثل بالطبع قرارا صحيح.
- رفض H_0 وهو صحيح، ولا شك أن هذا القرار خطأ، ويطلق عليه خطا من النوع الأول؛
- قبول H_0 وهو غير صحيح، هذا بدوره قرار خاطئ، ويسمى الخطأ من النوع الثاني؛
- رفض H_0 وهو غير صحيح، هذا يمثل قرار صحيحا.

بصفة عامة يمكن توضيح الخصائص التالية للعلاقات بين الخطأين:

- يرتبط الخطأ من النوع الاول (α) ارتباطا عكسيا مع الخطأ من النوع الثاني (β)، أي ان انخفاض

- احتمال أحدهما يؤدي إلى زيادة احتمال الآخر.
- زيادة حجم العينة يؤدي إلى تناقص كلا النوعين من الخطأ.
- إذا كان الفرض العدمي H_0 غير صحيح. فان قيمة الخطأ من النوع الثاني (β) تكون أكبر ما يمكن عندما تكون القيمة الحقيقية للمعلمة تكاد تتطابق مع القيمة الافتراضية لها، والعكس صحيح عندما يكون الفرق بين القيمتين الحقيقية والافتراضية، فان قيمة الخطأ من النوع الثاني (β) تقل.

1.2.3 قوة إحصاء الاختبار

ذكرنا بأنه في حالة قبولنا لفرضية العدم H_0 وهي غير صحيحة سيؤدي إلى وقوعنا في الخطأ من النوع الثاني، ويعتبر هذا القرار غير السليم، أما القرار السليم فهو عند رفض فرضية العدم H_0 لما تكون خاطئة، وتتحلى قوة الاختبار.

فقوة الاختبار إذن تقاس بمدى قدرته على رفض الفرضية الصفرية لما تكون هذه الأخيرة خاطئة.

وعلى هذا الأساس فان هذا الاحتمال فان احتمال الوقوع في الخطأ الثاني يعتمد على الابتعاد منH_0 ، وأيضا على حجم العينة nوالانحراف المعياري σ، وعلى مستوى المعنوية α، ونوع الاختبار إن كان من جانب واحد أو من جانبين.

مثال 03:

نريد اختبار الفرضية:

$$\mathbf{H_0 : \mu = 25 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq 25}$$

عند مستوى معنوية 0.05 وباستعمال الوسط الحسابي لعينة حجمها 100 أخذت من مجتمع انحرافه المعياري 12.

المطلوب:

إيجاد احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني β عندما يكون $\mu = 25.6$

الحل:

المطلوب حساب:

$$\mathbf{\beta = P\ (H_0 / H_1)}$$

أي أن: عدم الرفض :H_0 صحيحة:H_1

الخطأ المعياري المتوسط العينة $\bar{X}$:

$$\boldsymbol{S_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{100}} = 1.2}$$

بما أن حجم العينة أكبر من 30 فانه يمكن الاعتماد على نظرية النهاية المركزية وبالتالي استعمال Z.

فعند مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ ترفض H_0 عندما يقع $\bar{X}$ خارج المجال: $25 \pm 196X1.2$

أي أن قرار عدم رفض H_0 هو $\begin{cases} \bar{X} > 22.648 \\ \bar{X} < 27.352 \end{cases}$

اذن:

$$\beta = P\ (H_0: H_1)$$

أي أن: عدم الرفض :H_0 صحيحة:H_1

$$\beta = P\ (22.648 \leq X \leq 27.352)$$

$$\beta = P\ (\frac{22.648 - 25.6}{1.2} \leq Z \leq \frac{27.352 - 25.6}{1.2})$$

$$\beta = P\ (-2.46 \leq Z \leq 1.46) = 0.4931 + 0.4279 = 0.921$$

تلاحظ أن قيمة احتمال الوقوع في الخطأ الثاني βجاءت مرتفعة جدا لان قيمة 25.6 في الفرضية البديلة قريبة جدا من القيمة 25 في الفرضية الصفرية.

3.3 اختبار الفرضيات

يتم اختبار الفرضيات كأسلوب إحصائي من خلال الخطوات التالية:

- تحديد نوع التوزيع الاحتمالي للمجتمع.
- صياغة فرضية الرفض والفرضية البديلة.
- اختيار مستوى المعنوية (α) على أن يكون (0.01) أو (0.05) وبعد اختيار مستوى المعنوية فان منطقة الرفض ومنطقة القبول ستحدد.
- الاختبار الإحصائي عبارة عن متغير عشوائي له توزيع احتمالي معلوم ويصف العلاقة بين القيم النظرية الجدولية والقيم المحسوبة في العينة والذي يختار كي يكون أساسا لاختبار الفرضيات.
- جمع البيانات في العينة وحساب الاختبار الإحصائي.
- اتخاذ القرار إذا وقعت قيمة الاختبار الإحصائي في منطقة الرفض فإننا نرفض الفرضية الصفرية وتقبل الفرضية البديلة H_1.

1.3.3 اختبار متوسط المجتمع μ

- **تباين المجتمع معلوم**

عندما يكون الانحراف المعياري σ للمجتمع معلوم فان الإحصائية $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ يكون لها التوزيع الطبيعي المعياري، أي أن: $Z \rightarrow (0, 1)$

وتسمى الإحصائية بقيمة Z المحسوبة من خلال بيانات العينة و $\bar{X}$يمثل متوسط البيانات المشاهدة من العينة،n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع و μ_0 هو القيمة المفروضة المتوسط المجتمع والتي نقوم باختبارها نقوم بعد ذلك باختبار قيمα (مستوى المعنوية) حيث يتم على أساسية تحديد القيم الحرجة $Z\alpha_{/2}$ و$-Z\alpha_{/2}$أو Z_α وذلك حسب نوع الاختبار هل هو اختبار من طرف واحد أم من طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال 06:

أخذت عينة من 64 طالب من إحدى المدارس فوجد أن متوسط الطول هو 155 سم.

فإذا كان الانحراف المعياري للمجتمع يساوي 5 سم. اختبر الفرض القائل:

$$\mathbf{H_0 : \mu = 160 \quad VS \quad H_1 : \mu \neq 160}$$

وذلك عند مستوى معنوية

أ. 0.05
ب. 0.01

الحل:

$$\mathbf{Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

معطيات:

$$\mathbf{n = 64, \quad \bar{X} = 155, \quad \sigma = 5, \quad \mu_0 = 160, \quad \alpha = 0.05}$$

إحصاء الاختبار (Z):

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{155 - 160}{5/\sqrt{64}} = -3$$

أ. عند مستوى معنوية($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيمة (Z) الجدولية سوف تكون كتالي:

$$Z\alpha_{/2} = Z_{0.05_{/2}} = Z_{0.025}$$

$$Z_{0.025} = 1.96$$

وعليه فان قيمة $-Z\alpha_{/2}$ ستكون:

$$-Z\alpha_{/2} = -1.96$$

ومن هنا تجد ان قيمة Zالمحسوبة أصغر من قيمة Zالجدولية، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرض العدمي بأن$\mu = 160$.

ب. عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.01$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيمة (Z) الجدولية سوف تكون كتالي:

$$Z\alpha_{/2} = Z_{0.01_{/2}} = Z_{0.005}$$

$$Z_{0.005} = 2.58$$

وعليه أن قيمة $-Z\alpha_{/2}$ستكون:

$$-Z\alpha_{/2} = -2.58$$

مثال 07:

إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعا من الألبان حيث يصل متوسط الوزن العبوة 240 جرام، وذلك بانحراف معياري 18 جرام حيث كانت أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي. تم الحد عينة من 9 عبوات وذلك عند إجراء اختبار الرقابة على الجودة فوجد أن متوسط وزن العبوة 235جرام.

هل ترى أن هناك عيبا بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة؟ مستوى المعنوية 10%.

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$H_0 : \mu = 240$$

$$H_1 : \mu < 240$$

2. نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

معطيات:

$$n = 9, \quad \bar{X} = 235, \quad \sigma = 18, \quad \mu_0 = 240, \quad \alpha = 0.01$$

إحصاء الاختبار (Z):

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{235 - 240}{18/\sqrt{9}} = -0.83 \ldots (1)$$

وهذه تمثل قيمة Z المحسوبة.

3. نقوم الآن بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.01$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كتالي:

- $Z_{\alpha} = -Z_{0.1}$

$$-Z_{0.1} = -1.28 \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن قيمة Zالمحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية، أي أن قيمة Z تقع في منطقة القبول، ومن هنا يتم قبول الفرض العدمي بأن $\mu = 240$

درجات الحرية

إذا كان لدينا مجتمع ما ونريد تقدير عدد من المعالم هذا المجتمع كالمتوسط والانحراف المعياري إلى أخره وتم سحب عينة من البيانات المستقلة التي تمثل ذلك المجتمع حجمها nفان درجات الحرية التي يرمز لها بالرمزv تساوي حجم العينة مطروحا منه عدد المعالم المراد تقديرها ويمكن التعبير عن ذلك من خلال العلاقة التالية:

$$v = n - k$$

حيث kهي عدد المعالم المقدرة.

- **تباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير**

عندما يكون الانحراف المعياري للمجتمع مجهول وكذلك حجم العينة المسحوبة من ذلك المجتمع صغير $n < 30$ فإن الإحصائية Z يتم تغيرها إلى الإحصائية T التي يكون لها الشكل التالي:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

حيث S تمثل الانحراف المعياري للعينة والإحصائية T تتبع توزيع T وذلك بدرجات حرية $(v = n - k)$ ومستوى معنوية α أو $\alpha/2$ حسب نوع الاختبار من طرف واحد أو طرفين، وسوف نوضح ذالك من خلال المثال التالي:

مثال 08: كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات هو 15 جنيه في العام الماضي. ثم اخذ عينة من 7 ساهمين عن توقيعاتهم عن متوسط ربح سهم العام الحالي فوجد انه 18 جنيه بانحراف معياري 2.

هل توافق المساهمين في تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام؟ وذلك بمستوى معنوية 5%.

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$\mathbf{H_0 : \mu = 240}$$

$$\mathbf{H_1 : \mu < 240}$$

2. تقوم بحساب قيمة T المحسوبة:

$$\mathbf{T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}}$$

معطيات:

$$\mathbf{n = 7, \quad \bar{X} = 17, \quad \sigma = 7, \quad \mu_0 = 15, \quad \alpha = 0.05}$$

إحصاء الاختبار (T):

$$\mathbf{T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{17 - 15}{2/\sqrt{5}} = 2.65 \ldots (1)}$$

وهذه تمثل قيمة T المحسوبة

3. نقوم الآن بحساب قيمة T الجدولية.

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيمة T الجدولية سوف تكون كتالي:

$$t_{(n-1,\ \alpha)} = t_{(7-1,\ 0.05)}$$

$$t_{(6,\ 0.05)} = 1.943 \ldots (2)$$

من (1) و(2) نجد أن قيمة T المحسوبة أصغر من قيمة T الجدولية، أي أن قيمة T تقع في منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأننا نوافق المساهمين على توقيعهم بارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام.

2.3.3 اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين

- العينات الكبيرة المستقلة

هناك العديد من الأبحاث التي يكون المطلوب فيها المقارنة بين مجتمعين مختلفين أو منطقتين مختلفين أو أسلوبين لتدريس مقرر ما ... الخ. من هنا جاء اختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين عن طريق سحب عينة من كل مجتمع ويكون الاختبار لنرى الفرق بين متوسطي العينتين، وهل هو فرق حقيقي أم يرجع هذا الفرق إلى الصدفة البحتة.

إذا كان متوسط العينة الأولى $\bar{X}_1$ ومتوسط العينة الثانية $\bar{X}_2$ بانحراف معياري S_1, S_2 على الترتيب وكان حجم العينة الأولى n_1 وحجم العينة الثانية n_2 فان توزيع المعاينة للفرق $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_1 - \mu_2$ وانحراف معياري $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ حيث :

μ_1 هي متوسط المجتمع الأول و μ_2 متوسط المجتمع الثاني و $(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)$ يمثلان تباين المجتمع الأول والثاني على التوالي. ويكون فرض العدم والفرض البديل على الصورة:

$$\mathbf{H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_0 : \mu_1 = \mu_2}$$

$$\mathbf{H_1 : \mu_1 \neq \mu_2}$$

$$\mathbf{أو\ H_1 : \mu_1 < \mu_2}$$

$$\mathbf{أو\ H_1 : \mu_1 > \mu_2}$$

هذا وتأخذ الاحصاءة Z الشكل التالي:

$$\boldsymbol{Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}}}}$$

تلاحظ من شكل العلاقة السابقة أن σ_1^2, σ_2^2 مجهولتين، ولذا تم التعويض بتباين العينة الأولى وتباين

العينة الثانية مع كبر الحجم العينتين($n_1 > 30$) , ($n_2 < 30$)

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثال 09: إذا اختيرت عينة عشوائية من 60 طالب من جامعة خاصة، فوجد أن متوسط ذكائهم 69 درجة وتباين قدرة 230 درجة، كذلك تم اختيار عينة عشوائية أخرى من 85 طالب من جامعة تيسمسيلت فوجد أن متوسط ذكائهم 74 درجة وتباين قدرة 215 درجة، اختبر الفرض القائل بان متوسط ذكاء طالب الجامعة الخاصة اقل من متوسط ذكاء طالب جامعة حلوان، عند بمستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) .

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

2. نقوم بحساب قيمة Zالمحسوبة

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}}} = \frac{(69-74)-0}{\sqrt{\frac{230}{60} + \frac{215}{85}}} = \frac{-5}{\sqrt{6.36}} = -1.98 \ldots (1)$$

3. تقوم بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$-Z = -Z_{0.05}$$

$$-Z = -1.65 \ldots (2)$$

من (1)، (2) نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أي أن قيمة Z تقع في منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بان متوسط دكاء طلبة الجامعة الخاصة اقل من متوسط ذكاء طلبة جامعة تيسمسيلت.

- العينات الصغيرة المستقلة

لقد وجد الاحصائيون أن الفرق بين المتوسطين $\overline{X}_1 , \overline{X}_2$ عندما يكون حجم العينتين المستقلتين

n_2, n_1 صغيرا وتباين المجتمع الأول والثاني مجهول فان الإحصائية:

$$\mathbf{t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}}$$

حيث:

$$\mathbf{S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 - (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

تتبع توزيع t بدرجات حرية $(v = n_1 + n_2 - 2)$. وسوف نوضح طريقة الاختبار تلك بالمثال التالي:

مثال 10: اختيرت عينة عشوائية من 11 طالب من كلية الاقتصاد جامعة تيسمسيلت فوجد أن متوسط ذكائهم 80 درجة بانحراف معياري 7 درجات. كذلك اختيرت عينة عشوائية من 6 طلاب من كلية الآداب جامعة تيسمسيلت أيضا فوجد أن متوسط ذكائهم 75 درجة بانحراف معياري 5 درجات.

هل يمكننا القول بان متوسط ذكاء طلبة التجارة لا يساوي متوسط ذكاء طلبة الآداب وذلك عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

2. نقوم بحساب قيمة S_P^2 المحسوبة

$$\mathbf{S_P^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 - (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(11-1)7^2 - (6-1)5^2}{11+6-2} = \frac{10 \times 49 + 5 \times 25}{15} = 41 \ldots (1)}$$

3. نقوم بحساب قيمة t المحسوبة

$$\mathbf{t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{S_P^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(80-75) - 0}{\sqrt{41(\frac{1}{11} + \frac{1}{6})}} = 1.54 \ldots (2)}$$

4. نقوم بحساب قيمة t الجدولية

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرفين فإن قيم الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$t_{(n_1+n_2-2,\ \alpha/2)} = t_{(11+6-2,\ 0.05/2)}$$

$$t_{(15,\ 0.025)} = -1.65 \ldots (3)$$

من (2)، (3) نجد أن قيمة t المحسوبة تقع بين قيم t الجدولية، أي أن قيمة t تقع في منطقة القبول، أي أن المتوسط ذكاء طلبة كلية الاقتصاد مساوي لمتوسط ذكاء طلبة كلية الآداب، وذلك عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$).

- **العينات الغير مستقلة**

لقد بينا في الحالات السابقة كيفية إجراء الاختبار في حالة العينات المستقلة، ولكن في بعض الأحيان نجد أن العينات التي تم سحبها بطريقة عشوائية هي عينات غير مستقلة بمعنى وجود علاقة بين مشاهدات العينتين، وفي هذه الحالة نقوم بحساب الفرق بين أزواج المشاهدات ثم إيجاد متوسط هذا الفرق وأيضا الانحراف المعياري له. ونظرا لأن التباين يكون مجهولا، كذلك صغر الحجم العينتين سوف تتبع الإحصاءة $t = \frac{\bar{d} - \bar{D}_0}{S_d/\sqrt{n}}$ توزيع t بدرجات حرية (v = n - 1) حيث:

$\bar{d}$ هي متوسط الفرق بين أزواج المشاهدات.

S_d هو الانحراف المعياري للفرق بين أزواج المشاهدات.

n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع (عدد أزواج المشاهدات).

$\overline{D}_0$ هو الفرق بين متوسطي المجتمعين الأول والثاني.

ويكون فرض العدم والفرض البديل على الصورة:

$$H_0 : \bar{D}_0 = 0 \leftrightarrow H_0 : \bar{D}_0 = \mu_1 - \mu_2$$

$$H_1 : \bar{D}_0 \neq 0$$

أو $H_1 : \bar{D}_0 < 0$

أو $H_1 : \bar{D}_0 > 0$

المثال التالي سوف يوضح كيفية الحساب الاحصاءة t كدلك أسلوب إجراء الاختبار.

مثال 11: يرغب أحد المحاسبين في مقارنة المبيعات اليومية لأحد المطاعم فرع القاهرة مع المبيعات اليومية لذات المطعم فرع الإسكندرية وذلك في خلال سبعة أيام اختيرت عشوائيا على مدار الشهر.

	المبيعات	
اليوم	فرع القاهرة	فرع الإسكندرية
1	1540	1670
2	212	1780
3	1700	1880
4	1064	1968
5	1195	2430
6	1450	2145
7	1505	2136

المطلوب:

اختبر الفرض القائل بعدم وجود فرق متوسطي الفرعين وذلك بمستوى معنوية ($\alpha = 0.05$)

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$\mathbf{H_0 : \bar{D}_0 = 0}$$

$$\mathbf{H_1 : \bar{D}_0 \neq 0}$$

2. نقوم بحساب قيمة t المحسوبة

$$t = \frac{\bar{d} - \bar{D}_0}{S_d / \sqrt{n}}$$

$$\bar{D}_0 = 0$$

$$n = 7$$

سوف نقوم الآن بحساب الفروق ومتوسطها وكذلك الانحراف المعياري لها:

اليوم	الفرق (d)	مربع الفرق (d^2)
1	-130	16900
2	-568	322625
3	-180	32400
4	-904	817216
5	-1235	1525225
6	-695	483025
7	-631	398161
المجموع	**-4343**	**3595551**

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{-4343}{7} = -620.43 \ldots (1)$$

$$S_d = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2}{n}} = \frac{1}{7-1}\sqrt{3595551 - \frac{(-4343)^2}{7}}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{901029.71}$$

$$= \frac{1}{6}\ (949.23)$$

$$= 158.2 \ldots (2)$$

$$t = \frac{-620.34}{158.2/\sqrt{7}} = -10.38 \ldots (3)$$

3. نقوم بحساب قيمة t الجدولية

عند مستوى معنوية ($\alpha = 0.05$) وبما أن الاختبار من طرفين فإن قيم t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$\boldsymbol{t_{(n-2,\ \alpha/2)} = t_{(6,\ 0.05/2)}}$$

$$t_{(6,\ 0.025)} = \pm\ 2.448 \ \dots\ (4)$$

من (3) و (4) نجد أن قيمة t المحسوبة أصغر من قيمة t الجدولية، أي أن قيمة t تقع في منطقة الرفض، أي أن متوسط مبيعات الفرعين (القاهرة والإسكندرية) غير متساو، وذلك عند مستوى معنويةα). = 0.05).

3.3.3 اختبار لنسبة المجتمع p

إذا كان المجتمع الذي نقوم بدراسته يتبع احد التوزيعات المتقطعة مثل توزيع ذي الحدين، وإذا كانت نسبة ظاهرة معينة في المجتمع هي p وكانت r هي نسبة الظاهرة في كل من العينة العشوائية التي تم سحبها من المجتمع. فإن المطلوب هو اختبار وجود معنوي بين نسبة الظاهرة في كل من العينة والمجتمع ويكون الفرض العدمي والفرض البديل على الصورة:

$$\mathbf{H_0 : } \boldsymbol{p} \mathbf{= p_0\ ,}$$
$$\mathbf{H_1 : } \boldsymbol{p} \neq \mathbf{\ p_0\ ,}$$
$$\mathbf{H_{1:}\ } \boldsymbol{p} < \mathbf{\ p_0,} \quad \text{أو}$$
$$\mathbf{H_{1:}\ } \boldsymbol{p} > \mathbf{\ p_0} \quad \text{أو}$$

وعليه فان الإحصائية $\frac{r- p_0}{\sqrt{\frac{p_0\ (1-p_0)}{n}}}$ تتبع التوزيع الطبيعي القياسي، حيثn تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع ومن ثم نقوم بحساب قيمة Z المسحوبة كالآتي:

$$\mathbf{Z = \frac{r- p_0}{\sqrt{\frac{p_0\ (1-p_0)}{n}}}}$$

ثم يتم مقارنة Z المحسوبة بقيمة Z الجدولية حتى يمكن أن نتخذ القرار الإحصائي بقبول أو رفض العدمي كما ذكرنا من قبل عند اختيار المتوسط. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال 12: قامت شركات الكمبيوتر باستيراد شحنة من أجهزة الكمبيوتر وقد تعهدت الشركة المصدرة للأجهزة بأن نسبة الأجهزة المعيبة لن تزيد عن 6%، تم اختيار عينة عشوائية من 180 جهاز وتبين وجود 20 جهاز معيب عند مستوى معنوية1%.

اختبر مدى مصداقية هذه الشركة.

الحل:

1. خضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$\mathbf{H_0 : } \boldsymbol{p} \mathbf{= 0.06}$$
$$\mathbf{H_1 : } \boldsymbol{p} \neq \mathbf{\ 0.06}$$

2. قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{p_0}}{\sqrt{\frac{\mathbf{p_0}\,(\mathbf{1}-\mathbf{p_0})}{\mathbf{n}}}}$$

نسبة المعيب في العينة هي :

$$r = \frac{20}{180} = 0.11$$

$$Z = \frac{0.11 - 0.06}{\sqrt{\frac{0.06\,(1-0.06)}{180}}} = \frac{0.05}{\sqrt{\frac{0.06 \times 0.94}{180}}} = \frac{0.05}{0.02} = 2.5 \ldots (1)$$

نقوم الآن بإيجاد قيمة Zالجدولية عند مستوى معنوية 1%

$$Z_\alpha = Z_{0.01}$$

$$t_{0.01} = 2.33 \ldots (2)$$

من (1)،(2) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية 1%، ونتيجة لذلك نرفض فرض العدم الذي يدل على عدم مصداقية الشركة المصدرة للأجهزة.

4.3.3 اختبار للفرق بين النسبتين

نريد الآن اختبار الفرق بين نسبتين في عينتين لنرى هل هناك فرق بينهما أم لا؟ مثل نسبة التدخين بين الرجال والسيدات ونسبة المتعلمين بين الأولاد والبنات .... الخ. فإذا كانت r_1 وr_2 هما نسبتان من عينتان مسحوبتان عشوائيا حجمها على الترتيب n_1, n_2فان توزيع المعاينة للفرق بين النسبتين $r_1 - r_2$ يتبع التوزيع الطبيعي وتكون للإحصاء Z الشكل التالي:

$$\mathbf{Z} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)_0}{\sqrt{\bar{\mathbf{r}}\,(\mathbf{1}-\bar{\mathbf{r}})\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_1}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_2}}\right)}} \ldots \mathbf{(1)}$$

حيث:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\boldsymbol{n_1 r_1} + \boldsymbol{n_2 r_2}}{\boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_2}}$$

الصيغة في المعادلة (1) يمكن استخدامها عندما يكون فرض العدم على الصورة:

$$\mathbf{H_0 : } (\boldsymbol{p_1} - \boldsymbol{p_2}) = \mathbf{0}$$

ويكون الفرض البديل على الصورة:

$$H_1 : (p_1 - p_2) \neq 0$$
$$\text{أو } H_1 : (p_1 - p_2) < 0$$
$$\text{أو } H_1 : (p_1 - p_2) > 0$$

ولكن عندما يكون فرض العدم على الصورة:

$$H_0 : (p_1 - p_2) = p \qquad p \neq 0$$

يتم استخدام الاحصاءة التالية :

$$Z = \frac{(r_1 - r_2) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\left(\frac{r_1(1-r_1)}{n_1} + \frac{r_2(1-r_2)}{n_2}\right)}} \quad \dots (2)$$

يأخذ الفرض البديل الشكل التالي:

$$H_1 : (p_1 - p_2) \neq p$$
$$\text{أو } H_1 : (p_1 - p_2) < p$$
$$\text{أو } H_1 : (p_1 - p_2) > p$$

وسوف نوضح ذلك بالأمثلة التالية:

$$H_0 : (p_1 - p_2) = 0$$

$$H_1 : (p_1 - p_2) > 0$$

-2- قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$Z = \frac{(r_1 - r_2) - (p_1 - p_2)_0}{\sqrt{\bar{r}(1 - \bar{r})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

مثال 13: مجموعتان أ، ب تتكون كل مجموعة من 100 شخص مصابين بمرض معين، أراد باحث اختبار مصل ضد هذا المرض فتم إعطاء المصل للمجموعة أ، بينما المجموعة ب تم إعطاؤها العلاج المعتاد، وبعد فترة وجد أن 80 شخص من المجموعة أ قد شفى بينما شفى 62 شخص من المجموعة ب.

المطلوب:

اختبر الفرض بأن المصل يساعد على الشفاء أكثر من العلاج المعتاد، وذلك عند مستوى معنوية 5%

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$r_1 = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$r_2 = \frac{62}{100} = 0.62$$

$$\bar{r} = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_1 + n_2} = \frac{100 \times 0.8 + 100 \times 0.62}{100+100}$$

$$= \frac{142}{200}$$

$$= 0.71$$

$$Z = \frac{0.18}{\sqrt{0.21 \times 0.02}}$$

$$Z = 2.78 \ldots (1)$$

2. نقوم الآن بحساب قيمة Z الجدولية

$$Z_\alpha = Z_{0.05}$$

$$Z_{0.05} = 1.65 \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية 5 % ونتيجة لذلك نقبل الفرض البديل الذي يدل على مدى فاعلية المصل.

مثال 14: ينتج أحد المصانع سلعة ما من خلال وحدتين للإنتاج، فإذا اختيرت عينة عشوائية من 100 وحدة من إنتاج الوحدة الأولى فوجد بها 12 وحدة معينة. وتم اختيار 150 وحدة من إنتاج الوحدة الثانية فوجد بها 15 وحدة معينة.

المطلوب:

اختبر الفرض القائل بان الفرق بين نسبة الإنتاج التالفة لا يزيد عن 0.04 وذلك عند مستوى معنوية 5%.

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$H_0 : (p_1 - p_2) = 0.04$$

$$H_{1:} (p_1 - p_2) < 0.04$$

2. قيمة Z المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$\mathbf{Z} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)_0}{\sqrt{(\frac{\mathbf{r}_1 (\mathbf{1} - \mathbf{r}_1)}{\mathbf{n}_1} + \frac{\mathbf{r}_2 (\mathbf{1} - \mathbf{r}_2)}{\mathbf{n}_2})}}$$

$$r_1 = \frac{12}{100} = 0.12$$

$$r_2 = \frac{15}{150} = 0.1$$

$$Z = \frac{(0.12 - 0.1) - 0.04}{\sqrt{\frac{0.12 \times 0.88}{100} + \frac{0.1 \times 0.09}{150}}} = \frac{-0.02}{\sqrt{0.0011 + 0.0006}} = -0.49 \ldots (1)$$

3. نقوم الآن بحساب قيمة Z الجدولية

$$Z_\alpha = Z_{0.05}$$

$$Z_{0.05} = 1.65 \ldots (2)$$

من (1) , (2) نجد أن قيمة Z المحسوبة أكبر من قيمة Z الجدولية عند مستوى معنوية 5% ونتيجة لذلك نقيل الفرض العدمي بأن الفرق بين نسبة الإنتاج المعيب يساوي 0.04.

1.3اختبار تباين المجتمع σ^2

في الكثير من الأحيان يكون من الأهمية بما كان معرفة تباين مجتمع من المجتمعات. ففي عملية التصنيع يلزمنا معرفة التباين في أوزان المنتجات أو في أحجامها، لأن هذا التباين يعكس مستوى الجودة في عملية التصنيع.

ولهذا كثيرا ما يقوم مهندسو الإنتاج بقياس التباين في المنتجات من حين لآخر ويحاولون ان يبقوا ذلك التباين ضمن حدود معينة.

نظرية: إذا كان لدينا مجتمع يتوزع توزيعا طبيعيا تباينه σ^2، وأردنا إجراء اختبارات حول المعلمة σ^2 ، فإن إحصاء الاختبار المناسب في هذه الحالة هو الإحصاء الذي يعتمد على أفضل مقدرة للمعلمة σ^2، وهو تباين العينة S^2، وهذا الإحصاء هو المتغير العشوائي χ^2 حيث $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى توزيع كاي تربيع بدرجة حرية v = n - 1 بالتالي أردنا اختبار الفرضية الصفرية $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة .

- ❖ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}.v}$ أو $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}.v}$
- ❖ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت $\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}.v}$
- ❖ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت $\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}.v}$

مثال 09: يدع مدير أحد المصانع أن منتجاته لا يزيد الانحراف المعياري لأطوالها عن 0.2 سم، أراد أحد الزبائن أن يتأكد من هذا الادعاء، فأخذ عينة عشوائية مكونة من 10 منتجات فوجد أن الانحراف المعياري فيها كان0.4 سم.

المطلوب:

هل تعطينا هذه النتيجة مبررا قويا لرفض ادعاء البائع مستخدما في ذلك مستوى الدلالة 0.05.

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$H_0 : S^2 = \sigma_0$$

$$H_1 : S^2 \neq \sigma_0$$

2. **قيمة χ^2 المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:**

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{10 \,.\, 0.4^2}{0.2^2} = 40 \ldots (1)$$

تقوم الآن بإيجاد قيمة χ^2الجدولية عند مستوى معنوية 5%:

$$\chi_\alpha = \chi_{0.05}$$

$$\chi_{0.05} = 16.92 \ldots (2)$$

القرار:

من (1) و (2) تجد أن قيمة χ^2 المحسوبة أكبر من قيمة χ^2 الجدولية، ونتيجة لذلك ترفض فرض العدم H_0ونقبل الفرضية البديلةH_1 ، عند مستوى معنوية 5%

5.3.3 اختبار النسبة بين تباين مجتمعين

نظرية 10: إذا كان لدينا مجتمعان يتوزعان طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول الذي تباينه σ_1^2 عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمهاn_1 وكان تباينهاS_1^2 سحبنا من المجتمع الثاني الذي تباينه σ_2^2 عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى حجمهاn_2 وكان تباينها S_2^2، وأردنا إجراء اختبار خاص بمقارنة σ_1^2 وσ_2^2فإن إحصاء الاختبار المناسب هو المتغير العشوائيF ، حيث $F = \frac{S_1^2 . \sigma_1^2}{S_2^2 . \sigma_2^2}$

والتوزيع الاحتمالي لهذا المتغير يسمى توزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1 = n_1 - 1$ (درجة حرية البسط) و $v_2 = n_2 - 1$ (درجة حرية المقام) .

- ❖ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت $F > F\left(\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2\right)$ أو $F < F\left(1 - \frac{\alpha}{2}, v_1, v_2\right)$
- ❖ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$فإننا نرفض H_0 عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت $F > F\left(\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2\right)$
- ❖ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$فإننا نرفض H_0عند مستوى الدلالة (α) إذا كانت $F < F\left(1 - \frac{\alpha}{2}, v_1, v_2\right)$

مثال 10: إذا علمت أن مجتمع طول الطالبات، ومجتمع طول الطالبات في جامعة يحيى الونشريسي بتيسمسيلت يتوزعان توزيعا طبيعيا، وسحبنا من المجتمع الأول عينة عشوائية حجمها 25 طالبة، ومن المجتمع الثاني عينة عشوائية حجمها 21 طالبا، وكانت العينتان مستقلتان، ووجدنا أن تباين الطول لعينة الطالبات يساوي 64، وتباين الطول لعينة الطلبة يساوي 36.

المطلوب:

اختبر ما كان هناك فرق بين تباين مجتمع طول الطالبات وتباين مجتمع طول الطلبة، وذلك باستخدام مستوى معنوية 0.05.

الحل:

1. نضع فروض الاختبار وهي كالتالي:

$$\mathbf{H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2}$$

$$\mathbf{H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$$

2. قيمة المحسوبة يتم إيجادها كالتالي:

$$F_{cal} = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{64}{36} = \mathbf{1.778 \dots (1)}$$

42.7	42.6	43	43.5	42.8	43.1	43.6	42.9
42.7	42.6	43	43.5	42.8	43.1	43.6	42.9
416	42.8	42.9	43.2	42.6	43.1	43.1	--

نقوم الآن بإيجاد قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية % 5 :

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, v_1, v_2\right) = F\left(\frac{0.05}{2}, 24, 20\right)$$

$$v_1 = n_1 - 1, \qquad v_2 = n_2 - 1$$

$$F_t = 2.3 \dots (2)$$

القرار:

من (1) و (2) نجد أن قيمة F_c المحسوبة أصغر من قيمة F_t الجدولية، ونتيجة لذلك نرفض فرض البديلة H_1 ونقبل الفرضية العدم H_0، عند مستوى معنوية 5%، أي المجتمعين متجانسين أي أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

تمارين مع الحلول

التمرين 1:

لمعرفة سعر سلعة معينة، اخترنا 15 دكان لمدينة ما، فتحصلنا على النتائج المدونة في الجدول أسفله :

Unité : U.M

ليكن X_i متغيرة عشوائية تمثل سعر السلعة محل الدراسة. تحدد مستوى بـ 5%

1. أعط تقديراً نقطياً لمتوسط المجتمع (μ) وانحرافه المعياري (σ)؛
2. هل يمكن أن نقبل الفرضية: $E(X) = 43,0$ ؟
3. هل يمكن أن نقبل الفرضية: $Var\ (X) = 0.1$ ؟

التمرين2:

تنتج شركة أسلاك معدنية تباين قوة المقاومة للتلف للأسلاك لا تتعدى 30000 وادعت الشركة بأن إنتاجها للطريقة الجديدة المستخدمة الآن تزيد من تباين قوة المقاومة لتلف الأسلاك. وللتحقق من صحة الادعاء سحبنا عينة عشوائية مكونة من 10 أسلاك من إنتاج الشركة فوجدنا تباينها 40000.

اختبر فرضية وجود زيادة خطر في التباين عند مستوى خطر $\alpha = 1\%$.

التمرين3:

يعرف مركز تجنيد بالجيش من الخبرة الماضية أن وزن المجند يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ يساوي 80 كلغ وانحراف معياري σ يساوي 10 كلغ. ويرغب مركز التجنيد أن يختبر، عند مستوى خطر1%، ما إذا كان متوسط وزن مجند هذا العام أكبر من 80 كيلو جراماً. ولعمل هذا، فقد أخذ عينة عشوائية من 25 مجنداً حيث وجد أن متوسط الوزن في العينة 85 كيلو جراماً.

كيف يمكن إجراء هذا الاختبار؟

التمرين4:

يرغب الخبراء في مقارنة المدة الزمنية للإنتاج المزعومة في مصنعين لمعرفة هذا، أخذوا عينتين عشوائيتين مستقلتان من هذين المصنعين فخلصوا إلى النتائج الموضحة في الجدول التالي:

	Usine 1	Usine 2
عدد القطع المصنعة	12	15

50.8	45.1	**المدة الزمنية المتوسطة (بالدقائق)**
10	6	**الانحراف المعياري الملاحظ**

1. هل يمكن اعتبار عند مستوى خطر $\alpha = 5\%$ أن فرضية تساوي تباينا المدتين الزمنيتين للمصنعين صحيحة؟
2. على ضوء النتائج المحصلة، وعند مستوى خطر$\alpha = 5\%$ ، هل يمكن مساندة الخبراء على أن المدة الزمنية للإنتاج في المصنع الأول مماثلة إلى تلك التي في المصنع الثاني؟

التمرين5:

يرغب مخبر التحاليل الطبية في مقارنة تأثير نوعين من الأدوية العصبية على المرضى، نعتبر الوقت الضروري لتهدئة قلقهم، تطبق على 11 مريض الدواء الأول A وعلى 14 مريض آخر الدواء الثاني B وسجل النتائج المتوصل إليها في الجدول أدناه:

Groupe A			**Groupe B**		
$n_A = 11$	= 14.6	= 23.34	$n_B = 14$	=39.9	= 198.91

من خلال هذه النتائج المتحصل عليها يرغب المخبر في معرفة وجود فرق معنوي للوقت الضروري لتهدئة القلق بين النوعين من الأدوية العصبية ونيابة عن المخبر، قم باختبار هذه الفرضية عند مستوى خطر $\alpha=5\%$.

حلول التمارين

التمرين 1:

1. التقدير النقطي لمتوسط المجتمع (μ) انحرافه المعياري(σ)

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{643.5}{15} = 42.9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot S = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{15}{15-1}} \cdot \sqrt{\frac{27609.15}{15} - 42.9^2} = 0.46$$

2. اختبار فرضية متوسط المجتمع حول قيمة E(X) = 43,0

- طرح الفرضيات الإحصائية

$$H_0 : \mu = 43$$

$$H_1 : \mu \neq 43$$

- معرفة طبيعة التوزيع وتحديد المقياس الإحصائي للاختبار

لدينا n = 15 ، والانحراف المعياري للمجتمع مجهول إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع ستودنت وبالتالي فإن المقياس الإحصائي للاختبار هو t .

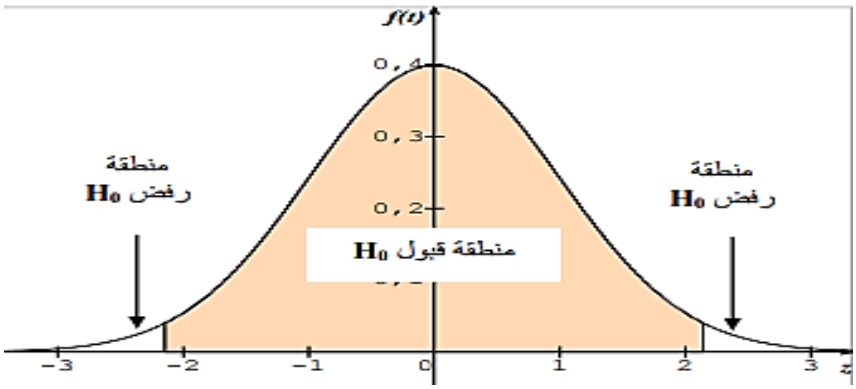
$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{42.9-43}{0.447/\sqrt{15-1}} = -0.83$$

- استخراج القيمة الجدولية

$$t_{(n-1,\ \alpha/2)} = t_{(15-1,\ 0.025)}$$

$$t_{(14,\ 0.025)} = -0.83$$

الشكل: منطقة قبول H_0 بين القيمتين (t = -2,145 , t = 2 ,145)



إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي $]-2.145; +2.145[$

- اتخاذ القرار الإحصائي

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية t_{th} بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) t_c

$$-2.145 < -0.83 < +2.145$$

$$-0.83 \in]-2.145;\ +2.145[$$

المقياس الإحصائي للاختبار(القيمة المحسوبة) t_c تتواجد في منطقة رفض H_0 إذن تقبل H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1

3. اختبار فرضية تباين المجتمع حول قيمة $Var(X) = 0.1$

- طرح الفرضيات الإحصائية

$$H_0 : \sigma^2 = 0.1$$

$$H_0 : \sigma^2 = 0.1$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 0.1$$

- حساب إحصائية الاختبار

$$\chi_C^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2{}_0} = \frac{(15-1)\times 0.2}{0.1} = 28$$

- استخراج القيم الجدولية

$$\chi^2_{Tab_D} = \chi^2_{(n-1,\ \alpha/2)} = \chi^2_{(14,\ 0.025)} = 26.12$$

$$\chi^2_{Tab_G} = \chi^2_{(n-1,\ 1-\alpha/2)} = \chi^2_{(14,\ 0.975)} = 5.63$$

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي $[5.63; 26.12]$

- اتخاذ القرار الإحصائي

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية χ_{Tab} بالمقياس الإحصائي للاختبار القيمة المحسوبة χ_C^2

$$5.63 < 28 > 26.12$$

$$28 \notin]5.63\ ;\ 26.12[$$

المقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) c تتواجد في منطقة قبول H_0إذن نقبل H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1

التمرين2:

n = 10, σ_0^2 = 30000, S^2 = 40000, α = 0.01

1. طرح الفرضيات الإحصائية

$$H_0 : \sigma^2 = 30000$$

$$H_1 : \sigma^2 > 30000$$

2. استخراج القيمة الجدولية من الجدول الإحصائي لχ_C^2

$$\chi^2_{(dL;\,\alpha)} = \chi^2_{(10-1;\,0.01)} = \chi^2_{(9;\,0.01)} = 21.67$$

3. حساب إحصائية الاختبار χ_C^2

$$\chi_C^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2{}_0} = \frac{(10-1)\times 40000}{30000} = 12$$

4. اتخاذ القرار الإحصائي

$$\chi_C^2 = 12 < \chi^2_{(9;\,0.01)} = 21.67$$

إحصائية الاختبار χ_C^2 تتواجد في منطقة قبول H_0وبالتالي نقبل H_0ونرفض H_1التي تدعي وجود زيادة في تباين قوة المقاومة لتلف الأسلاك.

التمرين3:

1. طرح الفرضيات الإحصائية

$$H_0 : \mu = 80$$

$$H_1 : \mu > 80$$

2. معرفة طبيعة التوزيع وتحديد المقياس الإحصائي للاختبار

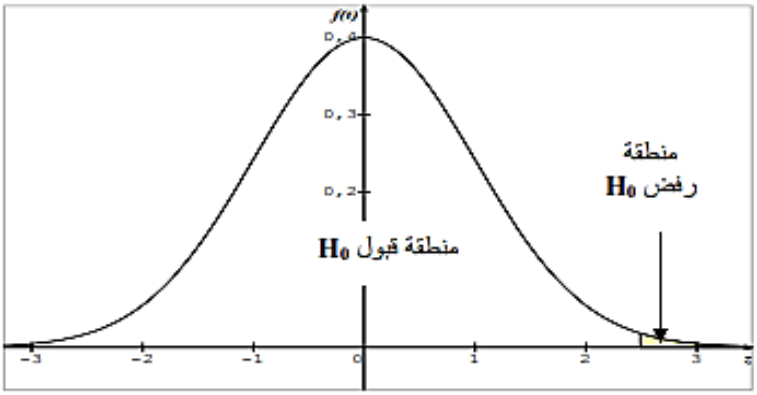
لدينا n = 25، والانحراف المعياري للمجتمع معلوم إذن فالتوزيع المتبع هو توزيع ستودنت ، وبالتالي فإن المقياس الإحصائي للاختبار هو t.

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{85-80}{10/\sqrt{25}} = 2.5$$

3. استخراج القيمة الجدولية

$$t_{(n-1;\,\alpha)} = t_{(25-1;\,0.01)} = t_{(24;\,0.01)} = 2.492$$

الشكل: منطقة قبول H_0 بين القيمتين (t = 2 ,492 , t = -2,492)



إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي $[-2.492;\ 2.492]$

4. اتخاذ القرار الإحصائي

نقوم بمقارنة القيمة الجدولية t_{th} بالمقياس الإحصائي للاختبار (القيمة المحسوبة) t_c

$$-2.492 < -0.83 < +2.492$$

$$2.5 \notin\ ]-2.492;\ +2.492[$$

المقياس الإحصائي للاختبار(القيمة المحسوبة) t_c تتواجد في منطقة رفض H_0 إذن تقبلH_0

التمرين4:

1. اختبار فرضية تساوي تباينا المدتين الزمنيتين للمصنعين عند مستوى خطر 5%

- صياغة الفرضيات الاحصائية

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

- استخراج القيم الجدولية من الجدول الإحصائي لـ F

$$F_{(d_1;d_2\,;\,\alpha)} = F_{(n_1-1\,;n_2-1\,;\,0.025)} = F_{(11\,;14\,;\,0.025)} = 2.56$$

$$F_{(d_2;d_1\,;\,\alpha)} = F_{(n_2-1\,;n_1-1\,;\,0.025)} = F_{(14\,;11\,;\,0.025)} = 2.74$$

$$F_G = \frac{1}{F_{(n_1-1\,;n_2-1\,;\,0.025)}} = \frac{1}{2.56} = 0.39$$

$$F_D = \frac{1}{F_{(n_2-1\,;n_1-1\,;\,0.025)}} = \frac{1}{2.74} = 2.74$$

- حساب إحصائية الاختبار F_C

$$F_C = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}S_1^2}{\frac{n_2}{n_2-1}S_2^2} = \frac{\frac{12}{11}.6^2}{\frac{15}{14}.10^2}$$

- اتخاذ القرار الإحصائي

$$F_G < F_C < F_D$$

$$0.39 < 0.366 < 2.74$$

إحصائية الاختبار F_Cتتواجد في منطقة قبول H_0وبالتالي نقبل H_0التي تدعي تساوي تباينا المدتين الزمنيتين للمصنعين.

2. اختبار فرضية تساوي متوسط المدتين الزمنيتين للمصنعين عند مستوى خطر 5%.

- صياغة الفرضيات الإحصائية

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

- تحديد القيمة النظرية أو الجدولية

بما أن حجمي العينتين أصغر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t_{th}

$$t_{th} = t_{(dL,\ \alpha/2)} = t_{(n_1+n_2-2,\ 0.05/2)}$$

$$t_{(25,\ 0.025)} = \pm 2.06$$

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي $[-2.06; 2.06]$

- تحديد إحصائية الاختبار t_C

$$t_C = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2 + (n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}.\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{45.1-50.8}{\sqrt{\frac{(12-1).6^2+(15-1).10^2}{12+15-2}.\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}\right)}} = -1.74$$

اتخاذ القرار الاحصائي

$$-2.06 < -1.74 < 2.06$$

إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصغرية وبالتالي نقبل العرضية الصفرية التي تدعي أن متوسط المدة الزمنية للمصنع الأول تساوي متوسط المدة الزمنية للمصنع الثاني.

التمرين 5

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum X_i}{n_1} = \frac{14.6}{11} = 1.33 \qquad n_1 = 11$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum X_i}{n_2} = \frac{39.9}{14} = 2.85 \qquad n_2 = 14$$

$$S_1^2 = \frac{\sum X_i^2}{n_1} - \bar{X}_1^{\,2} = \frac{23.34}{11} - 1.33^2 = 0.35$$

$$S_2^2 = \frac{\sum X_i^2}{n_2} - \bar{X}_2^{\,2} = \frac{198.91}{14} - 2.85^2 = 6.08$$

1. صياغة الفرضيات الإحصائية

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

2. تحديد القيمة النظرية أو الجدولية

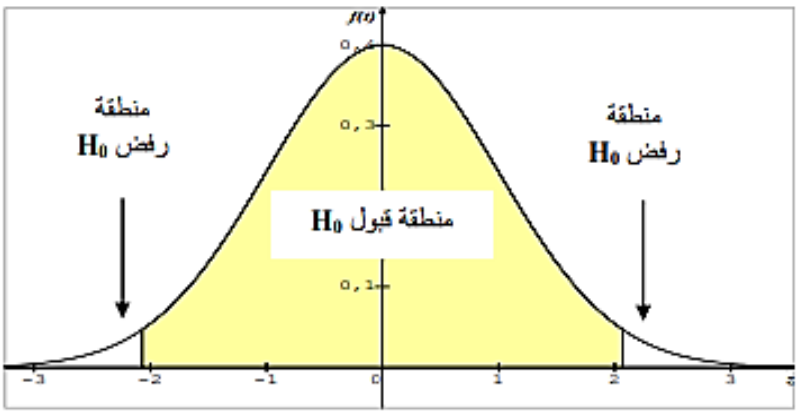
بما أن حجمي العينتين أصغر من 30 وتباينا المجتمعين مجهولين ومتساويين، إذن فالمجتمعان يتبعان توزيع ستودنت وبالتالي نستخرج القيمة الجدولية t_{th}

$$t_{th} = t_{(dL,\ \alpha/2)} = t_{(n_1+n_2-2,\ 0.05/2)}$$

$$t_{(23,\ 0.025)} = \pm 2.069$$

إذن منطقة قبول الفرضية الصفرية هي $[-2.069; 2.069]$

الشكل: منطقة قبول H_0 بين القيمتين (t = -2,069 , t = 2 ,069)



1. تحديد إحصائية الاختبار t_C

$$t_C = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1).S_1^2 + (n_2-1).S_2^2}{n_1+n_2-2}.\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$= \frac{1.33-2.85}{\sqrt{\frac{(11-1).0.35^2+(14-1).6.08^2}{11+14-2}.\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{14}\right)}} = -1.99$$

2. اتخاذ القرار الاحصائي

$$-2.069 < -1.99 < 2.069$$

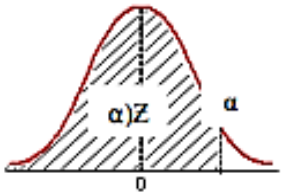
إذن إحصائية الاختبار أو القيمة المحسوبة تنتمي إلى مجال قبول الفرضية الصفرية وبالتالي تقبل الفرضية الصفرية التي تدعي عدم وجود فروق خطر للوقت الضروري لتهدئة القلق بين النوعين من الأدوية العصبية.

الملاحق

ملاحق:

ملحق 1 جدول التوزيع الطبيعي Z

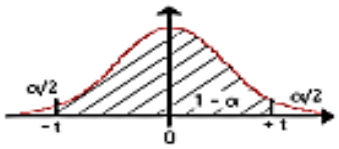
Fonction de répartition Ƶ de la loi normale centrée réduite.
Probabilité de trouver une valeur inférieure à α .
Ƶ (-α) = 1 - Ƶ (α)



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83648	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93058	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96248	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

ملحق 2 جدول توزيع ستودنت t درجة الحرية (v) $P = 1 - \alpha/2$ مستوى معنوية α

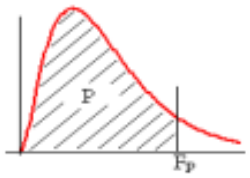
Cette table donne les fractiles de la loi de Student à ν degrés de liberté : valeur t ayant la probabilité α d'être dépassée en valeur absolue : $P(-t < T < t) = 1 - \alpha$.
Ou : $P(T < -t) = \alpha/2 = P(T > t)$



ν \ α	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
p	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.9995
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	1.3764	1.9626	3.0777	6.3137	12.706	31.821	63.656	127.32	636.58
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.92	4.3027	6.9645	9.925	14.089	31.6
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408	7.4532	12.924
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.941	1.1896	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041	5.5975	8.6101
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.015	2.5706	3.3649	4.0321	4.7733	6.8685
6	0.1311	0.2648	0.4043	0.5534	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	4.3168	5.9587
7	0.1303	0.2632	0.4015	0.5491	0.7111	0.896	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995	4.0294	5.4081
8	0.1297	0.2619	0.3995	0.5459	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.306	2.8965	3.3554	3.8325	5.0414
9	0.1293	0.261	0.3979	0.5435	0.7027	0.8834	1.0997	1.383	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6896	4.7809
10	0.1289	0.2602	0.3966	0.5415	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.5868
11	0.1286	0.2596	0.3956	0.5399	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.201	2.7181	3.1058	3.4966	4.4369
12	0.1283	0.259	0.3947	0.5386	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.681	3.0545	3.4284	4.3178
13	0.1281	0.2586	0.394	0.5375	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	3.3725	4.2209
14	0.128	0.2582	0.3933	0.5366	0.6924	0.8681	1.0763	1.345	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	3.3257	4.1403
15	0.1278	0.2579	0.3928	0.5357	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467	3.286	4.0728
16	0.1277	0.2576	0.3923	0.535	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.252	4.0149
17	0.1276	0.2573	0.3919	0.5344	0.6892	0.8633	1.069	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.2224	3.9651
18	0.1274	0.2571	0.3915	0.5338	0.6884	0.862	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.1966	3.9217
19	0.1274	0.2569	0.3912	0.5333	0.6876	0.861	1.0655	1.3277	1.7291	2.093	2.5395	2.8609	3.1737	3.8833
20	0.1273	0.2567	0.3909	0.5329	0.687	0.86	1.064	1.3253	1.7247	2.086	2.528	2.8453	3.1534	3.8496
21	0.1272	0.2566	0.3906	0.5325	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.1352	3.8193
22	0.1271	0.2564	0.3904	0.5321	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.1188	3.7922
23	0.1271	0.2563	0.3902	0.5317	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.104	3.7676
24	0.127	0.2562	0.39	0.5314	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.797	3.0905	3.7454
25	0.1269	0.2561	0.3898	0.5312	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.0782	3.7251
26	0.1269	0.256	0.3896	0.5309	0.684	0.8557	1.0575	1.315	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.0669	3.7067
27	0.1268	0.2559	0.3894	0.5306	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.0565	3.6895
28	0.1268	0.2558	0.3893	0.5304	0.6834	0.8546	1.056	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.047	3.6739
29	0.1268	0.2557	0.3892	0.5302	0.683	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.462	2.7564	3.038	3.6595
30	0.1267	0.2556	0.389	0.53	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.75	3.0298	3.646
31	0.1267	0.2555	0.3889	0.5298	0.6825	0.8534	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.744	3.0221	3.6335
32	0.1267	0.2555	0.3888	0.5297	0.6822	0.853	1.0535	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385	3.0149	3.6218
33	0.1266	0.2554	0.3887	0.5295	0.682	0.8526	1.053	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333	3.0082	3.6109
34	0.1266	0.2553	0.3886	0.5294	0.6818	0.8523	1.0525	1.307	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284	3.002	3.6007
35	0.1266	0.2553	0.3885	0.5292	0.6816	0.852	1.052	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238	2.9961	3.5911
40	0.1265	0.255	0.3881	0.5286	0.6807	0.8507	1.05	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045	2.9712	3.551
45	0.1264	0.2549	0.3878	0.5281	0.68	0.8497	1.0485	1.3007	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896	2.9521	3.5203
50	0.1263	0.2547	0.3875	0.5278	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	2.937	3.496
60	0.1262	0.2545	0.3872	0.5272	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	2.9146	3.4602
70	0.1261	0.2543	0.3869	0.5268	0.678	0.8468	1.0442	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479	2.8987	3.435
80	0.1261	0.2542	0.3867	0.5265	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	2.887	3.4164
100	0.126	0.254	0.3864	0.5261	0.677	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.984	2.3642	2.6259	2.8707	3.3905
120	0.1259	0.2539	0.3862	0.5258	0.6765	0.8446	1.0409	1.2886	1.6576	1.9799	2.3578	2.6174	2.8599	3.3734
140	0.1259	0.2538	0.3861	0.5256	0.6762	0.8442	1.0403	1.2876	1.6558	1.9771	2.3533	2.6114	2.8522	3.3613
∞	0.1257	0.2533	0.3853	0.5244	0.6744	0.8416	1.0364	1.2816	1.6449	1.96	2.3264	2.5759	2.8072	3.2908

ملحق 3 جدول توزيع كاي تربيع χ^2

Cette table donne les fractiles F_P de la loi de khi-deux
à ν degrés de liberté : P = Probabilité ($\chi^2 < F_P$)

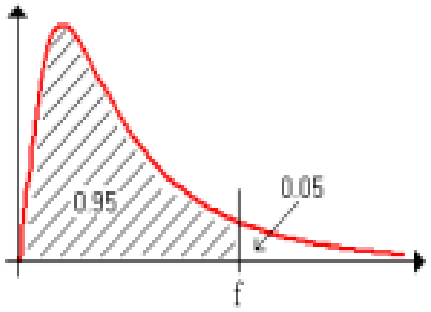


ν \ P	0.01	0.02	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	0.000	0.001	0.004	0.016	0.036	0.064	0.102	0.148	0.275	0.455	0.708	1.074	1.323	1.642	2.072	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	0.020	0.040	0.103	0.211	0.325	0.446	0.575	0.713	1.022	1.386	1.833	2.408	2.773	3.219	3.794	4.605	5.991	7.824	9.210	13.815
3	0.115	0.185	0.352	0.584	0.798	1.005	1.213	1.424	1.869	2.366	2.946	3.665	4.108	4.642	5.317	6.251	7.815	9.837	11.345	16.266
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.366	1.649	1.923	2.195	2.753	3.357	4.045	4.878	5.385	5.989	6.745	7.779	9.488	11.668	13.277	18.466
5	0.554	0.752	1.145	1.610	1.994	2.343	2.675	3.000	3.656	4.351	5.132	6.064	6.626	7.289	8.115	9.236	11.070	13.388	15.086	20.515
6	0.872	1.134	1.635	2.204	2.661	3.070	3.455	3.828	4.570	5.348	6.211	7.231	7.841	8.558	9.446	10.645	12.592	15.033	16.812	22.457
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.358	3.822	4.255	4.671	5.493	6.346	7.283	8.383	9.037	9.803	10.748	12.017	14.067	16.622	18.475	24.321
8	1.647	2.032	2.733	3.490	4.078	4.594	5.071	5.527	6.423	7.344	8.351	9.524	10.219	11.030	12.027	13.362	15.507	18.168	20.090	26.124
9	2.088	2.532	3.325	4.168	4.817	5.380	5.899	6.393	7.357	8.343	9.414	10.656	11.389	12.242	13.288	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	2.558	3.059	3.940	4.865	5.570	6.179	6.737	7.267	8.295	9.342	10.473	11.781	12.549	13.442	14.534	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.336	6.989	7.584	8.148	9.237	10.341	11.530	12.899	13.701	14.631	15.767	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.114	7.807	8.438	9.034	10.182	11.340	12.584	14.011	14.845	15.812	16.989	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	4.107	4.765	5.892	7.041	7.901	8.634	9.299	9.926	11.129	12.340	13.636	15.119	15.984	16.985	18.202	19.812	22.362	25.471	27.688	34.527
14	4.660	5.368	6.571	7.790	8.696	9.467	10.165	10.821	12.078	13.339	14.685	16.222	17.117	18.151	19.406	21.064	23.685	26.873	29.141	36.124
15	5.229	5.985	7.261	8.547	9.499	10.307	11.037	11.721	13.030	14.339	15.733	17.322	18.245	19.311	20.603	22.307	24.996	28.259	30.578	37.698
16	5.812	6.614	7.962	9.312	10.309	11.152	11.912	12.624	13.983	15.338	16.780	18.418	19.369	20.465	21.793	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17	6.408	7.255	8.672	10.085	11.125	12.002	12.792	13.531	14.937	16.338	17.824	19.511	20.489	21.615	22.977	24.769	27.587	30.995	33.409	40.791
18	7.015	7.906	9.390	10.865	11.946	12.857	13.675	14.440	15.893	17.338	18.868	20.601	21.605	22.760	24.155	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	7.633	8.567	10.117	11.651	12.773	13.716	14.562	15.352	16.850	18.338	19.910	21.689	22.718	23.900	25.329	27.204	30.144	33.687	36.191	43.819
20	8.260	9.237	10.851	12.443	13.604	14.578	15.452	16.266	17.809	19.337	20.951	22.775	23.828	25.038	26.498	28.412	31.410	35.020	37.566	45.314
21	8.897	9.915	11.591	13.240	14.439	15.445	16.344	17.182	18.768	20.337	21.992	23.858	24.935	26.171	27.662	29.615	32.671	36.343	38.932	46.796
22	9.542	10.600	12.338	14.041	15.279	16.314	17.240	18.101	19.729	21.337	23.031	24.939	26.039	27.301	28.822	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	10.196	11.293	13.091	14.848	16.122	17.187	18.137	19.021	20.690	22.337	24.069	26.018	27.141	28.429	29.979	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24	10.856	11.992	13.848	15.659	16.969	18.062	19.037	19.943	21.652	23.337	25.106	27.096	28.241	29.553	31.132	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	11.524	12.697	14.611	16.473	17.818	18.940	19.939	20.867	22.616	24.337	26.143	28.172	29.339	30.675	32.282	34.382	37.652	41.566	44.314	52.619
26	12.198	13.409	15.379	17.292	18.671	19.820	20.843	21.792	23.579	25.336	27.179	29.246	30.435	31.795	33.429	35.563	38.885	42.856	45.642	54.051
27	12.878	14.125	16.151	18.114	19.527	20.703	21.749	22.719	24.544	26.336	28.214	30.319	31.528	32.912	34.574	36.741	40.113	44.140	46.963	55.475
28	13.565	14.847	16.928	18.939	20.386	21.588	22.657	23.647	25.509	27.336	29.249	31.391	32.620	34.027	35.715	37.916	41.337	45.419	48.278	56.892
29	14.256	15.574	17.708	19.768	21.247	22.475	23.567	24.577	26.475	28.336	30.283	32.461	33.711	35.139	36.854	39.087	42.557	46.693	49.588	58.301
30	14.953	16.306	18.493	20.599	22.110	23.364	24.478	25.508	27.442	29.336	31.316	33.530	34.800	36.250	37.990	40.256	43.773	47.962	50.892	59.702
35	18.509	20.027	22.465	24.797	26.460	27.836	29.054	30.178	32.282	34.336	36.475	38.859	40.223	41.778	43.640	46.059	49.802	54.244	57.342	66.619
40	22.164	23.838	26.509	29.051	30.856	32.345	33.660	34.872	37.134	39.335	41.622	44.165	45.616	47.269	49.244	51.805	55.758	60.436	63.691	73.403
45	25.901	27.720	30.612	33.350	35.290	36.884	38.291	39.585	41.995	44.335	46.761	49.452	50.985	52.729	54.810	57.505	61.656	66.555	69.957	80.078
50	29.707	31.664	34.764	37.689	39.754	41.449	42.942	44.313	46.864	49.335	51.892	54.723	56.334	58.164	60.346	63.167	67.505	72.613	76.154	86.660
55	33.571	35.659	38.958	42.060	44.245	46.036	47.610	49.055	51.739	54.335	57.016	59.980	61.665	63.577	65.855	68.796	73.311	78.619	82.292	93.167
60	37.485	39.699	43.188	46.459	48.759	50.641	52.294	53.809	56.620	59.335	62.135	65.226	66.981	68.972	71.341	74.397	79.082	84.580	88.379	99.606
65	41.444	43.779	47.450	50.883	53.293	55.262	56.990	58.573	61.506	64.335	67.249	70.462	72.285	74.351	76.807	79.973	84.821	90.501	94.422	105.988
70	45.442	47.893	51.739	55.329	57.844	59.898	61.698	63.346	66.396	69.334	72.358	75.689	77.577	79.715	82.255	85.527	90.531	96.387	100.425	112.317
75	49.475	52.039	56.054	59.795	62.412	64.547	66.417	68.127	71.290	74.334	77.464	80.908	82.858	85.066	87.688	91.061	96.217	102.243	106.393	118.599
80	53.540	56.213	60.391	64.278	66.994	69.207	71.145	72.915	76.188	79.334	82.566	86.120	88.130	90.405	93.106	96.578	101.879	108.069	112.329	124.839
85	57.634	60.412	64.749	68.777	71.589	73.878	75.881	77.710	81.089	84.334	87.665	91.325	93.394	95.734	98.511	102.079	107.522	113.871	118.236	131.043
90	61.754	64.635	69.126	73.291	76.195	78.558	80.625	82.511	85.993	89.334	92.761	96.524	98.650	101.054	103.904	107.565	113.145	119.648	124.116	137.208
95	65.898	68.879	73.520	77.818	80.813	83.248	85.376	87.317	90.899	94.334	97.855	101.717	103.899	106.364	109.286	113.038	118.752	125.405	129.973	143.343
100	70.065	73.142	77.929	82.358	85.441	87.945	90.133	92.129	95.808	99.334	102.946	106.906	109.141	111.667	114.659	118.498	124.342	131.142	135.807	149.449

Pour $\nu > 100$, $\chi^2(\nu) \cong N(\nu; \sqrt{2\nu})$ ou $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1} \cong N(0,1)$

ملحق 4 جدول توزيع فيشر F درجة الحرية (v1, v2) مستوى معنوية α= 5%

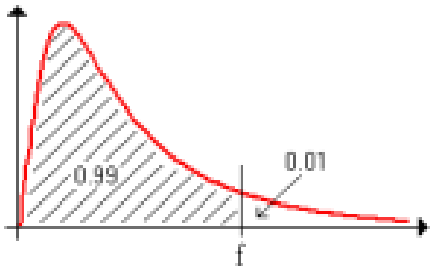
Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor F (ν1 ; ν2) ayant la probabilité 0.05 d'être dépassée



ν2 \ ν1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	50	100	1000
1	161.45	199.5	215.7	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.1	251.1	251.7	253.0	254.1
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.49
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.46	2.41
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.19	2.14
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.07	2.02
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.02	1.97
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.91	1.85
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.88	1.82
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.85	1.79
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.88	1.82	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.80	1.74
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.78	1.72
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.76	1.70
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.81	1.74	1.68
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.73	1.66
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.77	1.71	1.65
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.70	1.63
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.59	1.52
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.48	1.40
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.85	1.77	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.39	1.30
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.82	1.73	1.64	1.59	1.54	1.48	1.44	1.34	1.24
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.80	1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.32	1.21
300	3.87	3.03	2.63	2.40	2.24	2.13	2.04	1.97	1.91	1.86	1.78	1.70	1.61	1.55	1.50	1.43	1.39	1.30	1.17
500	3.86	3.01	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.77	1.69	1.59	1.54	1.48	1.42	1.38	1.28	1.14
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.76	1.68	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.26	1.11
2000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.01	1.94	1.88	1.84	1.76	1.67	1.58	1.52	1.46	1.40	1.36	1.25	1.09

ملحق 5 جدول توزيع فيشر F درجة الحرية (v1, v2) مستوى معنوية α= 1%

Valeur f de la variable de Fisher-Snedecor F (ν1 ; ν2) ayant la probabilité 0.01 d'être dépassée



V1 / V2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	50	100	1000
1	4052.1	4999.3	5403.5	5624.2	5763.9	5858.9	5928.3	5980.9	6022.4	6055.9	6106.6	6150.9	6208.6	6234.2	6260.3	6286.4	6302.2	6333.9	6362.8
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.24	26.14
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.69	13.58	13.47
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.13	9.03
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	6.99	6.89
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.75	5.66
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	4.96	4.87
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.41	4.32
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.01	3.92
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.71	3.61
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.47	3.37
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.27	3.18
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.11	3.02
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	2.98	2.88
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.86	2.76
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.76	2.66
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.68	2.58
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.60	2.50
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.54	2.43
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.58	2.48	2.37
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.42	2.32
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.48	2.37	2.27
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.33	2.22
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.29	2.18
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.25	2.14
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.22	2.11
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.19	2.08
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.27	2.16	2.05
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.13	2.02
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	1.94	1.82
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.56	2.42	2.27	2.18	2.10	2.01	1.95	1.82	1.70
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.75	1.62
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.45	2.31	2.15	2.07	1.98	1.89	1.83	1.70	1.56
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.42	2.27	2.12	2.03	1.94	1.85	1.79	1.65	1.51
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.39	2.24	2.09	2.00	1.92	1.82	1.76	1.62	1.48
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.37	2.22	2.07	1.98	1.89	1.80	1.74	1.60	1.45
125	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.66	2.55	2.47	2.33	2.19	2.03	1.94	1.85	1.76	1.69	1.55	1.39
150	6.81	4.75	3.91	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53	2.44	2.31	2.16	2.00	1.92	1.83	1.73	1.66	1.52	1.35
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.27	2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.48	1.30
500	6.69	4.65	3.82	3.36	3.05	2.84	2.68	2.55	2.44	2.36	2.22	2.07	1.92	1.83	1.74	1.63	1.57	1.41	1.20
1000	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.20	2.06	1.90	1.81	1.72	1.61	1.54	1.38	1.16
2000	6.65	4.62	3.79	3.33	3.03	2.81	2.65	2.52	2.42	2.33	2.19	2.05	1.89	1.80	1.71	1.60	1.53	1.37	1.13

قائمة المراجع

قائمة المراجع

1. عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى، 2000، نظرية التقدير، الاستدلال الاحصائي، الناشر مجموعة النيل العربية، القاهرة.
2. دومينيك سلفاتور(Dominick Salvatore)، 1982، سلسلة ملخصات شوم، نظريات و مسائل في الإحصاء و الاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
3. بوعبد الله صالح مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي دروس وتمارين، 2006.
4. شيلدون م. روس "المدخل إلى النماذج الاحتمالية" ترجمة الدكتور فاضل محسن الربيعي، الطبعة الثالثة الجامعة المستنصرية، 1991.
5. محمد كبيه وماهر بدوي " الإحصاء التطبيقي" منشورات جامعة حلب، كلية الاقتصاد، 2003.
6. بوعظم كمال، **الإحصاء الاستدلالي من الجانب النظري والتطبيقي**، دار زهران للنشر والتوزيع، عمان،2010.
7. أحمد عودة بن عبد المجيد عودة، منصور بن عبد الرحمن القاضي، **الإحصاء الوصفي والاستدلالي، 2 الإحصاء الاستدلالي**، الطبعة الثالثة، مكتبة الفلاح للنشر والتوزيع،2014.
8. عدنان عوض، **الإحصاء التطبيقي**، الشركة العربية المتحدة بالتعاون مع جامعة القدس المفتوحة، مصر،2009.
9. سالم عيسى بدر، عماد غصاب عبابنة، **مبادئ الإحصاء الوصفي والاستدلالي**، الطبعة الثانية، دار المسيرة، عمان، الأردن،2010.
10. طعمة حسين ياسين، حنوش إيمان حسين، **أساليب الإحصاء التطبيقي**، ط1 ، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن،2009.
11. د. خليفة الحاج، مطبوعة في الدروس واعمال موجهة احصاء3، السنة الجامعية 2018-2019.
12. بومدين محمد أمين، *مطبوعة في الإحصاء 3*، جامعة الدكتور مولاي الطاهر سعيدة، 2021–2022.
13. رزاز رتيبة، **محاضرات في مادة الإحصاء3** ، جامعة أمحمد بوقرة بومرداس، 2020–2021.
14. خليفة الحاج، *دروس وأعمال موجهة في الإحصاء 3*، جامعة عبد الحميد بن باديس مستغانم، 2018–2019.
15. تيلولت سامية، *محاضرات وتطبيقات في الإحصاء 3*، جامعة الجزائر 3، 2022–2023.
16. بوالشعور شريفة، مطبوعة دروس في مادة الإحصاء 03، جامعات 20 أوت 1955، 2018/2017.
17. Neil A Weiss, 2017, Introductory Statistics, Pearson Education.
18. Hurlin Christophe, 2015, Statistiques et Probabilités en économie gestion, Dunod.
19. PUPION, Pierre-Charles., Statistique pour la gestion, Applications avec Excel, SPSS, Amos et SmartPLS.,3ème édition, Dunod, Paris, 2012.
20. BISMANS Francis., Probabilités & statistique inférentielle, prélude à l'économétrie, édition Ellipses., 2016.