

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**Université de Saïda – Dr. Moulay Tahar**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département : Electronique**



## **Polycopié Pédagogique**

Intitulé :

Eléments de régulation numérique

Présenté par :

**Dr. BENZAAD ABDELLAH**

Maître de Conférences A (MCA)

**Pour les étudiants de la 2ème année Master en**  
**Electronique d'instrumentation,**

Semestre S1

**Année universitaire : 2025-2026**

## **Avant-propos**

Ce support de cours est une introduction aux concepts fondamentaux et aux mathématiques de l'ingénierie des systèmes de commande analogiques et numériques. Tout au long de ce cours, nous présentons la modélisation des systèmes de commande avec l'ensemble des notions nécessaires à l'étude et l'analyse des systèmes de commande linéaires à temps continu et à temps discret à savoir : la transformée de Laplace, la représentation en schéma bloc des systèmes, les actions correctives analogiques et numériques (PID), les méthodes de transposition de l'analogique au numérique, les méthodes de réglage du PID, ainsi que le régulateur anti-windup et le prédicteur de Smith.

Ce document pédagogique a pour objectif principal l'acquisition des connaissances techniques et scientifiques nécessaires à la maîtrise des systèmes de commande numérique. Il permet aux lecteurs de consolider leurs connaissances en automatique analogique et de mieux appréhender l'univers des régulateurs numériques.

# Table des matières

**Tables des matières**

**Liste des Figures**

**Liste des Tableaux**

**Liste des Symboles**

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I. Rappel sur la régulation analogique</b>	
I.1 Introduction	4
I.2 Définition de la régulation	5
I.3 Concepts importants	7
I.3.1 Précision	7
I.3.2 Stabilité	8
I.3.3 Dépassement	8
I.3.5 Rapidité	8
I.4 Modèles mathématiques pour un système de contrôle	9
I.4.1 Représentation par la transformée de Laplace	9
I.4.2 Propriétés de la transformée de Laplace	10
I.4.3 Schéma fonctionnel d'un système	12
I.4.4 Fonction de transfert des systèmes linéaires	12
I.4.5 Réponse impulsionnelle d'un système	13
I.4.6 Fonction de transfert en boucle fermée	14
I.5 Modèles mathématiques de systèmes électriques	15
I.5.1 Circuit série RLC	15
I.5.2 Circuit RL série	17
I.5.3 Système mécanique masse-dash-pot (amortisseur)	19
I.6 Analogie des circuits	21
I.7 Schéma de tuyauterie et d'instrumentation (P&ID)	22
I.7.1 Lettres d'identification	22
I.7.2 Symboles de lignes	23
I.7.3 Bulles d'instruments	24
I.7.4 Équipements de processus	24
I.7.5 Types de Vannes	25
I.8 Système de contrôle du niveau de liquide	25
I.9 Système de contrôle de la température	27
<b>II. Eléments de régulation analogique</b>	<b>30</b>
II.1 Introduction	30
II.2 Capteur	30
II.3 Transmetteur	31
II.3.1 Constitution	31
II.4 Vannes de régulation	32
II.4.1 Constitution	32
II.4.2 Servomoteur	34

II.4.3	Positionneur	36
II.4.3.1	Principe	36
II.4.3.2	Éléments constitutifs	36
II.4.4	Caractéristiques d'une vanne	37
II.4.4.1	Caractéristique intrinsèque	37
II.4.4.2	Caractéristique installée et autorité d'une vanne	38
II.4.4.3	Autorité de la vanne	38
II.5	Vérin	41
II.5.1	Vérin simple effet	42
II.5.2	Vérin double effet	42
II.5.3	Schématisation des vérins	43
II.6	Rôle du régulateur	44
II.6.1	Sens d'action du régulateur	45
II.6.2	Actions Elémentaires	46
II.6.2.1	Action Proportionnelle	46
II.6.2.2	Action Intégrale	46
II.6.2.3	Action Dérivée	47
II.6.3	Rôles des actions sur le comportement d'une chaîne fermée	47
II.6.4	Différentes structures du régulateur PID	48
II.6.5	Régulateur tout ou rien (TOR)	50
II.6.5.1	Régulateur tout ou rien avec hystérésis	51
II.7	Stratégies de régulation	51
II.7.1	Régulation directe	51
II.7.2	Régulateurs en cascade	52
II.7.3	Régulation à échelle partagée (split-range)	53
II.7.4	Régulation de proportion (feed forward)	54
II.7.5	Régulation de substitution (override)	55
<b>III.</b>	<b>Régulation numérique</b>	<b>57</b>
III.1	Introduction	57
III.2	Structure de la régulation numérique	
III.2.1	Modèle d'un Convertisseur Analogique Numérique CAN ou ADC	58
III.2.2	Modèle d'un Convertisseur Numérique Analogique CNA (DAC)	59
III.3	Discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (ZOH)	59
III.4	Fonction de transfert en boucle fermée	61
III.5	Discrétisation et choix de la fréquence d'échantillonnage	61
II.5.1	Choix de la fréquence d'échantillonnage pour les systèmes de commande numérique	63
III.6	Actions correctives en temps discret	64
III.6.1	Action Proportionnelle	64
III.6.2	Action Dérivée	64
III.6.3	Action Intégrale	65
III.6.4	Action PD	65
III.6.5	Régulateur PI	65
III.6.6	Régulation PID numérique	65
III.7	Critères de performance d'une régulation en boucle fermée	67

III.7.1	Analyse de stabilité des systèmes de commande numériques	68
III.7.1.1	Critère de stabilité de Routh en utilisant la transformation bilinéaire	70
III.7.1.2	Critère de stabilité de Jury	71
III.7.2	Précision du système de régulation corrigé	72
III.7.2.1	Constante d'erreur statique de position	74
III.7.2.2	Constante d'erreur statique de vitesse	74
III.7.2.3	Constante d'erreur d'accélération	75
III.7.3	Rapidité des systèmes régulés	75
III.7.3.1	Temps de réponse	75
III.7.3.2	Temps de montée	76
III.8	Avantages des systèmes de commande numérique	76
<b>IV.</b>	<b>Eléments de régulation numérique</b>	<b>78</b>
IV.1	Introduction	78
IV.2	Transposition des correcteurs analogiques	78
IV.2.1	Les différentes approximations de la dérivée	78
IV.2.1.1	Discrétisation arrière	79
IV.2.1.2	Discrétisation avant	80
IV.2.2	Transformation bilinéaire (par approximations de Tustin)	81
IV.3	Réglages de Ziegler-Nichols	81
IV.3.1	Essai en boucle ouverte (BO) : Méthode de la réponse indicielle	81
IV.3.2	Essai en boucle fermée (BF) : Phénomène de pompage	82
IV.4	Compensateurs numériques à avance (retard) de phase	83
IV.5	Régulateur anti-windup	84
IV.6	Prédicteur de Smith	88
IV.7	Synthèses à temps d'établissement fini	91
IV.7.1	Synthèse à temps d'établissement minimal absolu	92
IV.7.2	Synthèse à temps d'établissement minimal non absolu	93
IV.7.3	Réponse pile	95
IV.8	Résolution du problème	96
IV.8.1	Résolution de l'équation diophantienne	97
	<b>Conclusion générale</b>	<b>100</b>
	<b>Biographie</b>	

## Liste des Figures

- Fig I.1. Système de régulation en boucle fermée.
- Fig I.2. Exemple de courbes de précision.
- Fig I.3. Réponse caractéristique d'un procédé sous-amortissant.
- Fig I.4. Diagramme en bloc du système.
- Fig I.5. Entrée, sortie et la réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'un système LTI.
- Fig I.6. Diagramme en bloc d'un système en boucle fermée.
- Fig I.7. Circuit série RLC.
- Fig I.8. Diagramme en bloc détaillé du circuit RLC.
- Fig I.9. Circuit RL série.
- Fig I.10. Diagramme en bloc du circuit RL série.
- Fig I.11. Réponse indicielle du circuit RL série.
- Fig I.12. Système mécanique mass-dash-pot.
- Fig I.13. Schéma fonctionnel du système masse-dash-pot.
- Fig I.14. Réponse indicielle du système mass-dash-pot.
- Fig I.15. Système de contrôle du niveau de liquide, (a) Schéma globale d'un système de contrôle de niveau du liquide, (b) Schéma fonctionnel du dispositif de mesure analogique du niveau de liquide, (c) Schéma fonctionnel du système en boucle fermée.
- Fig II.1. Capteur.
- Fig II.2. Structure de capteur-transmetteur.
- Fig II.3. Exemple de capteur-transmetteur de température.
- Fig II.4. Exemple de vannes de régulation.
- Fig II.5. Vanne droite à clapet.
- Fig II.6. Sens d'action de la vanne de régulation.
- Fig II.7. Modèle du servomoteur.
- Fig II.8. Différents types de servomoteurs.
- Fig II.9. Positionneur.
- Fig II.10. Caractéristiques ou loi intrinsèque.
- Fig II.11. Vanne de régulation en circuit série.

- Fig II.12. Le vérin.
- Fig II.13. Eléments constituant un vérin.
- Fig II.14. Vérin à simple effet.
- Fig II.15. Vérin double effet.
- Fig II.16. Structure du régulateur.
- Fig II.17. Régulateur de débit.
- Fig II.18. Structure de contrôle Parallèle.
- Fig II.19. Structure de contrôle série.
- Fig II.20. Structure de contrôle mixte.
- Fig II.21. Régulateur tout ou rien (TOR).
- Fig II.22. Régulateur tout ou rien (TOR) à hystérésis.
- Fig II.23. Régulateur direct.
- Fig II.24. Régulateur en cascade.
- Fig II.25. Régulateur Split Range ‘à actions complémentaires’.
- Fig II.26. Régulateur Split Range ‘à actions antagonistes’.
- Fig II.27. Régulateur Feed forward.
- Fig II.28. Régulateur de substitution ‘Override’.
- Fig III.1. Digital control system configuration.
- Fig III.2. Système de contrôle par ordinateur (CCS).
- Fig III.3. Ideal sampler model of an ADC.
- Fig III.4. Modèle de convertisseur numérique analogique DAC.
- Fig III.5. Exemple d’une impulsion de largeur T.
- Fig III.6. Cascade of a DAC, analog subsystem, and ADC.
- Fig III.7. Discrétisation d’un signal sinusoïde.
- Fig III.8. Spectre du signal échantillonné.
- Fig III.9. Régulateur PID discret.
- Fig III.10. Schéma d’un correcteur PID numérique.
- Fig III.11. Schéma d’un correcteur PID numérique industriel.
- Fig III.12. Schéma général d’une boucle de régulation.
- Fig III.13. Réponse d’un système à une consigne en échelon.
- Fig III.14. Transformation des régions dans le plan p vers le plan Z.
- Fig III.15. Relation entre le demi-plan gauche p avec le cercle unité dans le plan Z.
- Fig III.16. Domaine Z et W selon la transformation bilinéaire.

- Fig III.17. Système de commande numérique.
- Fig III.18. Paramètres de rapidité en boucle fermée.
- Fig IV.1. Recherche d'une équivalence temps continu – temps discret.
- Fig IV.2. Principe de calcul de la dérivée par différences finies : différences vers l'avant et vers l'arrière.
- Fig IV.3. a) Essai de Ziegler-Nichols en boucle ouverte, b) Réponse indicielle du système en boucle ouverte.
- Fig IV.4. a) Essai de *Ziegler-Nichols* en boucle fermée, b) Régime oscillant du système en boucle fermée.
- Fig IV.5. Régulateur 2-DOF avec limitation de l'effort de contrôle. Jusqu'à une certaine valeur, la sortie  $u$  du régulateur est identique à l'entrée  $usat$  du procédé. Au-delà,  $usat$  est différent de  $u$ .
- Fig IV.6. Régulateur 2-DOF avec boucle de rétroaction autour du limiteur. La sortie  $u$  du contrôleur est modifiée en la comparant à l'effort de commande réel  $usat$  utilisé [16].
- Fig IV.7. Régulateur 2-DOF avec rétroaction autour du limiteur est réduit à un régulateur 2-DOF sans limiteur lorsque  $F = E + PR_c$  et  $P$  est stable.
- Fig IV.8. Configuration simplifiée du schéma en bloc précédent.
- Fig IV.9. Schéma en bloc d'un prédictiveur de Smith.
- Fig IV.10. Comparaison de l'erreur permanente entre un système à temps d'établissement fini et infini.
- Fig IV.11. L'erreur échantillonnée est bien nulle mais l'erreur continue ne l'est pas.
- Fig IV.12. Commande par retour d'état d'un système à temps discret.

## Liste des Tableaux

- Tableau I.1. Paires de transformées de Laplace courantes
- Tableau I.2. Analogie entre les systèmes mécaniques et les système électriques.
- Tableau I.3. Lettres d'identification, a) Première lettre, b) Deuxième lettre.
- Tableau II.1. Schémas de quelques types de vérins.
- Tableau III.1. Choix de la période d'échantillonnage pour les systèmes de commande numérique (valeurs indicatives).
- Tableau III.2. Table de Jury.
- Tableau IV.1. Paramètres des correcteurs P/PI/PID numériques proposés par l'essai de *Ziegler-Nichols* en boule ouverte (méthode de courbe de réaction).
- Tableau IV.2. Paramètres de correcteurs P/PI/PID numériques proposés par l'essai de *Ziegler-Nichols* en boule fermée (méthode de l'instabilité).

## Liste des symboles

### Paramètres :

$R$	Résistance,
$L$	Inductance,
$C$	Capacité,
$Z_c$	Impédance de charge,
$\tau$	Constante de temps inductive,
$R_f$	Coefficient de viscosité,

### Grandeurs :

$A$	Surface horizontale du récipient,
$C_v$	Coefficient de débit nominal,
$C_{v\ mini}$	Coefficient de débit minimum,
$D_1$	Premier dépassement
$e_{ss}^*$	Erreur statique,
$f_s$	Fréquence de la porteuse,
$f(t)$	Fonction temporelle,
$f_c$	Fréquence de coupure,
$f_{cL}$	Largeur de bande du système en boucle fermée,
$f_{max}$	Fréquence maximale,
$f_0$	Fréquence d'une sinusoïde,
$t_r$	Temps de réponse,
$T$	Température absolue en kelvin

$\mu_k$	Signal d'entrée numérique,
$u(t)$	Signal d'entrée analogique,
$v_0(t)$	Tension de sortie,
$v(t)$	Vitesse de la masse,
$v_i(t)$	Tension d'entrée,
$W$	Consigne de régulation,
$X$	Grandeur réglée (mesure),
$x(n)$	Signal numérique,
$Y$	Grandeur réglante,
$Y_0$	Centrage de la bande proportionnelle ou talon.
$y(t)$	Signal de sortie,
$\varepsilon$	Ecart de réglage,
$\theta_y$	Température ambiante,
$\theta_r$	Température ambiante $\theta_r$ ,
$\theta_e$	Signal d'erreur,
$\theta_i$	Température de l'air chaud.
$\Delta P$	Chute de pression
$\Delta$	Pas d'échantillonnage,

### **Transformations :**

$p$	Transformée de Laplace,
$z$	Transformée en z,
$w$	Transformée bilinéaire,

## **Sigles et Abréviations :**

ADC	Convertisseurs Analogiques Numériques,
BO	Boucle Ouverte,
BOZ	Bloqueur d'Ordre Zéro,
DAC	Convertisseurs Numériques Analogique,
CD	Chaîne directe,
CI	Chaîne indirect,
CCS	Système de contrôle par ordinateur,
Bp	L'étendue de la variation de la mesure,
FT	Fonction de Transfert,
FTBF	Fonction de Transfert en Boucle Fermée,
FTBO	Fonction de Transfert en Boucle Ouverte,
P&ID	Schéma de tuyauterie et d'instrumentation (P&ID),
P	Proportionnel,
PI	Proportionnel et Intégral,
PID	Proportionnel, Intégral et Dérivée,
TOR	Tout Ou Rien,
SISO	Single Input Single Output,
2-DOF	Deux Degré de Liberté,

## Introduction générale

Dans la plupart des systèmes techniques modernes, il est nécessaire de contrôler l'évolution dans le temps d'une ou plusieurs variables du système. Les régulateurs sont nécessaires pour assurer un comportement satisfaisant en régime transitoire et en régime permanent pour ces systèmes d'ingénierie. Pour garantir des performances satisfaisantes en présence de perturbations et d'incertitude du modèle, la plupart des régulateurs utilisés aujourd'hui emploient une forme de rétroaction négative. Un capteur est nécessaire pour mesurer la variable contrôlée et comparer son comportement à un signal de référence [1].

L'action de contrôle est basée sur un signal d'erreur défini comme la différence entre la valeur de référence et la valeur réelle. Le régulateur qui manipule le signal d'erreur pour déterminer l'action de contrôle souhaitée est classiquement un système analogique qui comprend des composants électriques, fluidiques, pneumatiques ou mécaniques. Ces systèmes ont tous des entrées et des sorties analogiques, c'est-à-dire, que leurs signaux d'entrée et de sortie sont définis sur un intervalle de temps continu et ont des valeurs définies sur une plage continue d'amplitudes.

Au cours des dernières décennies, les régulateurs analogiques ont souvent été remplacés par des régulateurs numériques dont les entrées et les sorties sont définies à des moments discrets. Les régulateurs numériques se présentent sous la forme de circuits numériques, d'ordinateurs numériques ou de microprocesseurs. La commande numérique offre des avantages indéniables par rapport à la commande analogique, ce qui explique sa popularité. Parmi ses nombreux avantages, nous pouvons citer : la précision, la flexibilité, le cout, la rapidité et les erreurs de réalisation.

Comme dans le cas de la commande analogique, des modèles mathématiques sont nécessaires pour l'analyse et la conception des systèmes de commande numériques. La configuration d'un système de régulation numérique comprend des éléments tels que : un convertisseur numérique-analogique (CNA), un sous-système analogique et un convertisseur

analogique-numérique (CAN). Pour contrôler un système ou un processus physique à l'aide d'un régulateur numérique, ce dernier doit recevoir des mesures du système, les traiter, puis envoyer des signaux de commande à l'actionneur qui effectue l'action de contrôle. La communication entre le régulateur numérique et le processus physique est assurée par un convertisseur numérique-analogique ou ADC. Un capteur est nécessaire pour surveiller la variable contrôlée lors de la commande par rétroaction [1].

L'objectif de la régulation est de réaliser une commande permettant de respecter au mieux différents critères de performances satisfaisant à un cahier de charge spécifique. La régulation idéale est un système ayant une bonne stabilité, une bonne précision, et le régime transitoire doit être rapide et bien amorti. Ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles. Si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité. La stabilité est une caractéristique fondamentale des systèmes de commande numériques et analogiques. Le régulateur le plus utilisé est le régulateur classique à trois actions qui est en fait un compensateur en cascade placé dans la chaîne directe du système fermé et qui régule le signal qui commande le système en tenant compte de l'écart (erreur) entre l'entrée et la sortie. L'acronyme du régulateur PID provient des initiales de Proportionnel, Intégral et Dérivé, qui correspondent aux opérations effectuées par le régulateur.

Le reste du document est organisé comme suit :

- Le chapitre I présente les méthodes de base de la modélisation des systèmes linéaires analogiques. Il comprend l'ensemble des notions nécessaires à l'étude générale de la commande pour les systèmes linéaires à temps continu et à temps discret à savoir : la transformée de Laplace, spectre, comportement fréquentiel, etc.
- Le chapitre II est consacré à l'étude détaillée des différents éléments constituant la chaîne de régulation analogique à savoir : le transmetteur, le capteur, l'actionneur et le correcteur. Le modèle, le principe de fonctionnement et les trois modes d'actions correctives (PID) ainsi que les différentes stratégies de régulation analogique sont également présentées.

- Dans le chapitre III, nous abordons la régulation numérique en présentant en détails sa structure, les éléments d'actions correctives en numérique PID et l'analyse de ses performances en termes de stabilité, précision et rapidité.
- La transposition des correcteurs analogiques en utilisant les approximations de la dérivée et la méthode de transformation bilinéaire est présentée au chapitre IV. Dans ce dernier chapitre, les méthodes de réglages du PID numérique de Nichols-Ziegler sont présentées avec leurs tableaux correspondants. Le régulateur Anti-Windup et le prédicteur de smith sont également présentés avec les différentes méthodes de synthèse à établissement fini, infini, minimal absolu et minimal non absolu. Finalement, l'ouvrage se termine par une conclusion générale.

# Chapitre I : Rappels sur la régulation analogique

## I.1 Introduction

Un système de *contrôle* est une combinaison de composants formant une configuration de système qui fournira une réponse souhaitée du système. L'objectif de la régulation ou de la commande est de contrôler l'évolution d'une ou de plusieurs grandeurs physiques (température, pression, vitesse) à l'aide d'une ou de plusieurs variables de régulation dans un environnement perturbé. Les sorties dépendent des variables de régulation et des perturbations qui peuvent être de nature externe ou interne au système et ne sont pas mesurables.

La régulation assure le fonctionnement d'un processus selon des critères prédéfinis par les spécifications du cahier de charge. Les spécifications sont le plus souvent des critères quantitatifs, tels que la stabilité, la précision, la vitesse ou les lois d'évolution [1].

Les systèmes de commandes peuvent être divisés en deux catégories : les systèmes en *boucle ouverte* et les systèmes en *boucle fermée*.

- Un système en boucle ouverte est un système dont l'entrée  $u(t)$  ne dépend pas de la sortie  $y(t)$ , c'est-à-dire que  $u(t)$  n'est pas une fonction de  $y(t)$ .
- Un système en boucle fermée est un système dont l'entrée  $u(t)$  dépend de la sortie  $y(t)$ , c'est-à-dire que  $u(t)$  est une fonction de  $y(t)$ .

**Exemple 1.** Un conducteur voulant maintenir la vitesse de son véhicule constante, disposera de la position de la pédale d'accélération comme "grandeur de contrôle". S'il n'y a aucune perturbation, une action fixe sur l'accélérateur maintiendrait la vitesse constante.

Cependant, le vent, le profil de la route perturbent l'avance du véhicule. Pour maintenir sa vitesse constante, le conducteur regarde son compteur de vitesse, apprécie la différence entre la vitesse souhaitée et celle mesurée et agit en conséquence sur l'accélérateur.

Le maintien de la vitesse constante en présence des perturbations est un problème dit de "régulation". Si l'on désire que le véhicule passe de l'arrêt à 100Km/h suivant un profil en rampe, on a affaire à un "asservissement". L'asservissement correspond à un problème de poursuite où la sortie du système doit suivre au mieux une consigne variable représentant la "référence"

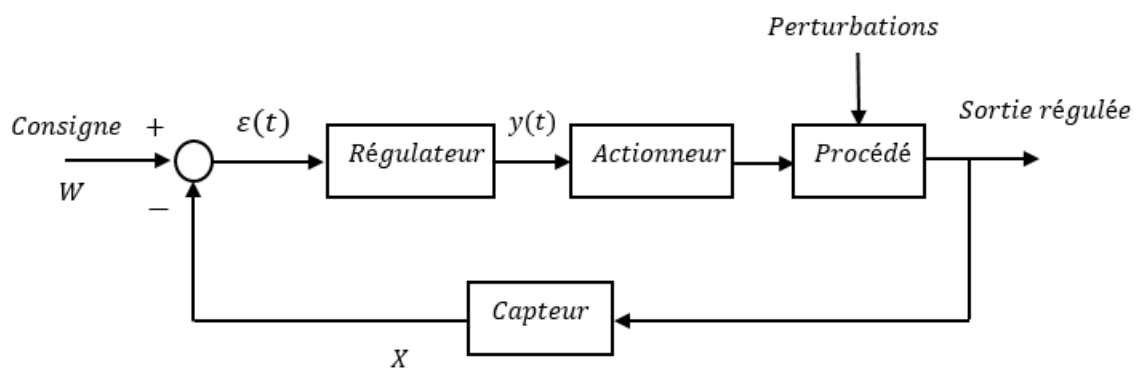
Si l'on veut automatiser le contrôle de la vitesse, il est possible à partir de la consigne et de la mesure de vitesse de calculer l'ouverture du carburant.

## I.2 Définition de la régulation

Le problème de la commande peut être énoncé comme suit : L'action de la commande sera telle que la sortie commandée sera égale à l'entrée de référence pour toutes les valeurs du temps, quelle que soit la valeur de l'entrée de perturbation.

La régulation consiste à rendre une grandeur physique  $X$  (vitesse, position, température, etc.) constante et égale à une valeur fixe, appelée consigne  $W$  (également appelée référence ou commande). Elle consiste à maintenir la sortie contrôlée constante en fonction de l'entrée de la consigne, indépendamment des perturbations. *Exemple* : Régulation de la température.

Le schéma en bloc d'un système de contrôle analogique en boucle fermée avec une seule entrée et une seule sortie est illustré à la figure I.1 [2].



**Fig I.1.** Système de régulation en boucle fermée [2].

Où,

$W$  : Consigne de régulation

$X$  : Grandeur réglée (mesure)

$\varepsilon$  : Ecart de réglage ( $= W - X$ )

$Y$  : Grandeur réglante (signal de commande)

Dans ce schéma en bloc, on distingue :

### 1. Le régulateur

Composé d'un comparateur et d'un correcteur.

- **Comparateur**

Le *régulateur* reçoit à son entrée la différence entre la valeur de référence (consigne  $W$ ) et celle de mesure  $X$  (valeur réelle). Cette différence est appelée ‘*Écart de réglage*’. Le comparateur déduit donc l'écart  $\varepsilon$  entre la consigne  $W$  et la mesure  $X$ .

- **Correcteur**

Le correcteur génère une grandeur réglante  $Y$  (signal de commande) dont le but sera d'annuler l'écart  $\varepsilon$ . Ce sont les caractéristiques du correcteur qui déterminent la qualité de la régulation. Il existe différents types de correcteurs tels que :

- TOR (Tout Ou Rien)
- P (proportionnel)
- PI (proportionnel et intégral)
- PID (proportionnel, intégral, dérivé)

## **2. Actionneur (partie opérative)**

C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité. Il est en général associé à un pré-actionneur qui permet d'adapter l'ordre (basse puissance) et l'énergie. Les signaux de consigne ou de mesure sont des signaux de faible puissance et de faible amplitude tandis que les signaux de commande sont plutôt des signaux de forte amplitude.

## **3. Le procédé**

Le procédé (ou système contrôlé) est le système ou le sous-système qui est contrôlé par le système en boucle fermée.

## **4. Capteur**

Le capteur prélève sur le système la grandeur réglée (information physique) et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur. Dans certains cas, le capteur peut être inexistant, on parle alors de boucle à retour unitaire.

## **5. Entrée Consigne**

L'entrée de référence, appelée signal de référence ou de commande, est un signal externe appliqué au système en boucle fermée, qui déclenche un comportement spécifique du système contrôlé. En général, elle représente la sortie idéale ou souhaitée du système. Ce signal de référence  $r(t)$  spécifie la performance souhaitée (c'est-à-dire la sortie souhaitée  $y(t)$  du

système en boucle ouverte ou fermée). En d'autres termes, dans les systèmes de contrôle, nous cherchons à concevoir un contrôleur approprié de sorte que la sortie  $y(t)$  suive le signal de commande  $r(t)$  d'aussi près que possible. Le point de consigne est la valeur que l'on souhaite atteindre.

## 6. Sortie régulée

La sortie régulée représente le phénomène physique que doit régler le système, c'est la raison d'être du système.

## 7. Perturbations

On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.

### I.3 Concepts importants

Les critères de qualité exigés les plus rencontrés industriellement sont : la stabilité, la précision et la rapidité. Pour les systèmes asservis la loi d'évolution de la consigne en fonction du temps est à décrire avec attention mais le résultat sera décrit par les trois premiers critères cités ci-dessous.

#### I.3.1 Précision

La précision est caractérisée par l'écart entre la consigne et la sortie. Estimer la précision d'un système asservi c'est mesurer ou prédire l'évolution temporelle de l'écart entre la consigne d'entrée et la sortie du système :

$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t) \quad \text{I.1}$$

Le but étant de minimiser  $\varepsilon(t)$ .

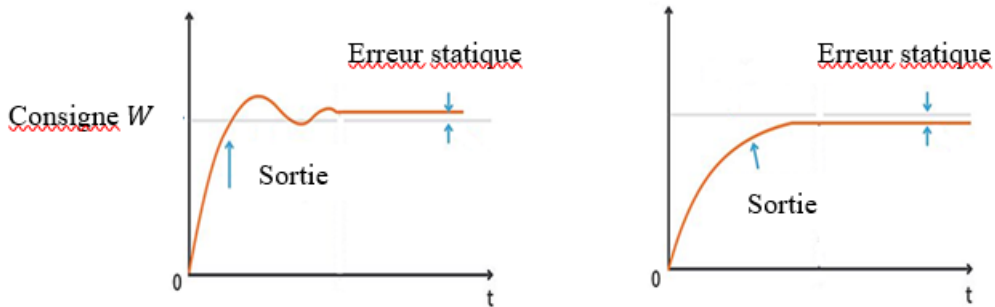
- On appelle *précision statique*, l'écart entre la sortie et l'entrée lorsque le système est stabilisé ( $t \rightarrow +\infty$ ).
- La *précision dynamique* est l'écart entre la sortie et l'entrée pendant l'évolution du signal.

Plus l'écart statique est petit, plus le système est précis. L'évaluation de la précision statique s'effectue en réalisant une variation rapide de consigne en amplitude et en mesurant la variation d'amplitude finalement obtenue de la mesure.

## Erreur de précision

$$(\%) = \left(\frac{\varepsilon}{W}\right) \cdot 100 \quad \text{I.2}$$

**Exemple 2.** Pour  $W = 10\%$  et  $\varepsilon = 2\%$ , l'erreur de précision est :  $(2/10) \cdot 100 = 20\%$ .



**Fig I.2.** Exemple de courbes de précision.

### I.3.2 Stabilité

On dit qu'un système est stable si pour une entrée constante, la sortie reste constante quelles que soient les perturbations.

### I.3.3 Dépassement

Un critère efficace de la stabilité est le dépassement. Ce critère permet de définir la notion de stabilité relative. Le dépassement est mesuré par le taux de dépassement. On définit le premier dépassement par :

$$\text{Overshoot } (\%) = \frac{D_1}{M} 100\% \quad \text{I.3}$$

### I.3.4 Rapidité

La rapidité caractérise le temps mis par le système pour que la sortie atteigne sa nouvelle valeur. On définit, pour caractériser la rapidité, le temps de réponse à 5% ( $t_5\%$ ), c'est le temps que met le système pour rester la bande des 5% de sa valeur finale.

La détermination du temps de réponse à 5% sur les courbes de réponses ci-contre montre que la sortie 2 a le temps de réponse le plus faible, la courbe 1 est la plus lente (Rapidité = temps de réponse  $T_e$ , avec  $T_e$  : correspond au temps mis pour atteindre 95 % ou 105% de la valeur finale).

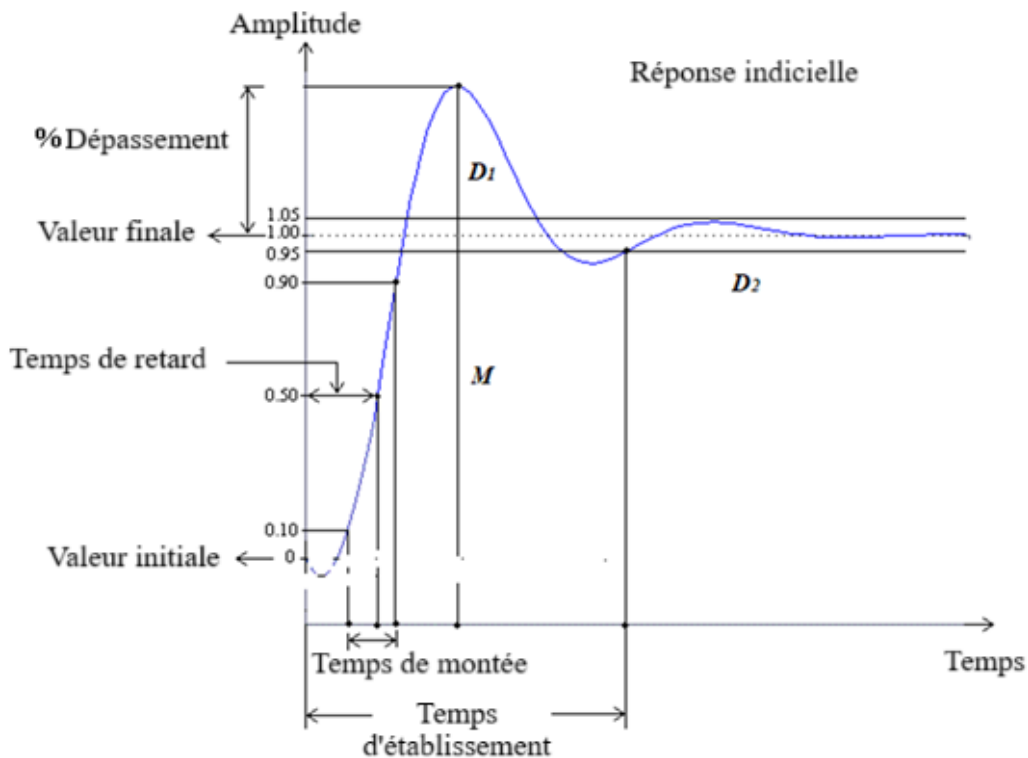


Fig I.3. Réponse caractéristique d'un procédé sous-amortissant [8].

#### I.4 Modèles mathématiques pour un système de contrôle

Si le comportement dynamique d'un système physique peut être représenté par une équation ou un ensemble d'équations, on parle de modèle mathématique du système. Ces modèles peuvent être construits à partir de la connaissance des caractéristiques physiques du système, par exemple la masse pour un système mécanique ou la résistance pour un système électrique. Un modèle mathématique peut également être déterminé par expérimentation, en mesurant comment la sortie du système répond à des entrées connues.

Pour calculer la réponse temporelle d'un système dynamique, il est nécessaire de résoudre les équations différentielles (modèle mathématique du système) pour des entrées données. Il existe un certain nombre de techniques analytiques et numériques pour ce faire, mais celle que préfèrent les ingénieurs de contrôle est l'utilisation de la transformée de Laplace.

##### I.4.1 Représentation par la transformée de Laplace

Cette technique transforme le problème du domaine temporel (ou  $t$ ) au domaine de Laplace (ou  $p$ ). L'avantage de cette transformation est que les équations différentielles complexes du domaine temporel deviennent des équations algébriques relativement simples du domaine  $p$ .

La transformée de Laplace d'une fonction temporelle  $f(t)$  est donnée par l'intégrale [1,3] :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad t > 0 \quad \text{I.4}$$

Où  $p$  est une variable complexe,  $p = \sigma + j\omega$  appelée opérateur de Laplace.

$$f(t) \xrightarrow{TL} F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = TL\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{I.5}$$

La transformée de Laplace inverse est donnée par :

$$F(p) \xrightarrow{TLI} f(t) = \int_0^{\infty} F(p) e^{pt} dp = TLI\{F(p)\} \quad \text{I.6}$$

#### I.4.2 Propriétés de la transformée de Laplace

Les propriétés principales de la transformée de Laplace sont résumées comme suit [3] :

*Addition :*

$$f(t) + g(t) \xrightarrow{TL} F(p) + G(p) \quad \text{I.7}$$

*Linéarité :*

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_n f_n(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} + \dots + a_n \mathcal{L}\{f_n(t)\} \quad \text{I.8}$$

*Dérivation :* la dérivée de la transformée de Laplace en continu est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &\xrightarrow{TL} pF(p) + f(0) \\ \frac{d^2}{dt^2} f(t) &\xrightarrow{TL} p^2 F(p) - f(0) - f'(0) \\ \frac{d^3}{dt^3} f(t) &\xrightarrow{TL} p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0) \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) &\xrightarrow{TL} p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - p^{n-3} f''(0) - \dots \end{aligned} \quad \text{I.9}$$

Où  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , sont les conditions initiales, ou les valeurs de  $f(t)$ ,  $\frac{d}{dt} f(t)$ , ... etc. à  $t = 0$ .

*Intégration :*

$$\int_0^t f(t) dt \xrightarrow{TL} \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0)}{p} \quad \text{I.10}$$

*Théorème de décalage temporel :*

$$\mathcal{L}\{f(t - T)\} = e^{-Tp} F(p) \quad \text{for } T > 0 \quad \text{I.11}$$

*Théorème de la valeur initiale :*

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad \text{I.12}$$

*Théorème de la valeur finale*

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad \text{I.13}$$

Le tableau I.1 ci-dessous résume les principaux signaux et leurs transformées de Laplace correspondantes :

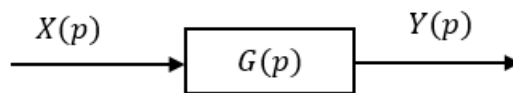
Fonctions temporelles	Transformées de Laplace
$u(t) = 1$	$U(p) = \frac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \frac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$S(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{p+a}$
$s(t) = t e^{-at}$	$S(p) = \frac{1}{(p+a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \frac{a}{p(p+a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = t - \frac{1}{a} + \frac{e^{-at}}{a}$	$S(p) = \frac{1}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 + \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$S(p) = \frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - at e^{-at}$	$S(p) = \frac{a^2}{p(p+a)^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(p) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

**Tableau I.1.** Paires de transformées de Laplace courantes [9].

### I.4.3 Schéma fonctionnel d'un système

Un *schéma fonctionnel* est une représentation graphique de la relation de cause à effet entre l'entrée et la sortie d'un système physique. Il constitue une méthode pratique et utile pour caractériser les relations fonctionnelles entre les différents composants d'un système de contrôle. Les composants du système sont appelés éléments du système. La forme la plus simple du schéma fonctionnel est le bloc unique, avec une entrée et une sortie, comme le montre la figure I.4.

L'intérieur du rectangle représentant le bloc contient généralement une description ou le nom de l'élément, ou le symbole de l'opération mathématique à effectuer sur l'entrée pour obtenir la sortie. Les flèches représentent la direction du flux d'informations ou de signaux.



**Fig I.4.** Diagramme en bloc du système.

### I.4.4 Fonction de transfert des systèmes linéaires

La fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps est définie comme la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle, toutes les conditions initiales étant fixées à zéro.

Soit  $G(p)$  la fonction de transfert d'un système à entrée et sortie uniques (SISO), avec l'entrée  $u(t)$ , la sortie  $y(t)$  et la réponse impulsionnelle  $g(t)$ . La fonction de transfert  $H(p)$  est définie comme suit :

$$G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad \text{I.14}$$

La fonction de transfert  $G(p)$  est liée à la transformée de Laplace de l'entrée et de la sortie par la relation suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \text{I.15}$$

avec toutes les conditions initiales fixées à zéro, et  $Y(p)$  et  $U(p)$  sont les transformées de Laplace de  $y(t)$  et  $u(t)$ , respectivement. *Il s'agit d'un moyen très simple de passer du domaine temporel au domaine  $p$ , et d'un outil puissant pour l'ingénieur de la commande.*

Bien que la fonction de transfert d'un système linéaire soit définie en termes de réponse impulsionnelle, dans la pratique, la relation entrée-sortie d'un système linéaire invariant dans le

temps avec entrée de données continues est souvent décrite par une équation différentielle, de sorte qu'il est plus pratique de dériver la fonction de transfert directement de l'équation différentielle.

Considérons que la relation entrée-sortie d'un système linéaire invariant dans le temps est décrite par l'équation différentielle d'ordre  $n$  suivante à coefficients réels constants [1,3] :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d^1 y(t)}{dt^1} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d^1 u(t)}{dt^1} + b_0 u(t) \quad \text{I.16}$$

Les coefficients  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  et  $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$  sont des constantes réelles.

Si nous supposons que les conditions initiales sont nulles, en appliquant la transformée de Laplace aux deux côtés de l'égalité, nous obtenons la relation suivante de la transformée de Laplace :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m + b_{m-1}p + \dots + b_0}{a_n + a_{n-1}p + \dots + a_0} \quad \text{I.17}$$

La fonction de transfert ou transmittance d'un système est définie comme le rapport entre la quantité de sortie et la quantité d'entrée.

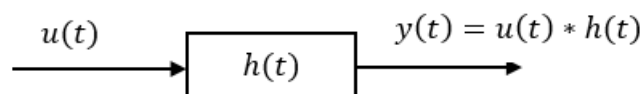
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad \text{I.18}$$

#### I.4.5 Réponse impulsionnelle d'un système

Une méthode pratique pour présenter la relation entre l'entrée, la sortie et la réponse impulsionnelle d'un système est illustrée à la fig I.5. La réponse impulsionnelle  $y(t)$  du système à tout signal d'entrée  $u(t)$  est donnée par le produit de convolution comme suit :

$$u(t) * h(t) = y(t) \quad \text{I.19}$$

Où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un système obtenue en excitant le système avec une fonction impulsionnelle unitaire  $\delta(t)$ , comme illustré à la figure I.5.

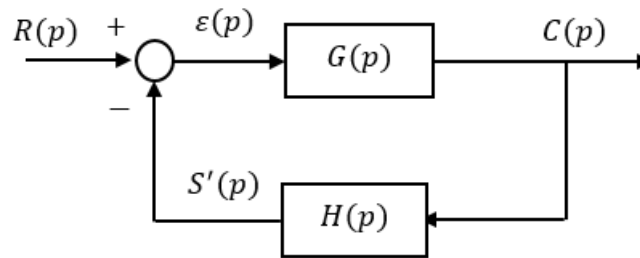


**Fig I.5.** Entrée, sortie et la réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'un système LTI.

### I.4.6 Fonction de transfert en boucle fermée

Tout système dans lequel la quantité de sortie est contrôlée et comparée à l'entrée, toute différence étant utilisée pour actionner le système jusqu'à ce que la sortie soit égale à l'entrée, est appelé système de contrôle en *boucle fermée* ou de *rétroaction*.

Les éléments d'un système de contrôle en boucle fermée sont représentés sous forme de schéma fonctionnel en utilisant l'approche de la fonction de transfert. La forme générale d'un tel système est montrée à la Fig I.6 [3]. La fonction de transfert reliant  $R(p)$  et  $C(p)$  est appelée fonction de transfert en boucle fermée.



**Fig I.6.** Diagramme en bloc d'un système en boucle fermée.

$R(p)$  : Transformée de Laplace du signal de référence  $r(t)$ ,

$C(p)$  : Transformée de Laplace de la sortie contrôlée  $c(t)$ ,

$S'(p)$  : Signal de retour primaire de valeur  $H(p)C(p)$ ,

$\varepsilon(p)$  : Signal d'erreur de réglage de valeur  $(R(p) - S'(p))$ ,

$G(p)$  : Fonction de transfert de la chaîne directe,

$H(p)$  : Fonction de transfert de la chaîne indirecte.

D'après la Fig I.5,

$$C(p) = G(p) \varepsilon(p) \quad \text{I.20}$$

$$\varepsilon(p) = R(p) - S'(p) = R(p) - H(p)C(p) \quad \text{I.21}$$

$$C(p) = G(p) [R(p) - H(p)C(p)] \quad \text{I.22}$$

En substituant l'équation I.20 et I.21 dans l'équation I.22, nous obtenons :

$$C(p)[1 + G(p)H(p)] = G(p) R(p) \quad \text{I.23}$$

D'où,

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)} \quad \text{I.24}$$

$G(p)H(p)$  : est appelée fonction de transfert en boucle ouverte.

Un système de contrôle en *boucle ouverte* est un système dans lequel l'action de contrôle est indépendante de la sortie. Un système de contrôle en *boucle fermée* est un système dans lequel l'action de contrôle dépend d'une manière ou d'une autre de la sortie.

La fonction de transfert en *boucle fermée* est la fonction de transfert de la chaîne directe divisée par un plus la fonction de transfert en boucle ouverte.

$$F(p) = \frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)} \quad \text{I.25}$$

$G(p)H(p)$  : est appelée fonction de transfert en boucle ouverte.

$$G(p)H(p) = \frac{S'(p)}{R(p)} \quad \text{I.26}$$

Dans la cas d'une boucle à retour unitaire, on a :  $H(p) = 1$

Ainsi,

$$\frac{S'(p)}{R(p)} = G(p) \quad \text{I.27}$$

Donc,

$$F(p) = \frac{C(p)}{R(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)} \quad \text{I.28}$$

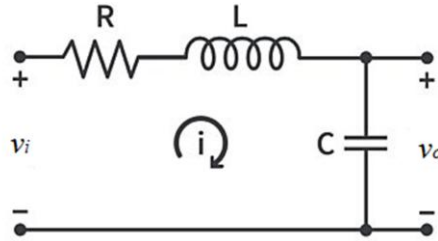
## I.5 Modèles mathématiques de systèmes électriques

### I.5.1 Circuit série RLC

Considérons le modèle d'un circuit série RLC de la Fig I.7 ci-dessous. Le signal d'entrée est la tension d'entrée  $v_i(t)$  tandis que le signal de sortie est la tension de sortie aux bornes du condensateur  $v_o(t)$ .

#### a. Schéma électrique et équations

Nous supposons que le système présenté à la Fig I.7 est linéaire, ce qui implique notamment que l'inductance  $L$  est constante et ne dépend pas du niveau de courant  $i(t)$ .



**Fig I.7.** Circuit série RLC.

D'après les lois de Kirchhoff, on a :

$$v_i(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau \quad \text{I.29}$$

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau \quad \text{I.30}$$

Les équations ci-dessus peuvent être réécrites afin de les présenter sous forme canonique, c'est-à-dire sous une forme telle que nous ayons  $n$  équations différentielles d'ordre 1 :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} v_o(t) + \frac{1}{L} v_i(t) \quad \text{I.31}$$

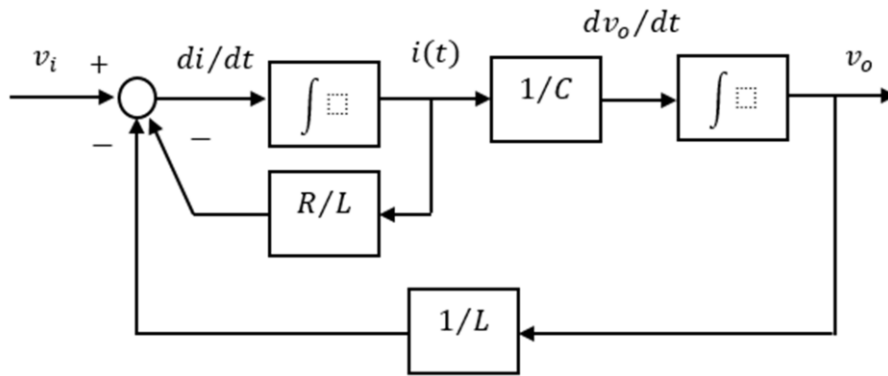
$$\frac{dv_o(t)}{dt} = -\frac{1}{C} \cdot i(t) \quad \text{I.32}$$

L'ordre d'un système dynamique linéaire étant le nombre d'équations différentielles d'ordre 1 nécessaires à sa modélisation, on a donc avec le circuit RLC un système d'ordre  $n = 2$ .

#### a. Schéma fonctionnel détaillé

Une règle de base pour la construction de tels schémas est de n'utiliser que des intégrateurs comme éléments dynamiques, les autres blocs fonctionnels disponibles étant des gains et des comparateurs [4]. Le nombre strictement nécessaire d'intégrateurs est égal à  $n$ , soit 2 dans l'exemple. L'utilisation de blocs dérivés doit être évitée, car de tels éléments sont physiquement irréalisables. Afin de simuler des systèmes dynamiques tels que le circuit RLC étudié, il est fortement recommandé de ne le représenter qu'avec des éléments physiquement réalisables.

L'ordre d'un système dynamique linéaire est le nombre d'équations différentielles d'ordre 1 nécessaires à sa modélisation, nous avons donc avec le circuit RLC un système d'ordre  $n = 2$  [8].



**Fig I.8.** Diagramme en bloc détaillé du circuit RLC.

### a. Equation différentielle d'ordre $n = 2$

Notons que :

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \cdot \frac{dv_o(t)}{dt} \quad \text{I.33}$$

L'équation différentielle d'ordre  $n = 2$  devient :

$$\Rightarrow v_i(t) = RC \cdot \frac{dv_o(t)}{dt} + LC \cdot \frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + v_o(t) \quad \text{I.34}$$

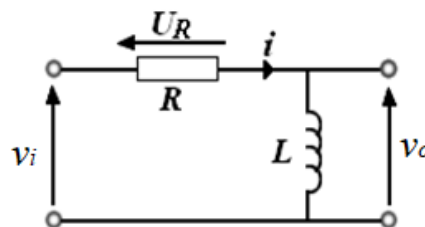
En divisant l'équation I.34 par  $(/LC)$ , on obtient :

$$\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_o(t) = \frac{1}{LC} v_i(t) \quad \text{I.35}$$

## I.5.2 Circuit RL série

### a. Schéma électrique et équations

Considérons le circuit série RL de la Fig I.9 ci-dessous.



**Fig I.9.** Circuit RL série.

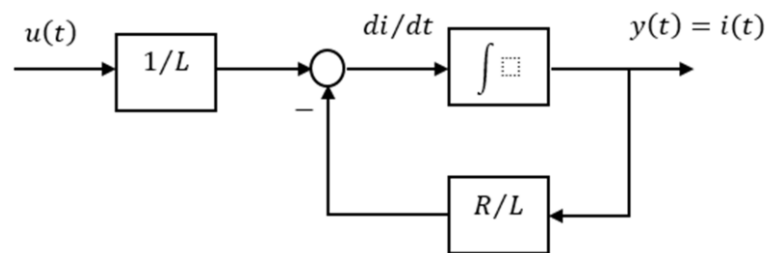
Les équations de ce diagramme sont obtenues par l'application des lois de Kirchhoff sur le circuit de la Fig I.9 comme suit :

$$\begin{aligned}
 v_i(t) &= R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} & \text{I.36} \\
 \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} v_i(t) \\
 v_o(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau
 \end{aligned}$$

On constate que la chute de tension aux bornes de la résistance dépend du courant,  $i$ , tandis que la chute de tension aux bornes de l'induction dépend du taux de variation du courant,  $\frac{di(t)}{dt}$ .

### b. Schéma fonctionnel détaillé

Le modèle mathématique résultant du circuit RL série est représenté par le schéma fonctionnel de la Fig I.10.



**Fig I.10.** Diagramme en bloc du circuit RL série.

### c. Gain statique

Par définition, le gain statique est calculé en appliquant un signal d'entrée constant et en mesurant le signal de sortie lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Dans notre cas, le courant  $i$  se stabilise à une valeur constante. Par conséquent, ses dérivées par rapport au temps sont nulles et l'équation différentielle devient [4] :

$$\begin{aligned}
 \frac{di}{dt} = 0 &= -\frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} v_i(t) & \text{I.37} \\
 y(t) = i(t) \text{ and } u(t) &= v_i(t)
 \end{aligned}$$

So

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{u(t)} \Big|_{u(t)=const} = \frac{1}{R} \quad \text{I.38}$$

Ou d'après le schéma fonctionnel, le régime permanent est atteint lorsque le signal d'entrée de l'intégrateur, c'est-à-dire  $\frac{di}{dt} = 0$ .

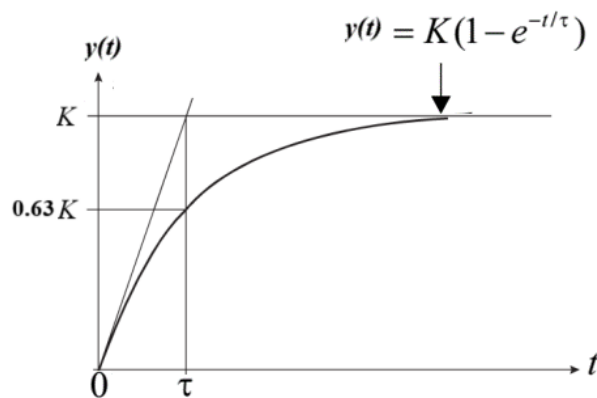
Ainsi, le gain statique est déduit comme suit :

$$\frac{1}{L} v_i(t) = \frac{R}{L} i(t) \Rightarrow K = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{i(t)}{v_i(t)} = \frac{1}{R} \quad \text{I.39}$$

### b. Réponse indicielle du circuit RL série

La réponse en échelon du système étudié est représentée sur la Fig I.11 ci-dessous. Le tracé de la courbe montre la période de transition pendant laquelle le courant varie de sa valeur initiale de zéro à la valeur finale  $V/R$ , qui est le *régime permanent*. On peut en déduire le gain statique ainsi que la *constante de temps*  $L/R$ , c'est-à-dire la durée nécessaire pour que la réponse atteigne  $(1 - \frac{1}{e}) = 63\%$  de sa valeur finale [4].

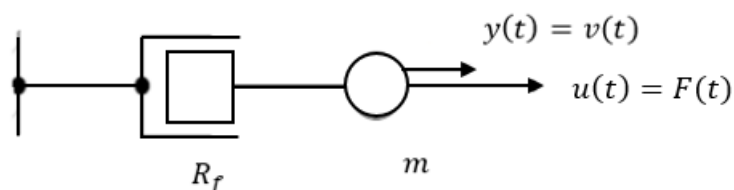
Le courant de boucle  $i(t)$  atteindra 63% de sa valeur finale  $I_{max}$  dans une constante de temps  $\tau = L/R$ .  $\tau = L/R$  est appelée la *constante de temps inductive* du circuit RL. Elle sera inférieure à  $0.01I_0$  après un intervalle de temps  $5\tau$ , ce qui conduit à l'état d'équilibre pour lequel la tension du condensateur atteint 99.3 % de son niveau maximal.



**Fig I.11.** Réponse indicielle du circuit RL série.

### I.5.3 Système mécanique masse-dash-pot (amortisseur)

D'un point de vue dynamique, l'équivalent mécanique du circuit RL série est un système composé d'une masse  $m$  fixée à un amortisseur "dash-pot" agissant comme une force de frottement visqueuse qui est supposée être proportionnelle à la vitesse [4]. Le signal d'entrée de ce système est la force  $F(t)$  appliquée à la masse  $m$ , tandis que le signal de sortie  $y(t)$  est la vitesse de la masse  $v(t)$  comme le montre la Fig I.12.



**Fig I.12.** Système mécanique mass-dash-pot.

Par hypothèse, l'amortisseur crée une force de frottement visqueux de coefficient  $R_f [Nm/rad/s]$  proportionnel à la vitesse. Le système est donc linéaire.

Le modèle mathématique est obtenu en écrivant l'équation de Newton :

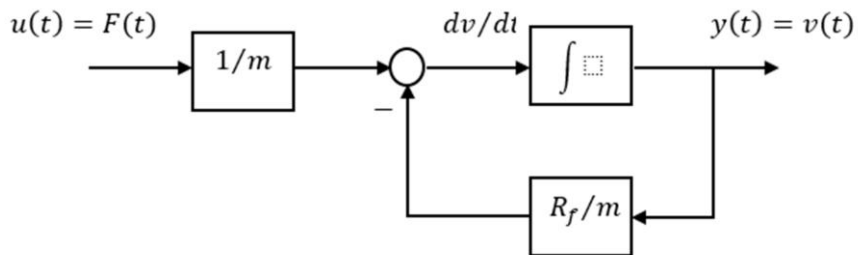
$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \quad \text{I.40}$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = F(t) - R_f \cdot v(t) \quad \text{I.41}$$

En forme canonique, on a :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F(t) - \frac{R_f}{m} \cdot v(t) \quad \text{I.42}$$

Le schéma fonctionnel du système masse-dash-pot est montré à la Fig I.13 ci-dessous.



**Fig I.13.** Schéma fonctionnel du système masse-dash-pot.

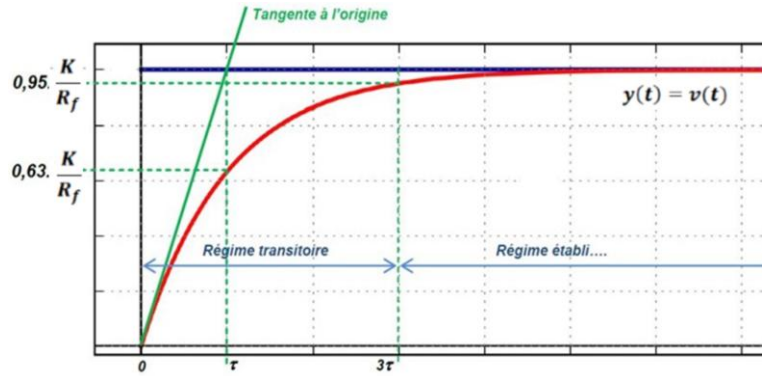
### a. Gain statique

Par définition, le gain statique est donné par [4] :

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{u(t)} \Big|_{u(t)=const} = \frac{1}{R_f} \quad \text{I.43}$$

### b. Réponse indicielle du système mass-dash-pot

La réponse indicielle peut être obtenue en résolvant l'équation différentielle d'ordre 1. L'analogie avec la réponse correspondante du circuit RL est évidente.



**Fig I.14.** Réponse indicelle du système mass-dash-pot.

### I.6 Analogie des circuits

Les circuits analogues représentent des systèmes dont les équations différentielles ont la même forme. Les variables et paramètres correspondants dans deux circuits représentés par des équations de même forme sont appelés *analogues*. On peut dessiner un circuit électrique qui ressemble au circuit mécanique et qui est représenté par des équations de nœuds ayant la même forme mathématique que les équations mécaniques.

Il n'est pas difficile de voir que les équations des systèmes mécaniques sont analogues à celles d'un réseau électrique RLC en série. Par conséquent, dans cette analogie, la masse  $M$  et l'inertie  $J$  sont analogues à l'inductance  $L$ , la constante de ressort  $K$  est analogue à l'inverse de la capacité  $1/C$ , et le coefficient de frottement visqueux  $B$  est analogue à la résistance  $R$ . Les analogues sont énumérés dans le tableau I.2.

Système mécanique				Circuit électrique	
Translation		Rotation			
Masse	$M$	Moment d'inertie	$I$	Inductance	$L$
Constante de raideur	$K$	Constante de torsion	$C$	Capacité	$C$
Coefficient d'amortissement	$\alpha$	Frottement	$\alpha$	Résistance	$R$
Déplacement	$x$	Angle	$\theta$	Charge	$q$
Vitesse	$v$	Vitesse angulaire	$\dot{\theta}$	Courant	$i$
Force	$F(t)$	Moment de force	$M(t)$	Tension	$E(t)$
Pulsation propre	$\sqrt{k/m}$	pulsation	$\sqrt{C/I}$	pulsation	$1/\sqrt{LC}$
Energie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	Energie cinétique	$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	Energie magnétique (Bobine)	$\frac{1}{2}Li^2$
Energie potentiel	$\frac{1}{2}kx^2$	Energie potentiel	$\frac{1}{2}C\theta^2$	Energie électrostatique (Condensateur)	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
Puissance dissipée par frottement	$\alpha v^2$	Puissance dissipée par frottement	$\alpha\dot{\theta}^2$	Puissance dissipée par effet Joule	$Ri^2$

**Tableau I.2.** Analogie entre les systèmes mécaniques et les système électriques.

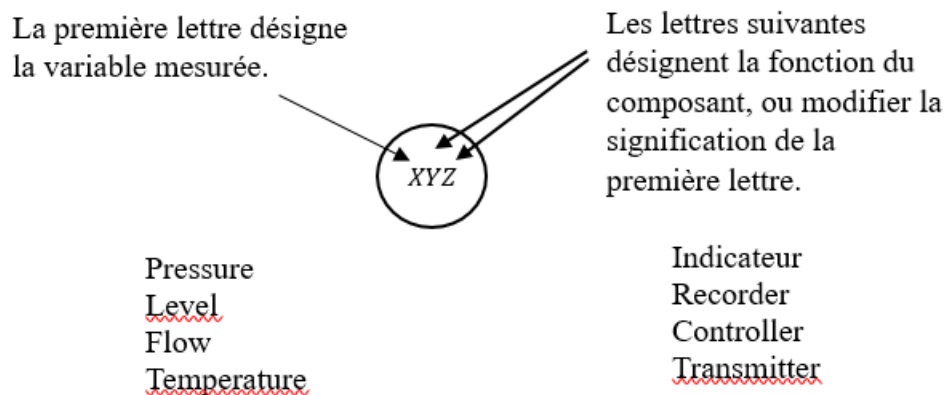
## I.7 Schéma de tuyauterie et d'instrumentation (P&ID)

Le diagramme de tuyauterie et d'instrumentation est une représentation schématique des tuyauteries, des équipements de traitement et des systèmes de contrôle à l'aide d'un ensemble de symboles (non dessinés à l'échelle) et sans représentation géographique.

Les diagrammes de tuyauterie et d'instrumentation (P&ID) utilisent des symboles spécifiques pour montrer la connectivité des équipements, des capteurs et des vannes dans un système de contrôle. Ces symboles peuvent représenter des actionneurs, des capteurs et des contrôleurs et peuvent apparaître dans la plupart, voire la totalité, des diagrammes de système. Les P&ID sont plus détaillés qu'un diagramme de processus, à l'exception des paramètres, c'est-à-dire des valeurs de température, de pression et de débit.

### I.7.1 Lettres d'identification

Les lettres suivantes sont utilisées pour décrire les dispositifs de contrôle intervenant dans un processus. Chaque dispositif est identifié par deux lettres. La première lettre décrit le paramètre que le dispositif est censé contrôler. La deuxième lettre ou la lettre suivante (s) décrit la fonction du composant.



Par exemple, le symbole “PI,” est synonyme de “Indicateur de Pression.”

“PT” est “Transmetteur de Pression”,

“TIC” est “Régulateur Indicateur de Température”.

First Letter	Parameter Controlled
A	Analysis
C	Conductivity
D	Density
E	Voltage
F	Flow rate
I	Current
L	Level
M	Moisture (Humidity)
P	Pressure or Vacuum
T	Temperature
V	Viscosity









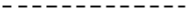









Second Letter	Type of Control Device
A	Alarm
C	Control
I	Indicate
T	Transmit
V	Valve

**Tableau I.3.** Lettres d'identification, a) Première lettre, b) Deuxième lettre.

### I.7.2 Symboles de lignes

Les symboles de ligne sont utilisés pour décrire la connectivité entre les différentes unités d'un système contrôlé.

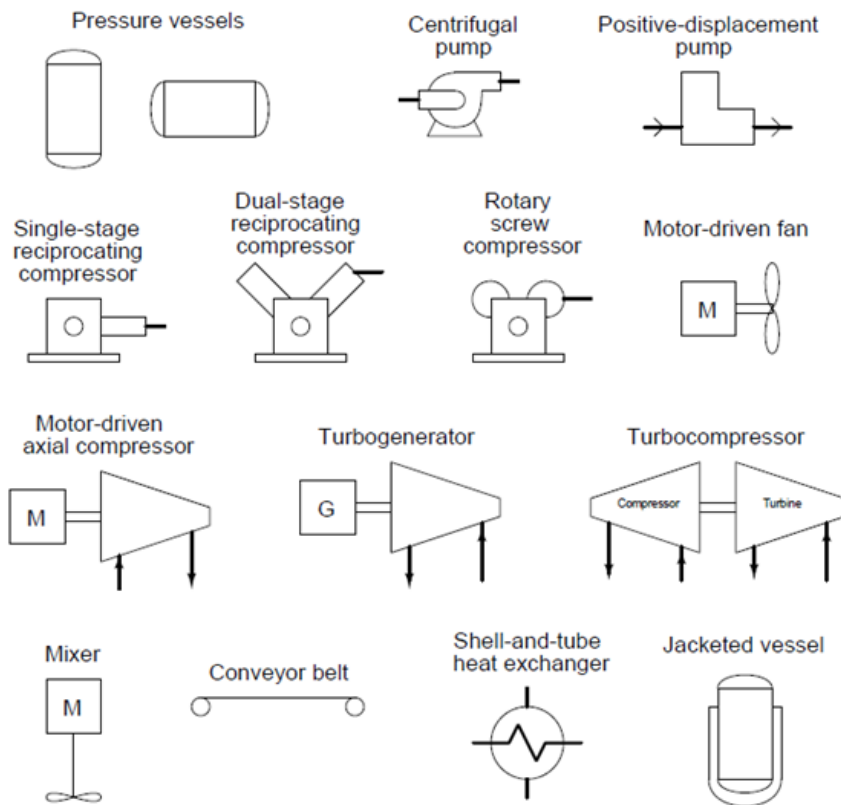
#### a. Lignes des processus

Process flow line 	Instrument supply or process connection (impulse line) 	Waveguide 	Undefined 
Pneumatic signal (continuous) 	Pneumatic signal (discrete -- on/off) 	Capillary tube 	Hydraulic signal 
Electric signal (continuous)  (or) 	Electric signal (discrete -- on/off)  (or) 	Fieldbus network 	Data link (smart instrument) 
Mechanical link 	Data link (common system) 	Data link (independent systems) 	Radio link 

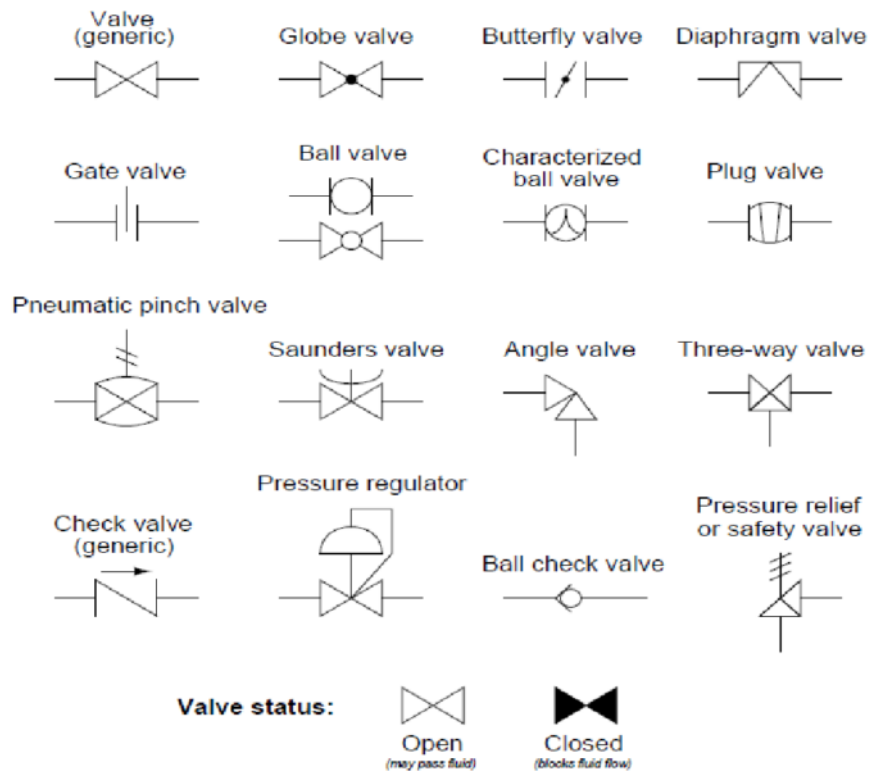
### I.7.3 Bulles d'instruments

	Field mounted	Main control panel front-mounted	Main control panel rear-mounted	Auxiliary control panel front-mounted	Auxiliary control panel rear-mounted
Discrete instruments					
Shared instruments					
Computer function					
Logic					

### I.7.4 Équipements de processus

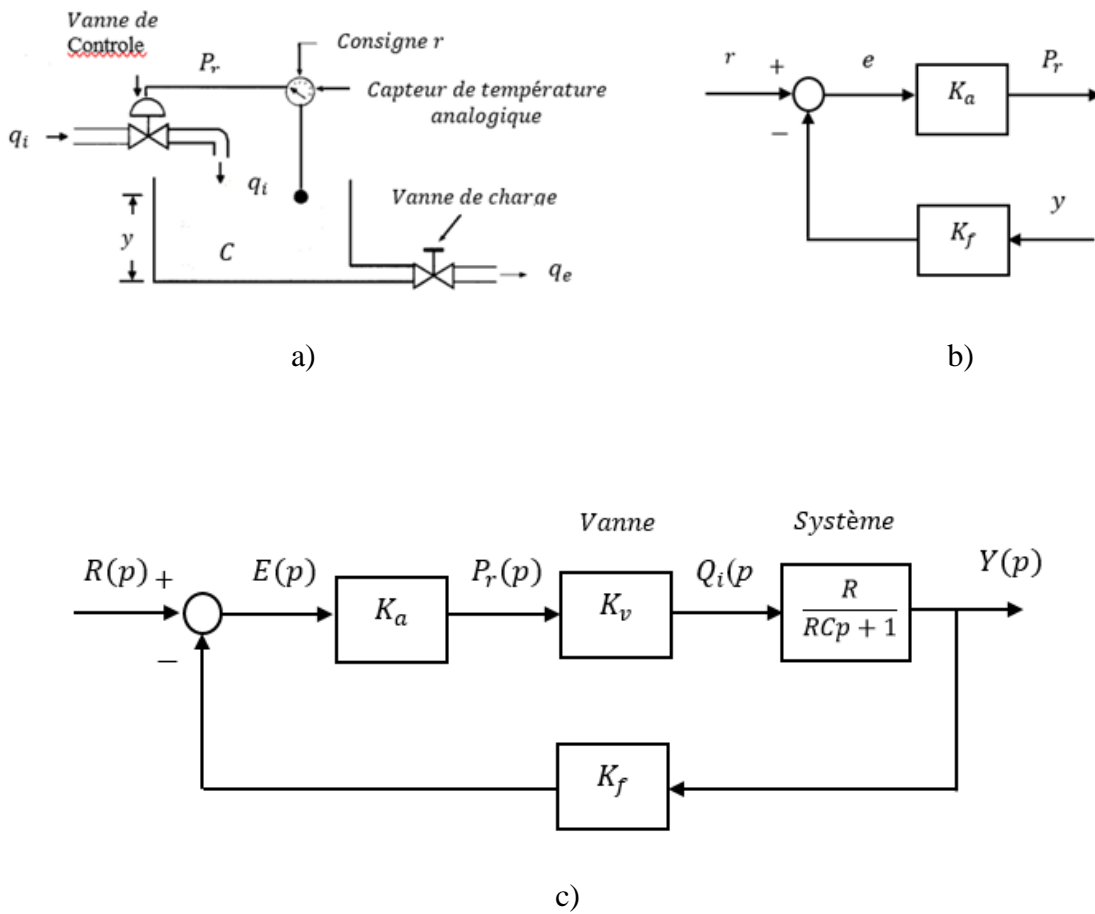


## I.7.5 Types de Vannes



## I.8 Système de contrôle du niveau de liquide

Un système simple de contrôle du niveau de liquide est présenté à la Fig I.15 (a). Ce système est conçu de manière à ce que le niveau de liquide (c'est-à-dire la hauteur  $y$ ) reste constant malgré les variations du débit  $q_o$  du liquide. Il fonctionne comme suit. La vanne de charge régule le débit de sortie  $q_o$  du liquide du conteneur et la vanne de contrôle régule le débit d'entrée  $q_i$  du liquide dans le conteneur. Le niveau de liquide  $y$  est contrôlé par le dispositif de mesure analogique. La sortie de ce dispositif est connectée à la vanne de régulation afin de contrôler le débit d'entrée  $q_i$ . Lorsque  $q_o$  augmente (diminue),  $y$  diminue (augmente) et le dispositif analogique ouvre (ferme) la vanne de contrôle, augmentant (diminuant) ainsi le débit d'entrée  $q_i$ . Cette procédure permet de maintenir constante la hauteur  $y$  du niveau de liquide.



**Fig I.15.** Système de contrôle du niveau de liquide, (a) Schéma globale d'un système de contrôle de niveau du liquide, (b) Schéma fonctionnel du dispositif de mesure analogique du niveau de liquide, (c) Schéma fonctionnel du système en boucle fermée.

L'équation différentielle décrivant le système est déterminée comme suit. La loi de continuité des fluides stipule que la quantité de liquide qui entre dans le récipient moins la quantité de liquide qui en sort est égale à l'augmentation de la quantité de liquide dans le récipient. Supposons que la vanne de charge soit fermée (ce qui signifie que  $q_o = 0$ ). La loi de continuité des fluides donne alors :

$$q_i dt = A dy \quad \text{I.44}$$

Où  $q_i$  est le volume de liquide entrant par unité de temps,  $A$  est la surface horizontale du récipient, et  $dt$  et  $dy$  sont les différentielles de temps et de hauteur, respectivement. Si la vanne de charge est ouverte (ce qui signifie que  $q_o \neq 0$ ), la loi de continuité des fluides donne :

$$(q_i - q_o) dt = A dy \quad \text{I.45}$$

Supposons que l'écoulement du liquide soit laminaire. Un système fluide laminaire est caractérisé par les constantes R (résistance d'une vanne ou d'un tuyau) et C (capacité du récipient), qui sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
 R &= y/q_o \text{ and } C = A \Rightarrow \frac{(q_i - q_o)}{A} = \frac{dy}{dt} \\
 \Rightarrow \frac{(q_i - q_o)}{c} = \frac{dy}{dt} &\Rightarrow \left( q_i - \frac{y}{R} \right) = C \frac{dy}{dt} \Rightarrow (Rq_i - y) = RC \frac{dy}{dt} \\
 &\Rightarrow RC \frac{dy}{dt} + y = Rq_i
 \end{aligned} \tag{I.46}$$

L'équation différentielle décrit le système en boucle ouverte dont l'entrée est l'alimentation  $q_i$  et la sortie la hauteur  $y$ . La fonction de transfert du système en boucle ouverte est alors la suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{Q_i(p)} = \frac{R}{RCp+1} \tag{I.47}$$

Le dispositif de mesure analogique du niveau de liquide fonctionne comme c'est indiqué à la figure b. La hauteur  $Y(p)$  du niveau de liquide est comparée au signal de référence  $R(p)$ , ce qui produit l'erreur :

$$E(p) = R(p) - K_f Y(p) \tag{I.48}$$

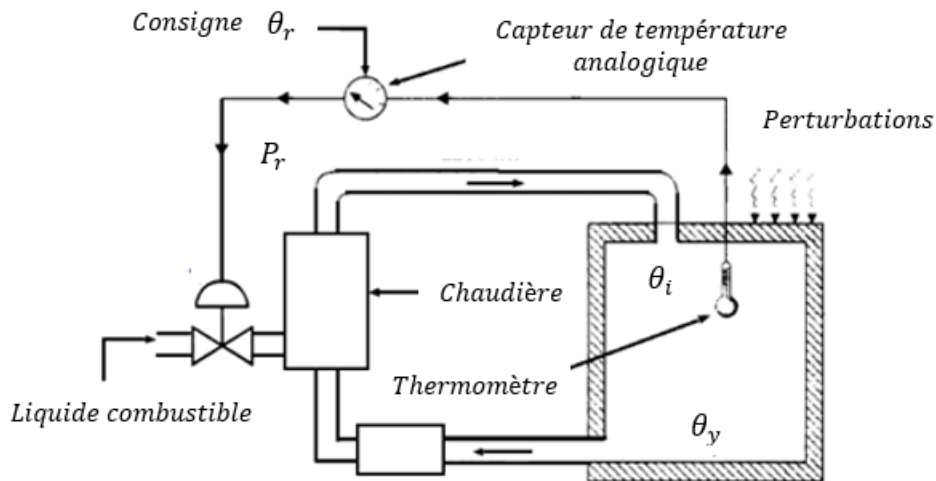
où  $K_f$  est la constante du dispositif de mesure. L'erreur  $E(p)$  est transmise à un amplificateur pneumatique dont la sortie est de l'air avec une pression  $P(p) = K_a E(p)$ , où  $K_a$  est la constante d'amplification du dispositif de mesure du niveau de liquide. Cette pression est à son tour transmise à la vanne de régulation. Il en résulte un débit d'entrée de liquide  $Q_i(p)$  dans le réservoir, où  $Q_i(p) = K_v P(p)$ , où  $K_v$  est la constante de la vanne de régulation. Le schéma fonctionnel global du système en boucle fermée est donc illustré à la figure c. La fonction de transfert du système en boucle fermée est donnée par la formule suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{K_a K_v R}{RCp+1+K_f K_a K_v R} \tag{I.49}$$

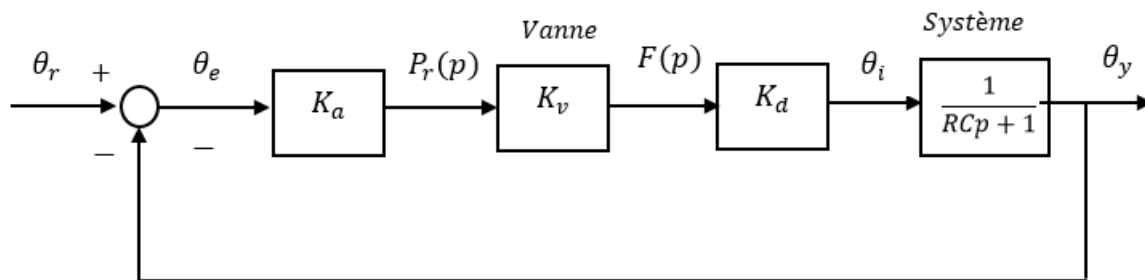
## I.9 Système de contrôle de la température

Un système simple de contrôle de la température d'une pièce est présenté à la Fig I.16. Ce système est conçu de manière à ce que la température de la pièce reste constante malgré les variations de la température extérieure. Le fonctionnement du système est régulé par un dispositif de mesure analogique de la température. Ce dispositif compare la température

ambiante  $\theta_y$  à la température désirée  $\theta_r$  et transforme le signal d'erreur  $\theta_e$  (c'est-à-dire la différence  $\theta_e = \theta_r - \theta_y$ ) en un signal de pression. Cette pression agit sur la soupape de commande, qui se ferme ou s'ouvre en conséquence, contrôlant ainsi l'alimentation en combustible liquide. La quantité de combustible liquide qui entre dans le brûleur contrôle essentiellement la température  $\theta_i$  de l'air chaud. Cette procédure permet de maintenir la température ambiante  $\theta_y$  constante.



a)



b)

**Fig I.16.** Système de régulation de la température ambiante. (a) Vue d'ensemble d'un système de régulation de la température ambiante, b) schéma fonctionnel du système en boucle fermée.

Nous définissons les paramètres suivants du système :

- $C$  est la capacité thermique de l'air de la pièce. Si l'air de la pièce a une masse  $m$  et une capacité thermique spécifique  $C$ , alors  $C = \sigma m$ .

- $R$  est la résistance thermique de l'air de la pièce. Si  $A$  est la surface horizontale de la pièce,  $h$  la hauteur et  $k$  le coefficient de conductivité thermique de l'air, on obtient la relation approximative  $R = h/kA$ ,
- $q$  est le débit de la masse d'air à travers la pièce par unité de temps. Si  $\theta_i$  et  $\theta_y$  sont les températures d'entrée et de sortie de la pièce, respectivement, alors,

$$q = \frac{(\theta_i - \theta_y)}{R} \quad \text{I.50}$$

Le modèle mathématique décrivant le système est déterminé comme suit. La température ambiante est de  $\theta_y$ . Une augmentation  $d\theta_y$  de la température  $\theta_y$ . nécessite  $Cd\theta_y$  de chaleur. Cette quantité de chaleur doit être fournie par le flux d'air chaud  $q$  en un temps  $dt$ . On a donc,

$$Cd\theta_y = qdt = \frac{(\theta_i - \theta_y)}{R} dt \quad \text{I.51}$$

D'où,

$$RC \frac{d\theta_y}{dt} + \theta_y = \theta_i \quad \text{I.52}$$

La relation décrit un système en boucle ouverte dont l'entrée est la température de l'air chaud et la sortie la température  $\theta_y$  de la pièce. La fonction de transfert de ce système en boucle ouverte est donnée par :

$$G(p) = \frac{\theta_y(p)}{\theta_i(p)} = \frac{R}{RCp+1} \quad \text{I.53}$$

Le schéma fonctionnel du système en boucle fermée est donné à la figure b. Soit  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  le débit du combustible liquide, tandis que  $K_d$  est une constante qui relie le débit du combustible liquide  $f(t)$  à la température  $\theta_i(t)$  de l'air chaud produit. La fonction de transfert du système en boucle fermée est la suivante :

$$H(p) = \frac{\theta_y(p)}{\theta_r(p)} = \frac{K_a K_v K_d}{RCp+1+K_a K_v K_d} \quad \text{I.54}$$

Où  $K_v$  est la constante de la vanne.

## CH II : Eléments de régulation analogique

### II.1 Introduction

Un système de régulation comprend :

- Un capteur de mesure de la grandeur à réguler,
- Un équipement (organe réglant) permettant de faire varier un débit de fluide ou d'énergie (vanne, variateur de vitesse, ...). La grandeur à réguler doit bien sûr être sensible aux variations de débit réglé.
- Un régulateur sur lequel on définit une *consigne*, qui est la valeur de la grandeur mesurée qu'on souhaite atteindre ou maintenir. Le régulateur sera capable d'agir, directement ou indirectement, sur l'organe réglant.

Un tel ensemble est nommé *boucle de régulation*. Le rôle du régulateur est d'ajuster la position de l'organe réglant afin de faire concorder la valeur mesurée et le point de consigne. Le régulateur compare en permanence la mesure de la grandeur à réguler et la consigne, et agit sur l'organe réglant.

### II.2 Capteur

Un capteur est un dispositif (ou un transducteur) capable de transformer une grandeur physique en une autre grandeur physique généralement électrique (tension). Lorsque le capteur est constitué de plusieurs éléments, le corps d'épreuve est celui en contact direct avec le mesurande. Il génère une grandeur physique intermédiaire (déplacement, déformation, force...) traduite en une grandeur électrique (tension, capacité, induction...) par le transducteur [5].



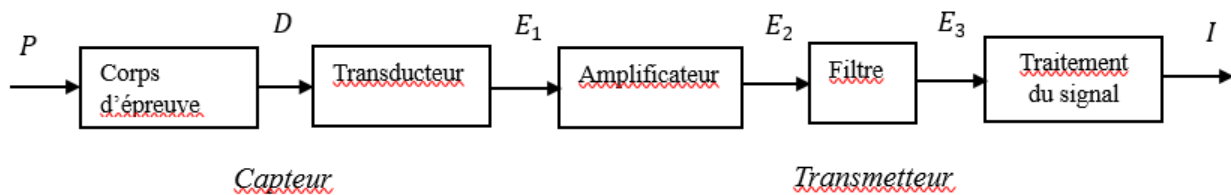
Fig II.1. Capteur.

## II.3 Transmetteur

C'est un dispositif qui converti le signal de sortie du capteur en un signal de mesure standard. Il fait le lien entre le capteur et le système de contrôle. Le couple capteur-transmetteur réalise la relation linéaire entre la grandeur mesurée et son signal de sortie.

### II.3.1 Constitution

Pour élaborer un signal normalisé à partir du signal généré par le capteur, le transmetteur comprend globalement un amplificateur, un filtre, et un traitement du signal comme le montre la Fig II.2. Le transmetteur complète ainsi la chaîne de mesurage du capteur.



**Fig II.2.** Structure de capteur-transmetteur [5].

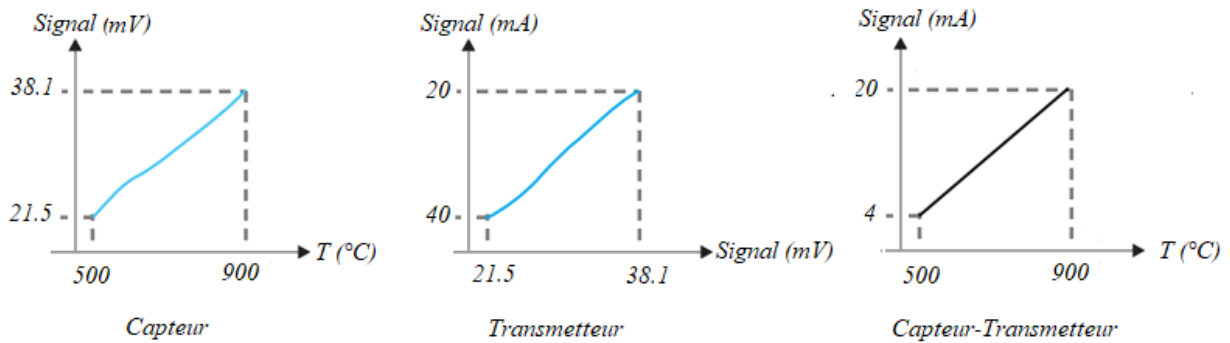
L'*amplificateur*, en augmentant le niveau du signal électrique  $E_1$  délivré par le capteur, réduit le rapport « bruit de fond/signal », et améliore ainsi la qualité du signal  $E_2$  transmis.

Le *filtre* élimine ou atténue les signaux parasites dans la limite de certaines fréquences pour garantir un signal de mesure  $E_3$  convenable. Parmi de nombreuses familles de filtres, le plus répandu est le filtre passe-bas.

Le *traitement du signal* réalise la fonction finale désirée, généralement linéaire, entre le mesurande et la mesure, et détermine la nature, tension ou courant, et l'intensité du signal de mesure. Dans le cas du capteur-transmetteur de pression, Fig II.2, le signal délivré est un courant  $I$  tel que :  $I = a \cdot P + b$ ,  $a$  et  $b$  dépendants du réglage effectué.

Un *capteur* délivre un signal de faible intensité '*signal bas niveau*' alors que le transmetteur délivre un signal '*haut niveau*' puisque son énergie permet la transmission de la mesure à une grande distance (plusieurs centaines de mètres) du point de mesure. Ces signaux « haut niveau » sont : 0 – 5 V, 1 – 5 V, 0 – 10 V, 0 – 20 mA et 4 – 20 mA.

**Exemple** : capteur-transmetteur de température à entrée thermocouple type K de 500 °C à 900 °C, et sortie courant 4 – 20 mA. Ce capteur n'est pas linéaire, et c'est le transmetteur qui rend la relation linéaire :  $I = 0,04 \times T - 16$ .



**Fig II.3.** Exemple de capteur-transmetteur de température [5].

## II.4 Vannes de régulation

La vanne de régulation est utilisée comme organe de réglage dans différents types de boucles de régulation. Elle permet de contrôler de façon progressive le débit d'un fluide, le signal de commande provenant du système de contrôle du processus. Une *commande manuelle* permettant à un opérateur d'agir directement sur l'ouverture de la vanne qu'elle que soit la pression de commande, Il existe plusieurs représentations d'une vanne comme le montre la figure II.4.

Vanne simple	Vanne manuelle	Vanne Pneumatique	Electrovanne	Vanne pneumatique avec positionneur

**Fig II.4.** Exemple de vannes de régulation.

### II.4.1 Constitution

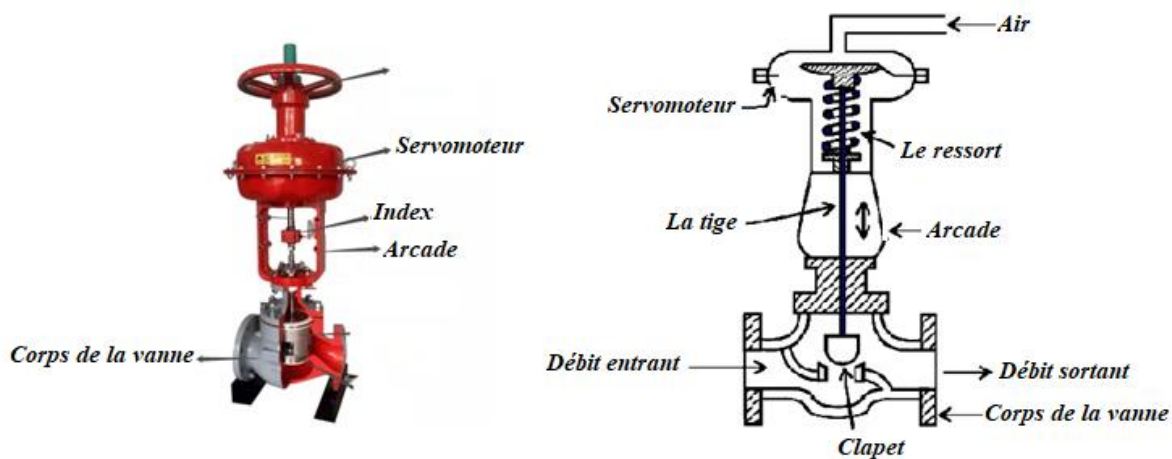
Une vanne de régulation est constituée de trois parties [5] :

- Le *servomoteur* : c'est l'élément qui assure la conversion du signal de commande en mouvement de la vanne, (où s'exerce la commande),

- Le *corps de vanne* : c'est l'élément qui assure le réglage du débit (où circule le débit du fluide à contrôler),
- L'*arcade* reliant ces parties.

Et aussi d'un certain nombre d'éléments auxiliaires comme le *positionneur* qui régule l'ouverture de la vanne en accord avec le signal de commande.

La Fig II.5 montre une vanne à clapet munie d'un servomoteur pneumatique à simple effet, fermée lorsque la *commande d'air* est minimale.



**Fig II.5.** Vanne droite à clapet.

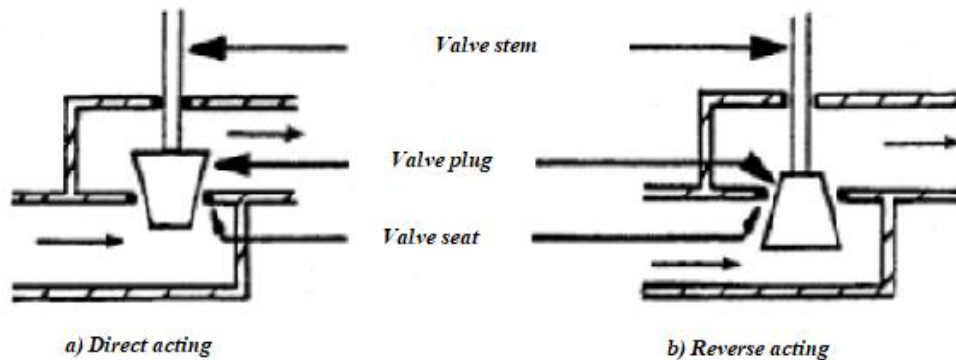
Lorsqu'on augmente la pression de commande, les ressorts se compriment et tirent la *tige du clapet* vers le haut. Le *clapet* libère ainsi une partie de l'ouverture au *siège*, et par conséquent un certain débit du fluide.

Le *presse-étoupe* sert à l'étanchéité entre l'intérieur et l'extérieur du corps et à la lubrification de la tige de clapet.

L'*index* montre le pourcentage d'ouverture.

Le corps de la vanne peut être classifié en : *action directe* or *action inverse* comme le montre la Fig II.6.

- En *action directe*, un mouvement en bas de la tige du clapet résulte en une vanne fermée.
- En *action inverse*, un mouvement en bas de la tige du clapet résulte en une vanne ouverte.

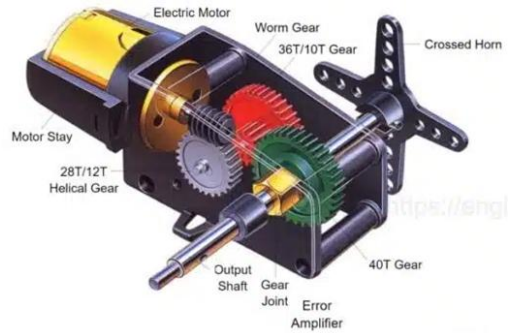


**Fig II.6.** Sens d'action de la vanne de régulation.

#### II.4.2 Servomoteur

Un servomoteur (ou servo-moteur) est un actionneur rotatif ou linéaire qui permet un contrôle précis de la position angulaire ou linéaire, de la vitesse et de l'accélération. Le mot servo vient à l'origine du mot latin servus, qui signifie esclave ou serviteur. Il a été défini comme « un moteur électrique qui utilise la rétroaction dans le but de produire une puissance mécanique pour effectuer le mouvement désiré du mécanisme d'asservissement ». Aujourd'hui, les servomoteurs sont de plus en plus utilisés dans une variété d'applications en raison de leur densité de puissance élevée, leur haut rendement et leurs excellentes performances dynamiques par rapport à d'autres technologies d'entraînement motorisé. Il existe deux types de servomoteurs : le servomoteur classique à courant continu et le servomoteur à courant alternatif.

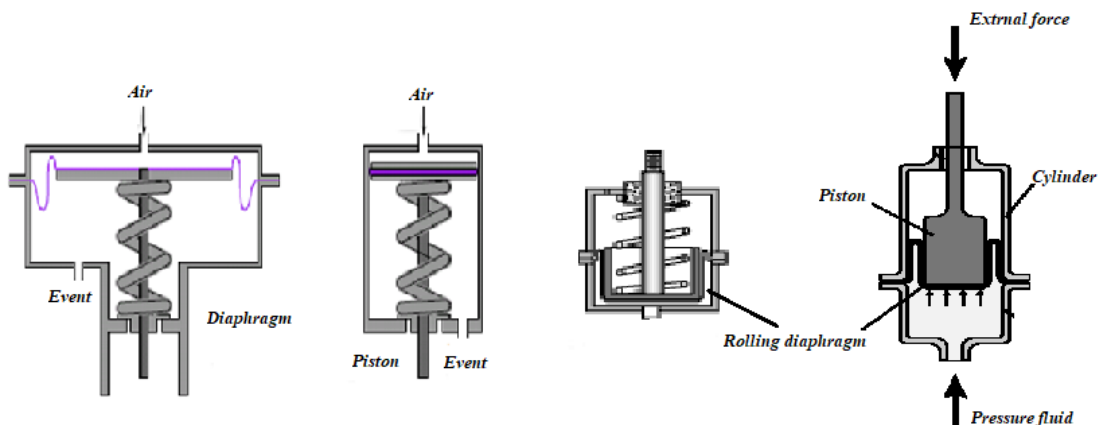
Le servomoteur reçoit un signal de commande qui représente une position de sortie souhaitée de l'arbre du servomoteur et applique une puissance à son moteur à courant continu jusqu'à ce que son arbre tourne jusqu'à cette position. Il utilise le dispositif de détection de position pour déterminer la position de rotation de l'arbre, afin de savoir dans quel sens le moteur doit tourner pour amener l'arbre à la position voulue [11].



**Fig II.7.** Modèle du servomoteur.

Le fluide moteur peut être de l'air, de l'eau, de l'huile ou de l'électricité (servomoteur électrique). On distingue différents types de servomoteurs tels que :

- Le servomoteur classique à membrane, conventionnel (à action direct ou inverse) ou réversible (on peut changer le sens d'action).
- Le servomoteur à membranes déroulante, surtout utilisé pour les vannes rotatives.
- Le servomoteur à piston, utilisé lorsque les efforts à fournir sont très importants. La pression de commande peut être importante. Le fluide moteur peut être de l'air, de l'eau ou de l'huile.
- Le servomoteur électrique, utilisé pour les vannes rotatives. On associe à un moteur électrique un réducteur de vitesse permettant ainsi d'obtenir des couples très importants.



**Fig II.8.** Différents types de servomoteurs.

### II.4.3 Positionneur

Le positionneur de vanne est un relais d'asservissement garantissant un positionnement du clapet fidèle et rapide à l'ouverture comme à la fermeture. L'ouverture de la vanne, et donc le débit, demandée par le signal de commande du système de contrôle du processus est ainsi assurée malgré les problèmes rencontrés [5].

#### II.4.3.1 Principe

Pour contrôler le débit incident de la grandeur physique du procédé, le régulateur industriel agit sur l'actionneur de la boucle de régulation : la vanne. Il pilote le positionneur de vanne par un signal de commande traduisant une certaine ouverture assimilable à une position du clapet. Le positionneur reçoit la consigne de position et la compare à la position réelle du clapet de la vanne. En fonction de l'écart constaté, il génère un signal plus ou moins important au servomoteur pneumatique pour positionner le clapet, et donc l'ouverture correspondant à la valeur demandée par le régulateur industriel [5].

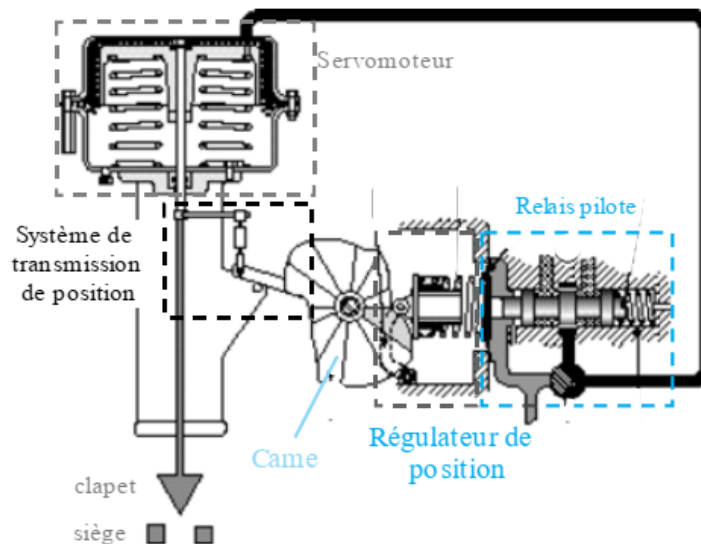


Fig II.9. Positionneur [5].

#### II.4.3.2 Éléments constitutifs

Le positionneur comprend [5] :

- Une partie pneumatique, électrique ou numérique, traduisant le signal du régulateur en demande de position ;

- Un système mécanique ou électronique de mesure de la position ;
- Un comparateur entre consigne et mesure,
- Un correcteur P, PI ou PID,
- Un relais ou pilote pneumatique avec son alimentation d'air comprimé.

## II.4.4 Caractéristiques d'une vanne

### II.4.4.1 Caractéristique intrinsèque

C'est la loi entre le débit  $Q$  et la course  $h$  du clapet, pour une *pression différentielle*  $\Delta P$  maintenue *constante* aux bornes de la vanne. Cette caractéristique est liée technologiquement à la forme du clapet ou des orifices de la cage. On distingue trois types de caractéristiques intrinsèques de débit qui sont : *linéaire*, *égal pourcentage*, et *ouverture rapide* (Tout ou rien) [5].

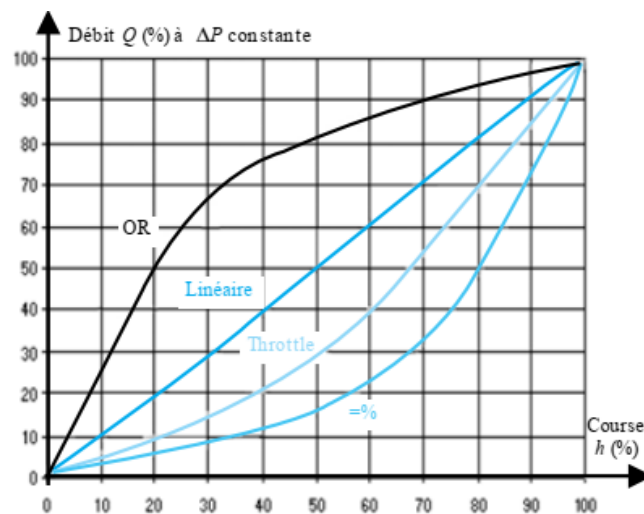


Fig II.10. Caractéristiques ou loi intrinsèque [5].

### Caractéristiques

- Linéaire :** la relation entre la course et le débit est linéaire. La caractéristique est une droite. Des accroissements égaux du signal vanne provoquent des accroissements égaux de débit.
- Égal pourcentage (= %) :** La relation est exponentielle ;  $Q = Q_0 e^{n.h}$ ,  $Q_0$  étant le débit minimal contrôlable et  $n$  le coefficient propre à la vanne. Les accroissements égaux de la course relative  $h$  fournissent des accroissements d'égal pourcentage du débit  $Q$  relatif.

- c) **Loi ouverture rapide (OR) ou tout ou rien** : Plus de 50 % du débit est libéré sur le premier tiers de la course. La loi *throttle*, ou *égal pourcentage modifiée*, a une caractéristique moins prononcée que la loi égal pourcentage.

#### II.4.4.2 Caractéristique installée et autorité d'une vanne

La *caractéristique installée* est la loi liant le débit  $Q$  à la course  $h$  du clapet de la vanne installée et fonctionnant dans les conditions du processus, notamment avec une pression différentielle non constante car dépendant du circuit résistant. La Fig II.11 montre l'exemple courant d'une vanne de régulation montée en série dans un circuit hydraulique ; le but étant de régler le débit en maintenant une pression utile suffisante pour le procédé.

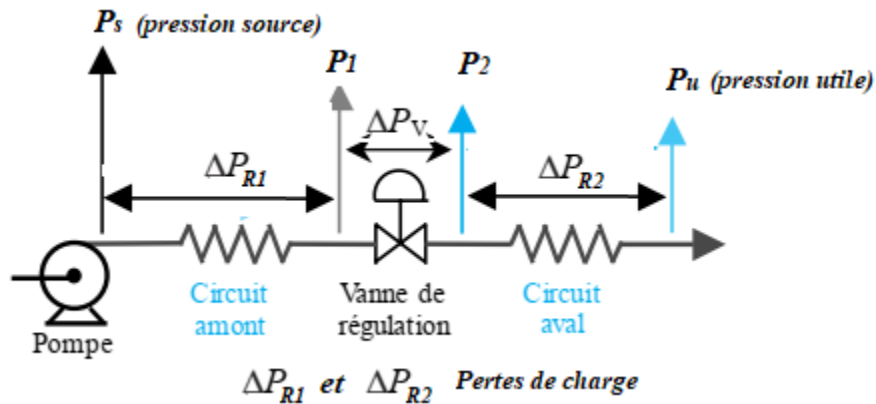


Fig II.11. Vanne de régulation en circuit série [5].

#### II.4.4.3 Autorité de la vanne

La qualité première d'une vanne est de réguler un débit ou une puissance thermique de façon progressive cette précision de réglage s'appelle l'autorité de la vanne nommée AV et représente le rapport entre la perte de charge de la vanne grande ouverte ( $H = 100\%$ ) et la perte de charge de la batterie (échangeur).

Généralement l'autorité d'une vanne doit être comprise entre 0.5 et 0.7, en dessous de 0.5 la précision sera faible avec risque de pompage de la vanne, au-dessus 0.7 les pertes de charge seront importantes avec usure du matériel.

Dans un circuit série, l'autorité  $a$  d'une vanne est [5]:

$$a = \frac{\Delta P_v}{\Delta P_v + \Delta P_{R1+R2}} \quad \text{II.1}$$

### Coefficients de débit $C_v$ et $K_v$

Qu'il s'agisse d'un liquide ou d'un gaz, le coefficient de débit  $C_v$  d'une vanne est un coefficient indiquant la capacité d'écoulement et qui permet de trouver la dimension, notamment son diamètre nominal DN, d'une vanne auprès de tout fabricant. Les  $C_v$  sont compris globalement entre  $10^{-6}$  pour les micro-vannes de dosage et  $10^6$  pour les vannes de grande capacité utilisées sur les pipelines ou les barrages.

### Coefficient de débit $C_v$

C'est le nombre de gallons US (3,785 L) d'eau à 15 °C traversant en une minute une vanne lorsque la chute de pression  $\Delta P$  au passage de cette restriction est de 1 psi (Pound-force/square inch ou livre-force par pouce carré, (1psi=0,069 bar), soit [5]:

$$C_v = Q \sqrt{\frac{d}{\Delta P}} \quad \text{II.2}$$

Avec  $\Delta P = P_1 - P_2$

$P_1$  : pression en amont (bar abs),

$P_2$  : pression en aval (bar abs),

$Q$  : débit volume maximal ( $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ ),

$d$  : densité du fluide.

### Pour les liquides

On a :

$$C_v = 1.16 Q \sqrt{\frac{d}{\Delta P}} \quad \text{II.3}$$

( $Q$  en  $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$  et  $\Delta P$  en bar)

L'unité du  $C_v$  n'est implicitement jamais mentionnée car peu pratique.

### Pour les gaz

$$C_v = \frac{Q}{295} \sqrt{\frac{d.T}{\Delta P(P_1+P_2)}} \quad \text{II.4}$$

Avec  $P_1$  et  $P_2$  (bar abs),

$Q$  : débit volume ( $\text{m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ ),

$d$  : densité à 15 °C et à 1 013 mbar abs,

$T$  : température absolue en kelvin.

### **Coefficient de débit $K_v$**

C'est le nombre de  $\text{m}^3$  d'eau à 15 °C traversant en une heure une vanne lorsque la chute de pression  $\Delta P$  au passage de cette restriction est de 1 bar, soit [5]:

$$K_v = Q \sqrt{\frac{d}{\Delta P}} \quad \text{II.5}$$

Avec  $\Delta P = P_1 - P_2$

*Remarque* :  $C_v = 1.16 K_v$  et  $K_v = 0.86 C_v$

### **Choix du $C_v$ nominal**

Afin de garder une réserve de fonctionnement, on pondère le  $C_{v \text{ maxi}}$  calculé pour une loi linéaire et par  $\alpha = 1,4$  pour une loi exponentielle.

On cherche ensuite le  $C_v$  proposé dans les gammes des constructeurs correspondant au moins à ce  $C_v$  nominal ( $C_v \text{ nominal} \leq C_v$ ) et vérifier que le  $C_{v \text{ mini}} \text{ controlable} < C_{v \text{ mini}}$  à contrôler, sinon trouver une autre vanne.

Le diamètre nominal DN d'une vanne de régulation doit toujours être inférieur ou égal au diamètre de ligne sur laquelle elle est installée, jamais supérieur.

### **Coefficient de réglage (Rangeabilité)**

Une vanne régulatrice est utilisable entre un débit minimal contrôlable et un débit maximal contrôlable (ou nominal). On définit le *coefficient de réglage*  $r$  comme le rapport entre le coefficient de débit maximal et le coefficient de débit minimal contrôlable :

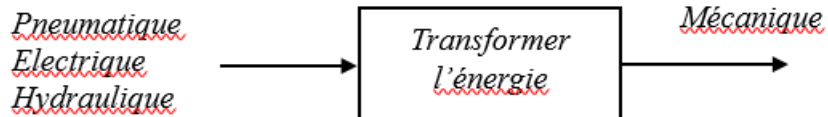
Le coefficient de réglage ou *rangeabilité* est [5] :

$$r = \frac{C_{v \text{ maxi}}}{C_{v \text{ mini}} \text{ controlable}} \quad \text{II.6}$$

## II.5 Vérin

Un vérin est une machine convertissant une énergie quelconque en énergie mécanique de translation. L'énergie mécanique est produite sous forme d'un mouvement permettant de provoquer un déplacement ou de créer une force.

Le vérin appartient à la famille des actionneurs, car il génère un mouvement.



**Fig II.12.** Le vérin.

Un vérin est constitué d'un cylindre (tube) dans lequel se déplace un piston muni d'une tige. Ainsi, un vérin alimenté par un fluide sous pression engendre un mouvement linéaire, alternatif, d'amplitude limitée et définie par sa taille.

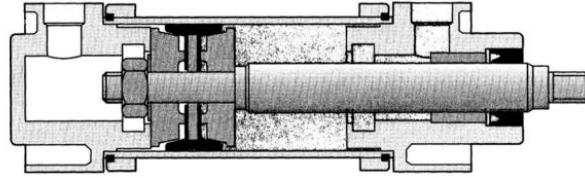
On trouve deux technologies de vérin :

*Les vérins pneumatiques*, qui utilisent de l'air comprimé entre 2 et 10 bars. Très simples à mettre en œuvre, ils sont très nombreux dans les systèmes automatisés.

C'est l'air comprimé qui, en pénétrant dans l'une des chambres, pousse sur le piston. La tige se déplace. L'air présent dans l'autre chambre est donc chassé et évacué du corps du vérin. Le mouvement contraire est obtenu en inversant le sens de déplacement de l'air comprimé.

*Les vérins hydrauliques*, qui utilisent de l'huile sous pression entre 160 et 350 bars. Plus coûteux, ils développent des efforts beaucoup plus importants. Les vitesses de tige sont plus précises.

La figure II.13 ci-dessous, en coupe longitudinale, montre les éléments constituant le vérin.



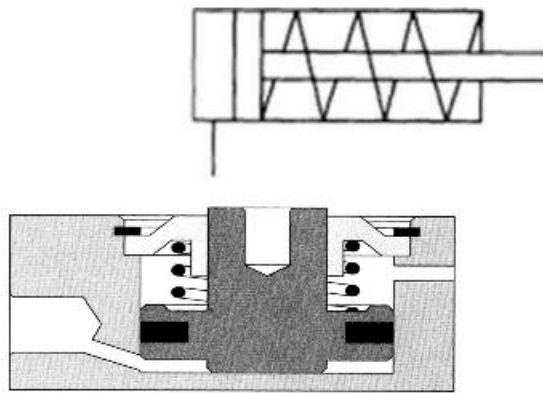
**Fig II.13.** Eléments constituant un vérin [12].

Il existe deux types de vérins pneumatiques :

### II.5.1 Vérin simple effet

Comme son nom l'indique, un vérin simple effet est conçu pour faire une action simple : créer une action mécanique et réaliser un mouvement dans un seul sens (généralement en poussant, parfois en tirant). Une fois le déplacement effectué, le vérin retourne à sa position initiale sous l'effet du poids ou à l'aide d'un ressort.

Il est économique, consomme peu de fluide, mais possède une course réduite. On l'utilise souvent dans des fonctions de serrage, d'éjection ou de levage ;

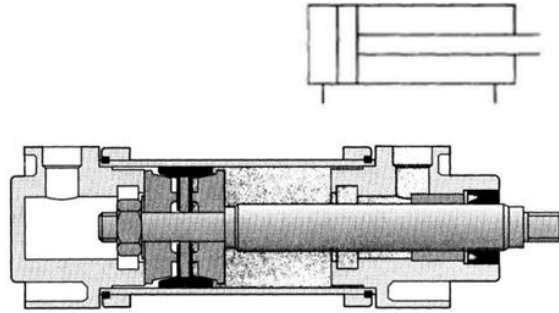


**Fig II.14.** Vérin à simple effet [12].

### II.5.2 Vérin double effet

Les vérins à simple effet ont un seul orifice d'entrée pour l'air comprimé, qui pousse le piston dans une seule direction. Les vérins à double effet ont un orifice d'entrée à chaque extrémité, ce qui permet à l'air de contrôler le piston dans les deux sens.

Le piston peut se déplacer librement dans le corps lorsqu'il est poussé par l'air comprimé. En absence d'air comprimé, il reste en position (tige rentrée ou sortie). Il est plus coûteux, mais aussi plus facile à régler en vitesse. Il est très utilisé dans l'industrie.



**Fig II.15.** Vérin double effet [12].

La pression  $P$  dans la chambre principale pour un effort résistant  $F_r$  sur la tige est donné par :

$$P = \frac{F_r}{S_p} \quad \text{II.7}$$

(Pour un rendement  $\rho=1$ )

La vitesse de sortie de la tige dépend du débit  $Q$  entrant et de la section de la chambre principale :

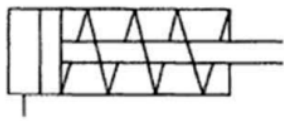
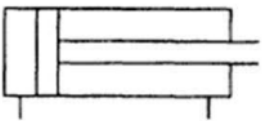
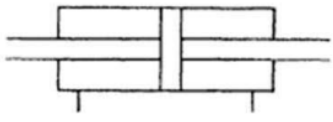
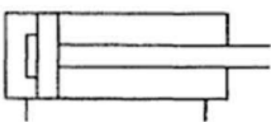
$$V = \frac{Q}{S_p} \quad \text{II.8}$$

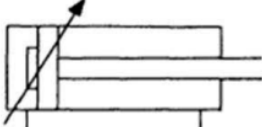
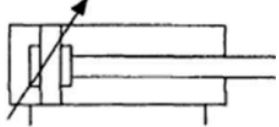
En sortie de la chambre secondaire, on a :

Un débit :  $Q' = V \times S_s$

Une pression :  $P' = 0$

### II.5.3 Schématisation des vérins

	Vérin simple effet		Vérin double effet
	vérin à double effet avec tige de piston à double extrémité		vérin à double effet avec encaissement non réglable dans une direction

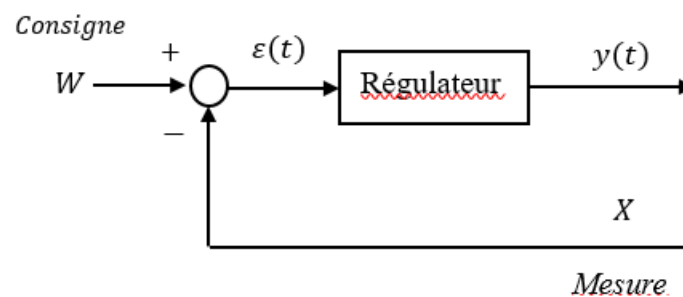
	vérin double effet avec simple encaissement réglable		vérin à double effet avec encaissement réglable aux deux extrémités
---	--	--	---

**Tableau II.1.** Schémas de quelques types de vérins [12].

## II.6 Rôle du régulateur

Le régulateur doit maintenir une mesure égale à une consigne quelles que soient les perturbations subies par le procédé. Le réglage des paramètres de son algorithme dépend des performances attendues en temps de réponse et en précision dynamique lors de ces perturbations, mais aussi des changements de consigne.

Un régulateur est composé d'un élément, qui effectue la différence entre la mesure et la consigne, appelé comparateur ou soustracteur et, d'un correcteur. Le correcteur élabore une valeur de sortie fonction de l'écart constaté par le comparateur afin de corriger l'évolution de la grandeur à maîtriser du procédé. La fonction de transfert du correcteur est notée  $C(p)$  [7].



**Fig II.16.** Structure du régulateur.

Où,

$W(t)$  : Consigne

$X(t)$  : Mesure

$\varepsilon(t)$  : Ecart de réglage (=  $W(t) - X(t)$ )

$y(t)$  : Signal de commande

L'algorithme, ou loi de commande, du régulateur le plus classique est l'association des trois actions élémentaires PID (Proportionnelle, Intégrale et Dérivée), c'est le régulateur PID.

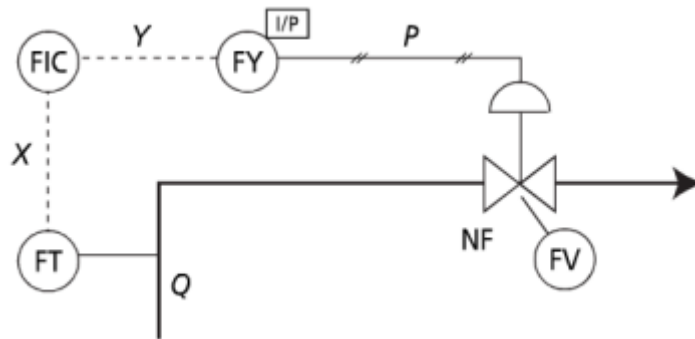
### II.6.1 Sens d'action du régulateur

La manière avec laquelle le régulateur automatique produit le signal de commande est appelée action de commande. Le choix de l'action du régulateur est important. Si l'action n'est pas sélectionnée correctement, le régulateur ne contrôlera pas.

- On dit qu'un régulateur est en "*action directe*" si la sortie augmente dans la même direction que l'écart d'erreur.
- Il est dit en "*action inverse*" si la sortie augmente dans la direction opposée à l'écart d'erreur, c'est-à-dire lorsqu'une augmentation du signal vers le contrôleur nécessite une diminution du signal en provenance du contrôleur, le contrôleur doit être réglé sur l'action inverse.

Le sens d'action du régulateur doit être opposé au sens d'évolution du procédé.

**Exemple :** On fait l'hypothèse que la commande Y augmente. Si le convertisseur FY intensité-pression est de sens direct d'action alors le signal P de pression augmente. La vanne FV étant normalement fermée (NF), l'augmentation de P provoque l'augmentation d'ouverture de la vanne, et donc du débit Q. Le débitmètre FT, de sens direct d'action, délivre ainsi une augmentation de la mesure X. Puisqu'une augmentation de Y conduit à une augmentation de la mesure X, le procédé est de sens direct d'évolution. Le sens d'action du régulateur FIC doit donc être inverse pour que cette régulation fonctionne correctement [7].



**Fig II.17.** Régulateur de débit [7].

En général, les convertisseurs et les transmetteurs sont de *sens direct d'action*.

## II.6.2 Actions Élémentaires

### II.6.2.1 Action Proportionnelle

#### *Equation Temporelle*

$$Y(t) = G_r \varepsilon(t) + Y_0 \quad \text{Or} \quad Y(t) = \frac{1}{Bp} \varepsilon(t) + Y_0 \quad \text{II.9}$$

$G_r$ : est le gain d'amplification.

$Y_0$ : centrage de la bande proportionnelle ou talon. Lorsque l'écart  $\varepsilon(t)$  est nul,  $Y_0$  permet de commander l'actionneur avec une valeur non nulle. En effet, pour une vanne par exemple, une commande nulle est synonyme d'ouverture ou de fermeture totale. Or, pour un procédé, il faut garder une certaine valeur à la grandeur réglante pour maintenir constante la mesure. La valeur de  $Y_0$  est donc réglée pour le point de fonctionnement désiré.

En théorie pour un procédé linéaire, le point de fonctionnement idéal est une mesure à 50 %, soit une consigne fixée à 50 %, et une commande de l'actionneur  $Y_0$  à 50 %.

$$G_r = \frac{1}{Bp} \quad \text{II.10}$$

$Bp$  est l'étendue de la variation de la mesure, exprimée en pourcentage, donnant une variation totale (0 % à 100 %) du signal de commande pour une certaine consigne.  $Bp$  est la bande proportionnelle.

#### *Fonction de transfert*

La fonction de transfert se déduit de l'équation temporelle. En effet, pour une variation donnée  $\varepsilon(t)$  on a une variation  $Y(t) = G_r \varepsilon(t)$ . La fonction de transfert est :

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r = \frac{1}{Bp} \quad \text{II.11}$$

### II.6.2.2 Action Intégrale

#### *Equation temporelle.*

$$Y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + Y_0 = K_i \int_0^t \varepsilon(t) dt + Y_0 \quad \text{II.12}$$

$T_i$  : constante de temps de l'action intégrale. Cette constante est souvent exprimée en minutes.

$K_i$  : coefficient d'action intégrale ou taux d'action intégrale. L'inverse de  $T_i$ ,  $K_i$  est exprimé en  $\text{min}^{-1}$ .

$Y_0$  : valeur initiale de Y. Cette valeur ne peut pas être fixée directement ; il s'agit d'une mémoire de l'évolution de  $Y(t)$  avant  $t = 0$ .

### ***Fonction de transfert***

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{T_i p} = \frac{K_i}{p} \quad \text{II.13}$$

### **II.6.2.3 Action Dérivée**

#### ***Equation temporelle.***

$$Y(t) = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad \text{II.14}$$

$T_d$ : constante de temps de l'action dérivée. Cette constante est généralement exprimée en secondes.

### ***Fonction de transfert***

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = T_d p \quad \text{II.15}$$

L'action dérivée peut être appliquée soit à l'écart, soit à la mesure seule.

### **II.6.3 Rôles des actions sur le comportement d'une chaîne fermée [7]**

#### **Action Proportionnelle**

- C'est une action simple, elle permet d'agir instantanément sur le procédé lors d'un changement de consigne ou lors d'une perturbation.
- L'augmentation du gain améliore la précision statique et la rapidité, mais dégrade la stabilité et donc la précision dynamique (premier dépassement).
- La bande passante d'un procédé en chaîne ouverte est augmentée en chaîne fermée lorsque le gain du régulateur est supérieur à 1.

#### **Action Intégrale**

- L'action intégrale améliore la précision statique puisqu'elle agit tant que l'écart persiste et cela progressivement, mais elle dégrade la stabilité à cause de son déphasage constant de  $-90^\circ$ .

- Associée à l'action proportionnelle elle agit essentiellement sur les fréquences basses du procédé, c'est-à-dire pour celles inférieures à  $< \frac{10}{T_i}$ .

### Action Dérivée

- L'action dérivée n'agit pas sur la précision statique mais elle améliore la stabilité et donc la précision dynamique (premier dépassement).
- Associée à l'action proportionnelle elle agit sur les hautes fréquences du procédé, c'est-à-dire pour celles supérieures à  $\frac{10}{d}$
- L'action dérivée amplifie les bruits et les parasites des signaux, elle dégrade donc le rapport bruit sur signal. C'est pourquoi l'action dérivée peut être associée à un filtre, ou encore s'exercer seulement sur la mesure et non pas sur l'écart.

### II.6.4 Différentes structures du régulateur PID

Les actions élémentaires d'un régulateur peuvent être associées de plusieurs façons, on parle de la structure d'algorithme du régulateur.

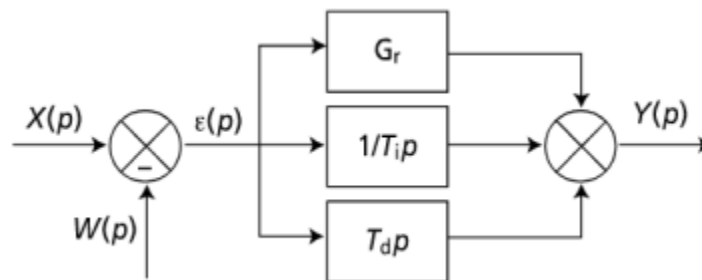
#### a) Structure parallèle

*Equation temporelle.*

$$Y(t) = G_r \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0 \quad \text{II.16}$$

*Fonction de transfert*

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r + \frac{1}{T_i p} + T_d p \quad \text{II.17}$$



**Fig II.18.** Structure de contrôle Parallèle [7].

**b) Structure série**

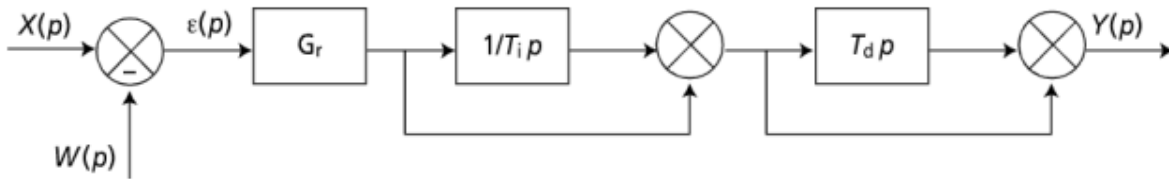
*Equation Temporelle.*

$$Y(t) = \alpha G_r \varepsilon(t) + \frac{G_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + G_r T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0 \quad \text{II.18}$$

Où  $\alpha = \frac{T_i + T_d}{T_i}$  est le coefficient théorique d'interaction entre l'action intégrale et l'action dérivée.

*Fonction de transfert*

$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p) \quad \text{II.19}$$



**Fig II.19.** Structure de contrôle série [7].

**c) Structure Mixte**

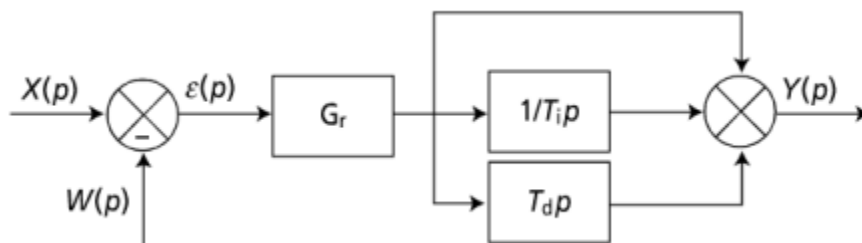
C'est la structure la plus couramment utilisée par les fabricants aujourd'hui.

*Equation temporelle*

$$Y(t) = G_r \varepsilon(t) + \frac{G_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t) dt + G_r T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + Y_0 \quad \text{II.20}$$

*Fonction de transfert*

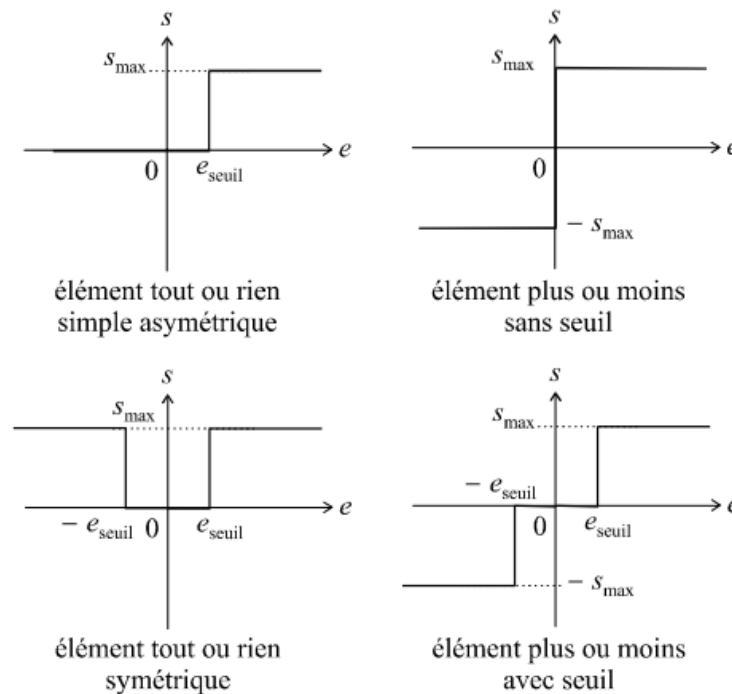
$$C(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)} = G_r \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \quad \text{II.21}$$



**Fig II.20.** Structure de contrôle mixte [7].

### II.4.3.3 Régulateur tout ou rien (TOR)

Les systèmes dits à fonctionnement tout ou rien sont caractérisés par une sortie ne pouvant prendre que deux (parfois trois) valeurs distinctes [3,13]. La valeur de la sortie est en général déterminée par l'intervalle dans lequel se trouve la valeur d'entrée. En fonction de la forme de la caractéristique, ces systèmes peuvent être appelés plus ou moins, avec ou sans seuil (voir Fig II.21).



**Fig II.21.** Régulateur tout ou rien (TOR) [3].

Le régulateur génère la grandeur de commande en fonction de l'écart. Le cas le plus simple est celui où l'action se fait en considérant uniquement le signe de l'écart.

$$u = \begin{cases} A & \text{si } \varepsilon > 0 \\ \bar{A} & \text{si } \varepsilon < 0 \end{cases} \quad \text{II.22}$$

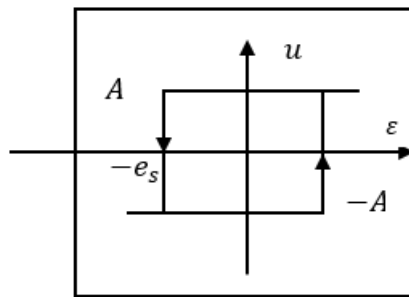
Suivant les applications, on choisit  $\bar{A} = 0$  ou  $\bar{A} = -A$ .

Lorsque l'erreur est positive, le régulateur est activé. Lorsque l'erreur est nulle ou négative, la sortie du régulateur est désactivée.

#### II.4.3.4 Régulateur tout ou rien avec hystérésis

L'hystérésis est le phénomène qui caractérise les systèmes qui possèdent deux caractéristiques distinctes en fonction du sens de variation du signal d'entrée : lorsque le signal croît, le point de fonctionnement du système se déplace sur une de ces courbes. Lorsqu'il décroît, il se déplace sur l'autre [3].

Un régulateur tout ou rien avec hystérésis déplace le point de commutation selon le sens de variation de l'écart, en introduisant une forme de retard dans la commutation, comme cela est montré dans la figure II.22 suivante :



**Fig II.22.** Régulateur tout ou rien (TOR) à hystérésis [3].

Les commutations ont lieu pour :

$$\varepsilon = e_s \text{ si } \varepsilon > 0 \text{ et } \varepsilon = -e_s \text{ si } \varepsilon < 0 \quad \text{II.23}$$

Cette caractéristique n'est pas une fonction au sens mathématique du terme car elle associe, pour une valeur de  $\varepsilon \in [e_s, -e_s]$  deux nombres  $-A$  et  $A$ .

## II.5 Stratégies de régulation

### II.5.1 Régulation directe

L'approche la plus simple pour concevoir une régulation consiste à utiliser un système en boucle fermée, communément appelé « feedback ». Cette méthodologie se caractérise par l'évaluation

continue et la modification potentielle des actions du régulateur, grâce à la comparaison continue entre la valeur mesurée et la valeur de consigne [14].

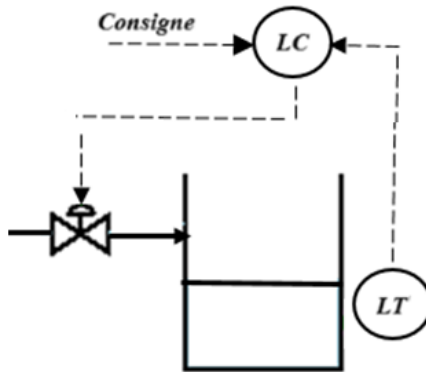
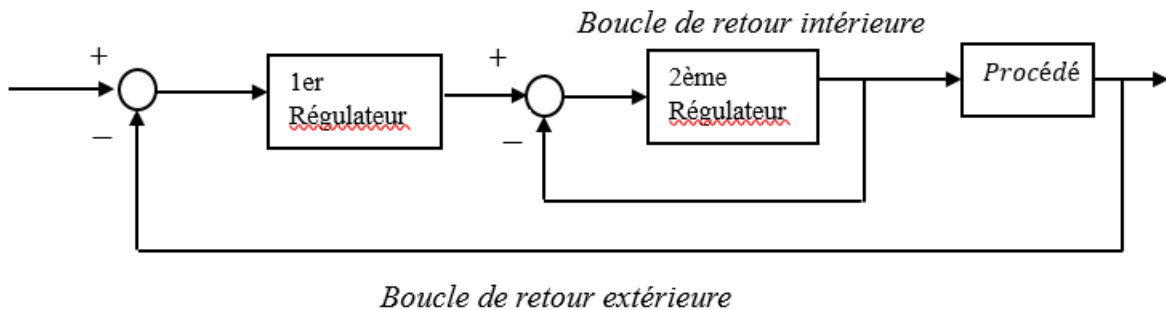


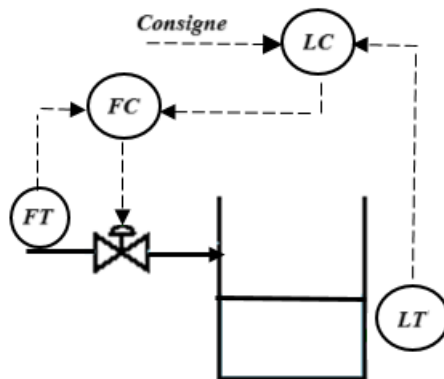
Fig II.23. Régulateur direct.

### II.5.2 Régulateurs en cascade

La valeur de référence pour un contrôleur unique peut provenir de la sortie d'un autre contrôleur. Par conséquent, les régulateurs sont configurés en cascade. Le régulateur chargé de déterminer la valeur de référence (le régulateur de niveau) est désigné comme régulateur principal, externe ou maître. Inversement, le régulateur qui reçoit la valeur de référence (le régulateur de débit) est appelé régulateur secondaire, interne ou esclave [14].

Par exemple, le régulateur de niveau d'un réservoir, au lieu de commander directement l'ouverture de la vanne de remplissage, peut régler le point de consigne d'un autre régulateur qui aura la charge d'ajuster le débit de remplissage en agissant sur cette vanne. Ainsi, la régulation de niveau du réservoir ne sera plus perturbée par des variations de pression sur le réseau de fluide de remplissage.

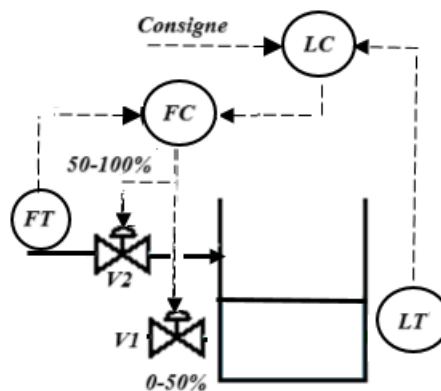




**Fig II.24.** Régulateur en cascade.

### II.5.3 Régulation à échelle partagée (split-range)

Un régulateur peut nécessiter la supervision de plusieurs organes de contrôle. Pour faciliter cela, la plage de sortie opérationnelle du régulateur est divisée en zones distinctes, chaque zone étant désignée pour la régulation d'un organe spécifique [14]. Par exemple, dans une plage de 0 à 50 %, le régulateur peut agir sur une vanne de faible capacité, tandis que dans une plage de 50 à 100 %, il peut agir sur une autre vanne de grande capacité. À 50 %, la vanne initiale peut être positionnée complètement ouverte tandis que la vanne suivante reste complètement fermée. Le split-range est dit à actions *complémentaires*.



**Fig II.25.** Régulateur Split Range “à actions complémentaires”.

Un autre exemple dans lequel le régulateur agit sur la vanne d'alimentation du bac et sur la vanne de soutirage. Tant que l'écart à la consigne est faible le régulateur agit sur la vanne de remplissage. Mais si le niveau ne peut être maintenu malgré une ouverture à 100% de la vanne de remplissage, la vanne de soutirage sera progressivement fermée. Le split-range est alors dit à actions antagonistes.

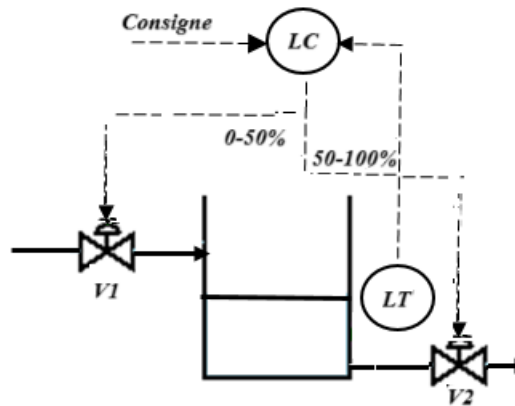


Fig II.26. Régulateur Split Range ‘à actions antagonistes’.

#### II.5.4 Régulation de proportion (feed forward)

Dans une commande de proportion, la perturbation est quantifiée (en particulier, le débit de soutirage) et une action corrective immédiate est exécutée sur l'élément de régulation par le contrôleur proportionnel (FF). Cette forme de régulation est qualifiée de boucle ouverte puisque la mesure corrective est mise en œuvre a priori sans que sa validité ou son efficacité ne soient vérifiées. Néanmoins, le facteur correctif peut être modifié par le biais d'un processus de réglementation supplémentaire (dans ce cas, la régulation du niveau LC) qui prend en compte le résultat attendu, à savoir le maintien de la stabilité du niveau. Une telle conception est utile quand:

- Le résultat est difficile à mesurer
- La réaction à la perturbation est si rapide et si importante qu'on souhaite agir au plus vite.

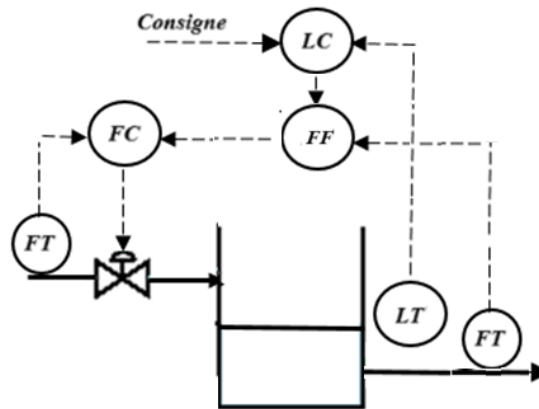


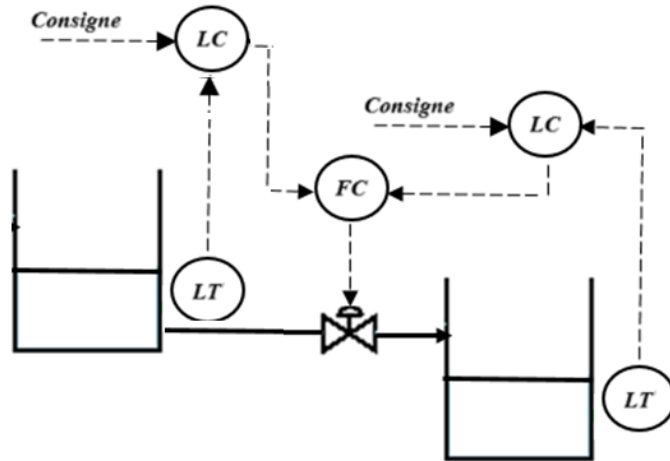
Fig II.27. Régulateur Feed forward [16].

### II.5.5 Régulation de substitution (override)

La régulation de substitution est utile lorsqu'on souhaite réguler deux variables au moyen d'un seul organe réglant. Dans l'exemple ci-contre le but de la régulation est de maintenir un niveau dans le bac aval et le bac amont en agissant sur la vanne de transfert entre les deux. La priorité est donnée au niveau du bac amont c'est-à-dire que si que si la consommation de liquide est trop importante, on préférera laisser baisser le niveau du bac aval pour préserver le niveau du bac amont. La vanne est commandée par un calculateur (FY) qui compare les sorties des deux régulateurs de niveau, amont et aval. Il choisit en permanence la valeur la plus faible. Ainsi [13],

- Si le niveau aval est trop faible, le régulateur tend à ouvrir la vanne (sortie tend vers 100%).
- Si le niveau amont est aussi trop faible, le régulateur tend à fermer la vanne (sortie tend vers 0%). La régulation du niveau amont est prioritaire et choisi de fermer la vanne pour préserver le niveau du bac amont
- Si le niveau amont est trop élevé, le régulateur tend lui aussi à ouvrir la vanne (sortie tend vers 100%). La régulation joue son rôle premier qui est d'alimenter le bac aval. Maintenant si le niveau aval est trop élevé, le régulateur tend à fermer la vanne (sortie tend vers 0%)
- Si le niveau amont est trop élevé, le régulateur tend à ouvrir la vanne (sortie tend vers 100%). La régulation de niveau du bac aval est prioritaire et protège le bac aval d'un débordement

- Si le niveau amont est trop faible, le régulateur tend à fermer la vanne (sortie tend vers 0%). La régulation à la fois protège le bac aval d'un débordement et préserve le niveau amont.



**Fig II.28.** Régulateur de substitution ‘Override’.

## Chapitre III : Régulation numérique

### III.1 Introduction

Les régulateurs analogiques et, d'une manière générale, les systèmes à temps continu sont décrits par la transformée de Laplace ou par des équations différentielles et sont traités en conséquence pour produire des signaux à temps continu. Les régulateurs numériques et, en général, les systèmes à temps discret sont décrits par la transformée Z ou par des équations différentielles. Le problème du développement des régulateurs numériques est principalement lié à la construction d'un programme PC [2].

Dans le cas où nous souhaitons utiliser un ordinateur pour le contrôle automatique d'un processus, le régulateur analogique doit être remplacé par un régulateur numérique et le calcul du signal d'erreur et la réponse dynamique du régulateur analogique peuvent être implémentés via le régulateur numérique comme le montre la figures III.1.

Le système résultant est un système mixte à données échantillonnées, qui comprend à la fois des signaux à temps continu et à temps discret. Le système de contrôle est un système hybride qui présente un comportement dynamique à la fois continu et discret dont la partie numérique principale est le régulateur, dont une partie est l'ordinateur.

### III.2 Structure de la régulation numérique

L'analyse et la conception des systèmes de commande numériques nécessite des modèles mathématiques comme dans le cas des systèmes de commandes analogiques. Le schéma en bloc d'un système de commande numérique est donné par la Fig III.1 ci-dessous [1] :

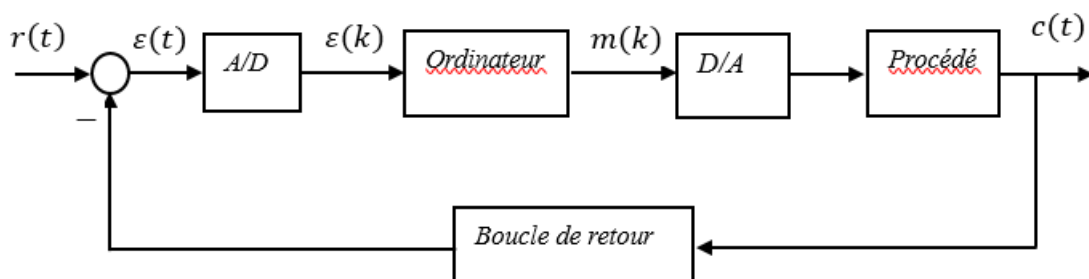
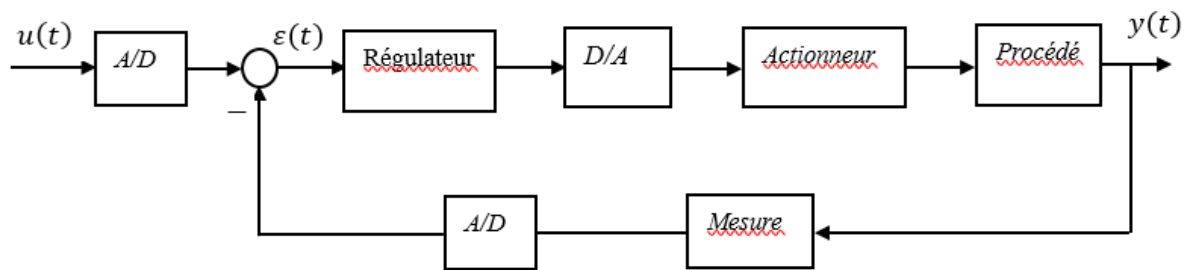


Fig III.1. Digital control system configuration [2].

Le schéma comprend ;

- Un convertisseur Numérique/ Analogique (DAC)
- Un sous-système analogique (procédé, amplificateurs, actionneurs)
- Et un convertisseur Analogique/ Numérique (ADC).

Le *régulateur* calcule le signal d'erreur (ou la différence) et génère un signal d'entrée approprié pour le procédé à contrôler afin de fournir le signal de sortie souhaité. Le régulateur met en œuvre une fonction de transfert, dont la conception peut être réalisée à l'aide d'un algorithme approprié programmé dans l'ordinateur ou à l'aide d'un équipement spécial. L'ordinateur peut être un filtre numérique ou un microprocesseur, selon la complexité et la taille du système. En ajustant de manière appropriée les paramètres du contrôleur, nous sommes en mesure d'intervenir dans la dynamique du système en boucle fermée de manière à ce que le système réponde à ses exigences et spécifications [2].



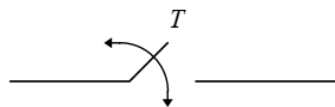
**Fig III.2.** Système de contrôle par ordinateur (CCS) [2].

### III.2.1 Modèle d'un Convertisseur Analogique Numérique CAN ou ADC

On suppose que :

- Les sorties du convertisseur ADC sont exactement égales aux amplitudes de leurs entrées,
- Le convertisseur ADC produit la sortie numérique instantanément,
- L'échantillonnage est parfaitement uniforme.

Donc, le convertisseur ADC peut être modélisé comme un échantillonneur idéal avec la période d'échantillonnage  $T$  comme le montre la Fig III.3 ci-dessous [1] :



**Fig III.3.** Ideal sampler model of an ADC.

### III.2.2 Modèle d'un Convertisseur Numérique Analogique CNA (DAC)

On suppose que :

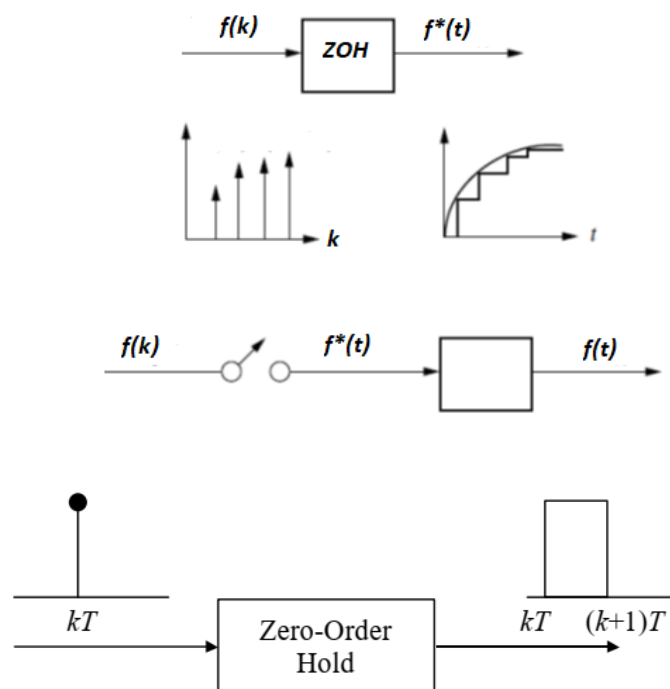
- Les sorties du convertisseur DAC sont exactement égales aux amplitudes de leurs entrées,
- Le convertisseur DAC produit la sortie analogique instantanément,
- Les sorties du convertisseur DAC sont constantes durant chaque période d'échantillonnage,

### III.3 Discrétisation par un bloqueur d'ordre zéro (ZOH)

Un modèle simplifié du convertisseur numérique-analogique (DAC) est représenté à la Fig III.4 ci-dessous. La séquence de nombre réels  $f(k), k = 0, 1, 2, \dots$ , est l'entrée et le signal en temps continu  $f(t), t \geq 0$  est le signal de sortie.  $f(t) = f(k), kT \leq t \leq (k + 1)T$ , est la relation entre l'entrée et la sortie. Chaque échantillon de la séquence peut être traité comme une fonction impulsion de la forme  $f(k) \cdot \delta(t - kT)$ .

Le convertisseur DAC peut être modélisé par un bloqueur d'ordre zéro (ZOH) dont la fonction de transfert est donnée par [1] :

$$H(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \quad \text{III.1}$$



**Fig III.4.** Modèle de convertisseur numérique analogique DAC [1,2].

**Fonction de transfert du ZOH**

L'impulsion de largeur T peut être représentée comme un échelon unité suivi d'un échelon négatif à l'instant T. En utilisant la transformation de Laplace, nous obtenons :

$$TL[\mu(t)] = \frac{1}{p} \tag{III.2}$$

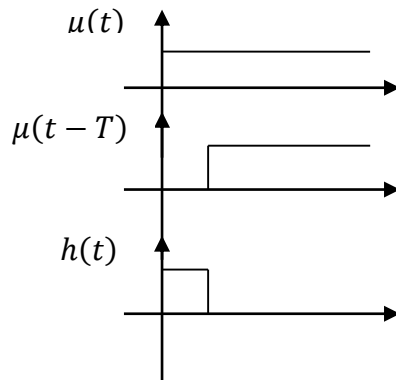
et  $TL[\mu(t - T)] = \frac{e^{-pT}}{p}$  en utilisant la propriété du décalage temporel

La réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre zéro (ZOH) est donnée par :

$$h(t) = \mu(t) - \mu(t - T) \tag{III.3}$$

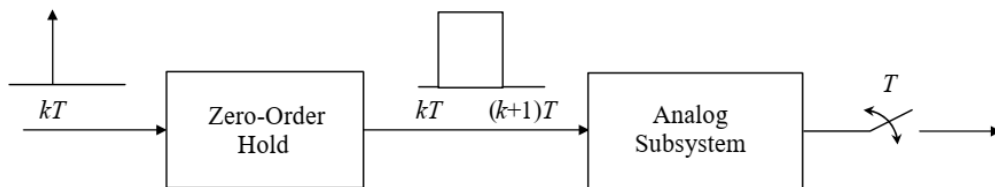
Sa transformée de Laplace est donnée par [1] :

$$h(t) \xrightarrow{TL} G_{ZOH}(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p} \tag{III.4}$$



**Fig III.5.** Exemple d'une impulsion de largeur T.

En faisant l'interconnexion des systèmes ADC, DAC et le sous-système analogique, nous obtenons la Fig III.6 suivante :



**Fig III.6.** Cascade of a DAC, analog subsystem, and ADC [1].

La FT du DAC en cascade avec le sous-système analogique est donnée par [1] :

$$G_{ZA}(p) = G(p).G_{ZOH}(p) = (1 - e^{-pT}) \frac{G(p)}{p} \quad \text{III.5}$$

En utilisant la transformée en Z, on obtient la fonction de transfert du système discrétisé :

$$\Rightarrow G_{ZAS}(z) = (1 - z^{-1}) TZ \left\{ \frac{G(p)}{p} \right\} \quad \text{III.6}$$

$G_{ZAS}(z)$  : représente la FT en z du système en cascade DAC, sous-système analogique et ADC.

### III.4 Fonction de transfert en boucle fermée

La FT BF du système est donnée par :

$$G_{CL}(z) = \frac{C(z).G_{ZAS}(z)}{1 + C(z).G_{ZAS}(z)} \quad \text{III.7}$$

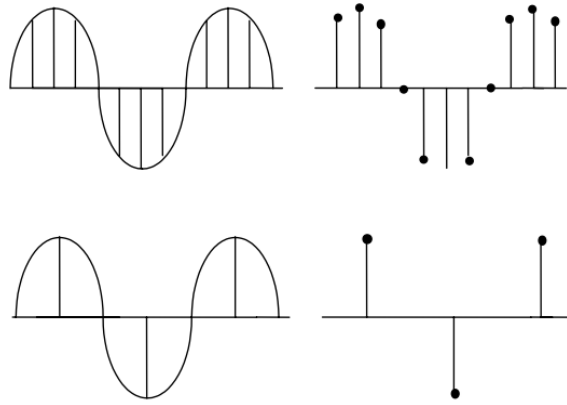
Et l'équation caractéristique de la boucle fermée est donnée par :

$$1 + C(z).G_{ZAS}(z) = 0 \quad \text{III.8}$$

Les racines de cette équation sont les pôles du système en BF qui peuvent être choisis selon les spécifications de la réponse temporelle désirée.

### III.5 Discrétisation et choix de la fréquence d'échantillonnage

La Fig III.7 illustre la discrétisation d'une sinusoïde de fréquence  $f_0$  pour différentes fréquences d'échantillonnage  $f_s$ . On constate que, pour une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 8f_0$ , la nature continue du signal analogique n'est pas altérée dans le signal échantillonné par rapport à l'échantillonnage à une fréquence  $f_s = 2f_0$  [3,6].

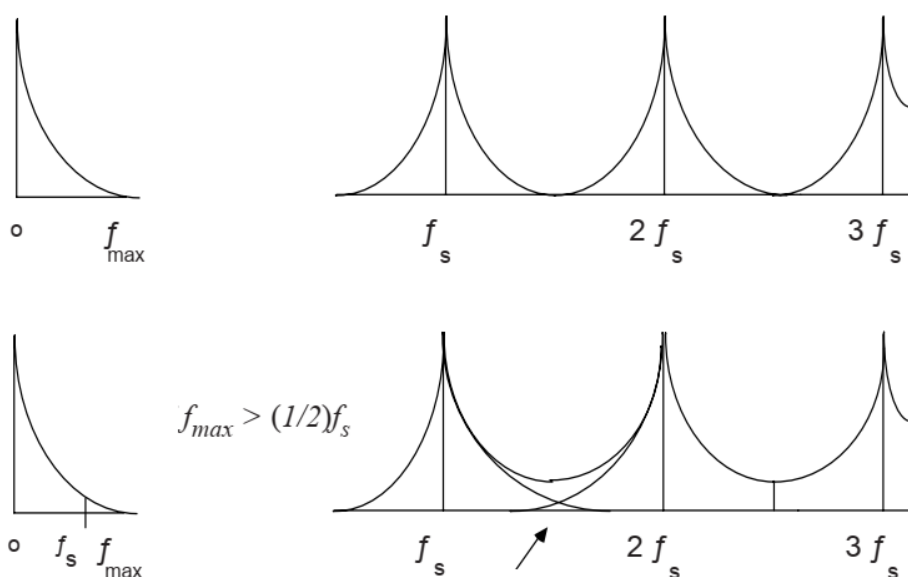


**Fig III.7.** Discretisation d'un signal sinusoïde [6].

Afin de reconstruire un signal continu à partir de la séquence échantillonnée, la fréquence d'échantillonnage doit vérifier la condition (théorème de Nyquist) [3,1] :

$$f_s > 2f_{max} \quad \text{III.9}$$

Où  $f_{max}$  est la fréquence maximale à transmettre. La fréquence  $f_s = 2f_{max}$  est une limite théorique ; en pratique, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage plus élevée. Si la fréquence maximale du signal continu ( $f_{max}$ ) est supérieure à  $(1/2) f_s$ , le phénomène de chevauchement (aliasing) peut être observé. Il correspond à l'apparition de distorsions. La fréquence  $(1/2) f_s$ , qui définit la fréquence maximale ( $f_{max}$ ) admise pour un échantillonnage sans distorsions, est appelée « fréquence de Nyquist » (ou fréquence de Shannon).



**Fig III.8.** Spectre du signal échantillonné [6].

### III.5.1 Choix de la fréquence d'échantillonnage pour les systèmes de commande numérique

Le processus n'est observé et la commande ne peut changer qu'aux instants  $\Delta k$ . Le choix du pas  $\Delta$  est important car :

- Si  $\Delta$  est trop petit, le calculateur corrigera sans arrêt à tout petits coups,
- Si  $\Delta$  est trop grand, le calculateur risque de perdre des informations importantes mais trop rapides ou même ne plus pouvoir commander car les erreurs (sortie-consigne) seront trop importantes.

La fréquence d'échantillonnage des systèmes de commande numériques est choisie en fonction de la largeur de bande souhaitée du système en boucle fermée. La règle utilisée pour choisir la fréquence d'échantillonnage dans les systèmes de commande est la suivante [6] :

$$f_s = (6 \text{ à } 25)f_{cL} \quad \text{III.10}$$

Où

$f_s$  : fréquence d'échantillonnage,

$f_{cL}$  : largeur de bande du système en boucle fermée.

La règle de l'équation ci-dessus est également utilisée en boucle ouverte, lorsqu'il s'agit de choisir la fréquence d'échantillonnage afin d'identifier le modèle à temps discret d'un procédé. Dans ce cas, CL est remplacé par une estimation de la largeur de bande du procédé.

Le tableau donne les périodes d'échantillonnage ( $T_s = 1/f_s$ ) utilisées pour la commande numérique de différents types de procédés.

Type de variable (ou procédé)	Période d'échantillonnage (s)
Débit	1-3
Niveau	5-10
Pression	1-5
Température	10-180
Distillation	10-180
Servo-mécanismes	0.001-0.05
Réacteurs catalytiques	10-45
Cimenteries	20-45

**Tableau III.1.** Choix de la période d'échantillonnage pour les systèmes de commande numérique (valeurs indicatives).

### III.6 Actions correctives en temps discret

#### III.6.1 Action Proportionnelle

L'implémentation numérique de l'action de commande proportionnelle est identique à l'analogique, c'est-à-dire,

$$\mu(t) = K_p \varepsilon(t) \Rightarrow D(p) = K_p \quad \text{III.11}$$

Le cas discret est donné par :

$$\mu_k = K_p \varepsilon_k \Rightarrow D(z) = K_p \quad \text{III.12}$$

L'action de contrôle proportionnelle est toujours présente soit seule, soit liée à l'action de contrôle dérivée ou intégrale.

#### III.6.2 Action Dérivée

Dans les systèmes analogiques l'action dérivée est de la forme :

$$\mu(t) = K_D \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \Rightarrow D(p) = K_D \cdot p \quad \text{III.13}$$

Dans le domaine discret, la dérivée peut être approximée par une équation aux différences, telle que :

$$\mu_k = K_D (\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \Rightarrow D(z) = K_D (1 - z^{-1}) = K_D \frac{z-1}{z} \quad \text{III.14}$$

L'action de contrôle dérivée est utilisée pour améliorer la stabilité du système et la réponse transitoire.

### III.6.3 Action Intégrale

Dans les systèmes analogiques l'action intégrale est de la forme :

$$\mu(t) = K_i \int \varepsilon(t) dt \Rightarrow D(p) = \frac{K_i}{p} \quad \text{III.15}$$

L'intégration numérique est une somme cumulative, représentée par :

$$\mu_k = K_i \varepsilon_k + \mu_{k-1} \Rightarrow D(z) = K_i \frac{z}{z-1} \quad \text{III.16}$$

L'action de contrôle intégrale est utilisée pour améliorer l'erreur statique du système. Cette action affecte souvent la stabilité et la réponse transitoire.

### III.6.4 Régulateur PD

La combinaison des deux actions proportionnelle et dérivée conduit à :

$$K_p + K_D \frac{z-1}{z} = K_D \frac{z-a}{z} \quad \text{III.17}$$

Correspondant à un compensateur.

### III.6.5 Régulateur PI

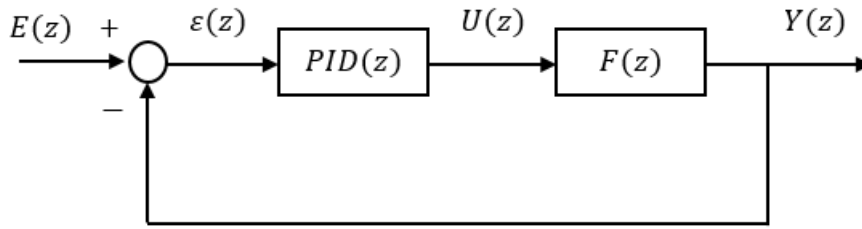
L'action proportionnelle est ajoutée à l'action intégrale donne :

$$K_p + K_i \frac{z}{z-1} = K \frac{z-a}{z-1} \quad \text{III.18}$$

Qui possède un pôle à  $Z=1$ , correspondant à l'intégration et un zéro à l'axe réel positif proche de l'origine. Ce pôle améliore le comportement statique, mais affecte la stabilité et la réponse transitoire.

### III.6.6 Régulation PID numérique

La régulation d'un PID discret correspond à la Fig III.9 suivante :



**Fig III.9.** Régulateur PID discret.

En continu, la sortie d'un PID s'écrit [2,4] :

$$\mu(t) = K_p (\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int \varepsilon(\tau) d\tau + T_D \frac{d}{dt} \varepsilon(t)) \quad \text{III.19}$$

L'équivalent en numérique s'écrit alors :

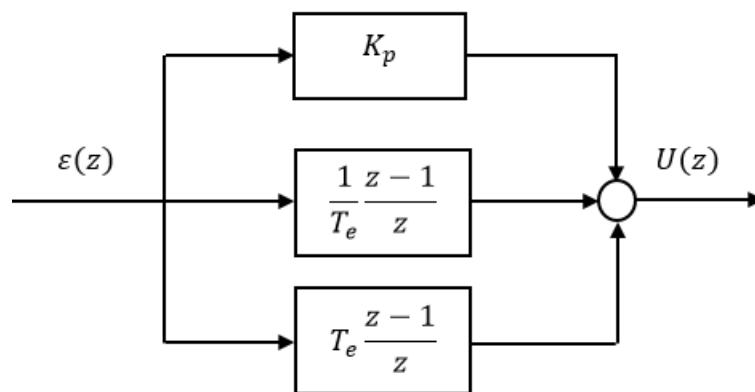
$$\begin{aligned} \mu_k &= K_p \left( \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \sum_{j=0}^k \varepsilon_j + T_D \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1})}{T_e} \right) \quad \text{III.20} \\ \mu_{k+1} - \mu_k &= K_p \left( \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k + \frac{T_e}{T_i} \varepsilon_{k+1} + T_D \frac{(\varepsilon_{k+1} - 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1})}{T_e} \right) \\ (z-1)U(z) &= K_p \left( z-1 + \frac{T_e}{T_i} z + T_D \frac{(z-2+z^{-1})}{T_e} \right) \varepsilon(z) \end{aligned}$$

D'où la transmittance du PID numérique :

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p + K_i T_e \frac{z}{(z-1)} + \frac{K_D (z-1)}{T_e z} \quad \text{III.21}$$

Avec :  $K_i = \frac{K_p}{T_i}$ ,  $K_D = K_p \cdot T_D$

Le schéma fonctionnel de ce régulateur est le suivant :

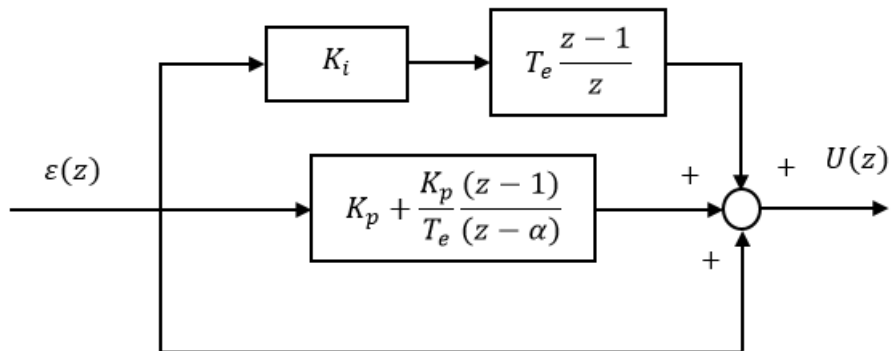


**Fig III.10.** Schéma d'un correcteur PID numérique.

Ce correcteur reste "pédagogique", dans une application industrielle on préférera d'autres formes.

Dans les applications industrielles, on préférera la forme suivante :

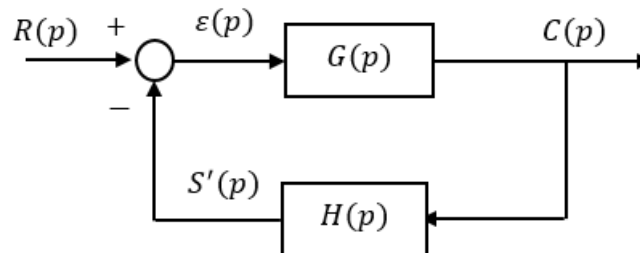
$$U(z) = K_i T_e \frac{z}{(z-1)} \cdot \varepsilon(z) - \left[ K_p + \frac{K_D (z-1)}{T_e (z-\alpha)} \right] Y(z) \quad \text{III.22}$$



**Fig III.11.** Schéma d'un correcteur PID numérique industriel.

### III.7 Critères de performance d'une régulation en boucle fermée

Soit le système à réguler en boucle fermée de la Fig III.12 dont on lui applique à un signal de consigne  $e(t)$  en échelon [3].



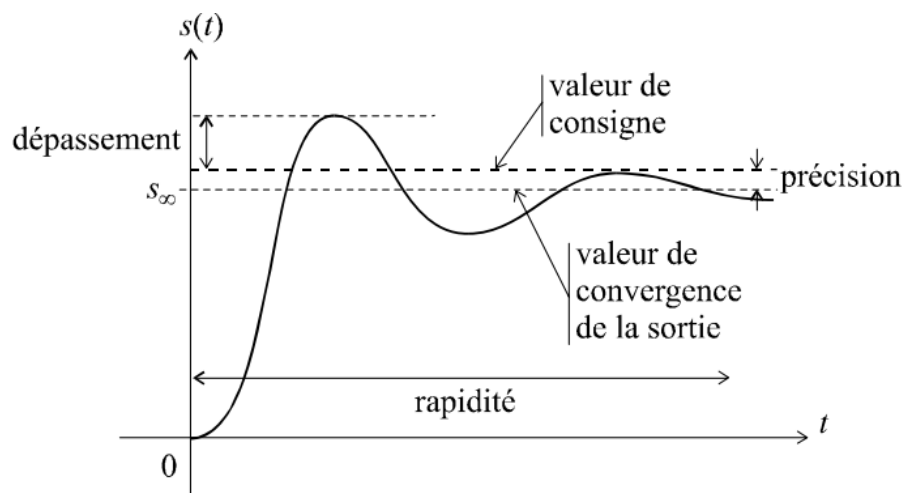
**Fig III.12.** Schéma général d'une boucle de régulation.

Les critères permettant de qualifier et quantifier les performances d'un système régulé sont :

- La stabilité,
- La précision et
- La rapidité.

La régulation idéale est un système ayant une bonne stabilité et bonne précision, le régime transitoire doit être rapide et bien amorti. Ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles. Si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité. L'objectif de la régulation est de réaliser une commande permettant de respecter au mieux ces différents critères.

La Fig III.13 qui présente une réponse typique d'un système asservi commandé par une consigne en échelon, nous permet de localiser, sur la courbe de cette réponse, ces différentes performances [3].



**Fig III.13.** Réponse d'un système à une consigne en échelon [3].

### III.7.1 Analyse de stabilité des systèmes de commande numériques

- Un système est stable si à une variation bornée du signal d'entrée correspond une variation bornée du signal de sortie. Une variation d'un signal est dite bornée lorsqu'elle est constante en régime permanent [7].
- Un système est stable si sa réponse libre (équation différentielle sans second membre) tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.
- La condition générale de stabilité est donc que les pôles de la fonction de transfert globale du système soient à partie réelle strictement négative.

Dans le plan  $p$ , la région de stabilité est le demi-plan gauche. Si la fonction de transfert  $G(p)$  est transformée en fonction de transfert échantillonnée  $G(Z)$ , la région de stabilité dans le plan  $Z$  peut être évaluée en utilisant la définition [2] :

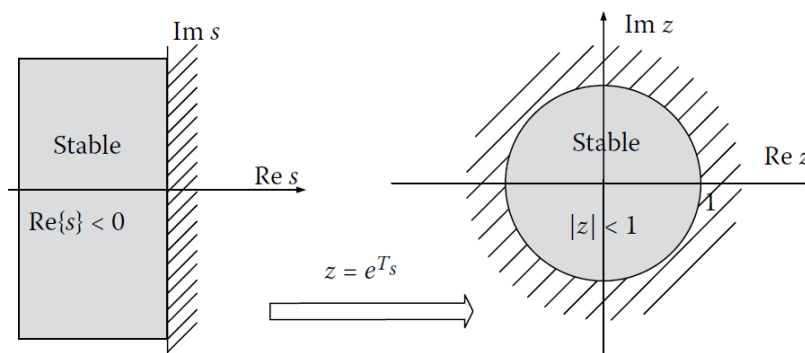
$$Z = e^{pT} \quad \text{III.23}$$

Soit :

$$p = \sigma + j \omega$$

$$\Rightarrow Z = e^{pT} = e^{(\sigma + j \omega)T} = e^{\sigma T} \cdot \arg(\omega T) \quad \text{III.24}$$

D'où, le système de commande numérique est stable si tous les pôles de la FT en boucle fermée se trouvent à l'intérieur du cercle unité dans le plan Z. Si au moins un pôle est à l'extérieur du cercle unité et/ou les pôles sont multiples sur le cercle unité, alors le système est instable. Si les pôles d'ordre un se trouvent sur le cercle unité et les autres pôles sont à l'intérieur, le système est dit marginalement stable.



**Fig III.14.** Transformation des régions dans le plan p vers le plan Z [2].

Soit la fonction de transfert en boucle fermée du système suivante :

$$\frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{G(Z)}{1+GH(Z)} \quad \text{III.25}$$

La stabilité de ce système peut être déterminée par la position des pôles en BF dans le plan Z, ou les racines de l'équation caractéristique [2] :

$$P(Z) = 1 + GH(Z) = 0 \quad \text{III.26}$$

1. Pour un système stable : les pôles de la BF ou les racines de l'équation caractéristique doivent être à l'intérieur du cercle unité dans le plan Z.
2. Si le pôle se trouve à Z=1, le système est dit marginalement stable. En outre, le système devient marginalement stable, si une paire de pôles conjugués complexes se trouvent à l'intérieur du cercle unité dans le plan Z.
3. Les zéros de la BF n'affectent pas la stabilité et peuvent être placés n'importe où dans le plan Z.

**Exemple** : soit l'équation caractéristique suivante ;  $EC = Z^2 - Z + 0.6321 = 0$

Les racines de l'équation caractéristique sont :  $Z_1 = 0.5 + j0.6181$  et  $Z_2 = 0.5 - j0.6181$

D'où,  $|Z_1| = |Z_2| < 1$

Le système est stable.

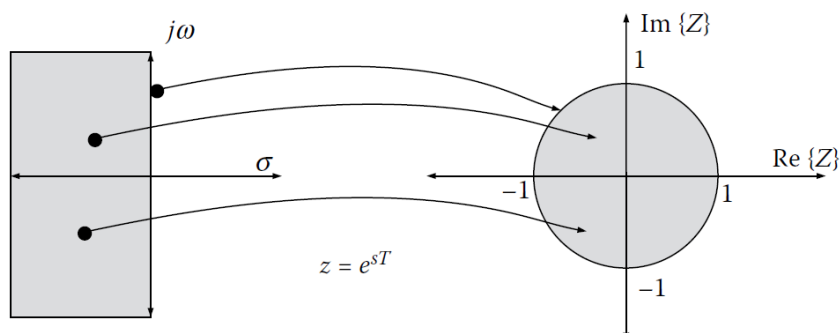
### III.7.1.1 Critère de stabilité de Routh en utilisant la transformation bilinéaire

Le critère de stabilité de Routh est une méthode utilisée pour déterminer si les racines du polynôme sont dans le demi-plan gauche complexe.

D'après la transformation bilinéaire :

$$\omega = \frac{z+1}{z-1} \Rightarrow z = \frac{\omega+1}{\omega-1} \quad \text{III.27}$$

La Fig III.15 suivante montre le passage du plan Z au plan W.



**Fig III.15.** Relation entre le demi-plan gauche p avec le cercle unité dans le plan Z [2].

Donc, le demi-plan gauche du plan p correspond à l'intérieur du cercle unité dans le plan Z.

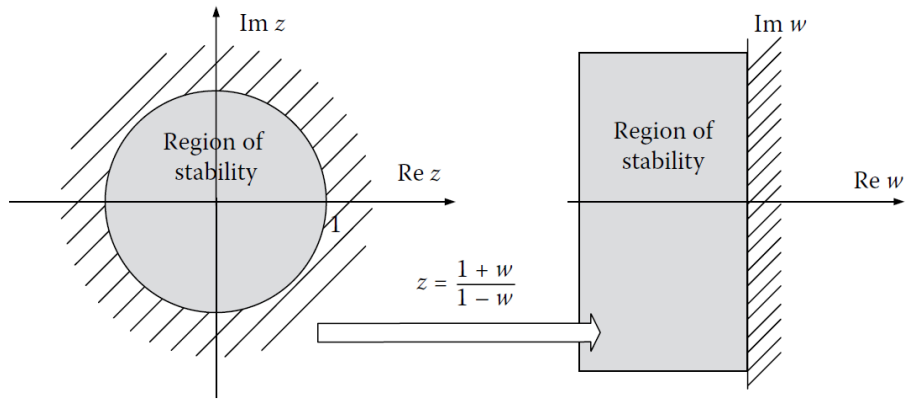
Soit l'équation caractéristique :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_0 = 0 \quad \text{III.28}$$

En utilisant la transformation bilinéaire, l'EC devient [2] :

$$Q(\omega) = b_0 \omega^n + b_1 \omega^{n-1} + \dots + b_{n-1} \omega + b_0 = 0 \quad \text{III.29}$$

Donc, on transforme  $P(Z) = 0$  en  $Q(Z) = 0$  et on étudie la stabilité du système de commande numérique en utilisant le critère de stabilité de Routh comme dans le cas analogique.



**Fig III.16.** Domaine Z et W selon la transformation bilinéaire [2].

### III.7.1.2 Critère de stabilité de Jury

Soit l'équation caractéristique du système échantillonné suivante :

$$\alpha(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z + \alpha_0 = 0 \quad \text{III.30}$$

La table de Jury est formée comme suit [2] :

$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	...	$z^{n-1}$	$z^{n-1}$	$z^n$
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	...	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_2$	...	$a_1$	$a_0$	
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	$b_n$
$b_n$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	...	$b_2$	$b_1$	$b_0$
$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...			
$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$	...			
$q_0$	$q_1$	$q_2$					

**Tableau III.2.** Table de Jury.

Les éléments des 3 lignes jusqu'à  $2n-3$  sont obtenus par les déterminants suivants [2] :

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2$$

$$d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-2-k} \\ c_{n-2} & c_k \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-3$$

$$q_0 = \begin{vmatrix} p_0 & p_3 \\ p_3 & p_0 \end{vmatrix}, \quad q_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}$$

### ***Critère de stabilité de Jury***

Un système avec EC  $P(Z)=0$  est stable si toutes les conditions ci-dessous sont satisfaites [2] :

1.  $|a_n| < |a_0|$
2.  $P(z)|_{z=1} > 0$
3.  $P(z)|_{z=-1} \begin{cases} > 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ < 0 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$
4.  $|b_{n-1}| > |b_0|$
5.  $|c_{n-1}| > |c_0|$
6.  $\cdot$
7.  $|q_2| > |q_0|$

### **III.7.2 Précision du système de régulation corrigé**

Soit le système de commande discret défini par :

$$\frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{b_0 Z^n + b_1 Z^{n-1} + \dots + b_n}{Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_n} \quad \text{III.31}$$

Où,  $C(Z)$  : est la TZ de l'entrée,

$R(Z)$  : est la TZ de la sortie.

Soit le système de commande analogique de FT en boucle ouverte défini par :

$$G(p)H(p) = \frac{K(T_a p+1)(T_b p+1)\dots(T_m p+1)}{p^N (T_1 p+1)(T_2 p+1)\dots(T_p p+1)} \quad \text{III.32}$$

Le terme  $p^N$  représente le nombre de pôles à l'origine.

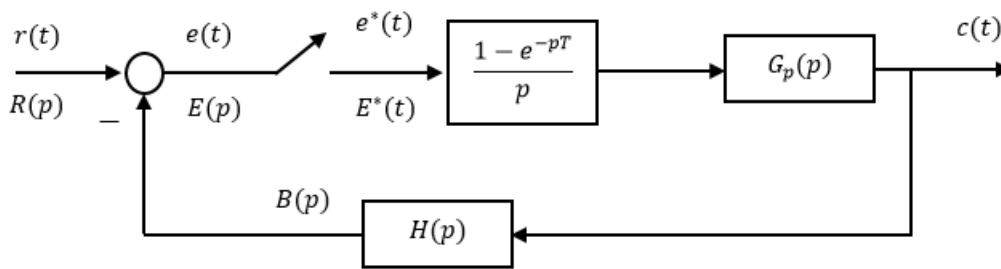
Il est souvent classifié le système en fonction du nombre d'intégrateurs dans la fonction de transfert en boucle ouverte. Un système est dit de type 0, type 1, type 2, ... si  $N=0$ ,  $N=1$ ,  $N=2$ , ..., respectivement.

Supposons la FTBO est donnée par l'équation suivante :

$$FTBO = \frac{1 \cdot B(Z)}{(Z-1)^N A(Z)} = \frac{k \cdot \prod^m (Z - Z_i)}{(Z-1)^N \prod^p (Z - Z_j)}, \quad Z_i, Z_j \neq 1 \quad \text{III.33}$$

Où  $\frac{B(Z)}{A(Z)}$  ne comprend ni un pôle ni un zéro à  $Z=1$ . Le système peut être classifié de type 0, 1 ou 2 en fonction de  $N=0$ , 1 ou 2, respectivement.

Soit le système de commande numérique de la Fig III.17 ci-dessous :



**Fig III.17.** Système de commande numérique [2].

Nous supposons que le système est stable, donc le théorème de la valeur finale peut être appliqué pour obtenir les valeurs de l'état statique.

On a :

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad \text{III.34}$$

L'erreur statique aux instants d'échantillonnage est donnée par [2] :

$$e_{ss}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) \quad \text{III.35}$$

D'après le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) E(z) \quad \text{III.36}$$

Avec :

$$E(z) = \frac{R(z)}{1+TZ[G(p).H(p)]} \quad \text{III.37}$$

Et

$$GH(z) = TZ[GH(p)] = (1 - z^{-1})TZ \left[ \frac{G_s(p).H(p)}{p} \right] \quad \text{III.38}$$

D'où, l'erreur statique est donnée par :

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{R(z)}{1+TZ[G(p).H(p)]} \quad \text{III.39}$$

### III.7.2.1 Constante d'erreur statique de position

Soit la transformée en Z de l'entrée échelon d'amplitude A :

$$R(z) = \frac{Az}{z-1} \quad \text{III.40}$$

On remplace l'équation (III.36) dans l'expression (III.39), on obtient :

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{A}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)} = \frac{A}{1+k_p} \quad \text{III.41}$$

Avec :

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \quad \text{III.41}$$

$k_p$  est la constante d'erreur de position.

D'où, l'erreur statique en réponse à une entrée échelon peut s'écrire sous la forme :

$$e_{ss}^* = \frac{A}{1+k_p} \quad \text{III.42}$$

$e_{ss}^* = 0$  lorsque  $k_p \rightarrow \infty$ , ce qui nécessite que GH(Z) possède au moins un pôle à Z=1.

### III.7.2.2 Constante d'erreur statique de vitesse

Soit la transformée en Z de l'entrée en rampe d'amplitude A définie par :

$$R(z) = \frac{ATz}{(z-1)^2} \quad \text{III.43}$$

On remplace l'équation (III.43) dans l'expression (III.39), on obtient :

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{AT}{(z-1)(1+GH(z))} \quad \text{III.44}$$

$$e_{ss}^* = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1/T) GH(z)} = \frac{A}{k_p} \quad \text{III.45}$$

Où,  $k_v$  est la constante de vitesse définie par [2,15] :

$$k_p = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1/T) GH(z) \quad \text{III.46}$$

$e_{ss}^* = 0$  lorsque  $k_v \rightarrow \infty$ , ce qui nécessite que GH(Z) possède un pôle double à Z=1.

### III.7.2.3 Constante d'erreur d'accélération

Pour une accélération d'amplitude A, la TZ est donnée par :

$$R(z) = \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \quad \text{III.47}$$

$$e_{ss}^* = \frac{AT^2}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z+1}{(z-1)^2 (1+GH(z))} \quad \text{III.48}$$

$$e_{ss}^* = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1/T)^2 GH(z)} = \frac{A}{k_a} \quad \text{III.49}$$

Où,  $k_a$  est la constante d'accélération définie par [2,17] :

$$k_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1/T)^2 GH(z) \quad \text{III.50}$$

$e_{ss}^* = 0$  lorsque  $k_a \rightarrow \infty$ , ce qui nécessite que GH(z) possède un pôle triple à z=1.

## III.7.3 Rapidité des systèmes régulés

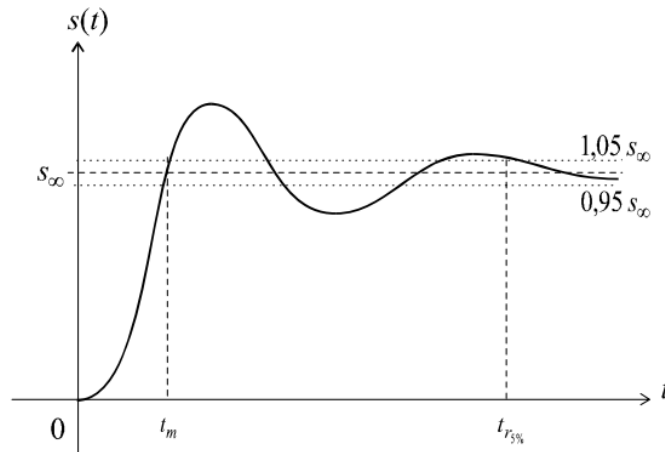
### III.7.3.1 Temps de réponse

La rapidité caractérise le temps mis par le système pour que la sortie atteigne sa nouvelle valeur. On définit, pour caractériser la rapidité, le temps de réponse à 5% ( $t_{5\%}$ ), c'est le temps que met le système pour rester dans la bande des 5% de sa valeur finale [5,15].

$$\text{Rapidité} = \text{temps de réponse } t_r$$

$t_r$  : correspond au temps mis pour atteindre 95 % ou 105% de la valeur finale.

Le système régulé est d'autant plus rapide que le temps de réponse à 5% est court.



**Fig III.18.** Paramètres de rapidité en boucle fermée [5].

### III.7.3.2 Temps de montée

La rapidité s'exprime aussi parfois par le temps de montée  $t_m$  (en anglais, rise time) qui est la durée que met la réponse du signal de sortie pour passer de 10% à 90% de sa valeur finale  $S_\infty$  [15].

### III.8 Avantages des systèmes de commande numérique

La commande assistée par ordinateur présente des avantages significatifs par rapport aux régulateurs analogiques classiques. Certains de ces avantages sont [2] :

- Grande flexibilité dans la modification des caractéristiques du régulateur. En effet, ces caractéristiques peuvent être facilement modifiées en modifiant le programme. En revanche, dans les systèmes de contrôle analogiques, la modification des caractéristiques du contrôleur est généralement une tâche non triviale et assez coûteuse car il faut remplacer des éléments et des dispositifs.
- Le traitement des données est facile. Des calculs complexes peuvent être effectués facilement et rapidement. Les contrôleurs analogiques n'ont pas cette capacité.
- Ils présentent un meilleur comportement technique que les systèmes de contrôle analogiques en termes de fiabilité et de sensibilité aux perturbations.
- Ils ont une meilleure stabilité, un poids physique plus faible et, dans de nombreux cas, un coût de mise en œuvre plus faible.

Néanmoins, la commande assistée par ordinateur présente certains inconvénients par rapport aux systèmes de commande analogiques, tels que [2] :

- Les erreurs introduites lors du processus d'échantillonnage des systèmes continus et de la quantification des signaux à temps discret.
- La difficulté de la conception d'un système de contrôle numérique, en particulier si le processus est complexe. Dans la commande numérique d'un processus complexe, le concepteur doit avoir une bonne connaissance du processus à commander et doit être en mesure d'obtenir le modèle mathématique correspondant. Le concepteur doit également avoir une connaissance relativement bonne des systèmes informatiques et de la théorie moderne du contrôle.

La technique de contrôle assisté par ordinateur a été appliquée à une variété de systèmes et de processus tels que le contrôle industriel, les systèmes de télécommunication, les réseaux sans fil/câblés, les réacteurs nucléaires et chimiques, les systèmes de transport terrestre, maritime et aérien, les systèmes d'armes, le contrôle de systèmes éloignés, la robotique, les applications spatiales, la biotechnologie, ...etc.

## CHIV : Éléments de régulation numérique

### IV.1 Introduction

Soit un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert  $G(p)$  de la Fig IV.1. Ce type de modèles est bien connu et la question qui pourrait posée s'il existe un système échantillonné possédant les mêmes caractéristiques, c'est-à-dire, le même comportement temporel et le même comportement fréquentiel [3].



**Fig IV.1.** Recherche d'une équivalence temps continu – temps discret.

Le système échantillonné  $G(z)$  sera considéré équivalent au système  $G(p)$  si, soumis à un signal d'entrée  $E(z)$  correspondant à l'échantillonnage du signal continu  $e(t)$  représenté par  $E(p)$ , il délivre à sa sortie un signal  $S(z)$  correspondant à l'échantillonnage du signal  $s(t)$  qui aurait été délivré par le système  $G(p)$ .

### IV.2 Transposition des correcteurs analogiques

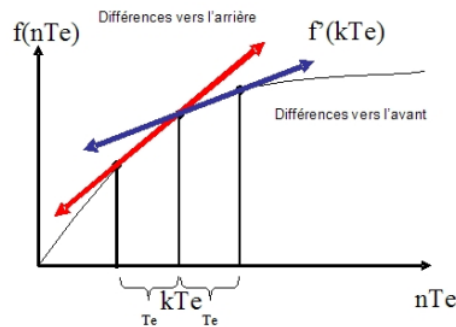
Afin de pouvoir importer un régulateur PID analogique dans un calculateur numérique, il faut le transposer (numériser) en utilisant les différentes techniques de discrétisation.

Les régulateurs discrets élaborent une grandeur de commande discrète  $u(k)$  en fonction de l'écart de réglage discret  $e(k)$  du système à commander. Selon la complexité du régulateur, la grandeur de commande à l'instant  $k$  est formée en fonction de la valeur de l'écart à cet instant, mais aussi instants précédents  $k - 1, k - 2, \dots$  etc.

#### IV.2.1 Les différentes approximations de la dérivée

Une fonction de transfert en temps continu est issue d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette équation est formée de dérivées successives des signaux d'entrée et de sortie. Un des moyens les plus simples d'effectuer le lien entre une représentation en temps continu et en temps discret est de considérer que la variation  $dx/dt$  en temps continu, ce qui correspond à la variation du signal entre deux instants d'échantillonnage :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{T} \quad \text{IV.1}$$



**Fig IV.2.** Principe de calcul de la dérivée par différences finies : différences vers l'avant et vers l'arrière.

#### IV.2.1.1 Discrétisation arrière

L'approximation de la dérivée par discrétisation arrière est la suivante [1] :

$$\dot{y}(k) \cong \frac{1}{T} [y(k) - y(k-1)] \quad \text{IV.2}$$

L'approximation de la dérivée seconde peut être obtenue comme suit :

$$\ddot{y}(k) \cong \frac{1}{T} [\dot{y}(k) - \dot{y}(k-1)] \quad \text{IV.3}$$

$$\begin{aligned} &\cong \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{T} [y(k) - y(k-1)] - \frac{1}{T} [y(k-1) - y(k-2)] \right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)\} \quad \text{IV.4} \end{aligned}$$

Les approximations des dérivées d'ordre supérieur peuvent être obtenues de la même manière. On peut également considérer la transformée de Laplace de la dérivée et la transformée en  $z$  de la différence dans l'équation IV. On obtient alors la substitution suivante :

$$p \leftrightarrow \frac{(1-z^{-1})}{T} = \frac{z-1}{z.T} \quad \text{IV.5}$$

Donc la fonction de transfert discrète s'obtient comme :

$$G(Z) = G(p) \Big|_{p=\frac{z-1}{z.T}} \quad \text{IV.6}$$

est l'équivalence entre la FT continue en  $p$  et sa FT échantillonnée en  $Z$ .

#### IV.2.1.2 Discrétisation avant

L'approximation de la dérivée par discrétisation avant est la suivante [1] :

$$\dot{y}(k) \cong \frac{1}{T} [y(k+1) - y(k)] \quad \text{IV.7}$$

L'approximation de la dérivée seconde peut être obtenue en appliquant la dérivée deux fois, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \ddot{y}(k) &\cong \frac{1}{T} [\dot{y}(k+1) - \dot{y}(k)] && \text{IV.8} \\ &\cong \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{T} [y(k+2) - y(k+1)] - \frac{1}{T} [y(k+1) - y(k)] \right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \{y(k+2) - 2y(k+1) + y(k)\} \end{aligned}$$

Les approximations des dérivées d'ordre supérieur peuvent être obtenues de la même manière. On peut également considérer la transformée de Laplace de la dérivée et la transformée en  $z$  de la différence dans l'équation IV. On obtient alors la correspondance suivante :

$$p Y(p) \leftrightarrow \frac{(z-1)}{T} Y(z) \quad \text{IV.9}$$

Par conséquent, la transformation directe d'une fonction de transfert  $p$  en une fonction de transfert  $z$  est possible en utilisant la substitution suivante :

$$p \leftrightarrow \frac{z-1}{T} \quad \text{IV.10}$$

Donc la fonction de transfert discrète s'obtient comme suit :

$$G(Z) = G(p) \Big|_{p=\frac{z-1}{T_e}} \quad \text{IV.11}$$

#### IV.2.2 Transformation bilinéaire (par approximations de Tustin)

L'équivalence à l'intégration, appelée également transformation bilinéaire propose une correspondance plus précise que l'équivalence à la dérivation. La dérivée numérique est proche de la moyenne des dérivées au point considéré et au point précédent. La relation peut être obtenue à partir de l'égalité  $z = e^{sT}$  en utilisant l'approximation du premier ordre [1] :

$$p = \frac{1}{T} \ln(z) \cong \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad \text{IV.12}$$

Cela correspond à l'approximation :

$$p \leftrightarrow \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad \text{IV.13}$$

Donc la fonction de transfert discrète s'obtient comme suit :

$$G(Z) = G(p) \Big|_{p=\frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)} \quad \text{IV.14}$$

### IV.3 Réglages de Ziegler-Nichols

Il existe un grand nombre de méthodes pour régler un contrôleur PID. Les plus populaires sont la méthode de la courbe de réaction et la méthode de l'instabilité [18]. Ces deux méthodes sont appelées méthode de réglage Ziegler-Nichols. Par conséquent, comme le cas continu il faut soumettre le système discret à l'un des deux essais : en boucle ouverte (BO) et en boucle fermée (BF). La forme du PID utilisé est :

$$U(z) = K_i T_e \frac{z}{(z-1)} \cdot \varepsilon(z) - \left[ K_p + \frac{K_D (z-1)}{T_e z - \alpha} \right] Y(z) \quad \text{PI ou PID} \quad \text{IV.15}$$

$$U(z) = K_p \cdot \varepsilon(z) \quad \text{P} \quad \text{IV.16}$$

Où les équations récurrentes sont données par :

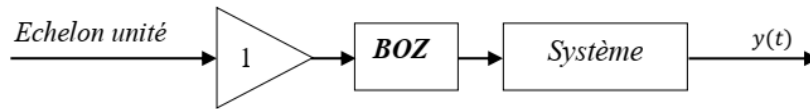
$$\mu_k = \mu_{k+1} + K_i T_e (y_k^c - y_k) - K_p T_e (y_{k-1} - y_k) - \frac{K_D}{T_e} (y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}) \quad \text{PI ou PID}$$

$$\mu_k = K_p T_e (y_k^c - y_k) \quad \text{P}$$

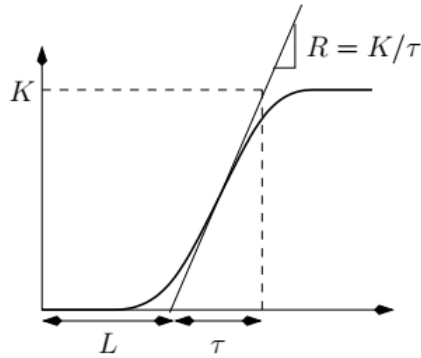
Comme pour la méthode de Ziegler-Nichols, il faut alors soumettre le système à l'un des deux essais :

#### IV.3.1 Essai en boucle ouverte (BO) : Méthode de la réponse indicielle

Nous présenterons d'abord la méthode de la courbe de réaction. On applique une entrée en échelon unitaire à un système stable et on enregistre le délai après lequel le système commence à réagir ( $L$ ), le gain en régime permanent ( $K$ ) et le temps nécessaire à la sortie pour atteindre le régime permanent ( $\tau$ ). Cette méthode est connue sous le nom de méthode de réponse transitoire ou méthode de la courbe de réaction [16,17].



a)



b)

**Fig IV.3.** a) Essai de Ziegler-Nichols en boucle ouverte, b) Réponse indicielle du système en boucle ouverte.

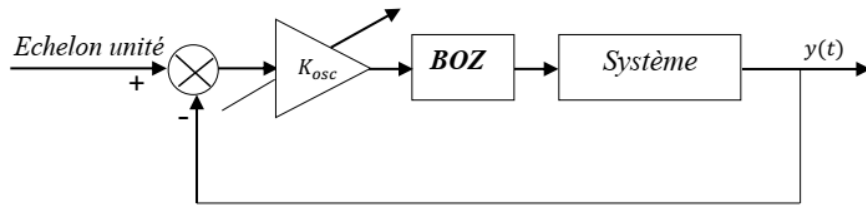
Le tableau suivant montre les expressions empiriques des paramètres des régulateurs P/PI/PID numériques proposées par *Ziegler-Nichols* en boucle ouverte [16,17] :

	$K$	$\tau_i$	$\tau_d$
P	$1/RL$		
PI	$0.9/RL$	$3L$	
PID	$1.2/RL$	$2L$	$0.5L$

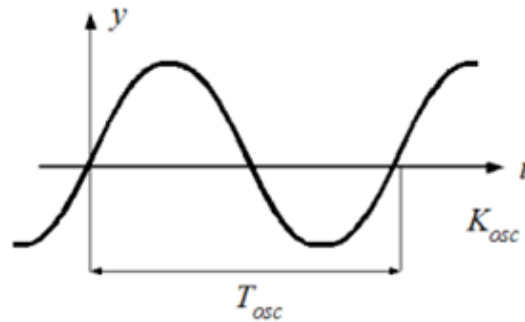
**Tableau IV.1.** Paramètres des correcteurs P/PI/PID numériques proposés par l'essai de *Ziegler-Nichols* en boucle ouverte (méthode de courbe de réaction).

### IV.3.2 Essai en boucle fermée (BF) : Phénomène de pompage

Nous allons maintenant résumer la méthode de réglage de l'instabilité de Ziegler-Nichols. On place le système en boucle fermée avec un régulateur proportionnel dont le gain  $K$  est augmenté progressivement jusqu'à  $K_{osc}$  valeur du gain pour laquelle on obtient une oscillation entretenue de période  $T_{osc}$ . Ensuite, les réglages du PID sont ceux indiqués dans le tableau IV.2. C'est ce qu'on appelle la méthode d'instabilité de Ziegler-Nichols [16,17].



a)



b)

**Fig IV.4** Essai de *Ziegler-Nichols* en boucle fermée, b) Régime oscillant du système en boucle fermée.

Les paramètres de réglage des contrôleurs P/PI/PID numériques en fonction des paramètres relevés sur le système en boucle fermée (BF), sont montrés dans le tableau suivant [16,17] :

	$K$	$\tau_i$	$\tau_d$
P	$0.5K_{osc}$		
PI	$0.45K_{osc}$	$T_{osc}/1.2$	
PID	$0.6K_{osc}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/8$

**Tableau IV.2.** Paramètres de correcteurs P/PI/PID numériques proposés par l'essai de *Ziegler-Nichols* en boucle fermée (méthode de l'instabilité).

#### IV.4 Compensateurs numériques à avance (retard) de phase

La compensation de l'avance de phase a approximativement le même comportement que le régulateur PD et elle est appliquée aux systèmes de commande qui ont des caractéristiques satisfaisantes en régime permanent mais dont la réponse transitoire n'est pas satisfaisante et doit être améliorée [2].

La compensation du retard de phase a approximativement le même comportement que le régulateur PI et elle est appliquée aux systèmes de commande qui présentent des

caractéristiques satisfaisantes en réponse transitoire, mais dont le régime permanent ne présente pas de caractéristiques satisfaisantes et nécessite des améliorations.

Considérons un compensateur à avance de phase analogique dont la fonction de transfert est donnée par [2] :

$$C(p) = \frac{p+a}{p+b} \quad \text{IV.17}$$

Le cas où  $b > a > 0$  donne lieu à un compensateur à avance de phase et  $a > b > 0$  donne lieu à un compensateur à retard de phase.

En utilisant la transformée en  $z$  de  $C(p)$ , nous obtenons la fonction de transfert du compensateur numérique à avance/ retard de phase comme suit :

$$\begin{aligned} C(z) &= TZ \left[ \frac{p+a}{p+b} \right] = TZ \left[ 1 + \frac{a-b}{p+b} \right] \\ &= TZ(\delta(t) + (a-b)e^{-bt}) \end{aligned} \quad \text{IV.18}$$

$$\Rightarrow C(z) = (1 + a - b) \frac{z - e^{-bt}/1+a-b}{z - e^{-bt}} \quad \text{IV.19}$$

Par conséquent,  $C(z)$  possède un seul pôle et un zéro, qui sont de la forme de :

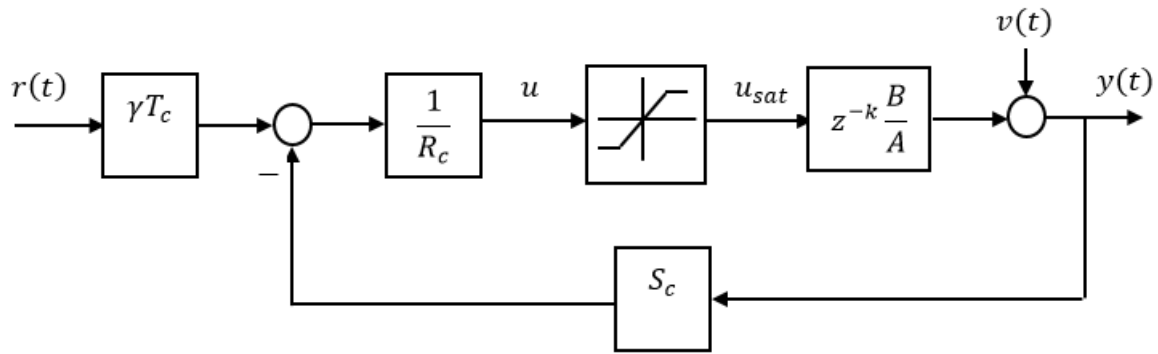
$$C(z) = K \frac{z - z_0}{z - z_p} \quad \text{IV.20}$$

Pour les compensateurs à avance de phase, on a :  $z_0 > z_p$

#### IV.5 Régulateur anti-windup

Il arrive que des limites soient imposées à l'action de la commande. Cela peut être fait du point de vue de la sécurité. Cela peut également se produire lorsque l'actionneur sature. Un schéma d'un régulateur 2-DOF avec limiteur est illustré à la Fig IV.5 [16].

Il est clair que si le régulateur n'est pas autorisé à fonctionner librement, les performances peuvent se détériorer. Il peut y avoir des difficultés supplémentaires. Si la sortie d'un bloc de contrôle en mode intégral est limitée par un limiteur, le contrôleur doit en être informé, le contrôleur doit en être informé. Si ce n'est pas le cas, le contrôleur n'en aura aucune idée de la saturation et, par conséquent, augmenterait encore sa production. Cette situation est connue sous le nom 'windup'.



**Fig IV.5.** Régulateur 2-DOF avec limitation de l'effort de contrôle. Jusqu'à une certaine valeur, la sortie  $u$  du régulateur est identique à l'entrée  $usat$  du procédé. Au-delà,  $usat$  est différent de  $u$  [16].

Le problème windup de l'intégrateur, s'il n'est pas corrigé, la sortie du régulateur  $u$  peut être très différente de l'effort réel  $usat$  qui entre dans le procédé. Supposons maintenant que le signe de l'effort de régulation doit être modifié. Étant donné que l'amplitude de  $u$  est beaucoup plus importante que celle de  $usat$ , le changement de signe pourrait prendre beaucoup de temps. Par conséquent,  $usat$  continuerait à se situer à la mauvaise valeur maximale.

Il convient de noter que la réduction des performances due à la présence de limiteurs et l'intégrateur en windup sont deux choses différentes. La première est inévitable, car les performances en présence de limiteurs ne peuvent pas être les mêmes que celles sans limiteurs. Par ailleurs, l'intégrateur en windup est un problème qui peut être évité. La situation idéale est que  $u$  ne devrait pas dépasser  $usat$ . Cela permettra de changer le signe de  $u$  rapidement, en cas de besoins. La façon la plus évidente de gérer la remontée de l'intégrateur est de comparer  $u$  et  $usat$  et, en cas de différence, de maintenir  $u$  à la valeur de  $usat$ .

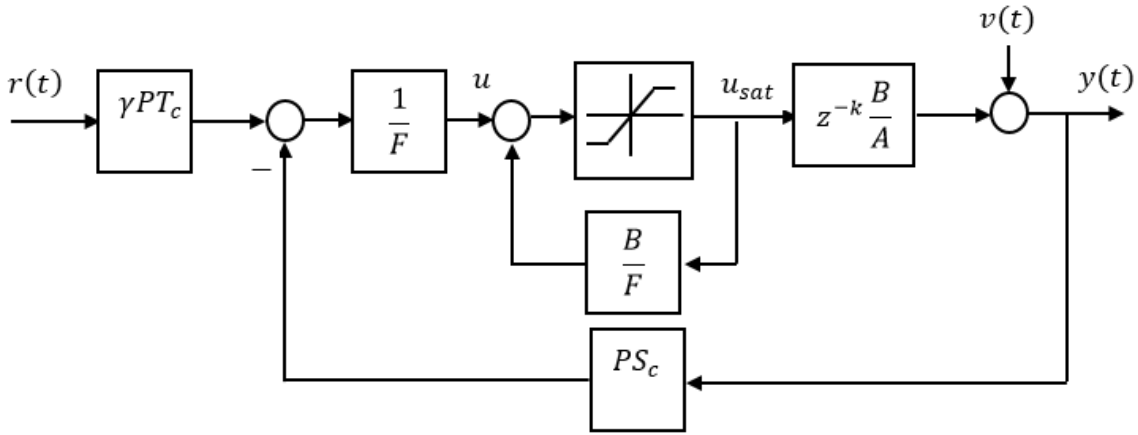
Nous présentons maintenant une approche de rétroaction pour résoudre ce problème dans le cas du régulateur 2-DOF. En particulier, nous montrerons que le schéma de contrôle présenté à la Fig IV.6 peut annuler les effets de l'élément en saturation, où nous avons introduit de nouveaux polynômes  $P$ ,  $E$  et  $F$ . Notons que nous utilisons une rétroaction positive autour du limiteur.

Nous montrerons d'abord qu'il est possible de choisir  $E$  et  $F$  qui transformeront la Fig IV.6 en la Fig IV.5 lorsque l'effort de contrôle reste dans les limites. Étant donné que le gain du bloc de limitation est un dans cette hypothèse, la boucle interne peut être remplacée par la fonction de transfert [16] :

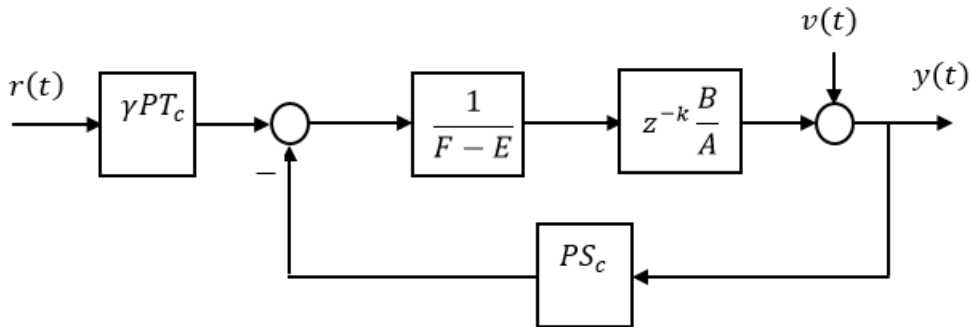
$$\frac{1}{(1-E/F)} = \frac{F}{(F-E)}$$

IV.21

Par conséquent, le schéma de la Fig IV.6 peut être réduit à celui de la Fig IV.7.



**Fig IV.6.** Régulateur 2-DOF avec boucle de rétroaction autour du limiteur. La sortie  $u$  du contrôleur est modifiée en la comparant à l'effort de commande réel  $u_{sat}$  utilisé [16].



**Fig IV.7.** Régulateur 2-DOF avec rétroaction autour du limiteur est réduit à un régulateur 2-DOF sans limiteur lorsque  $F = E + PR_c$  et  $P$  est stable [16].

Notons que si nous choisissons [16] :

$$F = E + PR_c$$

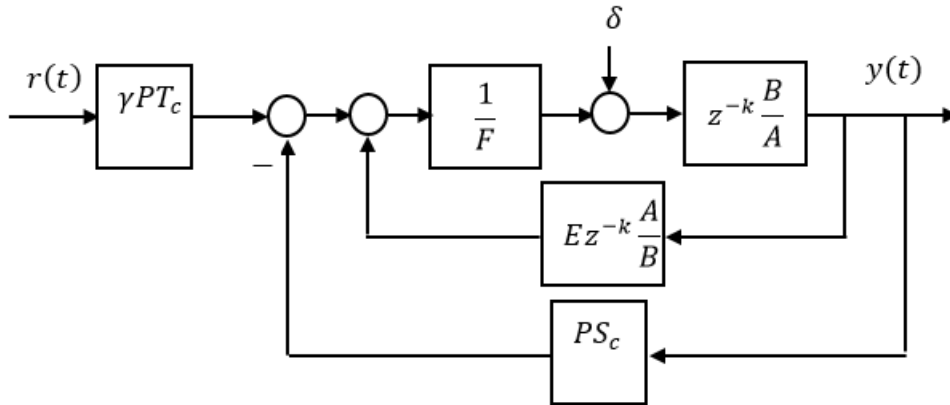
IV.22

Où  $P$  est stable, la Fig IV.7 se réduit à la Fig IV.1. Ainsi, nous avons montré que lorsque l'effort de contrôle est limité, le schéma de la Fig IV.6 met en œuvre le contrôle standard du placement des pôles 2-DOF.

Nous montrerons ensuite que lorsque l'effort de commande dépasse les limites, son impact sur  $y$  est éliminé, du moins asymptotiquement. Il y aura donc une différence entre l'effort de commande calculé  $u$  et celui effectivement utilisé,  $u_{sat}$ . Nous modéliserons l'impact de ceci par

le biais d'une variable  $\delta$  agissant à l'emplacement de l'élément non linéaire, comme dans la Fig IV.8, où nous avons pris  $\nu$  pour zéro puisque nous nous concentrons sur  $\delta$ . Il est facile de voir que la Fig IV.7 peut être redessinée comme la Fig IV.8. Comme les deux éléments de rétroaction sont en parallèle, ils peuvent être ajoutés pour donner dans le chemin de rétroaction négative :

$$\left(PS_c - \frac{Ez^kA}{B}\right) \quad \text{IV.23}$$



**Fig IV.8.** Configuration simplifiée du schéma en bloc précédent [16].

La fonction de transfert entre  $\delta$  et  $y$  est donnée par [16] :

$$T_{\delta y} = \frac{z^{-k} \frac{B}{A}}{1 + z^{-k} \frac{B}{A} \left(PS_c - \frac{Ez^kA}{B}\right) \frac{1}{F}} \quad \text{IV.24}$$

$$= \frac{z^{-k}BF}{FA + (z^{-k}BPS_c - EA)} \quad \text{IV.25}$$

En utilisant l'équation précédente au dénominateur, nous obtenons :

$$T_{\delta y} = \frac{z^{-k}BF}{PR_cA + z^{-k}BPS_c} \quad \text{IV.26}$$

Notons que  $PR_cA + z^{-k}BPS_c$  est le polynôme caractéristique de la boucle fermée. On peut obtenir une expression de ce polynôme sous la forme  $\phi_{cl}A^gB^g$ , en multipliant les deux côtés de l'identité de Aryabhata ci-dessous,

$$A^bR_1 + z^{-k}B^bS_1 = \phi_{cl} \quad \text{IV.27}$$

par  $A^gB^g$ .

Si nous choisissons,

$$F = AR_c + z^{-k}BS_c = \phi_{cl}A^gB^g \quad \text{IV.28}$$

On obtient,

$$T_{\delta y} = z^{-k} \frac{B}{P} \quad \text{IV.29}$$

Si  $P$  est stable et se comporte bien, l'effet de  $T_{\delta y}$  diminuera avec le temps. De nombreux choix ont été proposés dans la littérature pour  $P$ . Un choix populaire si  $A$  est stable est :

$$P = A \quad \text{IV.30}$$

Si un facteur de  $A$  n'est pas stable, nous le remplaçons par son reflet stable.

#### IV.6 Prédicteur de Smith

La présence de retards importants réduit les performances de commande réalisables. Par exemple, considérons le modèle standard de procédé dans la notation mixte suivante [16] :

$$y(n) = z^{-k} \frac{B(z)}{A(z)} u(n) \quad \text{IV.31}$$

Dans tous les systèmes réels,  $k$  sera au moins égal à un, car tous les systèmes significatifs prennent un temps non nul pour répondre aux stimuli externes. S'il y a un retard de transport dans la mise en œuvre de l'effort de contrôle,  $k$  sera supérieur à un. Une telle situation se produit également lorsque les procédés sont intrinsèquement lents et qu'ils mettent un certain temps à répondre aux efforts de contrôle. Les processus chimiques présentent souvent ce défaut. Dans la terminologie du génie chimique, le temps de réponse aux entrées externes est appelé temps mort "dead time". Dans tous ces cas,  $k$  peut être un grand nombre.

La présence d'un délai  $k$  important implique que l'action de commande sera retardée dans la même mesure. On peut s'en rendre compte en écrivant l'Equation IV.31 ci-dessus comme suit :

$$y(n) = \frac{B(z)}{A(z)} u(n - k) \quad \text{IV.32}$$

Il est clair que plus le retard est important, plus les performances de la commande seront mauvaises. En raison des effets néfastes des longs retards dans le procédé, nous souhaitons les prendre en compte. Cependant, si le retard est entièrement compensé, une boucle algébrique est créée dans la boucle de rétroaction, ce qui entraîne des difficultés lors de la simulation. Cette difficulté ne se pose pas en présence de bruit ou d'inadaptation entre le procédé et le modèle.

Le délai le plus court possible dans toutes les applications réelles est un. Dans cette section, nous proposons d'éliminer les effets de tout retard supérieur à un, grâce à une stratégie connue sous le nom de *prédicteur de Smith* [16]. Pour ce faire, nous supposons que dans le modèle de procédé précédent,  $k \geq 2$ . Soit

Soit le polynôme du numérateur  $B(z)$  de la forme suivante :

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{dB} z^{-dB} \quad \text{IV.33}$$

Avec  $b_0 \neq 0$ .

En définissant,

$$B_d(z) = z^{-1} B(z) \quad \text{IV.34}$$

L'équation IV.1 devient :

$$G(z) = z^{-(k-1)} \frac{B_d(z)}{A(z)} \quad \text{IV.35}$$

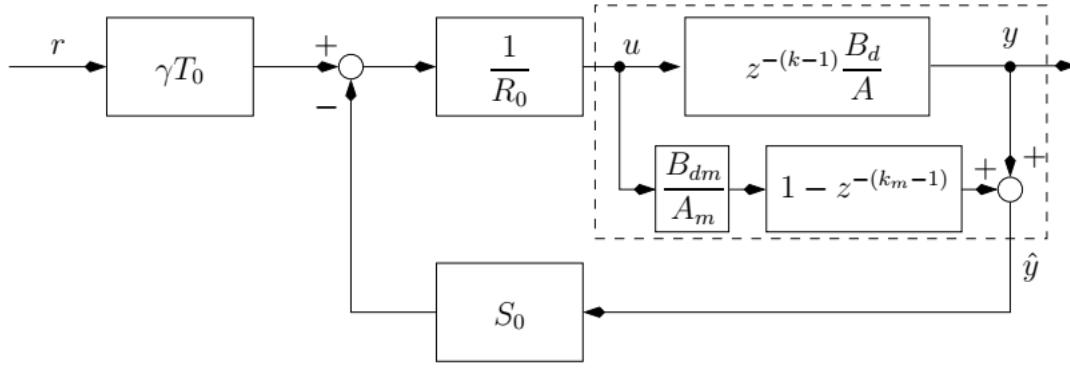
Nous avons défini  $B_d$  de manière à ce qu'il comprenne un retard, le minimum que nous attendons dans les applications réelles. Nous cherchons maintenant des moyens de nous débarrasser des effets négatifs du terme de retard  $z^{-(k-1)}$ . À cette fin, considérons l'équation suivante [16] :

$$y_p(n) = z^{-(k-1)} \frac{B_d(z)}{A(z)} u(n) + [1 - z^{-(k_m-1)}] \frac{B_{dm}(z)}{A_m(z)} u(n) \quad \text{IV.36}$$

Où  $k_m$ ,  $B_{dm}$  et  $A_m$  peuvent être considérés comme des estimations de  $k$ ,  $B_d$  et  $A$ , respectivement. Avec une bonne connaissance du procédé, les estimations deviennent exactes et l'équation précédente devient :

$$y_p(n) = \frac{B_d(z)}{A(z)} u(n) \quad \text{IV.37}$$

Ce qui permet de se débarrasser des effets négatifs de  $z^{-(k-1)}$ . Nous pouvons traiter ce modèle comme le modèle équivalent du procédé d'origine donnée par l'Eq IV.31 et concevoir un régulateur. La Fig IV.9 montre le schéma de cette idée, où nous avons proposé un régulateur par placement des pôles 2-DOF.



**Fig IV.9.** Schéma en bloc d'un prédicteur de Smith [16].

Nous avons utilisé les symboles  $R_0$ ,  $S_0$  et  $T_0$  à la place de  $R_c$ ,  $S_c$  et  $T_c$ , respectivement, pour montrer que ce régulateur est conçu pour le procédé sans retard.

Avec l'ajout d'un chemin supplémentaire dans le schéma du régulateur, nous renvoyons  $\hat{y}$ , au lieu de  $y$ . L'expression de  $\hat{y}$  est donnée par [16] :

$$y_p(n) = \frac{B_{dm}}{A_m} [1 - z^{-(k_m-1)}] u + y = \frac{B_{dm}[1 - z^{-(k_m-1)}]u + A_m y}{A_m} \quad \text{IV.38}$$

La loi de commande pour cette configuration est donnée par :

$$S_0 u = \gamma T_0 r - R_0 \hat{y} \quad \text{IV.39}$$

En substituant à l'équation ci-dessus l'expression de  $\hat{y}$ , et en simplifiant, nous obtenons :

$$u = \frac{A_m \gamma T_0 r - A_m R_0 \hat{y}}{A_m S_0 + B_{dm} R_0 [1 - z^{-(k_m-1)}]} \quad \text{IV.40}$$

En utilisant l'équation IV.35, le modèle du procédé peut être écrit comme suit :

$$y = z^{-(k-1)} \frac{B_d}{A} u \quad \text{IV.41}$$

En substituant à cette équation l'expression de  $u$  de l'Eq IV.40, et en simplifiant, on obtient :

$$\phi_{cl} = z^{-(k-1)} B_d A_m \gamma T_0 r \quad \text{IV.42}$$

Où,

$$\phi_{cl} = A \left[ A_m S_0 + B_{dm} R_0 [1 - z^{-(k_m-1)}] \right] + z^{-(k-1)} B_d A_m R_0 \quad \text{IV.43}$$

Supposons que nous ayons une bonne connaissance du procédé. Par conséquent, les paramètres du modèle seront identiques à ceux du procédé, c'est-à-dire,  $A_m = A$ ,  $B_{dm} = B_d$  et  $k_m = k$ .

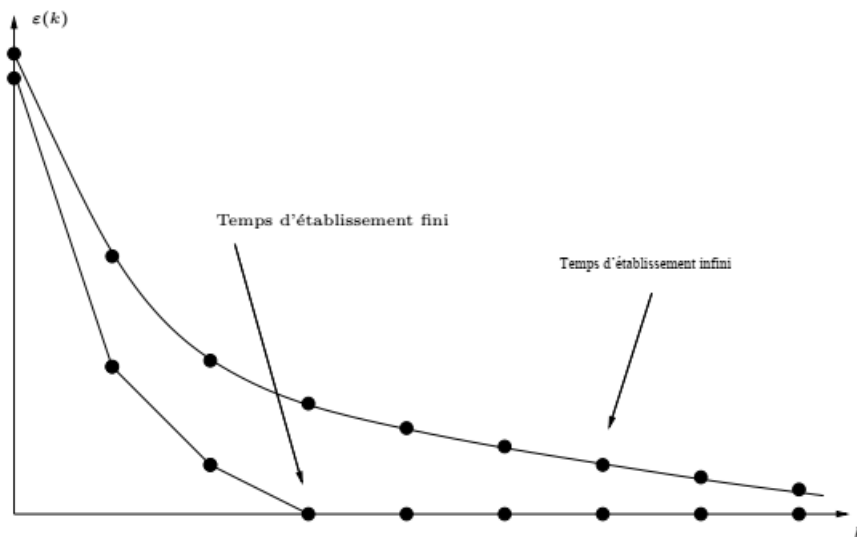
L'équation ci-dessus peut être simplifiée comme suit :

$$\phi_{cl} = A[AS_0 + B_dR_0] \quad \text{IV.44}$$

Nous remarquons que le dénominateur de la fonction de transfert du procédé,  $A$ , est une partie du polynôme caractéristique de la boucle fermée. Par conséquent, cette méthode ne peut être utilisée que lorsque le procédé  $G$  est stable. De plus, lorsque l'expression de  $\phi_{cl}$  est substituée à l'Eq IV.43,  $A$  annule  $A_m$  puisqu'ils sont supposés égaux. Il reste donc  $\phi_{cl} = A[AS_0 + B_dR_0]$ , qui est identique au polynôme caractéristique du système de la Fig IV.9, lorsque les blocs à l'intérieur de la boîte sont remplacés par leurs fonctions de transfert équivalentes de  $B_d/A$ . Le nom prédicteur de Smith se réfère principalement à la configuration à l'intérieur de la boîte. Pour que le prédicteur de Smith soit efficace, nous devons avoir une bonne connaissance du délai. L'approche ci-dessus ne fonctionne que pour les plantes stables [16].

#### IV.7 Synthèses à temps d'établissement fini

Un système est dit "à temps d'établissement fini" lorsque son erreur  $\varepsilon^*(k) = 0$  en un nombre fini de périodes d'échantillonnage, l'entrée étant un polynôme en  $t$  spécifié (le plus souvent un échelon :  $t^0$ ).



**Fig IV.10.** Comparaison de l'erreur permanente entre un système à temps d'établissement fini et infini.

**Définition** Un système est dit à temps d'établissement fini si l'erreur  $\varepsilon^*(t)$  s'annule en un nombre fini d'échantillons, pour une entrée  $w(t) = t^m$  spécifiée.

$\varepsilon(z)$  est donc un polynôme en  $z$ ,

La transformée en  $z$  de  $w(t) = t^m$  est de la forme :

$$W(z) = \frac{W_N(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}} \quad \text{IV.45}$$

Avec  $W_N(z)$  est un polynôme en  $z$  de degré  $d \leq m$ .

$$\varepsilon(z) = W(z) - Y(z) = W(z)[1 - F(z)] = \frac{W_N(z)(1-F(z))}{(1-z^{-1})^{m+1}} \quad \text{IV.46}$$

Où  $F(z)$  est la transmittance en boucle fermée.

Pour que  $\frac{W_N(z)(1-F(z))}{(1-z^{-1})^{m+1}}$  soit un polynôme il faut et il suffit que  $[1 - F(z)]$  contient  $(1 - z^{-1})^{m+1}$  en facteur, donc  $[1 - F(z)]$  s'écrit sous la forme :

$$[1 - F(z)] = (1 - z^{-1})^{m+1} K(z) \quad \text{IV.47}$$

Où  $K(z)$  est un polynôme.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) \quad \text{IV.48}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W_N(z)(1-F(z))}{(1-z^{-1})^{m+1}} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{W_N(z)(1-z^{-1})^{m+1} K(z)}{(1-z^{-1})^{m+1}} = 0 \end{aligned}$$

#### IV.7.1 Synthèse à temps d'établissement minimal absolu

**Définition :** Un système est dit à temps d'établissement minimal lorsque le degré de  $\varepsilon(z)$  est minimal.

En reprenant les équations (IV.46) et (IV.47), on obtient :

$$\varepsilon(z) = \frac{W_N(z)(1-F(z))}{(1-z^{-1})^{m+1}} = W_N(z)K(z) \quad \text{IV.49}$$

Si  $K(z) = 1$ , alors le système est dit minimal absolu. Dans ce cas :

$$(1 - F(z)) = (1 - z^{-1}) \quad \text{IV.50}$$

$$\varepsilon(z) = W_N(z) = w_0 + w_1 z^{-1} + w_2 z^{-2} + \dots + w_m z^{-m} \quad \text{IV.51}$$

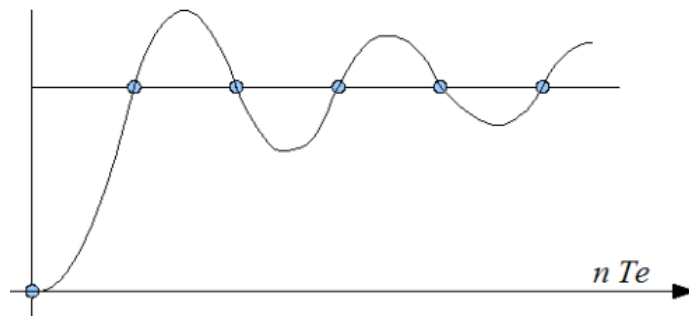
Donc  $\varepsilon^*(t)$  s'annule pour  $t = (m + 1)T$ .

Le correcteur  $C(z)$  est alors :

$$C(z) = \frac{1 - (1 - z^{-1})^{m+1}}{(1 - z^{-1})^{m+1} G(z)} \quad \text{IV.52}$$

### Remarque

- Le correcteur compense les pôles et les zéros de  $G(z)$  donc cette méthode de commande ne s'applique qu'aux systèmes ne possédant que des pôles et des zéros stables.
- Seul  $\varepsilon^*(t)$  s'annule, pas  $\varepsilon(t)$ .



**Fig IV.11.** L'erreur échantillonnée est bien nulle mais l'erreur continue ne l'est pas.

### IV.7.2 Synthèse à temps d'établissement minimal non absolu

Si le système modélisé par  $G(z)$  possède des pôles ou des zéros extérieurs au cercle unité, la synthèse à temps d'établissement minimal absolu n'est plus applicable. La synthèse en temps d'établissement minimal consiste alors à chercher  $K(z)$  de degré minimal respectant les deux conditions suivantes :

- $F(z)$  doit posséder parmi ses racines les zéros de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité
- $(1 - F(z))$  doit posséder parmi ses racines les pôles de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité

**Démonstration** : posons :

$$G(z) = \frac{B^+(z)B^-(z)}{A^+(z)A^-(z)} \quad \text{IV.53}$$

Où  $B^+(z), B^-(z), A^+(z), A^-(z)$  sont des polynômes tels que :

$B^+(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (dits "stables")

$B^-(z)$  contient tous les zéros de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (dits "instables") ainsi que les retards purs du système

$A^+(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  intérieurs au cercle unité (stables)

$A^-(z)$  contient tous les pôles de  $G(z)$  extérieurs au cercle unité (instables)

Alors :

$$G(z) = \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{(1-F(z))} \quad \text{IV.54}$$

Comme  $C(z)$  ne peut pas contenir  $B^-(z)$  au dénominateur (pôles instables) alors  $F(z)$  doit contenir en facteur la partie instable  $B^-(z)$ . De même,  $C(z)$  ne peut pas contenir au numérateur  $A^-(z)$  (ce serait de la compensation de pôles de  $G(z)$  instable) donc  $(1 - F(z))$  doit contenir en facteur  $A^-(z)$ .

**Remarque** : les pôles et zéros sur le cercle unité sont à considérer comme instables.

Le problème posé se ramène à la résolution de 3 équations :

$F(z) = B^-(z)L(z)$  : (non compensation des zéros instables par le correcteur)

$(1 - F(z)) = A^-(z)J(z)$  : (non compensation des pôles instables par le correcteur)

$(1 - F(z)) = (1 - z^{-1})^{m+1} K(z)$  : (temps d'établissement fini)

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$F(z) = B^-(z)L(z) \quad \text{IV.55}$$

$$(1 - F(z)) = (1 - z^{-1})^{m+1} A^-(z) K'(z) \quad \text{IV.56}$$

$$K(z) = A^-(z) K'(z) \quad \text{IV.57}$$

Cela revient à résoudre l'équation diophantienne :

$$(1 - z^{-1})^{m+1} A^-(z) K'(z) + B^-(z)L(z) = 1 \quad \text{IV.58}$$

Le correcteur s'écrit alors :

$$\begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{\text{système}} \frac{F(z)}{(1-F(z))} \quad \text{IV.59} \\ &= \frac{A^+(z)A^-(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{(1-F(z))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^+(z)A^{-l}(z)}{B^+(z)B^-(z)} \frac{F(z)}{(1-z^{-1})^{m+1} A^-(z) K'(z)} \\
C(z) &= \frac{A^+(z)L(z)}{B^+(z)(1-z^{-1})^{m+1} K'(z)} \quad \text{IV.60}
\end{aligned}$$

Si la résolution donne :

$$K(z) = A^-(z) K'(z) = k_0 + k_1 z^{-1} + k_2 z^{-2} + \dots + k_n z^{-n} \quad \text{IV.61}$$

Alors

$$\varepsilon(z) = W(z) K(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 z^{-1} + \varepsilon_2 z^{-2} + \dots + \varepsilon_{m+n} z^{-(m+n)} \quad \text{IV.62}$$

Le transitoire est bien de durée finie, mais de  $m + n + 1$  périodes d'échantillonnage.

### IV.7.3 Réponse pile

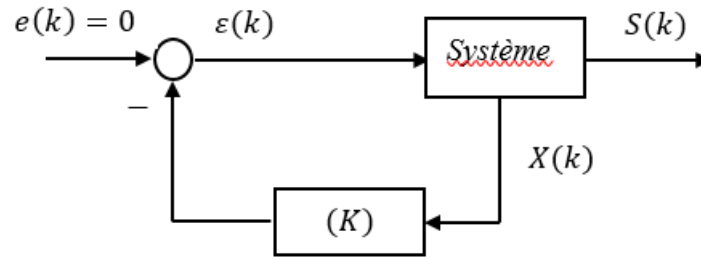
La réponse pile est un cas particulier des systèmes à temps d'établissement minimal non absolu.

**Définition** Un système est dit à réponse pile lorsque la sortie continue atteint son régime permanent pour une entrée canonique en un nombre fini d'échantillons.

Considérons un système à temps discret défini par ses équations d'état :

$$\begin{cases} X(k+1) = A X(k) + B e(k) \\ s(k) = C X(k) \end{cases} \quad \text{IV.63}$$

Le problème de la réponse pile, en temps discret, consiste à déterminer un vecteur de gain qui assure, en un temps fini, la convergence de l'état du système vers l'état 0 à partir d'un état initial  $X(0)$  [3]. On suppose pour ce faire que le signal de consigne est nul, autrement dit que système est autonome, soit  $e(k) = 0$  pour tout  $k$ . Soit  $nT_e$  l'instant à partir duquel la réponse du système est censée être nulle. Il s'agit, en fait, de rechercher la suite  $\varepsilon(k)$  pour  $0 \leq k < n$  qui amène le système à 0 en  $n$  échantillons.



**Fig IV.12.** Commande par retour d'état d'un système à temps discret.

### IV.8 Résolution du problème

Appliquons l'équation d'état à chaque instant entre les instants 1 et  $n$  :

$$\begin{cases} X(1) = A X(0) + B \varepsilon(0) \\ X(2) = A X(1) + B \varepsilon(1) \\ X(3) = A X(2) + B \varepsilon(2) \\ \vdots \\ X(n) = A X(n-1) + B \varepsilon(n-1) \end{cases}$$

En combinant ces équations, on obtient :

$$A^{-1}X(n) = X(0) + [A^{-1} B \quad A^{-2} B \quad \dots \quad A^{-n} B] \begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \vdots \\ \varepsilon(n-1) \end{pmatrix} \quad \text{IV.64}$$

Si le système est commandable, la matrice  $[A^{-1} B \quad A^{-2} B \quad \dots \quad A^{-n} B]$  est inversible. Par ailleurs, nous souhaitons obtenir  $X(0) = 0$ . On peut donc écrire :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(0) \\ \vdots \\ \varepsilon(n-1) \end{pmatrix} = [A^{-1} B \quad A^{-2} B \quad \dots \quad A^{-n} B]^{-1} - X(0) \quad \text{IV.65}$$

Cette équation nous donne la suite d'échantillons qui doit être introduite à l'entrée du système pour apporter la solution au problème posé à savoir la convergence du système vers l'état 0. Or, si cette équation est valable pour l'instant  $k = 0$ , elle doit l'être pour tous les instants d'échantillonnage ultérieurs. On a donc, quel que soit  $k > 0$  :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ \vdots \\ \varepsilon(k+n-1) \end{pmatrix} = [A^{-1} B \quad A^{-2} B \quad \dots \quad A^{-n} B]^{-1} - X(k) \quad \text{IV.66}$$

Dans cette nouvelle équation vectorielle, appelons  $g_1$  le vecteur ligne correspondant à la première ligne de la matrice. Donc,

$$\varepsilon(k) = -g_1 X(k) \quad \text{IV.67}$$

D'après le schéma de la fig IV.12, le vecteur de gain qu'il nous faut choisir n'est autre que le vecteur ligne  $g_1$  correspondant à la première ligne de l'inverse de la matrice :

$$[A^{-1} B \quad A^{-2} B \quad \dots \quad A^{-n} B]^{-1} \quad \text{IV.68}$$

### IV.8.1 Résolution de l'équation diophantienne

Quelle que soit la méthode adoptée pour le calcul du correcteur (Zdan, pile RST, ...), cela revient à la résolution d'une équation diophantienne de la forme :

$$AX + BY = C \quad \text{IV.69}$$

Où :  $A, X, B, Y$  et  $C$  sont des polynômes en  $z^{-1}$ .

Cette équation n'admet de solutions que si et seulement si :

$$\deg(X) + \deg(Y) + 1 = \max\{\deg(AX), \deg(BY), \deg(C)\} \quad \text{IV.70}$$

S'il existe une solution alors :

$$\deg(X) \geq \deg(B) - 1 \quad \text{IV.71}$$

$$\deg(Y) \geq \deg(A) - 1 \quad \text{IV.72}$$

Ces conditions étant respectées, deux cas peuvent se présenter :

L'équation est régulière	L'équation est non régulière	
$\deg(C) < \deg(A) + \deg(B)$	$\deg(C) \geq \deg(A) + \deg(B)$	
	<i>Solution minimale en X</i>	<i>Solution minimale en Y</i>

$\deg(X)$ $= \deg(B) - 1$ $\deg(Y)$ $= \deg(A) - 1$	$\deg(X) = \deg(B) - 1$ $\deg(Y)$ $= \max\{\deg(C)$ $- \deg(B), (\deg(A) - 1)\}$	$\deg(X)$ $= \max\{\deg(C)$ $- \deg(A), (\deg(A) - 1)\}$ $\deg(Y) = \deg(A) - 1$
--	---	---

Soit,

$$\begin{aligned}
& (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n})(x_0 + x_1z^{-1} + x_2z^{-2} + \dots + x_kz^{-k}) + \\
& (b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m})(y_0 + y_1z^{-1} + y_2z^{-2} + \dots + y_lz^{-l}) = \\
& \qquad \qquad \qquad c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_pz^{-p} \qquad \qquad \qquad \text{IV.73}
\end{aligned}$$

Où

$$p \leq n + \sup(k, l) \qquad \qquad \qquad \text{IV.74}$$

Par identification terme à terme, on obtient :

$$\begin{cases}
a_0x_0 + b_0y_0 = c_0 \\
a_1x_0 + a_0x_1 + b_1y_0 + b_0y_1 = c_1 \\
a_2x_0 + a_1x_1 + a_0x_2 + b_2y_0 + b_1y_1 + b_0y_2 = c_2 \\
\dots
\end{cases}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\max(n+k, m+l) + 1 \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & & \vdots & b_1 & b_0 & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & 0 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & b_2 & \ddots & b_0 \\ a_n & \vdots & & a_1 & \vdots & & & b_1 \\ 0 & a_n & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & b_m & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_n & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b_m \end{array} \right\} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ x_k \\ y_0 \\ \vdots \\ y_l \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{k+1} \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{l+1}$

Pour que cette matrice soit inversible, il faut que :

$$\max(n+k, m+l) = k+l+1 \quad \text{IV.75}$$

Ce qui correspond à l'équation précédente. Si toutefois cette dernière condition est respectée mais que son déterminant est nul, c'est que les polynômes  $A$  et  $B$  ne sont pas premiers entre eux.

## Conclusion générale

L'objectif de cet ouvrage est de présenter les outils principaux à la maîtrise des notions de base de la régulation analogique et la régulation numérique. Pour ce faire, l'ouvrage est préparé pour couvrir les principaux axes suivants :

- Elaborer des modèles mathématiques qui représentent fidèlement les comportements des systèmes physiques (électriques et mécaniques) et de prédire leurs performances avant de les concevoir en détail ou les construire. Cette prédiction est basée sur une description mathématique des caractéristiques dynamiques du système. Pour de nombreux systèmes physiques, les modèles mathématiques utiles sont décrits en termes d'équations différentielles qui peuvent être résolues en utilisant la transformée de Laplace. L'analogie entre les systèmes électriques et mécaniques en termes d'équations différentielles les régissant est également présentée.
- Présenter en détails les différents éléments constituant la chaîne de régulation analogique à savoir : le transmetteur, le capteur, l'actionneur et le correcteur. Un tel ensemble est nommé boucle de régulation. Le rôle du régulateur est d'ajuster la position de l'organe réglant afin de faire concorder la valeur mesurée et le point de consigne. Le régulateur compare en permanence la mesure de la grandeur à réguler et la consigne, et agit sur l'organe réglant. L'algorithme, ou loi de commande, du régulateur le plus classique est l'association des trois actions élémentaires PID (Proportionnelle, Intégrale et Dérivée), qui est le régulateur PID est présenté avec les différentes stratégies de régulation analogique existantes.
- La régulation numérique consiste à réguler des systèmes en traitant des signaux discrets à des instants précis. Contrairement à la régulation analogique, où les signaux sont traités en temps réel, la régulation numérique repose sur des mesures et des commandes numériques. La sortie du processus est mesurée par un capteur, convertie en numérique par un convertisseur analogique-numérique (CAN), puis traitée par un ordinateur numérique. Ce dernier compare la mesure à la consigne et envoie une commande, convertie en analogique via un convertisseur numérique-analogique (CNA), à

l'actionneur, qui agit sur le processus. Cette architecture combine les avantages des systèmes numériques, notamment en termes de flexibilité et de précision. Dans ce contexte, la structure de régulation numérique, les éléments d'actions correctives en numérique PID et l'analyse de ses performances en termes de stabilité, précision et rapidité sont abordés.

- Dans les applications industrielles, les régulateurs PID sont souvent réglés de manière empirique. En règle générale, les paramètres du régulateur sont choisis sur la base d'un modèle de processus simple à l'aide d'une règle de réglage appropriée. Cela nous permet d'aborder les spécifications de rejet des perturbations de la charge qui sont souvent une préoccupation majeure dans le contrôle des processus et la présence d'un délai dans le processus. Compte tenu des paramètres du modèle de processus, plusieurs règles de réglage sont disponibles pour déterminer les valeurs des paramètres du régulateur PID. Les règles de réglage les plus populaires sont celles attribuées à Ziegler-Nichols. Leur objectif est d'assurer un rejet satisfaisant des perturbations de la charge.
- La commande anti-windup est une alternative permettant d'utiliser au mieux les capacités de l'actionneur en autorisant les saturations tout en préservant la stabilité (et les performances) du système commandé dans la plage de fonctionnement prévue pour le système. Son principe est de réinjecter l'erreur commise par l'actionneur en entrée du système de commande. Cette retouche du contrôleur n'est active que lorsque l'actionneur est saturé. Ainsi, le comportement nominal du système commandé, conçu à l'origine sans se préoccuper des non-linéarités de l'actionneur, n'est pas modifié.
- Les correcteurs PID présentent des limites dans le cas des systèmes à retard, d'où la nécessité d'utiliser une structure de correcteur adaptée pour ces systèmes : le prédicteur de Smith. Le prédicteur de Smith est une méthode qui permet une synthèse facile des correcteurs pour les systèmes qui ont des retards purs élevés, ce qui est fréquent dans l'industrie. La synthèse à établissement fini est également traité dans ce support de cours.

Une bonne maîtrise des notions de base de la commande analogique et numérique est importante pour tout technicien ou ingénieur ou automaticien désirant approfondir ses connaissances dans le domaine de l'automatique industriel.

## Bibliographie

- [1] Fadali, M.S. and Visioli, A. (2013) *Digital Control Engineering Analysis and Design*. 2th Edition, Elsevier Inc. ISBN 978-0-12-394391-0.
- [2] Veloni, A. and Miridakis, N.I. (2017) *Digital Control Systems: Theoretical Problems and Simulation Tools*. CRC Press. Available at: <https://doi.org/10.1201/9781315168630>.
- [3] Granjon, Y. (2001) *Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps*. Dunod.
- [4] Michel Ethique, *Régulation automatique*, cours, 2007.
- [5] Patrick P. (2010) *Instrumentation et régulation en 30 Fiches*. Dunod, Paris, ISBN 978-2-10-054825-5, ISSN 1778 4514.
- [6] Landau, I.D. and Zito, G. (2006) *Digital control systems: design, identification and implementation*. Springer, Verlag, London, U.K.
- [7] Patrick, P. (2010) ‘*Automatique contrôle et régulation: cours et exercices corrigés*’, Dunod, impr.
- [8] Golnaraghi, F. and KUO, B.C. (2010) *Automatic Control Systems*, 9th Edition, John Wiley & Sons, Inc., ISBN-13 978-0470-04896-2
- [9] Ogata, K. (2004) *System dynamics*, Fourth edition, Pearson Education, Inc.
- [10] Oppenheim, A. V (1999) *Discrete-time signal processing*. Pearson Education India.
- [11] Tong, W. (2014) *Mechanical Design of Electric Motors*. CRC Press. Available at: <https://doi.org/10.1201/b16863>.
- [12] Turner, I.C. (2020) *Engineering Applications of Pneumatics and Hydraulics*. Routledge. Available at: <https://doi.org/10.4324/9781003026815>.
- [13] Salivahanan, S., Rengaraj, R. and Venkatakrishnan, G.R. (2014) *Control systems engineering*. Pearson London.
- [14] Bequette, B.W. (2003) *Process control: modeling, design, and simulation*. Prentice Hall Professional.
- [15] Nise, N.S. (2020) *Control systems engineering*. John Wiley & Sons.
- [16] Moudgalya, K.M. (2007) *Digital Control*. Wiley. Available at: <https://doi.org/10.1002/9780470517109>.
- [17] Jacquot, R.G. (2019) *Modern Digital Control Systems*. Routledge. Available at: <https://doi.org/10.1201/9780203746721>.

