الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة سعيدة–الدكتور.مولاي الطاهر–

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مطبـوعة في مقياس

إحصاء 2

موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية

من إعداد الأستاذة:

بختاوي فاطيمة الزهراء أستاذ محاضر "أ"

السنة الجامعية : 2025/2024

العنوان	رقم الصفحة
فهرس المحتويات	–
مقدمة	أ
الفصل الأول: نظرية المجموعات	1
1. ماهية المجموعات	2
2. العمليات على المجموعات	6
3. قوانين نظرية المجموعات	10
الفصل الثاني:التحليل التوفيقي	11
1.أسس التحليل التوفيقي	13
2–التبديلات	17
3–الترتيبات	22
4–التوفيقات	28
الفصل الثالث: الاحتمالات	35
1– تعريف الاحتمال	36
2– مفاهيم أساسية في الاحتمالات	43
3– القوانين الأساسية في الاحتمالات	47
4- الاحتمال الكلي	52
5- نظرية بايز	55
الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية	57
1–المتغيرات العشوائية المتقطعة	58
التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المتقطعة	58
دالة التوزيع المتجمع	60
التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري	65
2–المتغيرات العشوائية المستمرة	69
التوزيع الاحتمالي للمتغيرات العشوائية المتقطعة	70
دالة التوزيع المتجمع	73
التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري	74
الفصل الخامس: التوزيعات الاحتمالية	79

1–التوزيعات الاحتمالية المتقطعة	80
توزيع بارنولي	80
توزيع ذو الحدين	83
توزيع بواسون	87
التوزيع الهندسي	92
التوزيع المنتظم المنفصل	93
2– التوزيعات الاحتمالية المستمرة	97
التوزيع الطبيعي	97
التوزيع المنتظم المستمر	103
توزيع قاما	103
الفصل السادس: العزوم والدالة المتجددة	106
1–العزم المركزي	107
2–العزم المرتبط بالأصل	108
3–الدالة المتجددة	108
الفصل السابع: نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة	111
1–نظرية شيبيشف	112
2–نظرية الأعداد الكبيرة	116
قائمة المراجع	118
الملاحق	122

مقدمة:

تعتمد نظرية الاحتمالات في الأصل على تحليل ألعاب الحظ، غير أنها أصبحت اليوم تحتل مكانة مركزية في معظم العلوم، فمن خلال تطبيقاتها العلمية كأساس للإحصاءات، فإنها تسمح كذلك بتحليل البيانات التي تم جمعها أثناء التجربة أو أثناء المسح، كما تسمح بنمذجة العديد من الظواهر، سواء في العلوم الطبيعية(الفيزياء، الكيمياء والبيولوجيا) أو العلوم الانسانية (الإقتصاد وعلم الاجتماع)، وفي تخصصات أخرى(الطب، علم المناخ، علم الكمبيوتر وشبكات الإتصال)، كما أثبتت فعاليتها في العديد من مجالا الرياضيات البحتة(الجبر، نظرية الاعداد، التوفيقات....).

مما سبق وعلى وجه التخصيص يهتم الاحصاء في الكثير من مواضيعه بالاحتمالات والنظريات المعتمدة عليها، وهي المواضيع المعالجة من خلال مقياس إحصاء02،

وهذه المطبوعة التي تتناول هذا المقياس تحت عنوان: الإحصاء 02 ، والتي حاولنا فيها الإلمام بكل عناصرخ بناء على البرنامج المحدد من طرف اللجنة الوطنية للبرامج لميدان العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية علوم التسيير المعتمدة من طرف وزارة التعليم العالي، حيث بالإضافة إلى التطرف بالشرح المفصل لكل فصل تم تدعيم ذلك بأمثلة تطبيقية ، بحيث تم تقسيم محتويات هذه المطبوعة في سبعة فصول كالتالي:

الفصل الأول: نظرية المجموعات

الفصل الثاني: التحليل التوفيقي

الفصل الثالث: الاحتمالات

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية

الفصل الخامس: التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة

الفصل السادس: العزوم والدالة المتجددة

الفصل السابع: نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة

وتعتبر هذه المطبوعة محاولة جادة ومساهمة بسيطة لما جاء في هذا المقياس والتي نرجوا أن يستفيد منها طلبتنا الأعزاء في ميدان العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير.

والله ولي التوفيق.

المؤلفة: بختاوي فاطيمة الزهراء

الفصل الأول:

نظرية المجموعات

مقدمة:

يمكن تعريف مفهوم الاحتمال من خلال أعمال نود القيام بها ولا نرعف مدى صحتها أو لا نعرف إذا كنا سنستطيع القيام بها أم لا. ولذلك فإن تلك الأعمال تخضع لدرجة من عدم التأكد. وحيث أن الإحصاء الاستدلالي يعتمد على المعلومات الموجودة في العينة لاستخلاص النتائج حول المجتمع، لذلك فإن هذه النتائج لا نستطيع تأكيد صحتها وعد تأكيد صحة النتائج موروث وموجود في الإحصاء الاستدلالي لذلك قبل الدخول بالأساليب الإحصائية المستخدمة يجب الدخول في دراسة عدم التأكد. العلم الذي يبحث في عدم التأكد هو نظرية الاحتمال Theory probability والتي تساعدنا في السيطرة على مقدار عدم التأكد وكذلك تساعدنا لتعميم استخدامات المفاهيم التي تصح لمتغير يعتمد على مجتمع محدود ومنها الوسط الحسابي والانحراف المعياري لان تكون مفاهيم تصح لجميع أنواع المتغيرات. وبهذا علينا معرفة مفهوم المتغير العشوائي Random Variable وتوزيعه الاحتمالي Distribution Probability.

لابد قبل الدخول في حساب الاحتمال، من ذكر بعض التعاريف المهمة لمفردات مرافقة لدراسة مفهوم الاحتمال ومنها نظرية المجموعات ومبدأ التجربة والحدث وغيرها سيتم توضيحها كما يلي:

مفاهيم عامة حول المجموعات:

1-ماهية المجموعات:

يستخدم الإنسان في حياته اليومية مفهوم المجموعة دون أن يقصد بالضرورة ذلك المفهوم الرياضي المحدد الذي أصبح أحد المفاهيم الرياضية الأساسية الحديثة مثل:

-أنهار الجزائر،

-فريق كرة القدم،

-طلاب السنة الأولى جامعي،

-أعضاء هيئة التدريس بقسم العلوم الاقتصادية بجامعة

يتضح مما سبق وجود عدة وحدات بتسميات مختلفة و لهذا اتفق علميا على كلمة مجموعة كمصطلح علمي عام يقوم مقام أمثال التسميات السابقة كأن تقوم مثلا مجموعة طلاب السنة الأولى جامعي.

1- تعريف المجموعة:

هي مجموعة من العناصر تجمعها خصائص مشتركة، وللتوضيح أكثر يمكن عرض الأمثلة التالية:

مثال01: طلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم تسيير جامعة علي لونيسي

مثال 02: عمال مؤسسة شركة سونلغاز

مثال 03: الشركات العاملة في قطاع الهاتف النقال بالجزائر

ما يلاحظ من خلال الأمثلة السابقة، أن عناصر كل مجموعة تجمعهم خصائص معينة، فلو أخذنا المثال 01 نلاحظ أن الطلبة يدرسون في نفس الجامعة، في نفس الكلية، في نفس السنة، في نفس التخصص .فإذا وجد طالب لا تجتمع فيه الخصائص السابقة فهو لا ينتمي إلى هذه المجموعة، كالطالب الذي يدرس سنة ثانية علوم تسيير، أو الطالب الذي يدرس تخصص آخر....الخ

2-أنواع المجموعات:

تقسم المجموعات حسب عدة معايير، فإذا نظرنا إلى عدد العناصر المكونة لذا، نجد أنها تنقسم إلى:

2-1 مجموعة منتهية:

إذا كان عدد العناصر المكون لمجموعة ما محدد(منتهي)، هنا نقول أن المجموعة منتهية، كالشركات العاملة في قطاع الهاتف النقال في الجزائر (3 شركات :موبليس، نجمة، جازي) .أو مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 5 وهي (:0، 1، 2، 3، 4، 5).

2-2 مجموعة غير منتهية:

وهي التي لا نستطيع أن نحدد عدد عناصرها، كمجموعة الأعداد الحقيقية، مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة

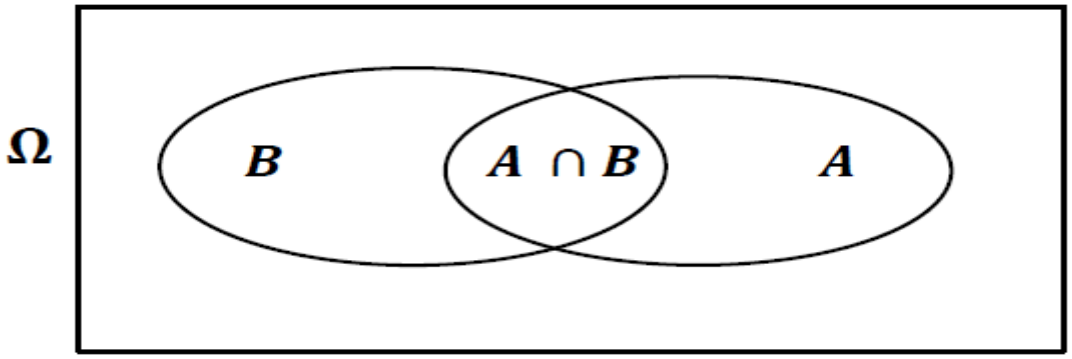
الأعداد الكسرية، هذه المجموعات لا يمكن حصر عدد العناصر المكونة لها.

أما إذا نظرنا إلى العلاقة التي تجمع بين المجموعات فيما بينها، فيمكننا تقسيمها إلى:

2-3- المجموعة الكلية:

وهي المجموعة التي تضم جميع العناصر والتي عادة نرمز لذا بالرمز Ω ،يمكننا من خلال هذه المجموعة تشكيل مجموعات جزئية.

نصطلح على تسمية هه المجموعة بالفضاء، وهي التي تحتوي على كل العناصر المدروسة، نرمز لها عادة بالرمز Ω. ويمكن توضيح المجموعة الكلية من خلال مخطط "فيين" الذي يوضح المجموعات الجزئية الممثلة بدوائر بيضاوية داخل المستطيل الممثل للمجموعة الكلية.



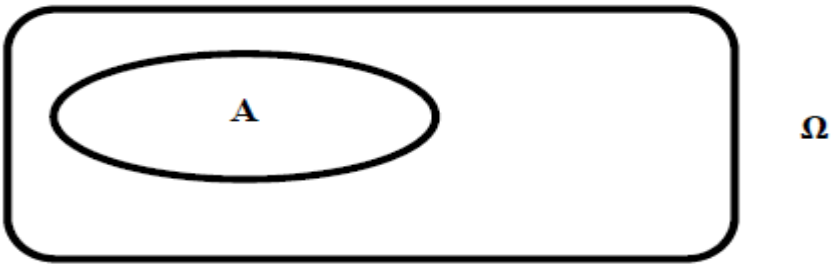
2-4- المجموعة الجزئية

إذا كانت لدينا Ω مجموعة كلية، ولدينا A تضم مجموعة من العناصر التي تنتمي إلىΩ ، في هذه الحالة نقول أن

A تشكل مجموعة جزئية منΩ ، كما أن A محتواة في Ω ، ونكتب ذلك كما يلي :

مثال: إذا كان عدد طلبة سنة أولى جذع مشترك علوم التسيير – جامعة علي لونيسي – هو 1000 طالب (Ω)، من بينهم 600 طالب شعبتهم في الباكالوريا هي تسيير واقتصاد (A)، يمكننا تمثيل هذه المجموعات في الشكل التالي الذي يدعى "مخطط فين":

الشكل: المجموعة الكلية والمجموعة الجزئية



ملاحظة :إن عدد عناصر Ω أو عناصر المجموعة A أو أي مجموعة أخرى يدعى بـ" أصلي المجموعة"، ونرمز له بالرمز " card"، فمثلا:

$$\mathbf{Card}(\Omega) = 1000 \;;\mathbf{card}\ (\mathbf{A}) = 600$$

2-5- المجموعة المتممة:

إذا كانت A مجموعة جزئية من Ω وكانت هناك عناصر تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A، نطلق على المجموعة التي تحتوي على هذه العناصر بـ "المجموعة المتممة"، نرمز لها بالرمز: $\bar{A}$ (أي نفي A).

مثال: لنفرض أن إحدى الشركات تحتوي على 1000 موظف (Ω)، من بينهم 300 موظف حاملي الشهادات الجامعية (A)، الذين لا يحملون الشهادات الجامعية يشكلون المجموعة ($\bar{A}$)، حيث أن:

$$\text{Card}\ (\bar{A}) = 700$$

ملاحظات:

من خلال هذا المثال أو اي مثال آخر، يمكننا استنباط القواعد العامة التالية:

- إن العناصر التي تنتمي إلى (A) لا تنتمي إلى ($\bar{A}$)، أي أن التقاطع (∩) بين المجموعتين يعطي لنا مجموعة خالية، وهما مجموعتان **منفصلتان**، نعبر عن هذا رياضيا كما يلي:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

- إن دمج عناصر A مع ($\bar{A}$الاتحادU) يعطي لنا المجموعة الكلية Ω، أي أن:

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

- يمكن إيجاد عناصر $\bar{A}$ عن طريق العلاقة التالية:

$$\bar{A} = \Omega - A$$

- نفي المجموعة الخالية يعطي لنا المجموعة الكلية، أي أن:

$$\bar{\emptyset} = \Omega$$

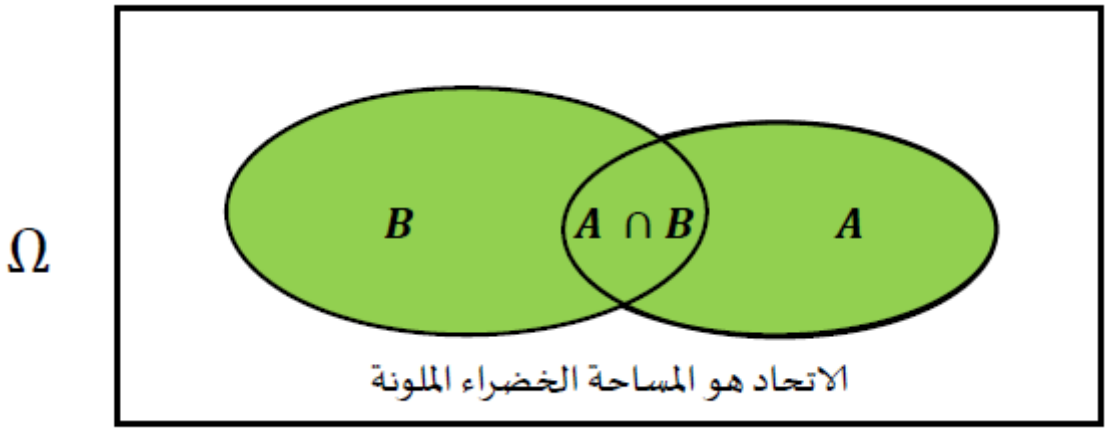
- نفي المجموعة الكلية يعطي لنا المجموعة الخالية، أي أن:

$$\overline{\Omega} = \emptyset$$

3- العمليات على المجموعات

كما هو الشأن بالنسبة للعمليات مع الأعداد (الجمع، الطرح، القسمة)، فإن المجموعات تخضع بدورها إلى مجموعة من العمليات المنطقية.

3-1 الاتحاد: مجموعة جديدة تتكون من جميع عناصر المجموعات المتحدة دون تكرار العناصر المكررة في حالة وجودها، ويمكن التعبير عن الاتحاد كما يلي:



إن الجزء المشار إليه بـ: $A \cap B$ يمثل اتحاد المجموعتين A و B، فعند أخذ أي عنصر من هذا الجزء، قد يكون ينتمي إلى Aفقط أو ينتمي إلى B فقط، أو ينتمي إليهما في آن واحد، يمكن اختصار هذه الحالات في العبارة الشهيرة (على الأقل)، أي كل عنصر ينتمي إلى إحدى المجموعتين على الأقل.

ننبه هنا إلى أن اتحاد المجموعتين A و B لابد أن يرافقه عدم تكرار العناصر التي تنتمي إلى A و B في آن واحد مرتين، يمكن توضيح ذلك في المثال التالي:

مثال: لنفرض أن المجموعة A تحتوي على الأعداد الطبيعية التي هي أقل من 5، أما المجموعة B فتحتوي على الأعداد الطبيعية التي هي أكبر تماما من 2 وأقل أو يساوي 7. **المطلوب:** أوجد اتحاد المجموعتين A و B.

الحل:

لدينا:

$$A=\{0,1,2,3,4\}\ B=\{3,4,5,6,7\}$$

إذن:

$$AUB = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

نلاحظ أن العناصر: 3و4 ظهرت في كل من A و B، لكن عند إجراء عملية الاتحاد ندرجها مرة واحدة فقط.

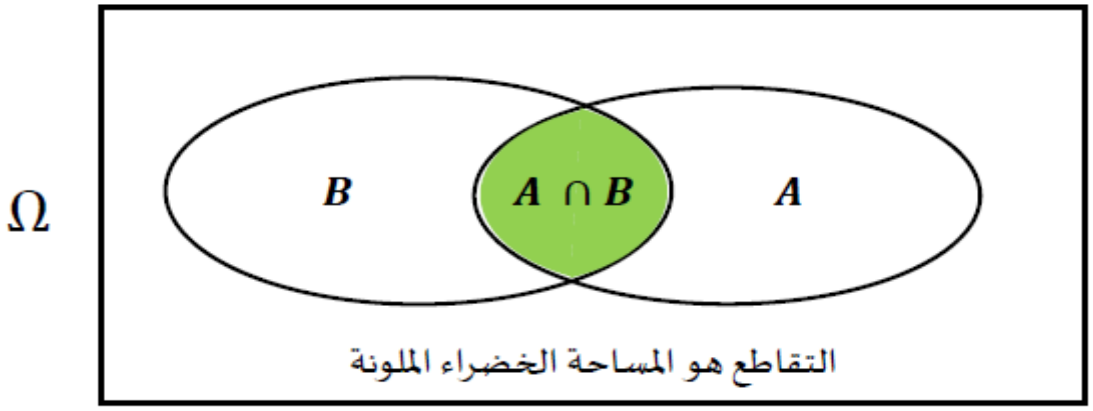
$$A \cup B = \underbrace{A + B} - (A \cap B)$$

ليست عملية جمع الأعداد، وإنما عناصر المجموعة A نضيف لها عناصر المجموعة B

إن أهم خواص الاتحاد هي:

- $A \cup A = A$ ؛
- $A \cup \Omega = \Omega$ ؛
- $A \cup \emptyset = A$ ؛
- خاصية التبديل: $A \cup B = B \cup A$ ؛
- خاصية التجميع: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ ؛
- خاصية التوزيع: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ؛
- إذا كانت: $A \subseteq B$ فإن: $A \cup B = B$.

2-3 التقاطع: مجموعة جديدة تتكون من العناصر المشتركة بين المجموعات المتحدة دون تكرار العناصر المكررة في حالة وجودها، ويمكن التعبير عن التقاطع كما يلي:



إن خواص التقاطع هي:

- $A \cap A = A$ ؛
- $A \cap \Omega = A$ ؛
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ ؛
- خاصية التبديل: $A \cap B = B \cap A$ ؛
- خاصية التجميع: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ ؛
- خاصية التوزيع: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ؛
- إذا كانت: $A \subseteq B$ فإن: $A \cap B = A$.

ملاحظة: من بين العمليات أيضا هو الفرق، وهو مجموعة العناصر المنتمية إلى A ولا تنتمي إلى B وتسمى الفرق بين A و B وتكتب A–B.

مثال: ليكن لدينا المجموعتان التاليتان: $A=\{1,4,4,5,7\}$ $B=\{2,4,7,7,10\}$

أحسب المجموعتين التاليتين: AUB و $A \cap B$ ؟

الحل:

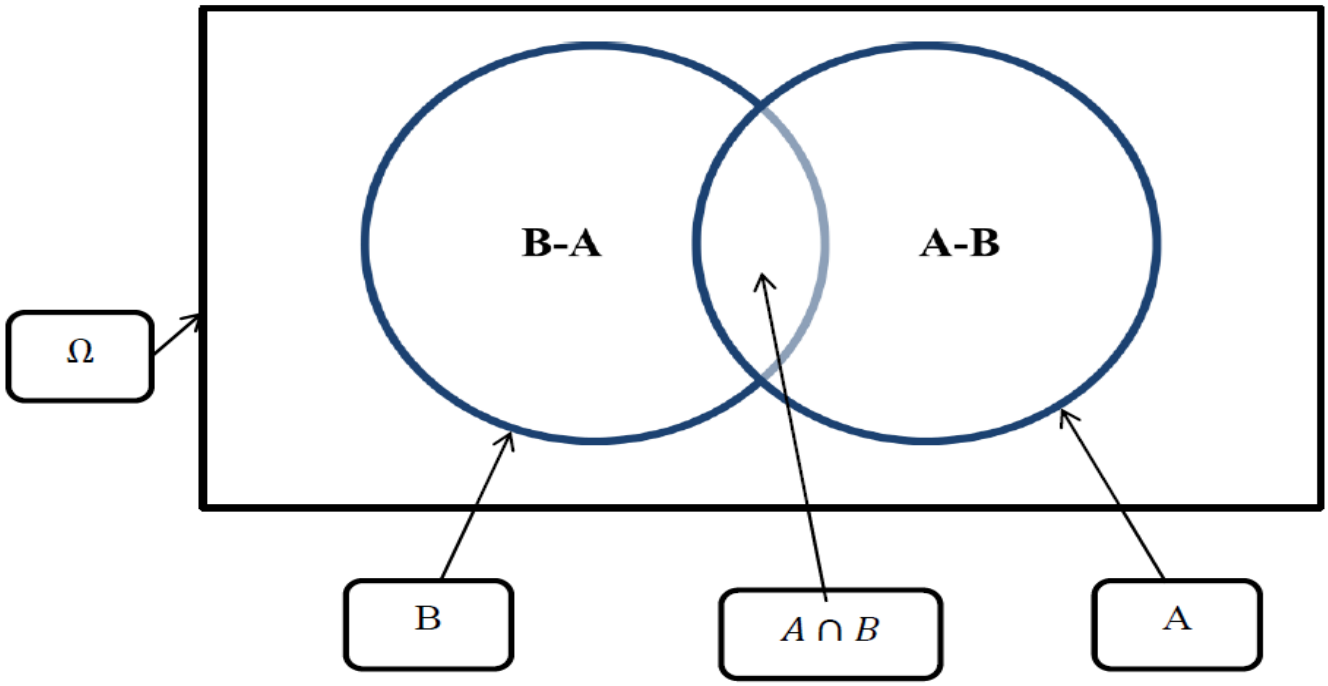
$$AUB = \{1,2,4,5,7,10\}$$

$$A \cap B = \{4,7\}$$

3-3 الفرق بين مجموعتين:

نسمي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B بفرق A وB ، ونرمز لها بالرمز: A-B، وهو نفس الشيء بالنسبة لمجموعة العناصر التي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A التي ترمز لها بالرمز (B-A)، يمكن توضيح هذه المجموعات في الشكل التالي:

الفرق ببين مجموعتين



يمكننا استنباط بعض العلاقات التالية:

- $A - B = A - (A \cap B) = A \cap \bar{B}$ ؛
- $B - A = B - (A \cap B) = \bar{A} \cap B$؛
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$؛
- $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$؛
- $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$؛
- كل العناصر التي لا تنتمي لا إلى A و لا إلى B في نفس الوقت وتنتمي إلى Ω (أي خارج الدائرتين وداخل المستطيل) هي: $\bar{A} \cap \bar{B}$ ؛
- $\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - (A \cup B)$؛
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$؛
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ؛

4- قوانين نظرية المجموعات: A,B,C ثلاثة مجموعات، ومنه:

- $A \subset B \; et \; B \subset C \Longrightarrow A \subset C$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $A - B = A \cap \bar{B}$
- $\overline{(\bar{A})} = A$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

التمرين الأول

إذا كانت $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$، كما أن: $A = \{1,5\}$، $B = \{2,5,3\}$، $C = \{4,2\}$.

أ- أوجـد ما يلي:

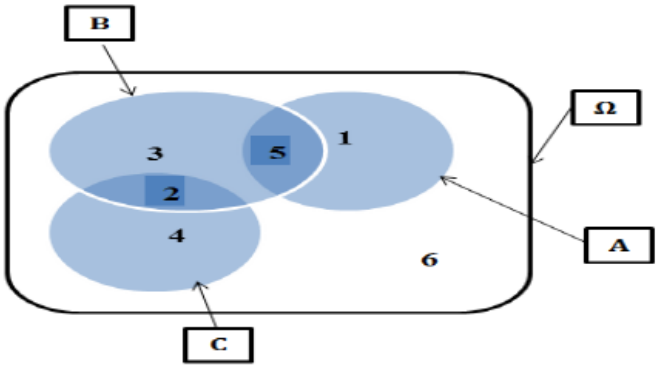
$A \cap B$ ، $A \cap C$ ، $B \cap C$، $(A \cap B \cap C)$، $\bar{A}$، $\bar{B}$ ، $\bar{C}$ ، $A - B$ ، $B - A$ ، $(A \cup B) \cup C$،
$A \cup (B \cup C)$ ، $A \cap (B \cup C)$ ، $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ، $A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ ، $(A \cup B) - (A \cup C)$ ،
$\overline{(A \cap C)} \cup B$ ، $A - (\bar{B} \cup \bar{C})$ ، $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ، $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ ، $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$.

ب- تحقق من صحة العلاقات التالية:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

حل التمرين الأول

قبل حل التمرين يمكننا تمثيل المجموعات في الشكل التالي:



$A \cap B = \{5\}$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \{2\}$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, $\bar{A} = \Omega - A = \{2,3,4,6\}$,
$\bar{B} = \Omega - B = \{1,4,6\}$, $\bar{C} = \Omega - C = \{1,3,5,6\}$, $A - B = \{1\}$, $B - A = \{2,3\}$.

التمرين الثاني:

نقوم برمي زهرة النرد مرة واحدة. لتكن المجموعة S مجموعة النتائج الممكنة:

S={1,2,3,4,5,6}

لتكن الأحداث التالية:

A: الحصول على عدد أصغر من 3

B: الحصول على عدد زوجي

أوجد المجموعات التالية:

$$A \cap B \, , \, A \cup B \, , \, \overline{A} \, , \, A - B \, , \, B - A$$

الحل:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{1,2\}$$
$$B = \{2,4,6\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\} = \{1,2,4,6\}$$
$$\overline{A} = \{x : x \in S \text{ و } x \notin A\} = \{3,4,5,6\}$$
$$\overline{B} = \{x : x \in S \text{ و } x \notin B\} = \{1,3,5\}$$
$$A - B = \{1\}$$
$$B - A = \{4,6\}$$

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A=\{1,2\}$$
$$B=\{2,4,6\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\} = \{1,2,4,6\}$$
$$\overline{A} = \{x : x \in S \text{ و } x \notin A\} = \{3,4,5,6\}$$
$$\overline{B} = \{x : x \in S \text{ و } x \notin B\} = \{1,3,5\}$$
$$A-B=\{1\}$$
$$B-A=\{4,6\}$$

التمرين الثالث:

إذا كانت:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

كما أن: $A=\{1,5\}$، $B = \{2,5,3\}$، $C = \{4,2\}$

أ- أوجد ما يلي:

$(A \cup B) \cup C$ ،$B - A$ ،$A - B$ ،$\bar{C}$ ،$\bar{B}$ ،$\bar{A}$، $(A \cap B \cap C)$،$B \cap C$،$A \cap C$ ،$A \cap B$
$(A \cup B) - (A \cup C)$ ، $A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})$ ،$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ،$A \cap (B \cup C)$ ،$A \cup (B \cup C)$
$\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ ،$\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ ، $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ ،$A - (\bar{B} \cup \bar{C})$ ،$\overline{(A \cap C)} \cup B$.

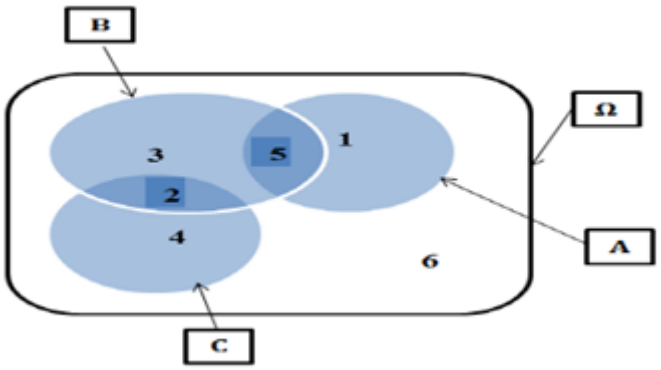
ب- تحقق من صحة العلاقة التالية:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

$$A \cup B \cup C = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

حل التمرين الثالث:

قبل حل التمرين يمكننا تمثيل المجموعات في الشكل التالي:



$A \cap B = \{5\}$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \{2\}$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, $\bar{A} = \Omega - A = \{2,3,4,6\}$,
$\bar{B} = \Omega - B = \{1,4,6\}$, $\bar{C} = \Omega - C = \{1,3,5,6\}$, $A - B = \{1\}$, $B - A = \{2,3\}$.

$(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,5\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4,5\}$

$A \cup (B \cup C) = \{1,5\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{5\} \cup \emptyset = \{5\}$

$A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = \{1,5\} \cap (\{1,4,6\} \cup \{1,3,5,6\}) = \{1,5\} \cap \{1,3,4,5,6\} = \{1,5\}.$

$(A \cup B) - (A \cup C) = \{1,2,3,5\} - \{1,2,4,5\} = \{3\}.$

$(\overline{A \cap C}) \cup B = (\bar{A} \cup \bar{C}) \cup B = (\{2,3,4,6\} \cup \{1,3,5,6\}) \cup B = \{1,2,3,4,5,6\} \cup B$

$(\overline{A \cap C}) \cup B = \Omega \cup B = \Omega.$

$A - (\bar{B} \cup \bar{C}) = \{1,5\} - (\{1,4,6\} \cup \{1,3,5,6\}) = \{1,5\} - \{1,3,4,5,6\} = \emptyset.$

$A \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \{1,5\} \cap \{1,4,6\} \cap \{1,3,5,6\} = \{1\}.$

$$\bar{A} \cap B \cap \bar{C} = \{2,3,4,6\} \cap \{2,3,5\} \cap \{1,3,5,6\} = \{3\}.$$

$(A \cap B \cap C) = \{2,3,4,6\} \cap \{1,4,6\} \cap \{2,4\} = \{4\}.$

نلاحظ أن المجموعات الثلاث الأخيرة تمثل عناصر: A و B و C فقط، أي أننا نستبعد التقاطعات بين المجموعات الأخرى، فمثلا العنصر $\{1\}$ نجد أنه ينتمي إلى A فقط ولا ينتمي إلى B أو C.

ت–التحقق من صحة العلاقات:

للتحقق من صحة العلاقات، سنقوم بحساب كل طرف على حدة، الطرف الأيسر ثم الأيمن لكل علاقة، ثم نطابق بينهما.

$\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \{1,2,3,4,5,6\} - \{1,2,3,5\} = \{4,6\}.$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{2,3,4,6\} \cap \{1,4,6\} = \{4,6\}.$

إذن:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

ننتقل إلى العلاقة التالية:

$\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \{1,2,3,4,5,6\} - \{5\} = \{1,2,3,4,6\}.$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \{2,3,4,6\} \cup \{1,4,6\} = \{1,2,3,4,6\}.$

إذن:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

سنتحقق الآن من العلاقة التالية:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

كم نعلم سابقا، فإن:

$$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\overline{A \cup B \cup C} = \Omega - (A \cup B \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\} - \{1,2,3,4,5\} = \{6\}.$$

نتجه الآن إلى الطرف الأيسر من المعادلة:

$$\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \{2,3,4,6\} \cap \{1,4,6\} \cap \{1,3,5,6\} = \{6\}.$$

وعليه:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

ملاحظة: باتباع نفس المنهجية السابقة، يمكن الوصول إلى نتيجة أخرى وهي:

$$\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

آخر علاقة نتحقق منها، وهي علاقة الاتحاد في حالة وجود ثلاث مجموعات، والمبنية كما يلي:

$$A \cup B \cup C = A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

الطرف الأيسر للمعادلة تم حسابه: $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$ ، سننتقل إلى الطرف الأيمن.

$$\{1,5\} + \{2,3,5\} + \{2,4\} - \{5\} - \emptyset - \{2\} + \emptyset = \{1,5,2,3,5,2,4\} - \{5\} - \{2\}$$

$$A + B + C - (A \cap B) - (A \cap C) - (B \cap C) + (A \cap B \cap C) = \{1,2,3,4,5\}$$

التمرين الرابع:

يبين الجدول التالي توزيع 1000 عامل في شركة وطنية، حسب الجنس (ذكور M، إناث F)، ومستوى التدريب (مدرب E، غير مدرب H).

مستوى التدريب / الجنس	مدرب	غير مدرب	المجموع
ذكر	500	200	700
أنثى	150	150	300
المجموع	650	350	1000

أ- $M \cap E$

ب- $F \cap H$

ت- $M \cup E$

ث- $F \cup H$

الحل:

أ- **$M \cap E$**:

$$\textbf{Card}\ (M \cap E) = 500$$

تمثل هذه المجموعة العمال الذكور **و** المدربين.

ب- **$F \cap H$**

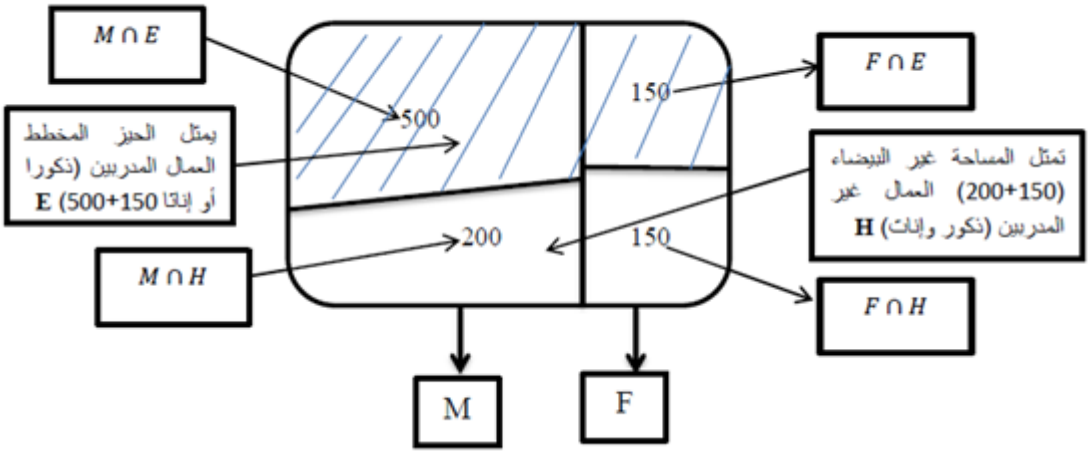
$$\textbf{Card}\ (F \cap H) = 500$$

تمثل هذه المجموعة العمال الذكور **و** المدربين.

ت- $M \cup E$:

$$Card(M \cup E) = card(M) + card(E) - card(M \cap E) = 700 + 650 - 500 = 850$$

إن عناصر هذه المجموعة تضم العمال الذكور (سواء مدرب أو غير مدرب) يضاف إليها المدربين (سواء ذكور أو إناث)، يمكننا الاعتماد على الشكل التالي للتوضيح أكثر.



ث- $F \cup H$

$$Card(F \cup H) = card(F) + card(H) - card(F \cap H) = 300 + 350 - 150 = 500$$

يمكننا الوصول إلى نفس النتيجة السابقة باتباع طريقة ثانية:

$$\underbrace{\underbrace{card(M \cap E)}_{\text{الذكور المدربين}} + \underbrace{card(M \cap H)}_{\text{الذكور غير المدربين}}}_{\text{الذكور}} + \underbrace{card(F \cap E)}_{\text{الإناث المدربات}} = 500 + 200 + 150 = 850$$

الفصل الثاني:

التحليل التوفيقي

مقدمة:

تطرقنا إلى مفاهيم عامة حول المجموعات، غير أن الواقع العملي والدراسات الميدانية في كثير من الأحيان تفرض علينا تشكيل مجموعات جزئية من خلال مجموعات أصلية، وهنا يصعب على الباحث تحديد عدد المجموعات الممكن ظهورها جراء عمليات السحب وبالأخص عند كبر عناصر المجموعات الأصلية، مما يستدعي الاستعانة بالتحليل التوفيقي، الذي يجيب عن هذا الإشكال بمختلف فروعه وحالاته.

سنحاول من خلال هنا عرض أهم النقاط الرئيسية للتحليل التوفيقي، والمتمثلة أساسا في التبديلات، الترتيبات و التوفيقات .

يهدف التحليل التوفيقي الى تحديد عدد الطرق الممكنة للمجموعة ضمن شروط معينة وبقواعد رياضية تسهل هذا التكوين من جهة وتمكن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد بها واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات المواتية (الملائمة) وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بذلك الحادث، وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التوافقي، وعليه فانه سيتم في هذا المحور التركيز على الموضوعات التالية:

- التبادل Les Permutations .
- التراتيب Les Arrangements .
- التوافيق Les Combinaisons .

1-أسس التحليل التوفيقي:

لنفرض أنه لدنينا مجموعتين A وB ونريد تشكيل زوج على عنصر من A وB، إن عدد الأزواج الممكن تشكيلها يمكن إيجادها عن طريق ضرب عدد عناصر A في عدد عناصر B.

يمكن التوسع أكثر، فإذا كان لدينا: $A_1 ; A_2 ; A_2 ; \dots A_k$ مجموعات عدد عناصرها على الترتيب: $n_1 ; n_2 ; n_2 ; \dots n_k$ ونريد تشكيل المجموعة التالية: $\{ x_1 ; x_2 ; x_2 ; \dots x_k \}$ بحيث أن:

$$x_1 \in A_1;\ x_2 \in A_2;\ x_3 \in A_3; \dots\dots; x_k \in A_k$$

في هذه الحالة فإن عدد الطرق التي نستطيع بها تشكيل المجموعة السابقة تكون عبارة عن حاصل جداء عدد عناصر كل مجموعة(أصلي كل مجموعة)، أي:

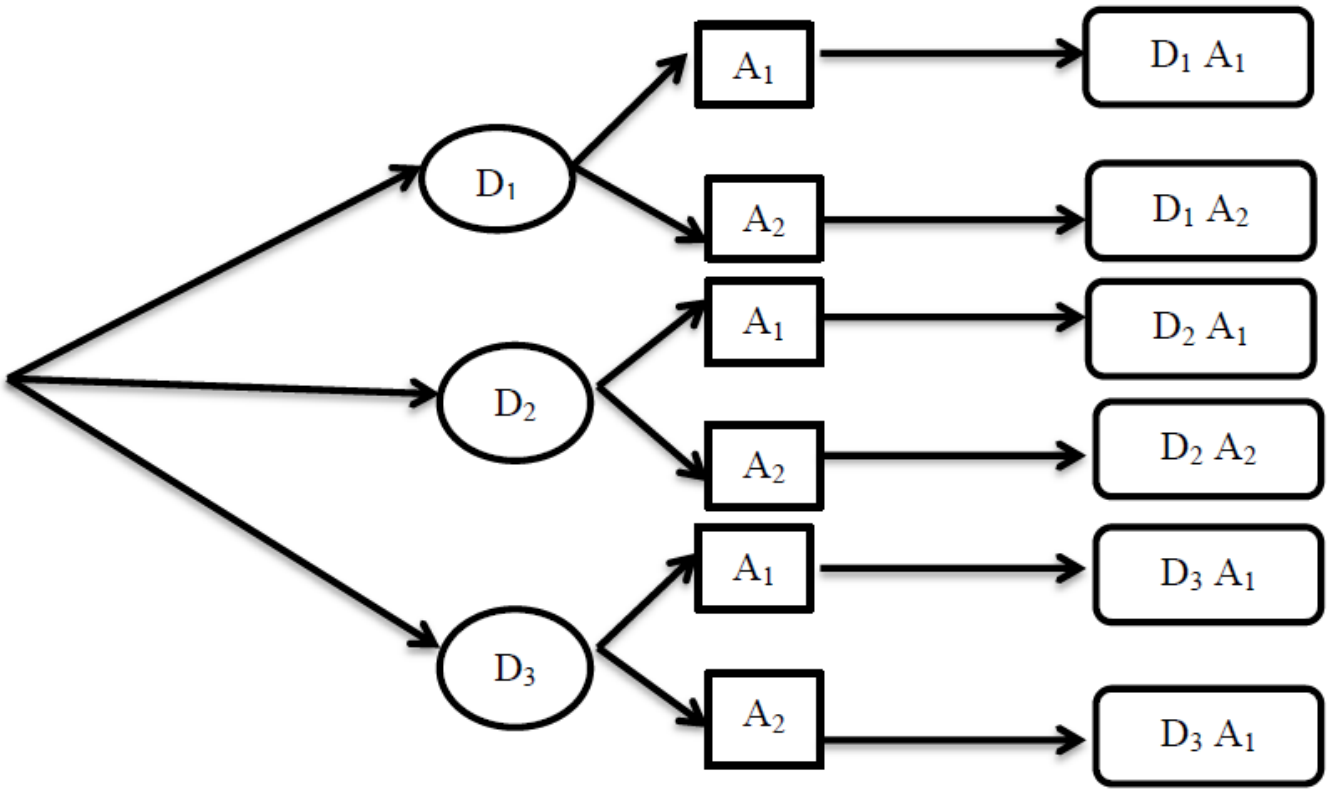
$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

في حالة صغر المجموعات المشكلة يمكن اللجوء إلى "**طريقة الشجرة** "لتحديد عدد المجموعات الممكن تشكيلها،

للتوضيح أكثر نستعين بالأمثلة التالية:

مثال: من أجل انتخاب الجمعيات الطلابية تقدم 3 طلبة (D_1, D_2, D_3) للحصول على منصب مسؤول جمعية، كما تقدم طالبٌ من أجل الحصول على منصب مساعد $(A_1, A_2,)$

المطلوب: ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟



من خلال الشجرة، نلاحظ أن عدد اللجان الممكن تشكيلها هي6 ، وهي تمثل **جميع الحالات الممكنة**، يمكن

تلخيصها رياضيا كما يلي:

$$\Omega = \{(D_1, A_1); (D_1, A_2); (D_2, A_1);\ (D_2, A_2);\ (D_3, A_1);\ (D_3, A_2)\}$$

يمكن استعمال القانون التالي:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

حيث أن المجموعة الأولى والتي تضم المسؤولين عدد عناصرها $n_1=3$ أما المجموعة الثانية والتي تضم الأعوان عدد عناصرها 2 ، بالتطبيق نجد أن:

$$n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6$$

وقبل التطرق الى هذه المواضيع لابد من التطرق الى مبدأ طرق العد

2-مبدأ طرق العد:

مبدأ الضرب: يعتمد مبدأ طرق العد على أنه إذا أمكن القيام بعمل ما بـ: n_1 طريقة مختلفة، وإذا امكن القيام بعمل آخر ب n_2 **:**طريقة مختلفة وهذا من أجل كل طريقة من الطرق السابقة فيمكن القيام بالعملين معا _ بآن واحد _ بعدد من الطرق مساو الى $n_1 \times n_2$ طريقة ممكنة .ويمكن تعميم هذ المبدأ على أكثر من عاملين، والمثال التالي يوضح ذلك.

إذا كان لدينا ثلاث طرق للوصول من مدينة قالمة إلى الجزائر، ومن الجزائر إلى وهران لدينا طريقين فما هي عدد الطرق الممكن للوصول إلى وهران.

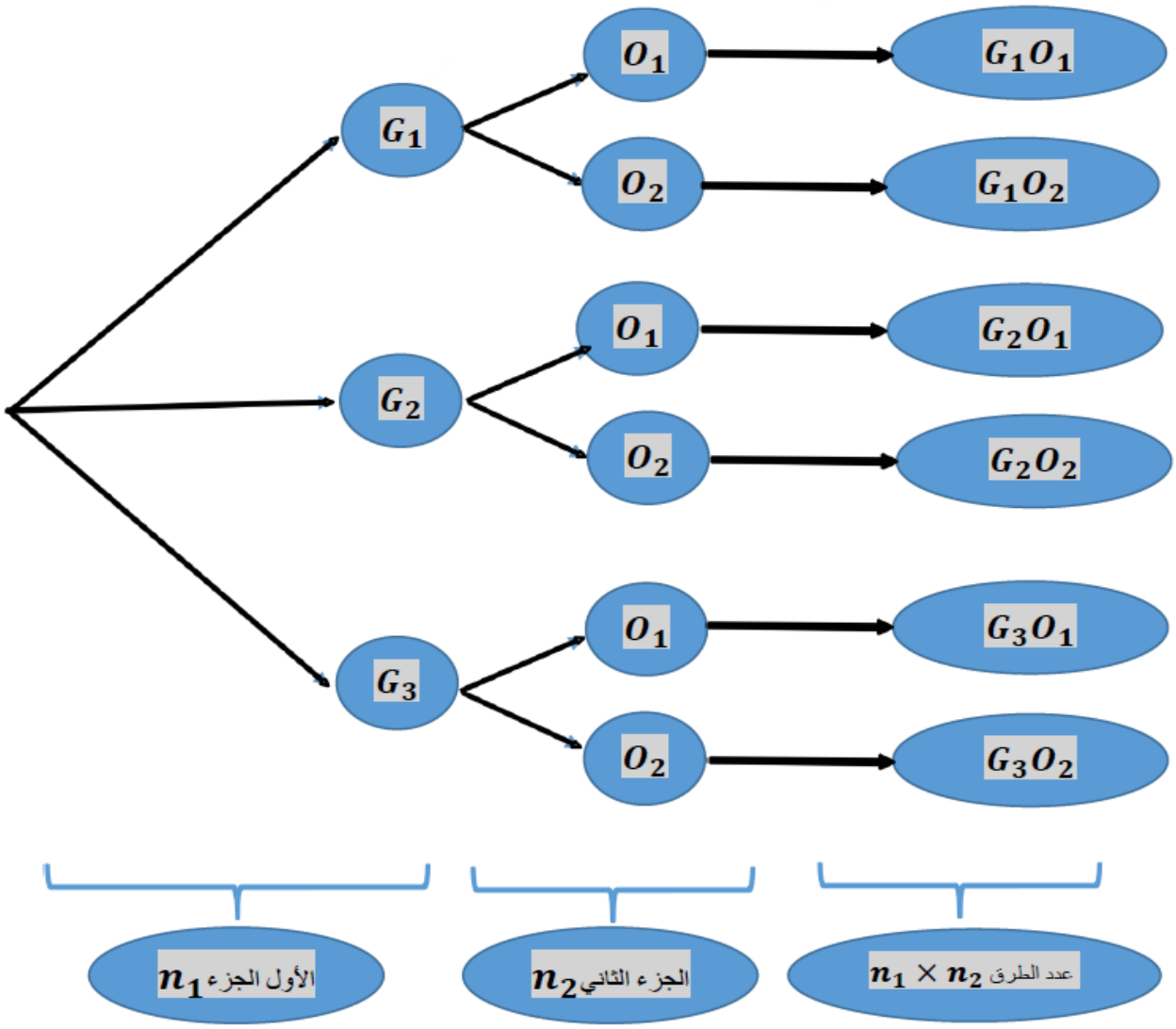
حتى يتم تحليل التمرين وفهمه أكثر سندرج المخطط التالي:

حيث أننا سنرمز للطرق المؤدي الى الجزائر بالرمز $G_1G_2G_3$ على الترتيب أما الطرق المؤدية إلى وهران بالرمز التالي O_1O_2 على الترتيب

الطريق المؤدية من وهران إلى قالمة مرورا بالجزائر العاصمة

الطريق المؤدية من وهران إلى الجزائر العاصمة

الطريق المؤدية إلى الجزائر العاصمة من قالمة



من خلال الشكل نلاحظ أن عدد الطرق المؤدية إلى ولاية وهران هو 6 طرق وبالتالي العملية التي يمكن تطبيقها هي :عدد الطرق في المرحلة الأولى ضرب عدد الطرق في الحالة الثانية

$$n_1 \times n_2 = 2 \times 3 = 6$$

وإذا كان لدينا أكثر من مرحلتين فتكون القاعدة كالتالي:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \ldots\ldots\ldots\ldots n_N$$

مبدأ الجمع: إذا كنا نريد حدوث طريقة واحدة إما الحدث الأول أو الحدث الثاني وليس حدوث الاثنين معا فإن ذلك يطلب استخدام الجمع ولي الضرب أي (N_1+N_2) :طريقة.

مثال: إذا أراد "د" السفر الى مدينة وهران من مدينة قالمة ولديه أربع طرق اذا اتخذ طريق عنابة وثلاث طرق اذا تبع طريق قسنطينة، بكم طريقة يمكن أن يصل الى وهران.

الحل :عدد الطرق الممكن اتباعها هو $4+3=7$

الفرق بين هذا المثال والمثال السابق أنه في الحالة الأولى كان لابد وان يتم دمج طريقين حتى الوصول، لذلك استخدمنا الضرب، أما في هذا المثال فكل طريق مستقل عن الاخر وبالتالي استخدمنا عملية الجمع.

ملاحظة:

عند استخدام (و) نقصد عملية الضرب مثلا في المثال الأول نستخدم طريق قالمة الجزائر والطريق الأول الى وهران، في هذه الحالة استخدمنا حرف (و) وبالتالي نعوضه بعملية الضرب.

عند استخدام (أو) نقصد عملية الجمع مثلا في المثال الثاني نستخدم احد الطرق فلا يوجد ارتباط بين الطرق، أي نستخدم الطريق الأول أو الثاني وبذلك نستخدم عملية الجمع

1- التبادل Les Permutation

يمكن ان نميز في التبادل بين حالتين مهمتين وهما:

- التبادل دون تكرار
- التبادل مع التكرار

1-1 التبادل دون تكرار:

يمكن أن نسمي ترتيب N من العناصر المختلفة بأنه تبديلة هذه العناصر مأخوذة K في كل مرة، بشرط أن تؤخذ جميع العناصر أي . $N=K$ أ هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه العناصر التي تختلف باختلاف ترتيب هذه العناصر على الأقل، ويعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$p_n=n!$$

$n!$ يقرأ n عاملي أو مضروب n حيث أن:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times(n-4)\times.....(n-n)!$$

$$0!=1$$

$$\mathbf{1!=1}$$

$$\mathbf{2!=2\times(2-1)=2}$$

$$\mathbf{3!=3\times(3-1)\times(3-2)}$$

$$\mathbf{4!=4\times(4-1)\times(4-2)\times(4-3)}$$

$$\mathbf{10!=n\times(10-1)\times(10-2)\times(10-3)\times(n10-4)}$$

$$\times\ldots\ldots\ldots\mathbf{(10-9)}$$

مثال:

ماهي عدد الطرق الممكنة لترتيب الأرقام التالية دون تكرار $\mathbf{n=\{1;2;3\}}$:

الطرق الممكنة الكلية دون تكرا ر هي كالتالي:

$$\mathbf{\{1;2;3\}}$$
$$\mathbf{\{1;3;2\}}$$
$$\mathbf{\{2;1;3\}}$$
$$\mathbf{\{2;3;1\}}$$
$$\mathbf{\{3;1;2\}}$$
$$\mathbf{\{3;2;1\}}$$

نلاحظ أن عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الأرقام هو 6 طرق، كل طريقة من هذه الطرق تسمى تبديلة، بمعنى انه لدينا 6 تبديلات ممكنة لهذ الأرقام دون تكرار

ويمكن حسابها بالطريقة التالي:

$$\mathbf{p_3=3!=3\times(3-1)\times(3-2)\times(3-3)!}$$

أي

$$\mathbf{p_3=3!=3\times2\times1\times0!}$$

ومنه:

$$\mathbf{p_3=3!=6}$$

ملاحظة:

بالنسبة للتكرار ليس من الضروري ان يكون في المعطيات لأنه في بعض الحا لات لا يحدد لنا هل التبديل دون تكرار ام لا لأنه يستحيل فيه التكرار مثلا ترتيب مجموعة من الكتب في هذه الحالة التكرار مستحيل لأنه لا يمكن وضع كتاب في نفس الوقت في عدة ترتيبات.

في حالة العدد الكلي اكبر من الترتيبات، مثلا تشكيل كلمة مكونة من ثلاث حروف مع العلم ان الحروف المتاحة هي خمسة حروف، يمكن تعريف ذلك كما يلي:

نفرض أن لدينا $\boldsymbol{n}$ مقعدا مرقما وهناك $\boldsymbol{N}$ شخصا لمعرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ملىء المقاعد.

المقعد الأول له $\boldsymbol{N}$ طريقة، والثاني له $\boldsymbol{N-1}$ طريقة، والثالث $\boldsymbol{N-2}$ طريقة وهكذا حتى المقعد الأخير ويمكن لأن يملأ ب $\boldsymbol{N-(n+1)}$ طريقة.

أي أن عدد الطرق المختلفة لملىء المقاعد هو:

$$\boldsymbol{N(N-1)(N-2)(N-3)\ldots\ldots(N-1)}$$

أي: $\boldsymbol{P_n{}^N = \frac{N!}{(N-n)!}}$ **:**

هدا العدد يسمى $\boldsymbol{N}$ تباديل $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{N\ permutation}$) ويرمز له بالرمز $\boldsymbol{P_n{}^N}$

أي:

مثال :ماهي عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من هذه الحروف A B C D E إذا كان:

1. إذا كانت الكلمة مكونة من خمسة حروف لا يهم المعنى
2. إذا كانت الكلمة مكونة من ثلاثة حروف لا يهم المعنى

الحالة الأولى: عدد الحروف الإجمالي يساوي العدد المطلوب تشكيل كلمة منه وبالتالي تكون كالتالي:

$$\boldsymbol{p_5 = 5! = 5\times(5-1)\times(5-2)\times(5-3)\times(5-4)\times(5-5)!}$$

ومنه $\boldsymbol{p_5 = 5\ ! = 120}$

بمعنى ان هناك 120 تبديلة يمكن تشكيل بها هذه الحروف الخمسة من اجمالي خمسة حروف وذلك دون تكرار الحرف

أي: $\boldsymbol{P_n{}^N = \frac{N!}{(N-n)!}}$

حيث أن $\boldsymbol{N}$ هي العدد الاجمال و $\boldsymbol{n}$ هي العدد الذي يراد ترتيبه وبما أن العدد الإجمالي للحروف هو $\boldsymbol{N=5}$ وعدد الحروف المطلوب إيجاد عدد التباديل الممكنة لها هو $\boldsymbol{n=5}$

ملاحظة يمكن حل العملية باستخدام القانون التالي: $\boldsymbol{P_n{}^N = \frac{N!}{(N-n)!}}$ أيضا

$$\boldsymbol{P}_5{}^5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$$

الحالة الثانية: عدد الحروف الإجمالي أقل من العدد المطلوب تشكيل كلمة منه وبالتالي تكون كالتالي:

$$\boldsymbol{P}_5{}^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = \mathbf{5\times4\times3=60}$$

أي أن عدد التبديلات الممكنة لثلاثة حروف من خمسة حروف هو 60 تبديلة ممكنة دون تكرار

1-2- التبادل مع التكرار:

إذا كانت A مجموعة تحتوي على n عنصر، غير أن هذه العناصر منها ما هو متشابه، ونريد إعادة تشكيل عناصر المجموعة A عن طريق تبديل عناصرها، باستخدام القانون التالي:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,\ldots..n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

حيث أن: n_1: تمثل عدد العناصر المتشابهة من الصنف الأول والتي تنتمي إلى A، n_2 تمثل عدد العناصر المتشابهة من الصنف الثاني والتي تنتمي إلى A،....، n_k تمثل عدد العناصر المتشابهة من الصنف k والتي تنتمي إلى A.

مثال 01: بكم طريقة يمكن إعادة تشكيل الكلمة التالية: statistique عن طريق تبديل أحرفها واستعمالها جميعا (لها معنى أو لا)؟

لدينا: n=11، كما نلاحظ أن الحرف s تكرر مرتين $n_1=2$، والحرف t تكرر ثلاث مرات $n_2=3$، والحرف i تكرر مرتين $n_2=2$، إذن نحن أمام تبديلة مع تكرار العناصر، وبالتالي فإن عدد الكلمات الممكن تشكيلها من خلال استعمال جميع الأحرف هي:

$$P_{11}^{2,3,2} = \frac{11!}{2!\,3!\,2!} = 1663200$$

2-2-4- التبديلة الدائرية: هي كل مجموعة جزئية ذات n عنصر يتم اختيارها من مجموعة كلية ذات n عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها، حيث ترتيب العناصر مهم، وتكون على صف دائري، ليس لها بداية ثابتة أو مرجعية، يتم اختيارها بعدد طرق يساوي:

$$P_n = (n-1)!$$

مثال (06): بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة ؟

الحل: يمكن الجلوس بعدة طرق كما يلي:

$$P_5 = (5-1)! = 4! = 24$$

2-الترتيبات Les Arrangements:

الترتيبات هي مرتبة لمجموعة من الأشياء ليست مأخوذة جميعها؛ أي جزء من الكل..

الترتيبة هي مجموعة جزئية ذات r عنصر يتم اختيارها أو تشكيلها أو سحبها من مجموعة أخرى ذات n عنصر حيث $r<n$ (لو يكون $r=n$ الترتيبة تصبح تبديلة) وشرط الترتيب مهم، ونميز بين الترتيبات دون تكرار والترتيبات بتكرار.

2-1 الترتيبات دون تكرار(السحب بدون إرجاع)

مثال 01: إذا كان لدينا الأحرف التالية: WSZG وطلب منا ترتيبها اثنين اثنين بترتيبات مختلفة دون تكرار:

<WS/WZ/WG>

<SW/SZ/SG>

<ZW/ZS/ZG>

<GW/GS/GZ>

نلاحظ أننا حصلنا على 12 ترتيبة

يمكننا التبيان بطريقة أخرى عبر الشكل التالي:

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا أربع حروف يمكن أن نضعها في الترتيب الأول	في الحالة الثانية لدين فقط ثلاث اختيارات لأننا نكون قد وضعنا حرف في الحالة الأولى
4	3
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد3×4 والنتيج هي 12	

ويمكننا حسابه من خلال القاعدة التالية:

إن ترتيب $\boldsymbol{p}$ عنصرا اخترناه من بين $\boldsymbol{n}$ عنصرا وهو تشكيل مرتب ل $\boldsymbol{p}$ من $\boldsymbol{n}$ عنصرا، حيث كل واحد منها يظهر مرة واحدة على الأكثر في نفس الترتيب

إذا رمزنا ب $\boldsymbol{A_n^p}$ إلى عدد الترتيبات

$\boldsymbol{p}$ عنصرا مختارا من بين $\boldsymbol{n}$ ، $\boldsymbol{p=2}$

n العدد الكلي n=4

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{(2)!} = \frac{4\times3\times2!}{(2)!} = 4\times3=12$$

ومنه عدد الترتيبات الممكنة دون تكرار هو 12

مثال 02: لدينا **خمسة** مرشحين للانتخابات الرئاسية سينتقل منهم **اثنين** أحدهما رئيس **والأخر** نائب، فما هو عدد التراتيب الممكنة؟

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا خمسة مرشحين يمكن أن يكون أي منهم في الترتيب الأول يعني خمسة خيارات	في الحالة الثانية لدين فقط أربع مرشحين لأننا نكون قد اخترنا مرشحا في الحالة الأولى
5	4
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد5×4 والنتيجة هي 20	

إذا رمزنا ب $\boldsymbol{A_n^p}$ إلى عدد الترتيبات

$\boldsymbol{p}$ عنصرا مختارا من بين $\boldsymbol{n}$ ، $\boldsymbol{p=2}$

n العدد الكلي n=5

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{(3)!} = \frac{5\times4\times3!}{(3)!} = 5\times4=20$

ومنه عدد الترتيبات الممكنة لاختيار رئيس ونائب معه هو 20 ترتيبة

وعليه إذا كانت عملية سحب المجموعة الجزئية تتم بدون إعادة العناصر المحسوبة، أي أنها لن تظهر مرة أخرى في عملية السحب(لا تتكرر)، في هذه الحالة نكون أمام ترتيبة بدون تكرار والتي نرمز لذا بالرمز A^k_n ، مع التنبيه إلى عامل ترتيب العناصر يؤثر في شكل المجموعة المحسوبة.

إن عدد المجموعات المسحوبة، يتم حسابها وفق الصيغة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال03: لتكن المجموعة A حيث أن: $A=\{1\ ,2,3,4,5,6\}$، بكم طريقة يمكننا تشكيل عدد مكون من ثلاث أرقام تنتمي إلى المجموعة A، مع استعمال الرقم مرة واحدة فقط؟

لدينا: $n=5$، ونريد سحب 3 أرقام من A، أي أن $k=3$ مع عدم تكرار الأرقام، في هذه الحالة نحن أمام ترتيبة، لأن ترتيب كل رقم سيؤثر في العدد المسحوب، فمثلا لو سحبنا الرقم الأول وجدناه 1 ثم الرقم الثاني وجدناه 4 ثم سحبنا الرقم الثالث فوجدناه 2 سيصبح العدد المشكل هو: 142، لنفرض الآن أن الرقم المسحوب الأول كان 4 ثم 1 ثم 2، سيتغير العدد ويصبح 412، في هذه الحالة نقول أن الترتيب يؤثر في شكل المجموعة المسحوبة.

هذا، لكي نوضح مسألة الترتيب ونزيل الالتباس الذي قد يحصل في ذهن الطالب، لنعد الآن إلى حل المثال، وباستخدام العلاقة السابقة نجد أن الأعداد الممكن تشكيلها من خلال استعمال 3 أرقام من A هي:

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{(2)!}=60$$

2-2 الترتيبات بتكرار(السحب مع الإرجاع):

نسمي ترتيبة بتكرار إذا كانت عناصرها يمكن تكرارها، أي أن العنصر المسحوب يتم إرجاعه، في هذه الحالة ممكن أن يظهر مرة أخرى عند إجراء عملية سحب جديدة (يتكرر)، ويرمز لعدد الترتيبات بتكرار بالرمز $\hat{A}^k_n$، ويكون عدد المجموعات الجزئية الممكن تشكيلها هو:

$$\check{A}_n^k = \underbrace{n\times n\times n\times \dots \times n}_{k\ \text{مرة}} = n^k$$

مثال: إذا كان لدينا الأحرف التالية: WSZG وطلب منا ترتيبها اثنين اثنين بترتيبات مختلفة مع التكرار:

<WS/WZ/WG/WW>

<SW/SZ/SG/SS>

<ZW/ZS/ZG/ZZ>

<GW/GS/GZ/GG>

نلاحظ أننا حصلنا على 16 ترتيبة

وحتى نبين بطريقة أخرى نلاحظ الشكل التالي:

تلخيص عملية الترتيب	
في الحالة الأولى لدينا أربع حروف يمكن أن نضعها في الترتيب الأول	في الحالة الثانية لدين أيضا أربع اختيارات لأنه مسموح بتكرار الحرف الذي اختير سابقا
4	4
وبالتالي بما أن الحروف مع بعضها أي نستخدم عملية الضرب لنجد 4×4 والنتيجة هي 16	

حيث أن العملية الحسابية التي حسبنا بها هي: 4×4 أي: 4^2

وبما أن:

P عنصر مختارا من بين n، p=2

N العدد الكلي n=4

نرمز للترتيبات مع التكرار بالرمز

$$\check{A}_n^k = \underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ مرة}} = n^k$$

حيث أن: n يمثل العدد الإجمالي

K يمثل العدد الذي نختاره من العدد الإجمالي لأجل ترتيبه

مثال:

إذا كان لدينا الأرقام التالية: 0,2,4,6,8,9,1 فماهي عدد الطرق التي يمكن أن نحصل بها على ترتيبات مكونة من أربعة أرقام في حالة التكرار وفي حالة عدمه

لدينا:

p عنصرا مختارا من بين n ، $p = 4$

n العدد الكلي $n\{1.9.8.6.4.2.0\} = 7$

في حالة التكرار	في حالة عدم التكرار
$\widehat{A_7^4} = \underbrace{7 \times 7 \times 7 \times 7}_{} = 7^4 = 2401$	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p))!} = A_7^4 = \frac{7!}{(7-4))!} = \frac{7!}{(3)!}$ $= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3)!}$ $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$
2401	840

نلاحظ أن عدد الترتيبات في حالة التكرار أكبر منها في حالة ʻدم التكرار أي:

$$\widehat{A_n^p} > A_n^p$$

تتساوى الترتيبات في حالة التكرارات وعدم التكرارات الا إذا كان $p = 1$

مثال: تنوي إحدى شركات الاتصال إنشاء خطوط هاتفية جديدة في إحدى الدول، حيث يتكون الخط الهاتفي من 7 أرقام.

أ- ما هي عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها من الناحية النظرية؟

ب- إذا كان الرقم الأول 0 والرقم 5، ما هي عدد الخطوط الممكن تشكيلها؟

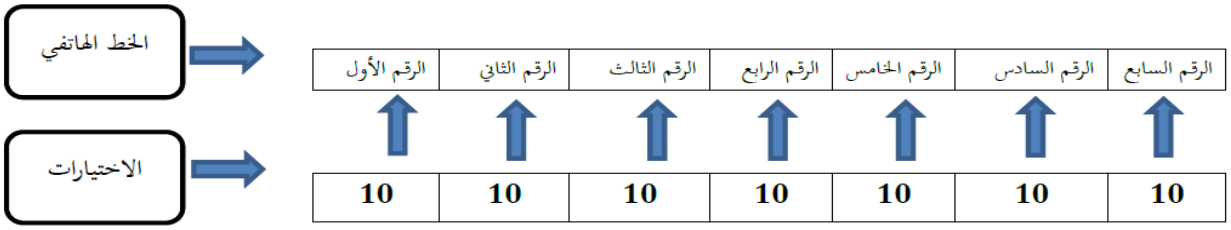
الحل:

أ- عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها من الناحية النظرية

نحن أمام ترتيبة مع تكرار، حيث أن: n=10 (9,…,2,1,0) و k=7، إذن عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها هي:

خط هاتفي Â $= 10^7 = 10000000 = {}^7{}_{10}$

يمكن الاعتماد على هذا الشكل للتوضيح أكثر



إذن :عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها من الناحية النظرية هي جداء الاختيارات، أي:

$$10 \times 10 \times \ldots \times 10 = 10^7$$

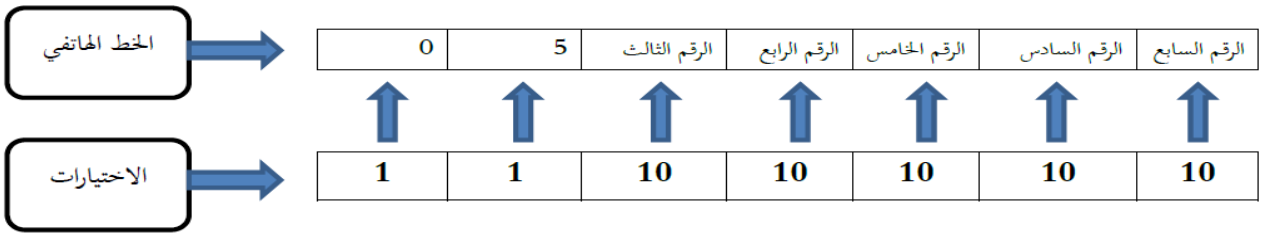
ب- إذا كان الرقم 0 والرقم الثاني 05

من الناحية العملية، كل شركة اتصالات تعتمد الرقم 0 كرقم أول تتبعه برقم ثاني يميزها عن بقية شركات الاتصال الأخرى، في هذه الحالة فإن عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها سينخفض لفرض قيود، ليصبح عدد الخطوط الممكن تشكيلها هو:

$$\underbrace{1}_{\text{الرقم الأول 0}} \cdot \underbrace{1}_{\text{الرقم الثاني 5}} \cdot \check{A}^5_{10} = 10^5 = 1000000$$

اختيار واحد اختيار واحد

يمكن الاعتماد على الشكل السابق للتوضيح أكثر:



عدد الخطوط هو:

$$1 \times 1 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$$

تمرين (02): صندوق يحتوي على 37 كرية، منها 12 كرية صفراء، 10 كريات خضراء و 15 كرية بيضاء

أ/ نسحب من الصندوق 3 كريات الواحدة تلوى الأخرى و بدون إرجاع:

1- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم صفراء.

2- أحسب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء.

3- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة.

ب/ نسحب من الصندوق 3 كريات الواحدة تلوى الأخرى و بالإرجاع:

1- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم خضراء.

2- أحسب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء.

3- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة.

حل تمرين 02:

أ/ سحب ثلاث كريات الواحدة تلوى الأخرى و بدون إرجاع:

1. حساب عدد الحالات الكلية (الممكنة):

$$A_{37}^{3} = \frac{37!}{(37! - 3!)} = 46620$$

2. حساب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم صفراء: لنرمز لهذا الحدث بالحدث A

$$P(A) = \frac{A_{10}^{1} \times A_{15}^{1} \times A_{12}^{1}}{A_{37}^{3}} = \frac{10 \times 15 \times 12}{46620} = 0.028$$

3. حساب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء، و لنرمز لهذا الحدث بالحدث B:

$$P(B) = \frac{A_{12}^{3}}{A_{37}^{3}} = \frac{\frac{12!}{3!\,9!}}{46620} = \frac{220}{46620} = 0.004$$

4. أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة: لنرمز لهذا الحدث بالحدث C:

$$P(C) = \frac{3 \times (A_{10}^{1} \times A_{27}^{2})}{A_{37}^{3}} = \frac{3 \times 10702}{46620} = 0.45$$

ب/ سحب ثلاث كريات الواحدة تلوى الأخرى و بإرجاع:

1. حساب عدد الحالات الكلية (الممكنة):

$$\tilde{A}_{37}^{3} = 37^{3} = 50653$$

2. حساب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم خضراء: لنرمز لهذا الحدث بالحدث A:

$$P(A) = \frac{\tilde{A}_{10}^{1} \times \tilde{A}_{15}^{1} \times \tilde{A}_{9}^{1}}{A_{37}^{3}} = \frac{10 \times 15 \times 9}{46620} = 0.028$$

3. حساب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء: لنرمز لهذا الحدث بالحدث B:

$$P(B) = \frac{\tilde{A}_{12}^{3}}{\tilde{A}_{37}^{3}} = \frac{1728}{50653} = 0.034$$

4. حساب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة: لنرمز لهذا الحدث بالحدث C:

$$P(C) = \frac{3 \times (\tilde{A}_{10}^{1} \times \tilde{A}_{27}^{2})}{\tilde{A}_{37}^{3}} = \frac{3(10729)}{50653} = 0.43$$

2- التوفيقات Combinaisons

تسمى أيضا في بعض المراجع بالتوليفات، إذن فالتوفيقة هي مجموعة جزئية ذات p عنصر يتم اختيارها و تشكيلها أو سحبها من مجموعة أخرى ذات n عنصر حيث $p \leq n$ وشرط الترتيب غير مهم. والمثال التالي يبين التوفيقات:

لدينا أربع كرات متجانسة وملونة بالألوان التالية :أحمر $\boldsymbol{R}$، أبيض $\boldsymbol{B}$، أزرق $\boldsymbol{P}$، اسود $\boldsymbol{N}$. ونريد أن نختار اثنين من الكريات، وبالتالي تكون الطرق الممكنة للاختيار كما يلي:

التوفيقات الممكنة $\begin{cases} \boldsymbol{NP} \\ \boldsymbol{NB} \\ \boldsymbol{NR} \\ \boldsymbol{PB} \\ \boldsymbol{PR} \\ \boldsymbol{BR} \end{cases}$

نلاحظ أن لدينا 6 توفيقات ممكنة

ملاحظة:

التوفيقات تشبه الترتيبات لكن في هذه الحالة التشكيلتين$\{\boldsymbol{NP}_{\boldsymbol{PN}}$ نعتبرهما تشكيلة واحدة فمثلا عند دخولك المحل بهدف شراء قلم احمر وقلم أزرق، نعتبر قولك لصاحب المكتبة أعطيني قلم احمر وقلم أزرق أو اعطيني قلم أزرق وقلم أحمر نفس الشيء.

تعريف: إن تو افقية عنصرا $\boldsymbol{P}$ اخترناه من بين $\boldsymbol{N}$ عنصرا هي تشكيل غير مرتب لهذه العناصر حيث يظهر كل واحد منها مرة واحدة على الأكثر.

نرمز بـ C_n^p وأحيانا $\left(\frac{n}{p}\right)$ عدد التوفيقات الممكن إجراؤها بواسطة $\boldsymbol{p}$ عنصرا نختاره من بين n حيث أن $p \leq n$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} C_n^p$$

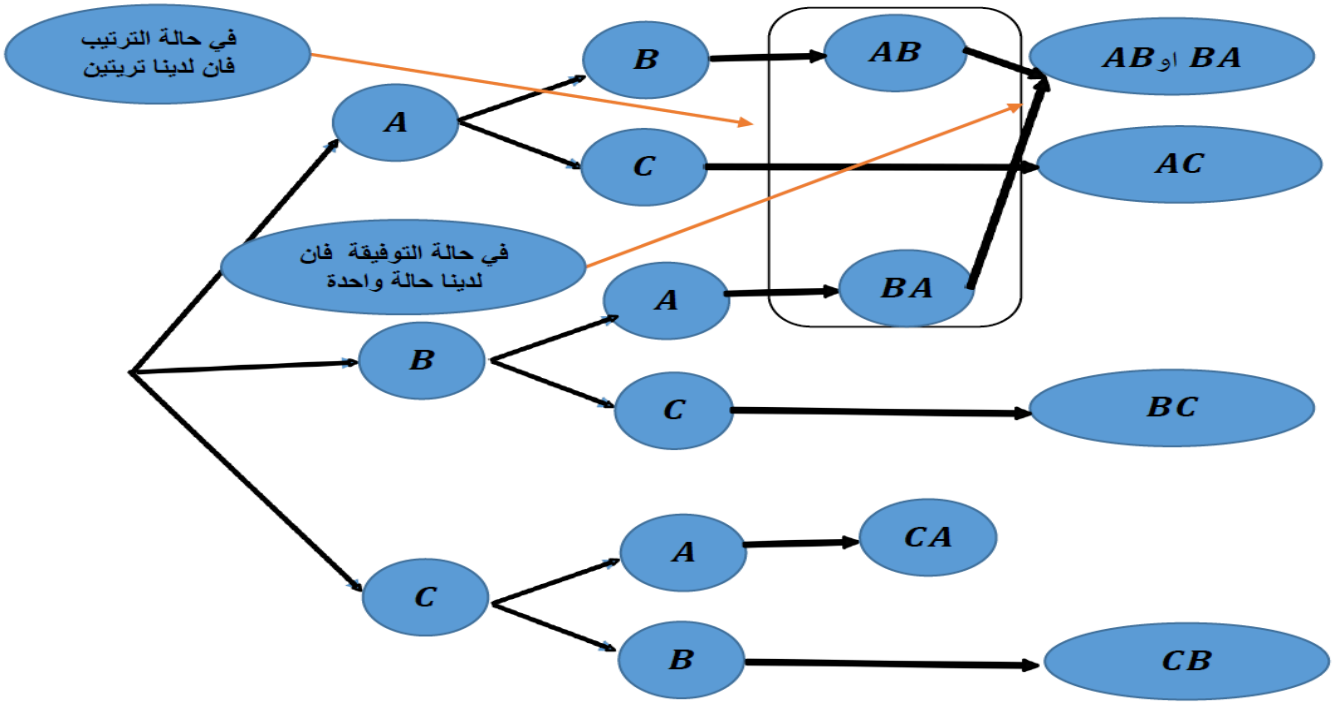
بالعودة إلى المثال السابق :لدينا أربع كرات متجانسة وملونة بالألوان التالية :أحمر $\boldsymbol{R}$، أبيض $\boldsymbol{B}$ ، أزرق $\boldsymbol{P}$، اسود $\boldsymbol{N}$. ونريد أن نختار اثنين من الكريات، وبالتالي تكون الطرق الممكنة للاختيار كما يلي:

في هذه الحالة $p=2$ و $n=4$

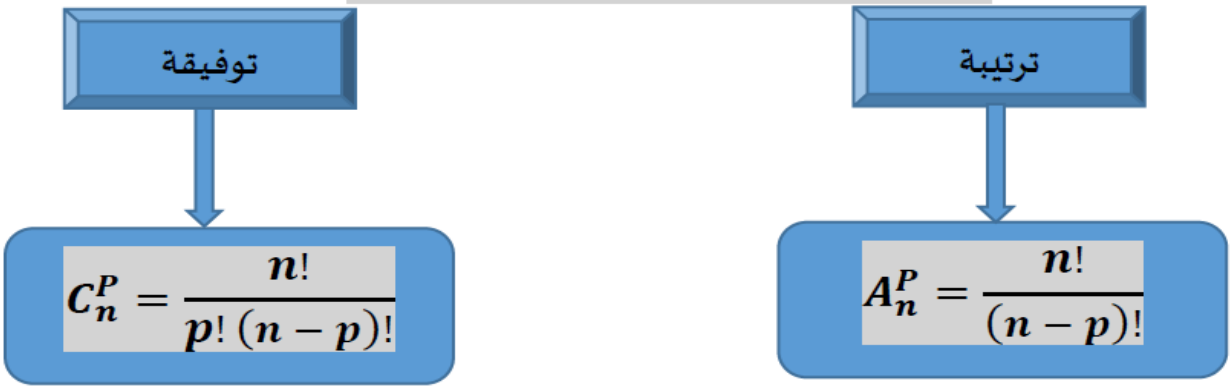
$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times3\times2!}{2!2!} = \frac{12}{2} = 6C_n^p$$

الفرق بين التوفيقة والترتيبة هو أن الترتيبة يكون للترتيب فيها معنى أي يؤثر على المشاهدة مثلا:

إذا كانت لدينا الأرقام التالية $(1,2,3,4,5)$:وطلب منا تشكيلها اثنين اثنين دون تكرار فإننا نجد فرق بين ترتيب رقمين مثلا $(12|21)$ الأولى تقرأ أثنى عشر والأخرى تقرأ واحد وعشرون، أما إذا كانت لدينا مثلا أربع كرات ملونة واحدة حمراء والخرى بيضاء والأخرى زرقاء والأخيرة سوداء وطلب من تشكيلها اثنين اثنين ووضعنا ترتيب) زرقاء حمراء| حمراء زرقاء (من هنا نلاحظ أن التغير في الترتيب ليس له أي معنى وبتالي تعتبر تشكيلة واحدة.



توضيح الفرق في القانون بين الترتيبة والتوفيقة



الفرق بين الترتيبة والتوفيقة في القانون هو أننا في التوفيقة نقسم على

$$p!\,(n-p)!$$

والهدف من إضافة $p!$ هو الغاء الترتيب لأنه كما شرحنا سابقا فان الترتيب ليس له معنى وبالتالي التشكيلات التي تغير فيها الترتيب تحسب واحدة فقط لذل لاد من الغائها بالقسمة على $p!$

خصائص التوفيقات:

الخاصية الأولى:

إذا كان الفرق بين العدد الكلي n والعدد المسحوب واحد $(n-1)$ فإن عدد التوفيقات يساوي العد الكلي n

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-(n-1))!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!\,(n-n+1))!} = \frac{n}{(0+1))!} = n$$

الخاصية الثانية:

إذا كان العدد الكلي والعدد المسحوب متساوي فان عدد التوفيقات يكون مساوي للعد واحد

$$C_n^n = \frac{n!}{(n)!\,(n-(n))!} = \frac{(n)!}{(n)!\,(0))!} = \frac{(n)!}{(n)!} = 1$$

الخاصية الثالثة:

إذا كان العدد المسحوب هو صفر من العدد الكلي n فان عدد التوفيقات يكون توفيقة واحدة 1

$$C_n^0 = \frac{n!}{(0)!\,(n-0)!} = \frac{(n)!}{(n)!} = \frac{(n)!}{(n)!} = 1$$

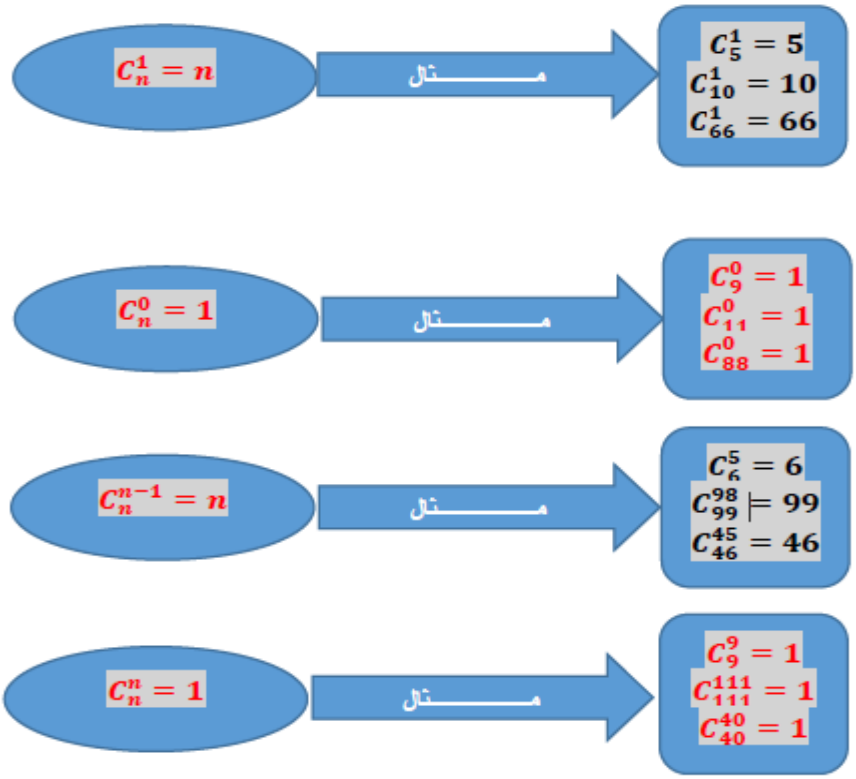
الخاصية الرابعة:

إذا كان العدد المسحوب هو 1 من العدد الكلي n فان عدد التوفيقات يكون مساوي للعدد الكلي n

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

في هذه الحالة فإن: $C_n^1 = A_n^1$

مثال في خواص التوفيقات:



مثال:

اذا أخذنا مرشحين اثنين من بين ثلاثة مرشحين ولم نأخذ بعين الاعتبار الترتيب .فما هي عدد التوفيقات الممكنة واذكرها؟

$\boldsymbol{P=2}\rightarrow$ المسحوب

$\boldsymbol{P=2}\rightarrow$ العدد الكلي

$$= C_3^2 = \frac{3\times 2!}{2!(3-2)!} = 3C_n^p$$

ونميز هنا بين التوفيقات دون تكرار والتوفيقات بالتكرار.

1-3 توفيقات بدون تكرار: نسمي توفيقة دون تكرار إذا كان يمكن اختيار مجموعة ذات r عنصر من بين مجموعة أخرى ذات n عنصر دون تكرار نفس العنصر، ويرمز لعدد التوفيقات دون تكرار بالرمز C_n^r ويمكن حساب عدد التوفيقات في هذه الحالة كما يلي:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

مثال: صندوق به 10 مصابيح نسحب منه في آن واحد 3 مصابيح بطريقة عشوائية، وما عدد امكانيات اجراء السحب ؟

السحب يتم في آن واحد إذن الترتيب غير مهم ومنه نستخدم قانون التوفيقات لحساب عدد الامكانيات، كما يلي:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2} = 120$$

خواص: $C_n^{n-1} = n$ ؛ $C_n^1 = n$ ؛ $C_n^n = 1$ ؛ $C_n^0 = 1$

2-3 **التوفيقات بتكرار**: نسمي توفيقة بتكرار إذا كان يمكن اختيار مجموعة ذات r عنصر من بين مجموعة أخرى ذات n عنصر مع امكانية تكرار نفس العنصر، ويرمز لعدد التوفيقات بتكرار بالرمز $\hat{C}_n^r$ ويمكن حساب عدد التوفيقات في هذه الحالة كما يلي:

$$\tilde{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! \times r!}$$

مثال: فرضا أنه في مقهى يوجد شخص يريد الحصول على علبتي عصير من بين 3 أنواع موجودة في الثلاجة، كم طبق به علبتي عصير يمكن أن يقدم له؟

بما أنه يمكن شرب نفس النوع مرتين فإن عدد الأطباق التي يمكن أن تقدم له هي:

$$\hat{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6 \text{ أطباق}$$

مثال: نريد سحب عينة مكونة من 3 طلبة من بين 6 طلبة، مع العلم أم طريقة السحب بالإرجاع، كم عدد الطرق التي يمكن بها سحب هذه العينة؟

$$\check{C}^{3}_{6+3-1} = \frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{3!\,5!} = 56$$

تمرين (01) : يريد طلبة كلية العلوم الاقتصادية تأسيس مجلة طلابية، و يحتاجون إلى فريق تحرير يتكون من 5 طلاب، المرشحون لهذا الفريق هم 5 طالبات و 7 طلاب.

- ما هو عدد الفرق الممكن تشكيلها؟
- ما هو احتمال أن يتضمن فريق التحرير على الإناث فقط؟
- ما هو احتمال أن يتضمن فريق التحرير على الذكور فقط؟
- ما هو احتمال أن يتضمن فريق التحرير على طالبتين؟
- ما هو احتمال أن يتضمن فريق التحرير على طالبتين على الأقل؟

الحل:

عدد الفرق الممكن تشكيلها هي :

$$C^{5}_{12} = \frac{12!}{5!\,(12-5)!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7!}{5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 7!} = 792$$

احتمال أن يتضمن فريق التحرير على الإناث فقط هو : لحساب احتمال هذا الحدث، يجب حساب الحالات الممكنة الخاصة به وهي :

$$C^{5}_{5} = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = 1$$

و بالتالي فإن احتمال هذا الحدث هو :

$$\frac{C^{5}_{5}}{C^{5}_{12}} = \frac{1}{792}$$

احتمال أن يتضمن فريق التحرير على الذكور فقط هو:

$$\frac{C_7^5}{C_{12}^5} = \frac{\frac{7!}{5!\,(7-5)!}}{\frac{12!}{5!\,(12-5)!}} = \frac{\frac{7\times 6\times 5!}{5!\times 2\times 1}}{792} = \frac{21}{792}$$

احتمال أن يتضمن فريق التحرير على طالبتين: إذا تضمن فريق التحرير على طالبتين فقط، فإن بقية فريق التحرير و عددهم 3 سيتم اختيارهم من الذكور، يعني فريق التحرير يتكون من طالبتين و ثلاث ذكور، و يتم حساب هذا الاحتمال كالتالي:

$$\frac{C_5^2 \times C_7^3}{C_{12}^5} = \frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!} \times \frac{7!}{3!\,(7-3)!}}{\frac{12!}{5!\,(12-5)!}} = \frac{10\times 35}{792} = \frac{350}{792}$$

احتمال أن يتضمن فريق التحرير على طالبتين على الأقل: تعني هذه الحالة أن يتضمن فريق التحرير أما طالبتين، أو ثلاث طالبات أو أربع طالبات أو خمس طالبات، و يتم حساب هذا الاحتمال كالتالي:

$$\frac{C_5^2 \times C_7^3}{C_{12}^5} + \frac{C_5^3 \times C_7^2}{C_{12}^5} + \frac{C_5^4 \times C_7^1}{C_{12}^5} + \frac{C_5^5 \times C_7^0}{C_{12}^5}$$

والجدول التالي يلخص قواعد السحب:

	التوفيقات	الترتيبات بدون تكرار	الترتيبات بالتكرار
الترتيب	غير مهم	مهم	مهم
التكرار	غير ممكن	غير ممكن	ممكن
العدد	$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}^k{}_n = n^k$
طريقة السحب	في آن واحد	على التوالي و بدون إرجاع	على التوالي و بالإرجاع

تمارين محلولة:

تمرين (01): صندوق يحتوي على 30 مصباح، منها 14 مصباح فاسد، نسحب منه بالصدفة 10 مصابيح. احسب احتمال الحصول على:

1- 06 مصابيح صالحة.

2- مصباحين صالحين على الأقل.

3- مصباحين فاسدين على الأقل.

4- 08 مصابيح صالحة على الأكثر.

حل تمرين(01):

1. حساب عدد الحالات الكلية (الممكنة):

$$C_{30}^{10} = \frac{30!}{10!\,(30! - 10!)} = \frac{30!}{10!\,20!}$$

2. حساب 06 مصابيح صالحة، و لنرمز لهذا الحدث بالحدث A

$$P(A) = \frac{C_{16}^{6} . C_{14}^{4}}{C_{30}^{10}} = \frac{\frac{16!}{6!\,10!} . \frac{14!}{4!\,10!}}{\frac{30!}{10!\,20!}}$$

3. مصباحين صالحين على الأقل: و لنرمز لهذا الحدث بالحدث B:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

حيث $\bar{B}$ يمثل الحدث المتمم للحدث B و يشير إلى الحصول على مصباح صالح واحد على الأكثر ، حيث:

$$P(\bar{B}) = \frac{C_{16}^{1} . C_{14}^{9} + C_{16}^{0} . C_{14}^{10}}{C_{30}^{10}}$$

4. مصباحين فاسدين على الأقل: و لنرمز لهذا الحدث بالحدث C:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

حيث $\bar{C}$ يمثل الحدث المتمم للحدث C و يشير إلى الحصول على مصباح فاسد واحد على الأكثر ، حيث:

$$P(\bar{C}) = \frac{C_{14}^{1} . C_{16}^{9} + C_{14}^{0} . C_{16}^{10}}{C_{30}^{10}}$$

5. 08 مصابيح صالحة على الأكثر: و لنرمز لهذا الحدث بالحدث D:

حيث $\bar{D}$ يمثل الحدث المتمم للحدث D و يشير إلى الحصول على 09 مصابيح صالحة على الأقل ، حيث:

$$P(\bar{D}) = \frac{C_{16}^{9} . C_{14}^{1} + C_{16}^{10} . C_{14}^{0}}{C_{30}^{10}}$$

$$P(D) = 1 - P(\bar{D})$$

تمرين (02): صندوق يحتوي على 37 كرية، منها 12 كرية صفراء، 10 كريات خضراء و 15 كرية بيضاء

أ/ نسحب من الصندوق 3 كريات الواحدة تلوى الأخرى و بدون إرجاع:

1- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم صفراء.

2- أحسب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء.

3- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة.

ب/ نسحب من الصندوق 3 كريات الواحدة تلوى الأخرى و بالإرجاع:

1- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم خضراء.

2- أحسب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء.

3- أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة.

حل تمرين(02):

أ/ سحب ثلاث كريات الواحدة تلوى الأخرى و بدون إرجاع:

1. حساب عدد الحالات الكلية (الممكنة):

$$A_{37}^{3} = \frac{37!}{(37! - 3!)} = 46620$$

2. حساب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم صفراء: لنرمز لهذا الحدث بالحدث A

$$P(A) = \frac{A_{10}^{1} \times A_{15}^{1} \times A_{12}^{1}}{A_{37}^{3}} = \frac{10 \times 15 \times 12}{46620} = 0.028$$

3. حساب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء، و لنرمز لهذا الحدث بالحدث B:

$$P(B) = \frac{A_{12}^3}{A_{37}^3} = \frac{\frac{12!}{3!\,9!}}{46620} = \frac{220}{46620} = 0.004$$

4. أحسب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة: لنرمز لهذا الحدث بالحدث C:

$$P(C) = \frac{3 \times (A_{10}^1 \times A_{27}^2)}{A_{37}^3} = \frac{3 \times 10702}{46620} = 0.45$$

ب/ سحب ثلاث كريات الواحدة تلوى الأخرى و بإرجاع:

1. حساب عدد الحالات الكلية (الممكنة):

$$\tilde{A}_{37}^3 = 37^3 = 50653$$

2. حساب احتمال الحصول على كرية خضراء ثم بيضاء ثم خضراء: لنرمز لهذا الحدث بالحدث A:

$$P(A) = \frac{\tilde{A}_{10}^1 \times \tilde{A}_{15}^1 \times \tilde{A}_{9}^1}{A_{37}^3} = \frac{10 \times 15 \times 9}{46620} = 0.028$$

3. حساب احتمال الحصول على 3 كريات صفراء: لنرمز لهذا الحدث بالحدث B:

$$P(B) = \frac{\tilde{A}_{12}^3}{\tilde{A}_{37}^3} = \frac{1728}{50653} = 0.034$$

4. حساب احتمال الحصول على كرية خضراء واحدة: لنرمز لهذا الحدث بالحدث C:

$$P(C) = \frac{3 \times (\tilde{A}_{10}^1 \times \tilde{A}_{27}^2)}{\tilde{A}_{37}^3} = \frac{3(10729)}{50653} = 0.43$$

الفصل الثالث:

الاحتمالات

مقدمة:

كثيرا ما يتم استخدام مصلح الاحتمال في حياتنا اليومية، فهو يشير بمفهومه العام إلى قوة ما نعتقد أنه سيحدث في المستقبل، لكن من الناحية العملية فإن الاحتمال يقاس حسب أسس علمية.

تعاريف ومبادئ أولية:

كثيرا ما نستعمل هذه الكلمة التي تجري على لسان العديد من الناس فمثلا في الانتخابات نقول ان شخص معين محتمل ان ينجح، او عندما نشارك في مسابقة ويكون عدد المشاركين كبير نقول ان احتمال النجاح صغير وعندما يكون عدد المشاركين قليل نقول ان نسبة النجاح مرتفعة وان هناك حظ أوفر، واحيانا اذا كان عدد المناصب وعدد المشاركين متساوي فإننا نقول بان نسبة النجاح هي 100%وهذا يجعل مصطلح الاحتمال ليس من المصطلحات الغريبة بل هي كثيرة الشيوع بين العامة وبين الاكاديميين.

تغير كثيرا تعريف الاحتمال من التعريف الكلاسيكي إلى الصورة المجردة للتعريف حسب تطور علم الاحتمالات كالتالي:

أ. التعريف الكلاسيكي للاحتمال définition Classical

نفترض أن A حدث في فراغ S، وأن عددي عناصر A وS هما n وN

ويتم حساب الاحتمال حسب تعريف باسكال للاحتمال:

عرف بليز باسكال (Blaise Pascal:1623) الاحتمال بالشكل التالي:" احتمال حدث هو عدد الحالات الملائمة لوقوع الحدث مقسوما على عدد الحالات الممكنة، إذا افترضنا أن كل الحالات لها نفس الاحتمال في الوقوع".

نعرف احتمال الحدث A كما يلي: p(A) على أنه $P(A) = \frac{}{N}$

مثال :عند رمي زهرة نرد مرة واحدة فإن الحادث ***A*** يعني ظهور رقم فردي يعني أن الناتج 1 أو 3 أو5

$$S=\{1.2.3.4.5.6\}$$

$$A=\{1.3.5\}$$

$$n=3 \quad N=6$$

احتمال الحصول على رقم فردي

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

وهذا يعني نظريا أنه إذا كررنا التجربة عددا كبيرا جدا من المرات فإن حدوث $\boldsymbol{A}$ يشكل نصف المرات.

بالطبع إذا رمينا الزهر 100 مرة فلن نحصل بالضبط على نصف هذا العدد من , $\boldsymbol{A}$ فنسبة حدوث $\boldsymbol{A}$تتغير كلما اعدنا الرمي 100 مرة .الأمر الذي سيتم التطرق له في التعريف الثاني.

مثال :في تجربة رمي زهرتي نرد أوجد الاحتمالات التالية:

A. مجموع رقمي الزهرتين يساوي 4

B. مجموع الناتج يساوي 10 على الاقل

C. ان يظهر الرقم 6 في زهرة النرد الثانية

D. مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من5

E. ناتج أحد الزهرين هو6

F. مجموع الناتجين أقل من 6

الحـــل

اول ما نقوم به هو تحديد عدد الحالات الكلية $\boldsymbol{N}$ ، بما انه لدينا زهرتي نرد كل زهرة تحمل ستة أرقام ونحن نقول

ظهور الرقم الاول الخاص بزهرة النرد الاولى **و** الرقم الثاني الخاص بزهرة النرد الثانية قلنا سابقا أن حرف **الواو** رياضيا يقابه عملية الضرب وبما ان عدد الحالات في زهرة النرد الاولى هو ستة نفسه في زهرة النرد الثانية

أي عدد الحالات الكلية هو $\boldsymbol{6\times6}=$

أي $\boldsymbol{N=36}$

ايضا يمكن تحديد الحالات الكلية كالتالي:

زهرة النرد الثانية	زهرة النرد الاولى					
	1	2	3	4	5	6
1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
5	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
6	6.1	6.1	6.3	6.4	6.5	6.6

من خلال الجدول السابق نلاحظ أن عدد الحالات الكلية هو $N = 36$

حل السؤال الاول : مجموع رقمي الزهرتين يساوي 4

أولا: فراغ العينة الذي يحدد الحالات الكلية S

$$S=\{(1.1)(1.2)(1.3)(1.4)(1.5)(1.6)(2.1)(2.2)(2.3)(2.4)(2.5)$$
$$(2.6)(3.1)(3.2)(3.3)(3.4)(3.5)(3.6)(4.1)(4.2)(4.3)(4.4)(4.5)($$
$$4.6)(5.1)$$
$$(5.2)(5.3)(5.4)(5.5)(5.6)(6.1)(6.2)(6.3)(6.4)(6.5)(6.6)\}$$

عدد الحالات الكلية كما قلنا سابقا هو36

ثانيا :فراغ العينة الذي يحدد الحالات الممكنة A الذي يحقق شرط مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 4

$$A=\{(1.3)(2.2)(3.1)\}$$

نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها مجموع الرقمين الظاهرين هو 4 يمثل ثلاث حالات فقط ومنه احتمال حدوث الحادث A هو

$$P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

حل السؤال الثاني :مجموع الناتج يساوي 10 على الاقل

معنى ان يكون المجموع 10 على الاقل هو ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد إما 10أ و 11 أ و12

هنا نستفسر لماذا توقفنا عند رقم12

الجواب لان أكبر مجموع يمكن الحصول عليه من جمع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد هو ناتج عن مجموع اكبر رقمين واكبر رقمين هم 12 = 6 + 6 أما أقل مجموع فهو ناتج عن مجموع اقل رقمين أي 2= 1 + 1

$$\boldsymbol{B}=\{(\mathbf{4.6})(\mathbf{6.4})(\mathbf{5.5})(\mathbf{5.6})(\mathbf{6.5})(\mathbf{6.6})\}$$

نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها يكون المجموع 10 على الاقل هو 6 حالات ومنه احتمال حدوث الحادث $\boldsymbol{B}$ هو

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

حل السؤال الثالث :ان يظهر الرقم 6 في زهرة النرد الثانية

فراغ العينة $\boldsymbol{C}$ الذي يحقق شرط ظهور الرقم 6 في زهرة النرد الثانية هو:

$$\boldsymbol{C}=\{(\mathbf{1.6})(\mathbf{2.6})(\mathbf{3.6})(\mathbf{4.6})(\mathbf{5.6})(\mathbf{6.6})\}$$

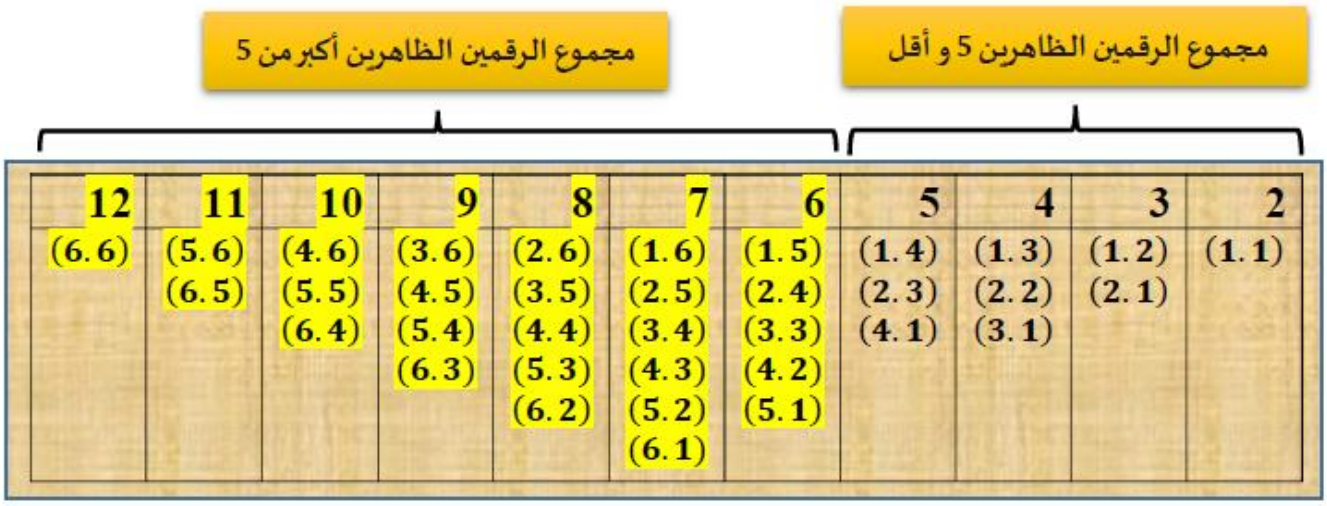
نلاحظ أن عدد الحالات التي يظهر فيها الرقم 6 في زهرة النرد الثانية هو 6 حالات ومنه احتمال حدوث الحادث $\boldsymbol{C}$ هو:

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{C})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

حل السؤال الرابع :الحادث $\boldsymbol{D}$ مجموع الرقمين الظاهرين أكبر من5

معنى ان يكون المجموع أكبر من 5 هو أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد إما 6 أو 7أو 8 أو 9 أو 10 أو 11 أو12

نحن نعلم أن اقل مجموع يمكن الحصو عليه هو 2 وأكبر مجموع يمكن الحصول عليه هو12 نلخص ذلك كما يلي:



نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها المجموع أكبر من 5 هو 27 حالة ومنه احتمال حدوث الحادث $\boldsymbol{D}$ هو:

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{D})=\frac{27}{36}$$

حل السؤال الخامس :الحادث $\boldsymbol{E}$ ناتج أحد الزهرين هو6

$$\boldsymbol{E}=\{(1.6)(2.6)(3.6)(4.6)(5.6)(6.6)(6.1)(6.2)(6.3)(6.4)(6.5)\}$$

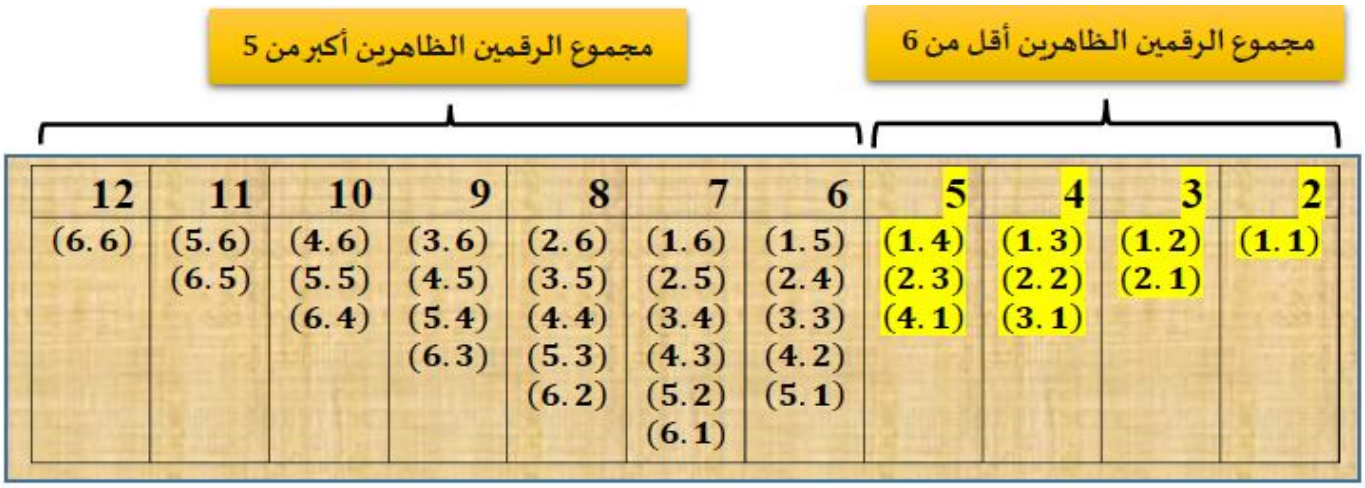
نلاحظ أن عدد الحالات التي يظهر فيها الرقم 6 هو 11 حالات ومنه احتمال حدوث الحادث $\boldsymbol{E}$هو

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{E})=\frac{11}{36}$$

حل السؤال السادس :الحادث $\boldsymbol{F}$ مجموع الناتجين أقل من6

معنى ان يكون المجموع أقل من 6 هو أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين لزهرتي النرد إما 5 أو 4 أو 3أو2

نحن نعلم أن اقل مجموع يمكن الحصو عليه هو 2 وأكبر مجموع يمكن الحصول عليه هو12 نلخص ذلك كما يلي:



12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
(6.6)	(5.6) (6.5)	(4.6) (5.5) (6.4)	(3.6) (4.5) (5.4) (6.3)	(2.6) (3.5) (4.4) (5.3) (6.2)	(1.6) (2.5) (3.4) (4.3) (5.2) (6.1)	(1.5) (2.4) (3.3) (4.2) (5.1)	(1.4) (2.3) (4.1)	(1.3) (2.2) (3.1)	(1.2) (2.1)	(1.1)

نلاحظ أن عدد الحالات التي يكون فيها المجموع أقل من 6 هو 9 حا لات ومنه احتمال حدوث الحادث $\boldsymbol{F}$ هو:

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{F})=\frac{9}{36}$$

ب. التعريف التكراري للاحتمال Frequencial définition

نفرض أننا بدأنا برمي الزهر 100 مرة وحسبنا نسبة $\boldsymbol{A}$ ، ثم أكملنا عدد الرميات إلى200 وحسبنا نسبة $\boldsymbol{A}$ ، ثم أكملنا عدد الرميات إلى 500 وحسبنا نسبة $\boldsymbol{A}$ ،وهكذا، فإننا سنجد أن النسبة تتغير كل مرة إلا أنه مع استمرار الزيادة في عدد التجارب فإن النسبة ستقترب من النسبة النظرية.

ج .التعريف الاعتقادي للاحتمال Degree of belief

مع تقدم الزمن وجد أن التعريفين السابقين لا يحققان كل التجارب، فظهر تعريف الاحتمال بانه مستوى الاعتقاد، فهناك تجارب لا يعرف فيها عدد عناصر الفراغ أو الحدث .مثلا إذا أردنا ان نحدد احتمال الفوز لكل فريق في مقابلة كرة القدم، في هذه الحالة ليس لدينا فراغ بالمفهوم السابق حتى نحسب عدد العناصر وبالتالي عدم امكانية عد عناصر الحدث، كما أنه ليس من الممكن تكرار التجربة (لا يمكن تكرار المبارات في نفس الظروف عدة مرات) حتى نستطيع استخدام التعريف الاجرائي، وبالتالي في هذه الحالة يمكن لأي شخص أن يفكر في احتمال للحدث حسب رؤيته الشخصية والمعطيات التي يتوفر عليها، وبالتالي هذا النوع من الاحتمال سمي بالاحتمال الاعتقادي.

ج .التعريف التجريدي للاحتمال Axiomatic définition

في هذا التعريف لا نشير إلى موضوع محدد ولكن نتحدث عن قانون يمثل الاحتمال في تجربة ما: أي دالة حقيقية تحقق الشروط الآتية تسمى دالة احتمال؛ بمعنى أنها وصف حدث ما في تجربة ما:

$$\begin{cases} \mathbf{I} & f_{(x)} \geq 0 \qquad x \in S \\ \mathbf{II} & f_{(x)} = 1 \\ \mathbf{III} & f_{\left(\cup_C^{A_J}\right)} = \sum_i f_{(A_j)} \end{cases}$$

سيتم التفصيل في هذا النوع من الاحتمالات في الأقسام القادمة

2–خصائص الاحتمال:

عادة ما نعبر عن هذه الخصائص بالطريقة التالية:

- الاحتمال هو عدد موجب تماما أو معدوم (لا يكون سالبا)
- مجموع احتمالات أحداث تجربة ما يساوي الواحد.

ويمكن إضافة خاصية ثالثة تستنتج بديهيا من الخاصيتين السالفتين وهي أن الاحتمال يكون محصورا بين 0 و .1 أي أنه لا يمكن أن يكون سالبا ولا أن يكون أكبر من الواحد.

3–الأركان الخمسة في حساب الاحتمالات:

هناك خمس قواعد أساسية في حساب الاحتمال نذكرها الآن باقتضاب لإبراز أهميتها ونعود لشرحها فما بعد وسنحتاج إلى استخدام هذه القواعد في جميع فصول المقياس.

1. احتمال وقوع حدث يساوي 1 مطروحا منه احتمال الحدث المعاكس .مجموع احتمال الحدث واحتمال الحدث المعاكس يساوي1
2. احتمال وقوع حدثان "أ" و "ب" يساوي احتمال وقوع الأول مضروبا في احتمال وقوع الثاني لما يكون الأول قد وقع فعلا.
3. احتمال وقوع حدثان مستقلان يساوي جداء الاحتمالين أي احتمال الحدث الأول مضروبا في احتمال الحدث الثاني.
4. احتمال وقوع الحدث وعكسه يساوي الصفر، ونقول أن الحدثان متنافيان.

5. احتمال وقوع حدث "أ" أو "ب" يساوي جمع احتمالي الحدثين مطروحا منه احتمال تحققهما معا.

3-أساسيات الاحتمال:

أولا :تعاريف ومفاهيم أساسية في نظرية الاحتمالات

مفهوم الاحتمال: الاحتمال لغويا هو أحد الخيارات المتاحة أمام تجربة أو حادثة غير محسومة النتيجة أما رياضيا فهو عدد حقيقي محصور في المجال المغلق [0-1] يشير إلى امكانية وقوع حدث ما نتيجة تجربة عشوائية ويرمز له بالرمز p (A).

مجموعة الأساس :هي مجموعة النتائج الممكنة والمختلفة لتجربة ما، ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{E}$ وتعرض على شكل مجموعة رياضية $E=\{.....\}$ ، وعدد عناصرها $\boldsymbol{E}$ ، ونرمز لها بالرمز $|\boldsymbol{E}|$

مثال:

لدينا: $E=\{PF\}$ أي أن، $|\boldsymbol{E}|=2$

1- **التجربة:** هي كل عملية تؤدي إلى ملاحظة أو قياس، وتنقسم إلى قسمين:

1-1 **التجربة النظامية:** هي كل تجربة نحدد نتائجها مسبقا على أساس القوانين العلمية المعروفة، وذلك انطلاقا من جملة من الشروط المرتبطة بالظاهرة والمتوفرة أثناء التجربة(المقدمات .)حيث نجد أن هذا النوع من التجارب في مجال العلوم الدقيقة، وبصورة أساسية في مجال الفيزياء والكيمياء.

1-2 **التجربة العشوائية:** هي كل تجربة تكون نتائجها غير معروفة مسبقا، واذا كررنا نفس التجربة وضمن نفس الشروط(نفس المقدمات) فإننا لا نحصل بالضرورة على نفس النتائج، كما تشير إلى عملية لا يمكن التنبؤ بنتائجها بشكل مؤكد، فمثلا نريد اختيار موظفين (02) من بين خمسة عشوائيا، في هذه الحالة لا يمكن التنبؤ بشكل أكيد ما هي النتائج التي سنتحصل عليها عند القيام بعملية السحب؛

و يمكن تفسير التجارب من حيث نتائجها إلى قسمين أساسين يعتمد كل منها على مدى تكرار نتائج هذه التجارب كما يلي:

فراغ العينة: هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، ويرمز لها بالرمز S، ويرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز n(s)، ويمكن أن يكون فراغ العينة محدود أي منته أو غير محدود غير منته.

مثال:

01 إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة نجد أن $s:\{H,T\}$ وعدد النتائج $n(s)=2$

02 إلقاء قطعتين نقدتين مرة واحدة $n(s)=4$ $s:\{HH,HT,TH,TT\}$

03 عند رمي زهرة نرد غير متحيزة مرة واحدة فإن $n(s)=6$ $s:\{1,2,3,4,5,6\}$

التجارب الثابتة (المحددة): هذا النوع من التجارب يعطي نفس النتيجة عند تكرار التجربة، و لكن تحت نفس الظروف مثلا قياس درجة غليان الماء، فإذا أجريت تجربة لقياس درجة غليان الماء عند مستوى سطح البحر وتحت ضغط جوي واحد فإن الناتج يكون 100 بغض النظر عن عدد مرات إجراء هذه التجربة.

التجارب غير الثابتة و التي عادة ما تسمى بالتجارب العشوائية : هذا النوع من التجارب الذي تتغير نتيجته من تجربة لأخرى مثل إلقاء قطعة نقدية، فإن الناتج يكون إما صورة أو كتابة و مع ذلك لا نستطيع تحديد نتيجة التجربة و هذه النتائج تسمى بفراغ أو فضاء العينة و يرمز لها بالرمز S

مثال:

لتكن التجربة العشوائية التالية :نرمي زهرة نرد متجانسة(ليست مزورة :المزورة هي الزهرة التي لا تكون نفس الحظوظ لكل رقم بالظهور) مرة واحدة، وبطريقة عشوائية:

س :ما هو احتمال ظهور الرقم 6 ؟

- من خلال هذه التجربة نحدد ما يلي:
- أداة التجربة :زهرة النرد
- طريقة التجربة :رمي زهرة النرد مرة واحدة
- هذه التجربة هي تجربة عشوائية لأننا لا نعرف النتيجة مسبقا، وفي حالة تكرار هذه التجربة فإننا لن نحصل بالضرورة على نفس النتيجة، وبالتالي الإجابة على السؤال ستكون حساب النسبة المحتملة لظهور الرقم6

❖ **فضاء التجربة العشوائية:** يشير إلى جميع الحالات الممكن ظهورها عند قيامنا بتجربة عشوائية، وعادة نرمز له بـ: Ω، فإن افترضنا في التجربة العشوائية السابقة، أن أسماء الموظفين هم: محمد (M)، مصطفى (S)، علي (A)، رشيد (R)، ياسين (Y)، فإن فضاء العينة في هذه الحالة هو:

$$\Omega = \{(M,S);(M,A);(M,R);(M,Y);(S,A);(S,R);(S,Y);(A,R);(A,Y);(R,Y)\}$$

نلاحظ أن فضاء العينة يتكون من 10 حالات ممكنة، أي أن: card(Ω)

❖ **الحادث:**

يشير إلى بعض النتائج التي قد تحدث أولا تحدث عند القيام بتجربة عشوائية، فظهور الموظف محمد عند عملية السحب يمثل حادث ممكن أن يظهر أولا، ويمكننا تقسيم الحوادث حسب عدة معايير:

إن النتيجة أو النتائج المحددة من النتائج الممكنة لتجربة ما تشكل حدثا أي مجموعة جزئية من فضاء العينة و نرمز له بالأحرف التالية A, B... وينقسم الحدث إلى عدة أقسام:

أ- حسب درجة التأكد:

- **حادث بسيط:** هو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.
- **حادث مركب:** ويشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة ويرمز لعدد النتائج المكونة للحادث بالرمز n(A), n(B) وهكذا.
- **حادث أكيد:** هو الحادث الذي يحتوي كل عناصر فراغ العينة، وهو الذي لا بد أن يظهر في أي حالة ممكنة، فمثلا إذا اعتبرنا تجربة عشوائية تتمثل في رمي زهرة نرد مرقمة من 01 إلى 06، واعتبرنا الحادث A ظهور رقم أكبر أو يساوي واحد، في هذه الحالة فإن الحادث A هو حادث أكيد سيتحقق؛
- **حادث مستحيل:** حيث يستحيل ظهوره عند قيامنا بتجربة عشوائية، كظهور الرقم 07 عند رمينا لزهرة النرد المرقمة من 01 إلى 06؛

مثال: نلقي قطعة النرد مرة واحدة ونعتبر الحوادث التالية:

A: ظهور عدد يقبل القسمة على 5.

B: ظهور عدد زوجي.

C: ظهور عدد يزيد عن 9.

D: ظهور عدد يقل عن 7.

المطلوب: ما هو نوع كل حادث S : {1,2,3,4,5,6}

A: حادث بسيط {5} :A

B: حادث مركب {2,4,6} :B

C: حادث مستحيل Ø = { } :C

D: حادث أكيد S = {1,2,3,4,5,6} :D

قواعد الجبر على الحوادث: تتمثل قواعد الجبر على الحوادث فيما يلي:

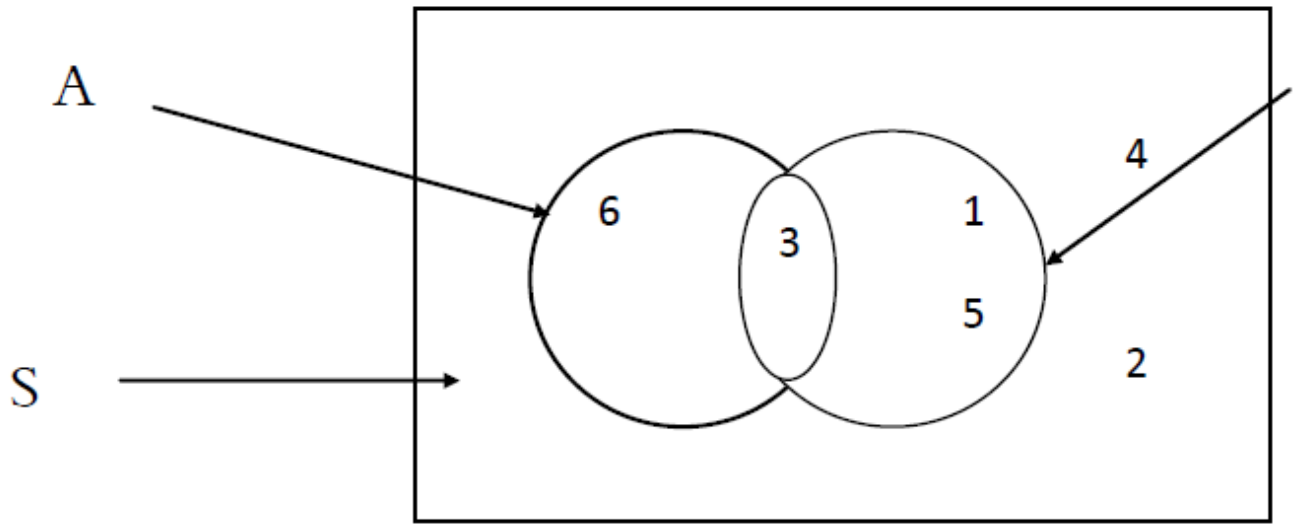
1- **الإتحاد U**: يعبر اتحاد الحادثتان A,B عن وقوع أحدهما على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما ويعبر عن ذلك رياضيا: (A U B) أو (A or B).

مثال: نرمي زهرة نرد مرة واحدة ونعتبر الحوادث التالية:

A: ظهور عدد يقبل القسمة على 3.

B: ظهور عدد فردي

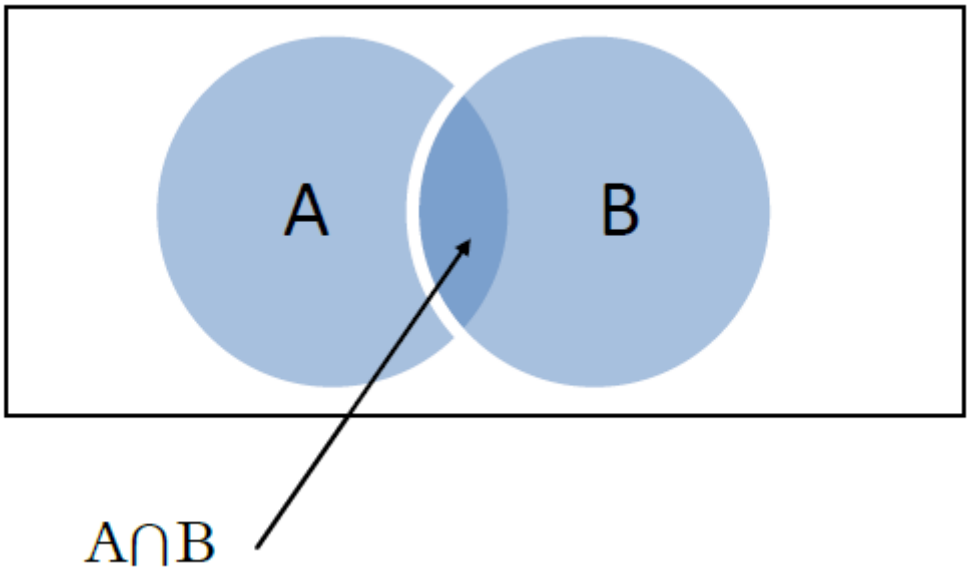
نمثل المجموعة الكلية S والمجموعة A وB وفق الشكل كما يلي:



المطلوب: أوجد الحادث A U B, B, A, S

S: {1,2,3,4,5,6}, A: {3,6}, B: {1,3,5} , (A U B) : {1,3,5}

2- التقاطع ∩: يعبر تقاطع الحادثان A,B عن وقوع الاثنان في آن واحد ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين ويعبر رياضيا (A∩B) أو (A and B) ويظهر ذلك في الشكل التالي:



مثال: نأخذ نفس مثال السابق (المذكور في تعريف الاتحاد) **المطلوب:** أوجد $(A \cap B)$

الحل: $(A \cap B)$: $\{3\}$

3- حسب العلاقة بين الحوادث:

القوانين الأساسية في الاحتمالات:

في بعض الحالات يسهل علينا حساب احتمال وقوع الأحداث البسيطة (الأولية) أما في حالات أخرى يصعب حساب الاحتمالات إذا كانت الأحداث مركبة وهذا يبدوا جليا إذا ما كانت هناك علاقة بين الأحداث، وهو ما يجعلنا ننتقل إلى دراسة القوانين الأساسية التي تساعدنا في حساب الاحتمالات، من بين القوانين نجد قانون الجمع، قانون الضرب، الاحتمال الشرطي، الاحتمال الكلي ونظرية بايز.

1- **قانون الجمع:** قانون الجمع يقصد به الاتحاد في المجموعات (U)، أي إذا أردنا حساب احتمال وقوع الحدث A أو الحدث B في حالة الاهتمام بحدثين. ونميز بين الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية.

- **الحوادث المتنافية فيما بينها وغير المتنافية** :نقول عن حادثين أنهما متنافيين إذا كان ظهور أحدهما يمنع من ظهور الحادث الآخر، وهو يعني استحالة تحققهما في آن واحد، فمثلا سقوط المطر وعدم سقوط المطر حادثين متنافيين، نجاح الطالب وعد نجاحه هما حادثين متنافيين؛

- **الحوادث المتنافية «exclusive events»** : الحوادث المتنافية هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد، لان وقوع أحدها يمنع من وقوع الحوادث الأخرى، الأمر الذي يعني عدم وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها،

مثال: لو تناولنا سلة فيها تفاح أحمر وباذنجان مثلا، وسالنا عن احتمال الحصول على حبة خضار لونها أحمر لدى سحبن الحبة من الحبات الموجودة في السلة، لاتانا الجواب بان هذا الحدث حدث مستحيل لا يتحقق داخل السلة المفترضة.إلا أن ما يهمنا في الو اقع ليس هذا بل كونه مؤلفا من حدثين متنافيين لا اشتراك بينهما، الأول (A) حبة الخضار، والثاني (B) حبة لونها أحمر، ومن الواضح انه لا اشتراك داخل السلة بين هذين الحدثين.

و أيضا عند رمي قطعة نقود متزنة فإن ظهور الصورة ينفي ظهور الكتابة وبالتالي فان ظهور الكتابة متعلق بعدم ظهور الصورة أي ان الحدثين متنافيين.

- **الحوادث غير المتنافية «compatible events»** : الحوادث غير المتنافية هي الحوادث التي يكون

وقوع أحدها غير مانع من وقوع الحوادث الأخرى، الأمر الذي يعني وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها، ويكون وقوعهما معا غير مستحيل.

مثال: ولو بقينا في المثال المتقدم للسلة التي تحتوي على التفاح الأحمر وعلى الباذنجان، وسألنا عن احتمال الحصول على حبة فاكهة لونها أحمر لدى سحبنا لحبة من الحبات الموجودة في السلة، لكان الجواب بانه حدث ممكن التحقق لأنه مؤلف من حدثين بينهما اشتراك داخل السلة المفت رضة، الأول (A) حبة الفاكهة، والثاني (B) حبة لونها أحمر، حيث يجتمعان داخل السلة المذكورة في حبة التفاح الحمراء.

ملاحظة: قانون الجمع في حالة ثلاث أحداث هو:

حالة الأحداث المتنافية:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

حالة الأحداث غير المتنافية

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مثال: يتم إختيار عشوائيا رقم من 1 إلى 25، ما احتمال اختيار رقم يقبل القسم على 6 أو رقم يقبل القسمة على 3 أو رقم أكبر من أو يساوي 20؟

ليكن لدينا:

A={6,12,18,24} اختيار رقم يقبل القسمة على 6

و B={3,6,9,12,15,18,21,24} اختيار رقم يقبل القسم على 3

و C ={6,12,18,24} رقم أكبر من أو يساوي 20

نلاحظ أن الأحداث غير متنافية ومنه:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{4}{25} + \frac{8}{25} + \frac{6}{25} - \frac{4}{25} - \frac{1}{25} - \frac{2}{25} + \frac{1}{25} = \frac{12}{25}$$

2- **قانون الضرب:**

يقصد به التقاطع في المجموعات ($\cap$)، أي إذا أردنا حساب احتمال وقوع الحدث A والحدث B في حالة الاهتمام بحدثين. ونميز هنا بين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.

- **الحوادث غير المستقلة والحوادث المستقلة فيما بينها:**

1- **الحوادث غير المستقلة:**

نقول أن A و B حدثين غير مستقلين إذا كان تحقق أحدهما(مثلا B) مرتبط بأي شكل من الأشكال(مشروط)بتحقق الأخر (مثلاA) ، مثلا السحب من مجتمع محدود وصغير مع عدم الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية تتأثر بالسحبة السابقة. ومنه فاحتمال وقوع A و B في هذه الحالة هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

الإشارة (/) تقرأ علما. وتقرأ العبارة P(B/A) احتمال وقوع الحدث B علما أن الحدث A محقق.

مثال: صندوق يوجد به 10 كرات مقسمة حسب اللون إلى: 5 بيضاء، 3 حمراء، و 2سوداء. ما هو احتمال سحب كرتان بيضاويتان في حالة السحب على التوالي دون إرجاع؟

ليكن لدينا الحدثين: B_1 الكرة الأولى بيضاء و B_2 الكرة الثانية بيضاء، وبما أن الحدثين غير مستقلين فإن:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) = \frac{A_5^1}{A_{10}^1} \times \frac{A_4^1}{A_9^1} = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90} = 0{,}22$$

مثال: صندوق يوجد به 10 مصابيح كهربائية منها 7 صالحة للإضاءة و 3 غير صالحة، نسحب من الصندوق بطريقة عشوائية مصباحين على التتالي مع إرجاع المصباح المسحوب للصندوق. ما احتمال أن يكون المصباح الأول صالح للإضاءة والمصباح الثاني غير صالح للإضاءة؟

ليكن لدينا الحدثين: A_1 المصباح صالح للإضاءة والمصباح الثاني غير صالح للإضاءة هو:

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \times P(\bar{A}_2/A_1) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100} = 0{,}21$$

2- **الأحداث المستقلة:** نقول عن حادثين أنهما مستقلين إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بوقوع الحادث الثاني، فمثلا عند رمي زهرة النرد 03 مرات فإن الرقم الذي يظهر عند أي رمية ليس له علاقة بالرميات الأخرى.

نقول أن A و B حدثان مستقلان إذا كان تحقق أحدهما غير مرتبط بأي شكل من الأشكال (غير مشروط)بتحقق الأخر، مثلا السحب من مجتمع محدود وصغير مع الإعادة، وبالتالي فالسحبة الموالية لا تتأثر بالسحبة السابقة.

وبصفة رياضية فإنه إذا الحادثين $\boldsymbol{E_2}$ و $\boldsymbol{E_1}$ مستقلين إذا كان:

$$\boldsymbol{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)}$$

نظرية:

إذا كان لديك $\boldsymbol{E_1}$;$\boldsymbol{E_2}$ حادثين مستقلين فيΩ وكان:

أ) $\boldsymbol{E_1}$;$\bar{E}_2$ مستقلان ,ب) $\boldsymbol{E_2}$;$\bar{E}_1$ مستقلان، $\bar{E}_2$;$\bar{E}_1$ مستقلان.

مثال:

إذا كان لديك $\boldsymbol{E_1}$;$\boldsymbol{E_2}$ حادثين مستقلين:

$$(\boldsymbol{E_2})=\boldsymbol{0.4} \quad (\boldsymbol{E_2})=\boldsymbol{0.3}$$

أحسب ما يلي:

$$\boldsymbol{a)\ P(E_1 \cap E_2)}$$
$$\boldsymbol{b)\ P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2)}$$
$$\boldsymbol{C)\ P(\bar{E}_1 \cap E_2)}$$
$$\boldsymbol{C)\ P(\bar{E}_1 \cup E_2)}$$

الحل:

$$\boldsymbol{a)\ P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = (0.3)(0.4) = 0.12}$$
$$\boldsymbol{b)\ P(\bar{E}_1 \cap E_2) = P(\bar{E}_1)P(E_2) = (0.7)(0.6) = 0.42}$$
$$\boldsymbol{C)\ P(\bar{E}_1 \cap E_2) = P(\bar{E}_1)P(E_2) = (0.7)(0.4) = 0.28}$$
$$\boldsymbol{C)\ P(E_1 \cup E_2) = P(\bar{E}_1) + P(E_2) - P(\bar{E}_1 \cap E_2)}$$
$$\boldsymbol{= (0.7) + (0.4) - 0.28 = 0.82}$$

3- الاحتمال الشرطي:

الاحتمال الشرطي هو احتمال وقوع حدث ما مع العلم بوقوع حدث آخر، ليكن لدينا الحدثان A و B حيث $P(A) \neq 0$ نرمز لاحتمال وقوع الحدث B علما A بالرمز $p(B/A)$ ويحسب الاحتمال الشرطي بالعلاقة التالية:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال: عند رمي زهرة نرد، ما هو احتمال الحصول على العدد 6 علما أن العدد الذي ظهر زوجي؟

ليكن لدينا: $A = \{2,4,6\}$ حادث ظهور عدد زوجي و $B = \{6\}$ حدث ظهور العدد 6،

احتمال ظهور العدد 6 علما أن العدد الظاهر زوجي هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

في بعض الأحيان يكوف احتمال وقوع حدث معنٌ معتمدا على معرفة وقوع أحداث معينة، فعلى سبيل المثال نجد أن جزر فلوريدا بالولايات المتحدة الأمريكية تشتهر برياضة صيد الأسماك، وعادة ما يهتم الصيادون باحتمال سقوط المطر، فإذا كان اهتمامهم باحتمال سقوط المطر خلال يوم معين دون الأخذ بعين الاعتبار الأوضاع الجوية أو حوادث أخرى، فنكون هنا أمام احتمال غير مشروط The unconditional probability ، أما إذا أردنا حساب احتمال سقوط المطر مع العلم أنها قد أمطرت ليومين سابقين، كما يتوقع حدوث عاصفة، في هذه الحالة توفرت لدينا مجموعة من المعلومات الاضافية، ونكون هنا أمام الاحتمال الشرطي The conditional probability، أي احتمال سقوط المطر علما أنها أمطرت ليومين ويتوقع حدوث عاصفة،

بطبيعة الحال سيكون الاحتمال المشروط بهذه المعلومات أكبر من الاحتمال غير المشروط بمعلومات حول سقوط المطر.

إذا اعتبرنا حادثين A و B، فإن احتمال وقوع الحادث A علما أن الحادث B قد وقع يسمى بالاحتمال الشرطي أو المشروط، ونرمز له بالرمز P(A/B)، ويتم حسابه كما يلي:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

أما احتمال وقوع الحادث B علما أن الحادث A قد وقع فنرمز له بالرمز P(B/A)، ونحسبه كما يلي:

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

إذا الحادثين A وB مستقلين فإن العبارتين السابقتين تكتبان كما يلي:

$$p(A/B) = \frac{p(A).p(B)}{p(B)} = p(A)$$

تعني هذه النتيجة أن احتمال وقوع A علما أن الحادث B قد وقع يساوي إلى احتمال وقوع A فقط، فهو يعني أنه لا يعتمد على حدوث B ونفس الشيء بالنسبة للعبارة التالية:

$$p(B/A) = \frac{p(A).p(B)}{p(A)} = p(B)$$

4- الاحتمال الكلي:

قبل التطرق إلى مفهوم وقانون الاحتمال الكلي لا بد من معرفة ماذا يقصد بالتجزئة للمجموعة الكلية Ω أو كما تسمى أيضا بالجملة التامة (الكاملة).

تعريف الجملة التامة: ليكن لدينا $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ متتالية من الأحداث، نقول عن هذه المتتالية أنها تشكل تجزئة للمجموعة الكلية (جملة تامة) إذا تحقق ما يلي:

جميع الأحداث غير خالية:

$$\forall\, i \in \aleph, A_i \neq \emptyset \Leftrightarrow P(A_i) \neq 0$$

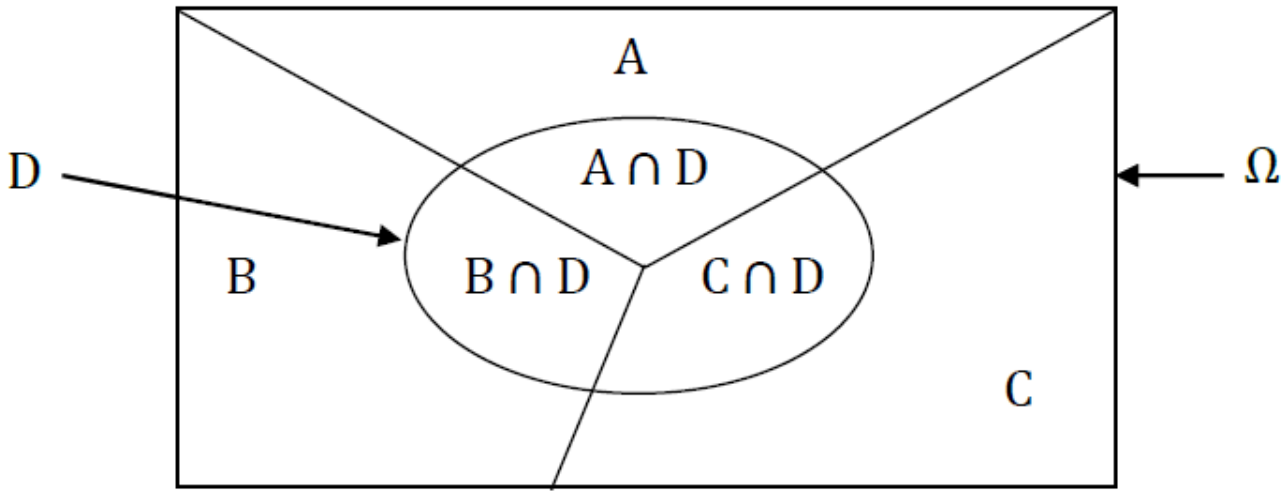
جميع الأحداث متنافية مثنى مثنى

$$\forall\, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \Leftrightarrow P(A_i \cap A_j) = 0$$

اتحاد الأحداث يعطينا المجموعة الكلية:

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

الآن من أجل شرح معنى الاحتمال الكلي نفرض أنه لدينا ثلاثة أحداث A,B,C تشكل تجزئة للمجموعة الكلية (جملة تامة) ولدينا الحدث D لا يتحقق إلا بتحقق أحد الأحداث الجزئية الثلاثة السابقة كما هو موضح في الشكل التالي:



نلاحظ أن الأحداث A∩D, B∩D, C∩D هي أحداث متنافية مثنى مثنى ومنه حسب قانون الجمع فإن:

$$P(D) = P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)] = P(A \cap D) + P(B \cap D) + (C \cap D)$$
$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$

تعميم قانون الاحتمال الكلي: ليكن لدينا الأحداث التالية: $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ والتي تمثل تجزئة للمجموعة الكلية وليكن لدينا الحدث B الذي لا يتحقق إلا بتحقق أجزاء الجملة التامة، ومنه فإن:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P\left(B/A_i\right)$$

مثال: ليكن لدينا ثلاثة صناديق متماثلة الأول فيه 5 كرات بيضاء و 3 سوداء، الثاني فيه 8 بيضاء و 4 سوداء والثالث فيه 6 بيضاء و 2 سوداء. نرمي قطعة نقود متزنة ثلاثة مرات متتالية:

فإذا ظهر الوجه (P) ثلاث مرات نختار الصندوق الأول.

وإذا ظهر مزيج بين الوجوه والصور نختار الصندوق الثاني.

وإذا ظهرت الصورة (F) ثلاث مرات نختار الصندوق الثالث.

يتم اختيار الصندوق المناسب ثم نسحب منه كرتين على التوالي دون إرجاع.

أحسب احتمال أن تكونا الكرتان المسحوبتان سوداويتان؟

نفرض أن لدينا الأحداث التالية: A اختيار الصندوق الأول، B اختيار الصندوق الثاني، C اختيار الصندوق الثالث، N الكرتان المسحوبتان سوداويتان.

نلاحظ إن عدد الحالات الإجمالية عند رمي قطعة نقود ثلاث مرات هو ثمانية، ومنه:

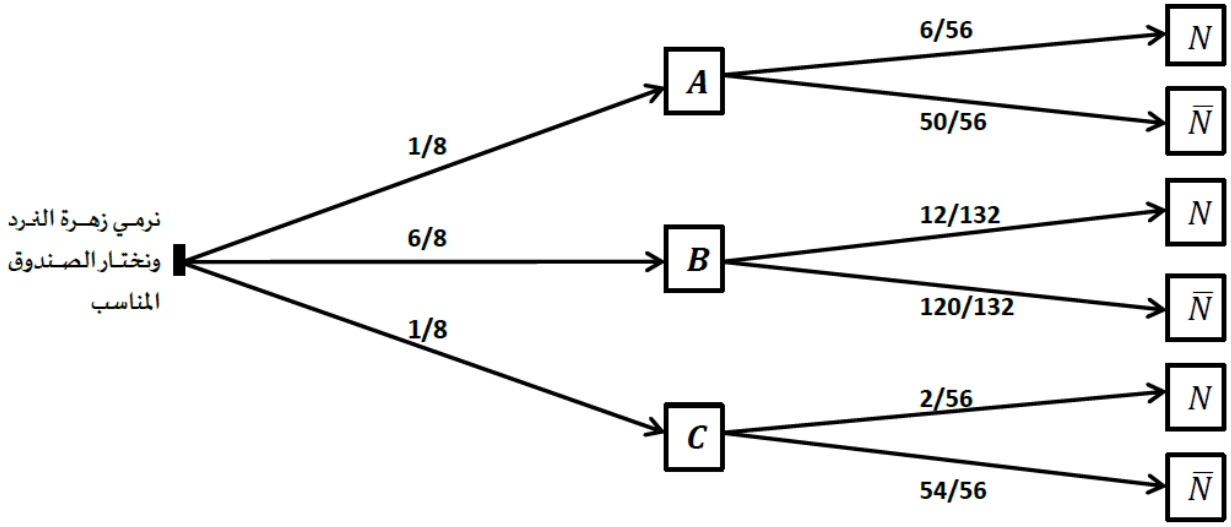
$$P(A) = \frac{1}{8} \qquad P(N/A) = \frac{A_3^2}{A_8^2} = \frac{6}{56}$$

$$P(B) = \frac{6}{8} \qquad P(N/B) = \frac{A_4^2}{A_{12}^2} = \frac{12}{132}$$

$$P(C) = \frac{1}{8} \qquad P(N/C) = \frac{A_2^2}{A_8^2} = \frac{2}{56}$$

المطلوب: ترجم معطيات هذا المثال في شجرة احتمالية ثم احسب احتمال أن تكونا الكرتين المسحوبتين سوداويتين أي حساب P(N)

بداية يمكن ترجمة معطيات هذا التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية:



بما أن الأحداث A,B,C تشكل تجزئة للمجموعة الكلية والحدث N لا يتحقق إلا بتحقق الأحداث السابقة، ومنه باستخدام قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$P(N) = P(A)P(N/A) + P(B)P(N/B) + P(C)P(N/C)$$
$$= \frac{1}{8} \times \frac{6}{56} + \frac{6}{8} \times \frac{12}{132} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{56} = \frac{3}{224} + \frac{9}{132} + \frac{1}{224}$$
$$= \frac{396 + 2016 + 132}{29568} = 0{,}086 = 8{,}6\%$$

5- نظرية بايز (دستور بايز) théorème de Bayes:

تعتمد هذه النظرية على مختلف القوانين السابقة، وهي تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل تجزئة للمجموعة الكلية بالنسبة للحادث الذي لا يتحقق إلا بتحققهم.

ليكن لدينا ثلاثة حوادث A,B,C تشكل تجزئة للمجموعة الكلية (جملة تامة) ولدينا الحدث D لا يتحقق إلا بتحقق أحد الأحداث الجزئية الثلاثة السابقة، ونريد أن نحسب الاحتمالات الشرطية التالية:

$$P(A/D) \; ? \; P(B/D) \; ? \; P(C/D) \; ?$$

نأخذ مثلا الحالة الأولى: P(A/D) وفقا لقانون الضرب (تقاطع الأحداث غير المستقلة) لدينا:

$$P(A \cap D) = P(A)P(D/A) = P(D)P(A/D)$$
$$\Rightarrow P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}$$

إذن:

$$P(A/D) = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}$$

وتسمى بنظرية بايز

تعميم نظرية بايز: لدينا الأحداث التالية: $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ والتي تمثل تجزئة للمجموعة الكلية وليكن لدينا الحدث B الذي لا يتحقق إلا بتحقق أجزاء الجملة التامة، ومنه فإن:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}$$

مثال: في مؤسسة لوحظ أن 10 % من الموظفين يحملون شهادات عليا وأن 70 % ممن هؤلاء الموظفين الحاملين للشهادات العليا يقومون بأعمال إدارية، عليما أن 30 % من موظفي هذه المؤسسة الذين لا يحملون شهادات عليا هم أيضا يقومون بأعمال إدراية. سحبنا موظفا إداريا من هذه المؤسسة أحسب احتمال أن يكون هذا الموظف من حاملي الشهادات العليا؟

نفرض أن لدينا الحدثين التاليين: A الموظف حامل لشهادة عليا، B الموظف يقوم بأعمال إدارية تكتب المعطيات كما يلي:

$$P(A) = 0.1 \qquad p(B/A) = 0.7$$
$$P(\bar{A}) = 0.09 \qquad P(B/\bar{A}) = 0.3$$

المطلوب: حساب $P(A/B)$ باستخدام قانون بايز نجد ما يلي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A) + P(\bar{A})P(B/\bar{A})}$$
$$= \frac{0,1 \times 0,7}{0,1 \times 0,7 + 0,9 \times 0,3} = \frac{0,07}{0,34} = 0,2059 = 20,59\%$$

هذه النتيجة معناها أن 20.59 % من الموظفين الإداريين هم حاملي للشهادات العليا.

مثال (18): في أحد المصانع التي تصنع مصابيح إضاءة كهربائية، فان الآلات (A_1) و (A_2) و (A_3) تصنع على الترتيب 0,3 و0,3 و0,4 من مجموع الإنتاج وإذا كان 0,01 و0,03 و0,02 من إنتاج الآلات الثلاث على الترتيب هو إنتاج معيب.

تم سحب مصباح عشوائيا من إنتاج أحد الأيام ووجد بأنه معيب، فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من صنع الآلة (A_1) ؟ من صنع الآلة (A_2) ؟ من صنع الآلة (A_3) ؟

الحل: نفرض الحوادث التالية:

الحل: نفرض الحوادث التالية:

D: سحب مصباح معيب

A_1: سحب مصباح من انتاج الآلة A_1

$P(A_1) = 0,3$

A_2: سحب مصباح من انتاج الآلة A_2

$P(A_2) = 0,3$

A_3: سحب مصباح من انتاج الآلة A_3

$P(A_3) = 0,4$

نفرض الاحتمالات التالية:

احتمال المصباح معيب علما انه من انتاج الآلة A_1 : $P(D/A_1) = 0,01$

احتمال المصباح معيب علما انه من انتاج الآلة A_2 : $P(D/A_2) = 0,03$

احتمال المصباح معيب علما انه من انتاج الآلة A_3 : $P(D/A_3) = 0,02$

والآن نحسب الاحتمالات التالية:

$$P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D/A_1) = 0,3 \times 0,01 = 0,003$$
$$P(A_2 \cap D) = P(A_2) \times P(D/A_2) = 0,3 \times 0,03 = 0,009$$
$$P(A_3 \cap D) = P(A_3) \times P(D/A_3) = 0,4 \times 0,02 = 0,008$$

وباستخدام نظرية بييز نحصل على احتمالات المصابيح المعيبة من كل آلة كما يلي:

$$P(A_1/D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)} = \frac{0,003}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{3}{20}$$

$$P(A_2/D) = \frac{P(A_2 \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)} = \frac{0,009}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{9}{20}$$

$$P(A_3/D) = \frac{P(A_3 \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)} = \frac{0,008}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{8}{20}$$

نتيجة: التحليل التوفيقي مهم جدا ومساعد في حساب الاحتمالات، يساعد في تحديد عدد الحالات الملائمة أو الكلية ودراسة القوانين الأساسية في الاحتمالات.

تمارين محلولة:

التمرين الاول:

نرمي قطعتي نقد مرة واحدة وبطريقة عشوائية.

المطلوب:

1- ما هو احتمال الحصول على صورتين؟

2- ما هو احتمال الحصول على نفس النتيجة؟

3- ما هو احتمال الحصول على الأقل على كتابة واحدة؟

4- ما هو احتمال الحصول على الأكثر على صورتين؟

حل التمرين الأول:

1- حساب احتمال الحصول على صورتين:

لدينا مجموعة الأساس هي $E=\{(F)\ (FP)\ (PP)\ (PF)\}$ ومنه: $|E| = 4$

نضع الحدث A الحصول على صورتين أي: $A= \{(F)\}$ ومنه: $|A| = 1$

إذن: $p(A) = \frac{|A|}{|E|}=\frac{1}{4}$

2- حساب احتمال الحصول على نفس النتيجة:

نضع الحدث B الحصول على نفس النتيجة أي: $B=\{(F)\ (PP)\}$ ومنه: $|B| = 2$

إذن: $p(B) = \frac{|B|}{|E|}=\frac{2}{4}$

3- حساب احتمال الحصول على الأقل على كتابة واحدة:

نضع الحدث C الحصول على الأقل على كتابة واحدة أي: $C=\{(P)\ (FP)\ (PF)\}$ ومنه: $|C| = 3$

إذن: $p(C) = \frac{|C|}{|E|}=\frac{3}{4}$

4- حساب احتمال الحصول على الأكثر على صورتين:

نضع الحدث D الحصول على الأكثر على صورتين أي:

$D=\{(F)\ (FP)\ (PF)\ (PP)\}$ ومنه: $|D|=4$

إذن: $p(D)=\frac{|D|}{|E|}=\frac{4}{4}=1$

التمرين الثاني:

في مصنع معين كانت نسبة الفروع التي تنتج المنتوج A هي 60% والفروع التي تنتج المنتوج B هي 75 %، ونسبة الفروع التي تنتج المنتوجين معا هي 50 %.

المطلوب:

1- ما هو احتمال أن فراغا ما ينتج المنتوج A أو المنتوجB ؟

2- ما هو احتمال أن لا ينتج الفرع المنتوج B؟

3- هل انتاج الفرع للمنتوج B مستقل عن انتاجه للمنتوج A.

الحل:

نفرض أن الحدث A يعبر عن الفرع الذي ينتج المنتوج A، والحدث B يعبر عن الفرع الذي ينتج المنتوج B أي:

$$P(A)=0.6 \quad , \quad P(B)=0.75 \quad , P(A\cap B)=0.5$$

1- حساب احتمال أن فرعا ما ينتج المنتوج A أو B:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.75-0.5=0.85$$

2- حساب احتمال أن لا ينتج الفرع المنتوج B: (أي الحادث المتمم للحادث B):

$$P(\bar{B})=1-P(B)=1-0.75=0.25$$

3- لمعرفة ما إذا كان انتاج الفرع للمنتوج B مستقل عن انتاجه للمنتوج A لدينا:

إذا كان A و B حدثان مستقلات فإن: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

ولدينا: $P(A)\times P(B)=0.6\times 0.75=0.45$

ومنه: $P(A \cap B) = 0.5 \neq P(A) \times P(B)$، إذن انتاج الفرع للمنتوج B غير مستقل عن انتاجه للمنتوج A.

تمرين (03): في قسم معين ، احتمال نجاح الطالب في مادة الرياضيات هو 0.6 ، و احتمال نجاحه في مادة الفيزياء هو 0.5 ، نختار طالب عشوائيا من القسم ، اوجد:

1- احتمال أن ينجح الطالب في المادتين معا

2- احتمال أن لا ينجح الطالب في المادتين معا

3- احتمال أن ينجح الطالب في إحدى المادتين

4- احتمال أن لا ينجح الطالب في إحدى المادتين

5- احتمال أن يكون الطالب ناجحا في مادة الرياضيات علما أنه ناجح في مادة الفيزياء

حل تمرين(03):

1- احتمال أن ينجح الطالب في المادتين معا:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

2- احتمال أن لا ينجح الطالب في المادتين معا:

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 0.7$$

3- احتمال أن ينجح الطالب في إحدى المادتين :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.3$$
$$P(A \cup B) = 0.8$$

4- احتمال أن لا ينجح الطالب في إحدى المادتين:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

أو:

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\overline{A \cap B})$$
$$P(\overline{A \cup B}) = 0.4 + 0.5 - 0.7 = 0.2$$

5- احتمال أن يكون الطالب ناجحا في مادة الرياضيات علما أنه ناجح في مادة الفيزياء

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

التمرين الرابع:

نسبة الرسوب، حسب محاضر الامتحانات النهائية لمعهد ما، هو 15% في مقياس الإحصاء؛ وفي مقياس الرياضيات هو 25 %؛ وفي المقياسين معا هو 10 %. أخذنا طالبا عشوائيا من المحاضر. إذا كان هذا الطالب راسبا في الرياضيات ما هو احتمال أن يرسب في الإحصاء؟. إذا كان الطالب

راسبا في الإحصاء ما هو احتمال أن يرسب في الرياضيات؟. ما هو احتمال أن يرسب في الرياضيات أو في الإحصاء؟.

الحل:

الحل:

احتمال أن يرسب في الرياضيات هو $p(A) = 0.15$

احتمال أن يرسب في الإحصاء هو $p(B) = 0.25$

احتمال أن يرسب في الرياضيات والإحصاء معا هو

$$P(A \cap B) = 0.10$$

- احتمال أن يرسب في الاحصاء مع العلم أنه (أي شرط) راسبا في الرياضيات هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.10}{0.15}$$

- احتمال أن يرسب في الرياضيات مع العلم أنه راسب في الإحصاء هو:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.10}{0.25}$$

- احتمال أن يرسب في الرياضيات أو في الإحصاء هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.15 + 0.25 - 0.10 = 0.30$$

التمرين الخامس:

تملك مؤسسة إنتاجية ثلاث آلات للإنتاج، بنسب إنتاج هي على التوالي: 60%، 30%، 10% من إجمالي إنتاج المؤسسة. فإذا كانت نسبة الإنتاج الصالح لهذه الآلات هي على التوالي: 98%، 97%، 96%. سحبنا بصورة عشوائية وحدة من المؤسسة، ووجد بأنها فاسدة، فما هو احتمال أن تكون هذه الوحدة من إنتاج الآلة الثالثة.

الحل:

نسمي الآلات الثلاث على التوالي A، B وC وهي ثلاث مجموعات جزئية متنافية، اتحادهما يشكل المجموعة الكلية (المؤسسة) و نرمز للوحدة الفاسدة بالرمز X والتي تتحقق إحدى المجموعات السابقة، والمطلوب هو إيجاد:

إحتمال أن تكون هذه الوحدة الفاسدة من إنتاج الألة C، وبتطبيق نظرية بايز نجد:

$$P(C/X) = \frac{P(C) \times P(X/C)}{P(A) \times P(X/A) + P(B) \times P(X/B) + P(C) \times P(X/C)}$$

بالتطبيق العددي نجد:

$$P(C/X) = \frac{0.10 \times 0.04}{(0.6 \times 0.02) + (0.30 \times 0.03) + (0.10 \times 0.04)} = 0.16$$

الفصل الرابع:

المتغيرات العشوائية

تمهيد:

من الفصول السابقة مرت علينا العديد من التجارب العشوائية مقل رمي قطعة النقود أو إلقاء زهرة النرد مرة واحدة أو عدة مرات وعرفنا كيف نحدد فضاء العينة لمثل هذه التجارب العشوائية وفي كثير من الأحيان ربما لايكون من الضروري دراسة فضاء العينة بالتفصيل، اي لايكون اهتمامنا منصبا على دراسة فضاء العينة بالتفصيل ولكن يكون اهتمامنا على قيم عددية مرتبطة بعناصر فضاء العينة وهذه القيم العددية هو مايسمى بالمتغير العشوائي وهو ماسنتعرض إليه في هذا الفصل .

المتغير العشوائي:

المتغير العشوائي x هو ذلك المتغير الذي يتم الحصول على قيمته نتيجة لتجربة عشوائية ما، أي أن المتغير العشوائي هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة Ω ومداه هو مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R

وقد يكون المتغير العشوائي متقطعا أو مستمرا.

1-المتغير العشوائي المتقطع:

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيما منفصلة(متقطعة) مثل:3،2،1،....ومثال ذلك:

- عدد الاولاد الذكور أو الإناث في اسرة ما.
- عدد السيارات المباعة في الشهر لاحد وكلاء السيارات.
- عدد الصور الظاهرة في تجربة رمي قطعة نقد منتظمة مرتين متتاليتين.
- مجموع الارقام الظاهرة على وجه زهرة النرد ملقاة مرتين متتاليتين....

2-التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع هو الجدول أو القائمة التي تحتوي على جميع القيم الممكنة لهذا المتغير مع الاحتمالات المناظرة لكل قيمة.وتسمى الدالة:

$$,\forall x \in Rf(X) = P(X = x)$$

بدالة التوزيع الاحتمالي أو دالة الكتلة الاحتمالية وتحقق دالة الكثافة الشروط التالية:

1- $f(X) \geq 1$

2-$\sum_{i=1}^{n} f(xi) = 1$

3- $f(-\infty) = 0$

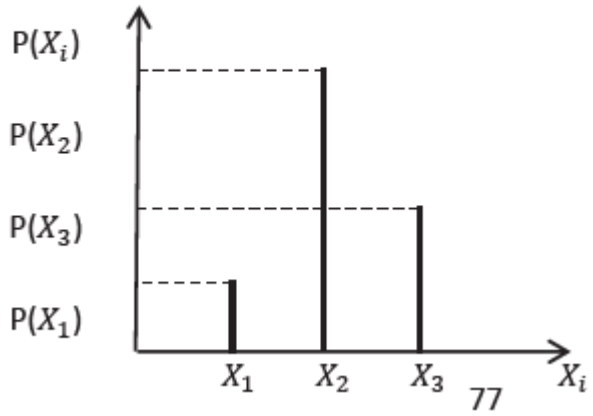
4- $f(+\infty) = 1$

xi+1)$f(xi) \leq f($

يعرض التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل بالطريقة التالية:

$X = x_i$	x_1	x_2	.....	x_k	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	.....	p_k	1

ويمكن تمثيل قانون التوزيع الاحتمالي بيانيا، ويكون الشكل العام للتمثيل كالآتي:



77

مثال : نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات بالصدفة ، و نهتم بعدد مرات الحصول على P .

- في هذا المثال ، فإن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات الحصول على P، حيث فضاء هذا المتغير العشوائي هو :

$$\Omega = \{(FFF), (PFF), (FPF), (FFP), (PPF), (PFP), (FPP), (PPP)\}$$

$$P(X = 0) = \{(FFF)\} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=\{(PFF),(FPF),(FFP)\}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\{(PPF),(PFP),(FPP)\}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\{(PPP)\}=\frac{1}{8}$$

و بالتالي فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو كالتالي:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- ***دالة التوزيع المتجمع:***

دالة التوزيع المتجمع هي دالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي:

$$F : R \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longrightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

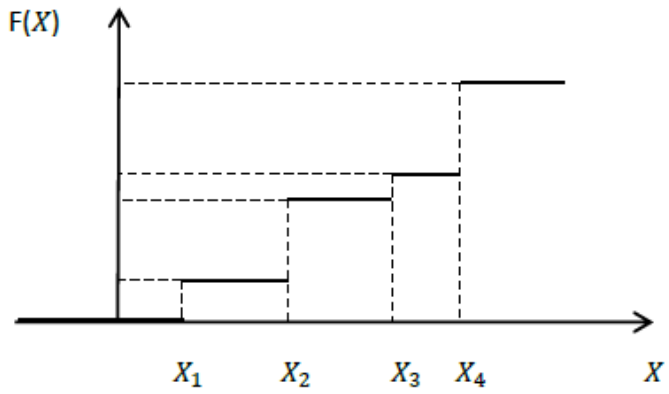
- ***خصائص دالة التوزيع المتجمع:***

- F دالة متزايدة: $x \leq y \longrightarrow F(x) \leq F(y)$
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ ، بمعنى أقصى قيمة ل F(x) هي 1.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ، بمعنى أدنى قيمة ل F(x) هي 0.
- F دالة مستمرة على اليمين.

وتكتب دالة التوزيع المتجمع كالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ P_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ P_1 + P_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ P_1 + P_2 \ldots + P_{k-1} & x_{K-1} \leq x < x_k \\ 1 & x \geq x_k \end{cases}$$

ويمكن تمثيل تابع التوزيع الاحتمالي، ويكون الشكل العام للتمثيل كالآتي:



مثال:

أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين الظاهرين على وجهي حجري نرد في تجربة رمي حجري نرد منتظمين مرة واحدة.

الحل:

1-تحديد فضاء العينة للتجربة حيث:

X1 : قيمة زهرة النرد الأولى

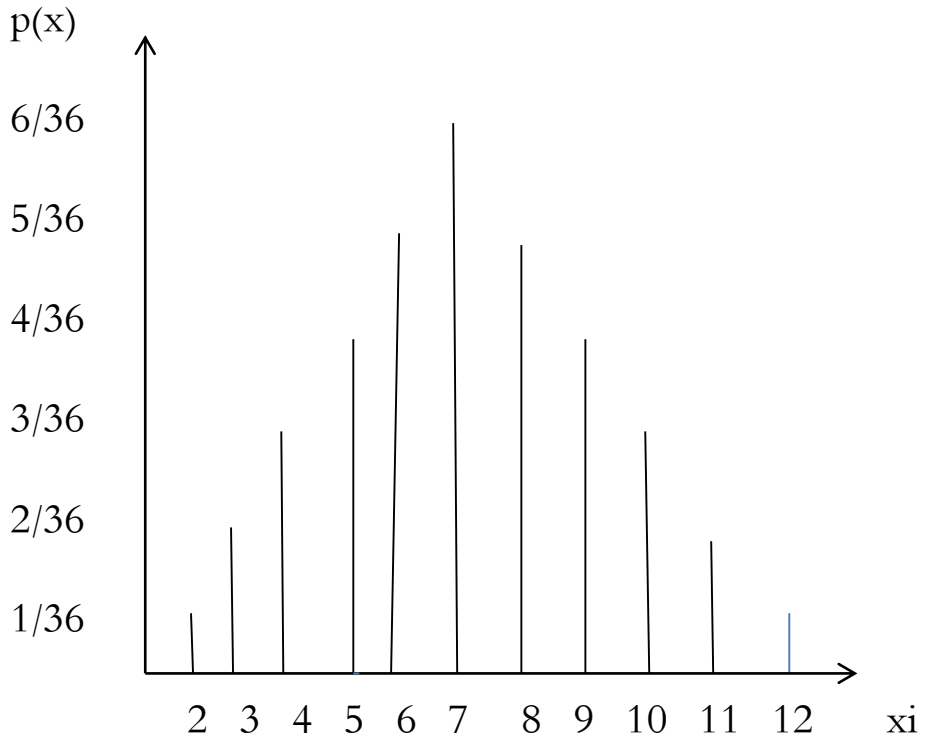
X2 : قيمة زهرة النرد الثانية

x1 / x2	1	2	2	4	5	6
1	2	4	3	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ويكون جدول التوزيع الاحتمالي كالتالي:

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

ويكون التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي كما يلي:



مثال : نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات بالصدفة ، و نهتم بعدد مرات الحصول على P .

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ومثله بيانيا.

2- اكتب دالة التوزيع المتجمع ومثلها بيانيا.

الحل:

1- كتابة التوزيع الاحتمالي:

- في هذا المثال ، فإن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات الحصول على P، حيث فضاء هذا المتغير العشوائي هو :

$$\Omega = \{(FFF), (PFF), (FPF), (FFP), (PPF), (PFP), (FPP), (PPP)\}$$

$$P(X = 0) = \{(FFF)\} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=\{(PFF),(FPF),(FFP)\}=\frac{3}{8}$$

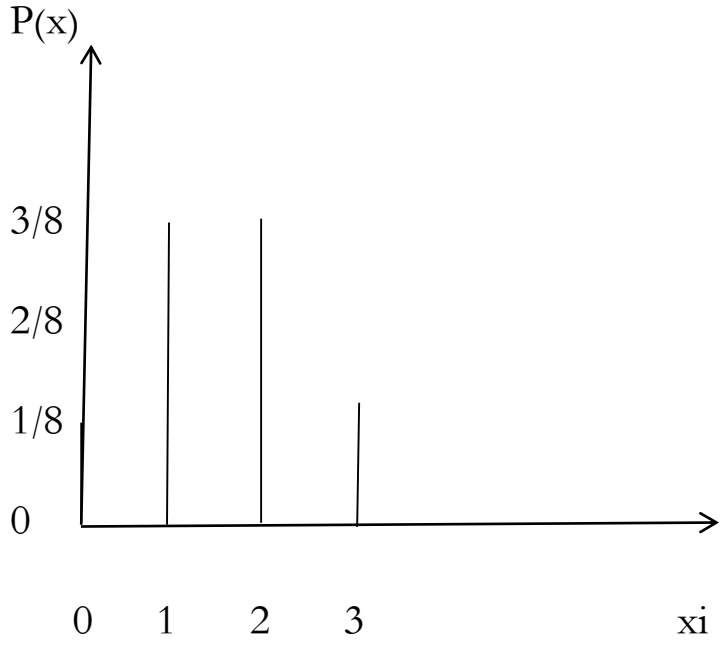
$$P(X=2)=\{(PPF),(PFP),(FPP)\}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\{(PPP)\}=\frac{1}{8}$$

و بالتالي فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو كالتالي:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

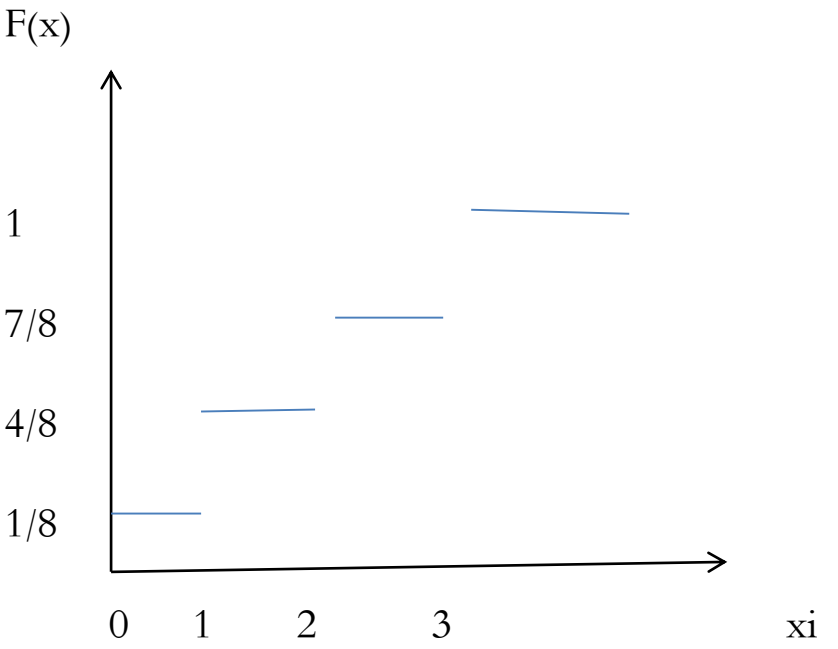
التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالي:



نجد الدالة التجمعية للمتغير العشوائي بالشكل التالي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \ si\ x < 0 \\ \frac{1}{8}\ si\ 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8}\ si\ 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} si\ 2 \le x < 3 \\ 1 \ \ si\ x \ge 3 \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع المتجمع:



3-التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل:

إذا كان X متغير عشوائي منفصل له دالة توزيع احتمالي $F(X)$ ، فإن القيمة المتوقعة لـ X المشار اليها بـ $E(X)$ أو μ ، يمكن أن نعرفها من خلال :

$$E(X) = \sum xi.P(x)$$

خواص التوقع الرياضي:

- $E(C) = Ci$
- $E(CX) = C.E(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(XY) = E(X).E(Y)$ إذا كان X و Y مستقلين

التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي المنفصل:

على الرغم من أن التوقع الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X يمكن أن يعطينا المتوسط المرجح لقيم x ، إلا أنه لا يخبرنا عن اختلاف أو انتشار هذه القيم ، و يمكن حساب انتشار هذه القيم حول هذا التوقع باستخدام التباين و الانحراف المعياري ، و يمكن حساب تباين المتغير العشوائي المنفصل بالشكل التالي:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

خواص التباين:

- $V(C) = 0$
- $V(CX) = C^2V(X)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ *إذا كان* X *و* Y *مستقلين*

بحيث:

X, Y: *متغيرات عشوائية.*

C: *ثابت.*

الانحراف المعياري:

أما الانحراف المعياري ، فهو يعبر عن الجذر التربيعي للتباين و يعرف رياضيا:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

مثال:

نرمي حجرة نرد منتظمة، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل ضعف الرقم الظاهر على الوجه.

1- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX ومثله بيانيا.

2- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي X ومثله بيانيا

3- احسب التوقع الرياضين التباين والانحراف المعياري.

الحل:

1- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

يكتب فضاء العينة(عدد الحالات الممكنة) كالتالي:

$$\Omega = \{1 ,2,3,4,5,6\}$$

واحتمال ظهور كل وجه هو $\frac{1}{6}$ ، وعليه فأن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يكتب كالتالي:

$X = x_i$	2	4	6	8	10	12	$\sum pi$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

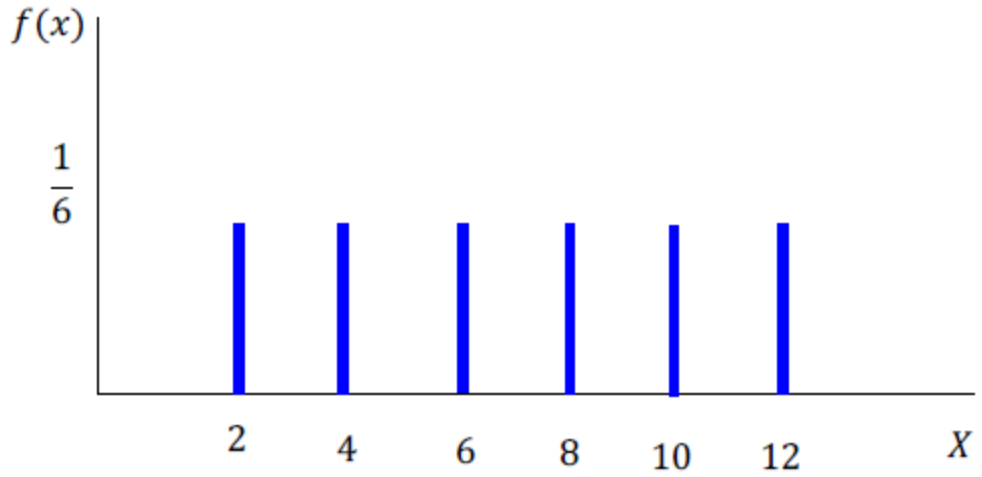
ومن خلال الجدول أعلاه نلاحظ أن الخاصيتين التاليتين محققتين:

$$f(x_i) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

التمثيل البياني للتوزيع الاحتمالي:

التمثيل البياني:

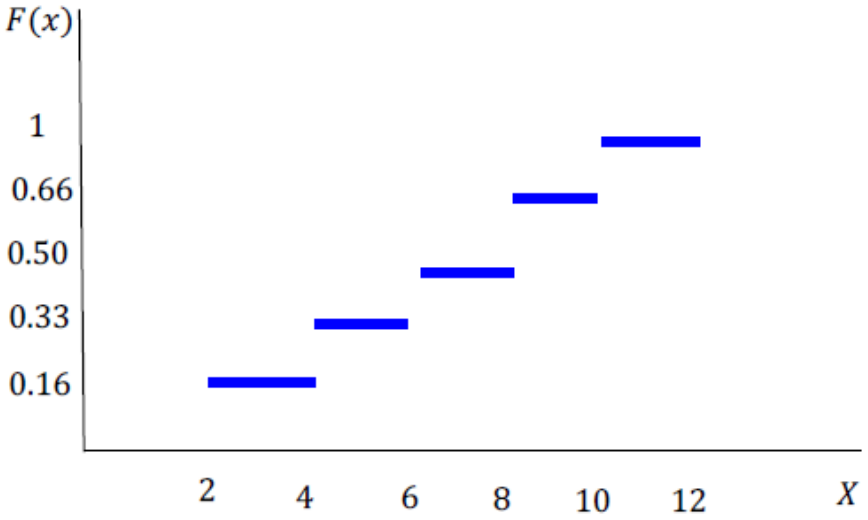


ب- تحديد تابع توزيع المتغير العشوائي X:

x_i	2	4	6	8	18	12	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$F(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	

$$F(X)=\begin{cases}0 & X<2\\ \frac{1}{6} & 2\le X<4\\ \frac{2}{6} & 4\le X<6\\ \frac{3}{6} & 6\le X<8\\ \frac{4}{6} & 8\le X<10\\ \frac{5}{6} & 10\le X<12\\ 1 & X\ge 12\end{cases}$$

التمثيل البياني:



حساب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري:

1-التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum xi.P(x)$$

$$E(X) = (2)\left(\frac{1}{6}\right) + (4)\left(\frac{3}{6}\right) + (6)\left(\frac{3}{6}\right) + (8)\left(\frac{1}{6}\right) + (10)\left(\frac{1}{6}\right) + (12)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E(X) = 7$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

لدينا:

$$E(X) = 7$$

$$E(X^2) = (4)\left(\frac{1}{6}\right) + (16)\left(\frac{3}{6}\right) + (36)\left(\frac{3}{6}\right) + (64)\left(\frac{1}{6}\right) + (100)\left(\frac{1}{6}\right) + (144)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E(X^2) = 60.7$$

$$\Rightarrow V(X) = 60.7 - 7^2$$

$$V(X) = 11.7$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11.7} = 3.4$$

1-2المتغير العشوائي المستمر:

يعرف المتغير العشوائي المتصل (المستمر) بأنه ذلك المتغير الذي يأخذ قيما متصلة داخل مدى معين،كما يمكن نقول عن متغير عشوائي أنه مستمر إذا كان بإمكانه أن يأخذ قيمة x_i بين كل قيمتين محتملتين x_a و x_b ومثال ذلك:

- أطوال طلبة كلية العلوم الاقتصادية.
- المبيعات الشهرية لإحدى المؤسسات
- الانتاج اليومي لمنتج معين

دالة الكثافة الاحتمالية:

يختلف تعريف دالة الكثافة في المتغير العشوائي المتقطع التي كانت تسمى بدالة الكتلة الاحتمالية أما في حالة المتغير العشوائي المستمر فتسمى دالة الكثافة الاحتمالية وهي عبارة عن منحنى متصل مرافق لكل فترة من فترات المتغير العشوائي المتصل، أي هي المساحة الاحتمالية المرافقة للفترة $(a \leq x \leq b)$ وتعرف دالة الكثافة الاحتمالية كالتالي:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ (التوزيع الاحتمالي) ما يلي:

- الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى $[, b]$ أي أن:

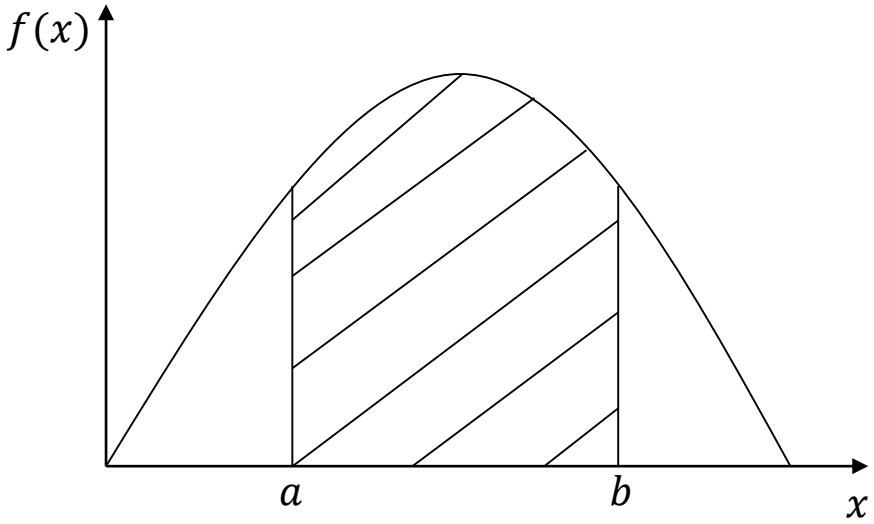
$$x\epsilon[a, b], f(x) \geq 0$$

- الدالة مستمرة نحو اليمين .
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى وليكن a إلى الحد الأعلى b وليكن يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية ، لذلك يساوي الواحد الصحيح ، أي أن :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

حيث الصيغة الرياضية أعلاه تسمى بالتكامل المحدد من أدنى نقطة $-\infty$ إلى أعلى نقطة $+\infty$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحنى ما بين $[-\infty, +\infty]$، مثلا إذا أردنا حساب مجموع الاحتمالات من النقطة a إلى النقطة b و تكتب رياضيا $P(a \leq x \leq$

$b)$، فيجب حساب المساحة أسفل المنحنى ما بين النقطة a و النقطة b و المبينة في الشكل التالي:



و يتم إيجاد التكامل المحدد في هذا المجال كما يلي:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث تعبر المساحة المظللة عن مجموع الاحتمالات الكلية وتساوي الواحد الصحيح. وحساب هذه المساحة حيث يكون n عدد كبير جدا يكون من خلال تابع رياضي للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} f(x) & a \leq X \leq b \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

من خلال هذا القانون يمكننا حساب احتمالات المتغير العشوائي X لأي مجال جزئي محصور بين النقطتين a و b.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

فإذا كانت $a = b$ يمكن حساب الاحتمال $P(X = a)$ من خلال:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

ويمكن حساب الاحتمال $P(X < a)$ أيضا من خلال:

$$P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

حيث $F(x)$ هي الدالة الأصلية لـ$f(x)$ ، وفيما يلي جدول يوضح أشهر الدوال:

المشتقة $f(x)$	الأصلية $g(x)$
a	ax
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
e^x	e^x
e^{nx}	$\frac{1}{n}e^{nx}$

تابع التوزيع الاحتمالي:

أما تابع التوزيع* $F(X)$، فهو يعطينا الاحتمال للمتغير العشوائي عندما يكون في مجال معين من الشكل $]-\infty , a[$، وهو عبارة دالة تكاملية لدالة الكثافة الاحتمالية، ويمكن التعبير عن هذا التابع في الحالة العامة من خلال الدالة الرياضية الآتية: $p(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x).dx$

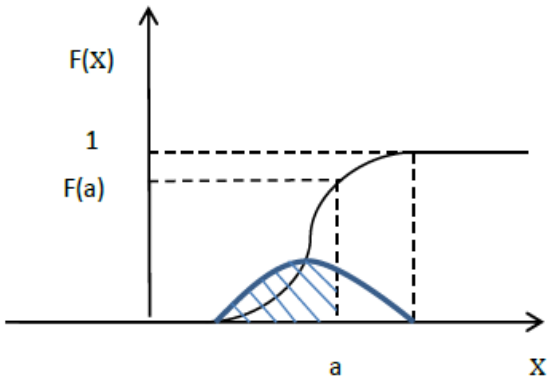
وحتى تكون الصيغة النهائية لتابع التوزيع مصاغة بدلالة المتغير X، فيمكن استخدام العلاقة الآتية:

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt$$

ومعرفة الدالة الممثلة لتابع التوزيع، تسهل علينا حساب احتمالات المتغير العشوائي، وذلك كالآتي:

$$p(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x).dx = \int_{-\infty}^{b} f(x).dx - \int_{-\infty}^{a} f(x).dx = F(b) - F(a)$$

ويمكن توضيح بيانيا تابع التوزيع، كالآتي:



مثال : مدة المكالمة الهاتفية التي تصل إلى مكتب معين متغير عشوائي كثافة احتماله بالدقائق هي من الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-\alpha}{2}x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

المطلوب:

- عين قيمة الثابت α

- احسب احتمال أن تفوق مدة مكالمة وصلت إلى هذا المكتب 3 دقائق
- احسب احتمال أن لا تفوق مدة مكالمة وصلت إلى هذا المكتب 3 دقائق

الحل:

1. تعين قيمة الثابت α: حسب تعريف الدالة ، فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 , \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-\alpha}{2}x}dx = 1 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{\frac{-\alpha}{2}} e^{\frac{-\alpha}{2}x}\right]_{0}^{+\infty} = 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{\frac{-\alpha}{2}} e^{-\infty}\right] - \left[\frac{1}{\frac{-\alpha}{2}} e^{0}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\alpha}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{2}{\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \; si \; x \geq 0 \\ 0 \quad si \; x < 0 \end{cases}$$

2.حساب احتمال أن تفوق مدة مكالمة وصلت إلى هذا المكتب 3 دقائق:

$$P(x \geq 3) = \int_{3}^{+\infty} e^{-x}dx = ?$$

$$P(x \geq 3) = [-e^{-x}]_{3}^{+\infty} = [(-e^{-\infty}) - (-e^{-3})] = e^{-3}$$

$$P(x \geq 3) = \frac{1}{e^{3}}$$

3.حساب احتمال أن لا تفوق مدة مكالمة وصلت إلى هذا المكتب 3 دقائق:

$$P(x \leq 3) = \int_{0}^{3} e^{-x}dx = ?$$

$$P(x \leq 3) = [-e^{-x}]_0^3 = [(-e^{-3}) - (-e^{-0})] = -e^{-3} + 1$$
$$= 1 - \frac{1}{e^3}$$
$$\Rightarrow P(x \leq 3) = 1 - P(x \geq 3)$$

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة توزيع احتمالية $f(x)$ ، فإن القيمة المتوقعة لـx المشار اليها بـ $E(X)$ ، يمكن أن نعرفها من خلال الصيغة التالية :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

من مثالنا السابق، نجد :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x.f(x)dx = \int_0^{+\infty} x.e^{-x}dx$$

باستخدام التكامل بالتجزئة: $U'.V = UV - \int V'U$

حيث:

$$U' = e^{-x} \Rightarrow U = -e^{-x}$$
$$V = x \Rightarrow V' = 1$$
$$\Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} x.e^{-x}dx = -x.e^{-x} - \int_0^{+\infty} -e^{-x}$$
$$E(X) = [-x.e^{-x} - (e^{-x})]_0^{+\infty}$$
$$E(X) = [-x.e^{-x} - e^{-x}]_0^{+\infty}$$
$$E(X) = [e^{-x}(-x-1)]_0^{+\infty}$$
$$E(X) = [e^{-\infty}(-\infty - 1) - e^{-0}(-0-1)]$$
$$E(X) = \left[0 - \frac{1}{e^0}(-0-1)\right] \Rightarrow E(X) = 1$$

خواص التوقع :

1. إذا كان c ثابتا فإن: $E(c.x) = c.E(x); E(c) = c$

2. إذا كان x و y مستقلين فأن: $E(x+y)=E(x)+E(y); E(x-y)=$
$E(x)-E(y)$

التباين للمتغير العشوائي المستمر:

إذا كان x متغير عشوائي مستمر له دالة توزيع احتمالية $f(x)$ ، فإن تباينه المشار اليه بـ $V(X)$ ، يمكن أن حسابه من خلال الصيغة التالية :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx-(E(X))^2$$

حيث: $x^2.f(x)dx = E(\ \ ^2)$

أما الانحراف المعياري هو جذر التربيعي للتباين، من مثالنا السابق نجد:

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} E(X^2)-(E(X))^2=\int_0^{+\infty} E(X^2)-1$$

$$\int_0^{+\infty} E(X^2)=\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^{+\infty} x^2.e^{-x}dx$$

$$U'=e^{-x}\Rightarrow U=-e^{-x}$$

$$V=x^2\Rightarrow V'=2x$$

باستخدام التكامل بالتجزئة: $U'.V=UV-\int V'U$ نجد :

$$\int_0^{+\infty} x^2.e^{-x}dx=-e^{-x}.x^2-\int_0^{+\infty} 2x.-e^{-x}$$

باستخدام التكامل بالتجزئة للجزء الثاني من الطرف الثاني للمعادلة: $U'.V=UV-\int V'U$ نجد :

$$U'=-e^{-x}\Rightarrow U=e^{-x}$$

$$V=2x\Rightarrow V'=2$$

$$\Rightarrow E(X^2)=-e^{-x}.x^2-\left[e^{-x}.2x-\int_0^{+\infty} 2.e^{-x}\right]$$

$$\Rightarrow E(X^2)=-e^{-x}.x^2-[e^{-x}.2x+2.e^{-x}]$$

$$\Rightarrow E(X^2)=[-e^{-x}.x^2-e^{-x}.2x-2.e^{-x}]_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow E(X^2)=[-e^{-x}(x^2+2x+2)]_0^{+\infty}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = [-e^{-+\infty}(+\infty^2 + 2(+\infty) + 2) - (-e^{-0}(0^2 + 2(0) + 2))]$$
$$\Rightarrow E(X^2) = 0 + 2 = 2$$
$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1 = 1$$

مثال:

إذا كان X متغير عشوائي معرف بالتابع التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \; si \; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

1- تأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية ومثله بيانيا.

2- احسب الاحتمال $P(0 < x < 1/2)$

3- حدد تابع التوزيع للمتغير العشوائي ومثله بيانيا.

4- احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

الحل:

1- التأكد أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية:

حتى يكون $f(X)$ تابع كثافة احتمالية يجب توفر شرطين أساسيين:

$$f(X) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

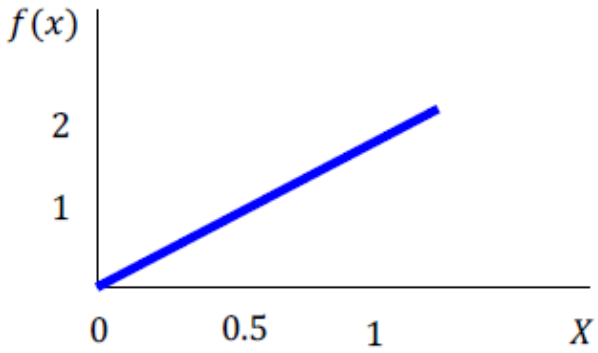
الخاصية الأولى دوما محققة مهما كانت قيمة X ضمن مجال تعريفه.

الخاصية الثانية:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$
$$= \int_0^1 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = 0 - 1 = 1$$

الخاصية الثانية أيضا محققة ومنه نستنتج أن التابع المعطى هو تابع كثافة احتمالية.

التمثيل البياني:



2- حساب الاحتمال $P(0 < X < \frac{1}{2})$

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{0.5} 2x dx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.25$$

3- تحديد تابع التوزيع للمتغير العشوائي

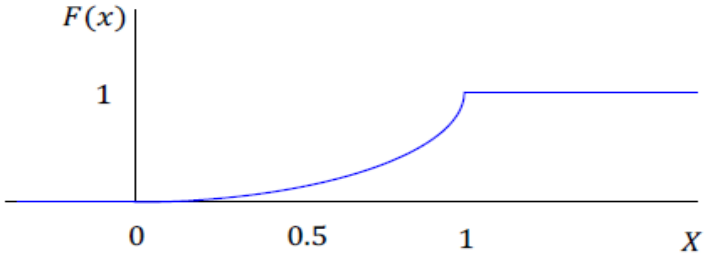
$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x 2x dx = \frac{2x^2}{2}$$

حيث أن: $X \leq 1$

وبالتالي يكون تابع التوزيع كما يلي:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \frac{2x^2}{2} & 0 \leq X \leq 1 \\ 1 & X > 1 \end{cases}$$

ويمكن تحديد التمثيل البياني لتابع التوزيع في مثالنا هذا في الشكل التالي:



3- حساب التوقع الرياضي والتباين

- التوقع الرياضي

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x(2x)dx = 2x^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = 0.66$$

- التباين

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \int_0^1 x^2(2x)dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = \int_0^1 2x^3 dx - \left[\frac{2}{3}\right]^2$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3}\right]^2 = 0.5 - 0.44 = 0.06$$

- الانحراف المعياري

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.06} = 0.24$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

نادي علمي يتكون من أعضاء منهم 6 رجال و 4 نساء، نريد أن نختار من بينهم عن طريق القرعة 3 أفراد للمشاركة في ندوة علمية، ليكن المتغير X: عدد النساء ضمن الوفود المشارك في هذه الندوة.

1- ما هي طبيعة ونوع هذا المتغير؟ علل ذلك؟

2- عين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير؟ تأكد أنه فعلا توزيع احتمالي؟ مثله بيانيا؟

3- عين دالة التوزيع الاحتمالية F(x)؟ اشرح النتيجتين؟

4- أحسب احتمال أن يكون الوفد: مشكلا من الرجال فقط؟ مشكلا من النساء فقط؟ يضم على الأقل رجلين؟ يضم على الأكثر امرأتين؟

الحل:

نادي علمي يتكون من 10 أعضاء، منهم 6 رجال و 4 نساء، نريد أن نختار من بينهم عن طريق القرعة 3 أفراد للمشاركة في ندوة علمية، ليكن المتغير X: عدد النساء ضمن الوفود المشارك في هذه الندوة.

1- طبيعة ونوع هذا المتغير، مع التعليل:

أ- **طبيعة المتغير**: عشوائي لأن السحب يكون عن طريق القرعة (بشكل عشوائي) وبالتالي لا نعرف مسبقا أعضاء هذا الوفد.

ب- **نوع المتغير**: عشوائي متقطع لأن عدد النساء غير قابل للتجزئة.

2- تعين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ثم التأكد أنه فعلا توزيع احتمالي، وتمثيله بيانيا:

أ- تعيين التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ثم التأكد أنه فعلا توزيع احتمالي:

X: يمثل عدد النساء ضمن الوفد، أي أن مجموعة تعريف المتغير العشوائي X هي:

$$X \in \Omega_X = [0,1,2,3]$$

وبالتالي:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 . C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} \quad ; \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 . C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120}$$

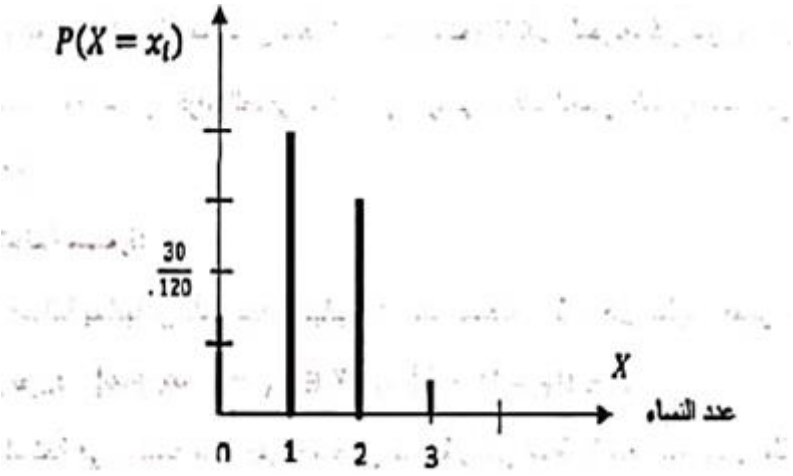
$$P(X=2) = \frac{C_4^2 . C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} \quad ; \quad P(X=3) = \frac{C_4^3 . C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو:

X	0	1	2	3	$\sum p(x = x_i)$
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

- بما أن الشرطين: $p(X=x_i) \geq 0$ و $\sum p(x = x_i) = 1$ محققين فإن هذا التوزيع هو توزيع احتمالي.

ب- التمثيل البياني: بما أن المتغير العشوائي من النوع المتقطع فإنه يمثل بواسطة الأعمدة البسيطة



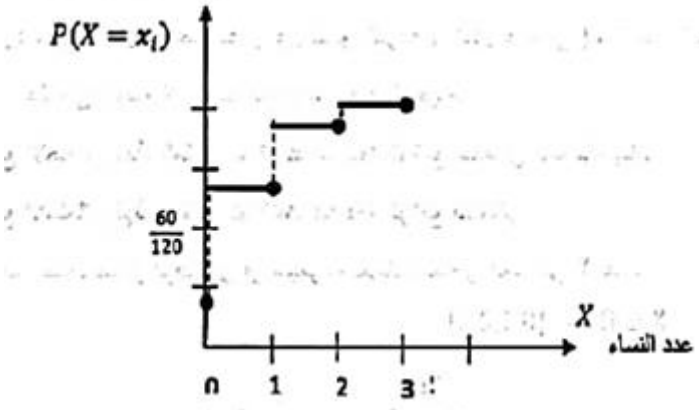
3–تعيين دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، ومثلها بيانيا:

أ– تعيين دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:

لدينا: $F(x) = p(X \leq x)$ وبالتالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{20}{120} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{80}{120} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{116}{120} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

ب– التمثيل البياني: بواسطة المنحنى السلمي



4–حساب الأمل الرياضي والانحراف المعياري، مع شرح النتيجتين:

أ- حساب الأمل الرياضي:

X	0	1	2	3	المجموع
$P(X=x_i)$	$\frac{20}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{04}{120}$	1
$x_i.p(X=x_i)$	0	$\frac{60}{120}$	$\frac{72}{120}$	$\frac{12}{120}$	1.2
$x_i^2.p(X=x_i)$	0	$\frac{60}{120}$	$\frac{144}{120}$	$\frac{36}{120}$	2

$$E(X)= \sum_{i=1}^{4} p_i x_i = 1,2$$

الشرح: متوسط عدد النساء في الوفد الواحد هو امرأة واحدة تقريبا.

ب- الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} = \sqrt{2 - (1,2)^2} = 0,75$$

الشرح: الانحراف المعياري بين العدد الحقيقي للنساء في 120 وفد ممكن والعدد المتوسط يقدر بـ: إمرأة واحدة تقريبا (يقدر التشتت بـ: 0.75 إمراة).

5- حساب احتمال أن يكون الوفد:

أ- مشكلا من الرجال فقط: $p(x=0)= \frac{20}{120}$

ب- مشكلا من النساء فقط: $p(x=3)= \frac{4}{120}$

ت- يضم على الأقل رجلين: $p(x \leq 1) = p(x=0)+ p(x=1)= \frac{80}{120}$

ث- يضم على الأكثر امرأتين: $p(x \leq 2) = p(x=0)+ p(x=1)+ p(x=2)= \frac{116}{120}$

التمرين الثاني:

تنتج شركة معينة 20 قطعة في اليوم من منتوج معين، من بينهما قطعتان فاسدتان. قمنا بسحب 4 قطع من هذا المنتوج بطريقة عشوائية. أوجد القيمة المتوقعة لعدد القطع الفاسدة.

الحل:

إن قيم X الممكنة هي: $X= \{0,1,2\}$، أي لا توجد قطعة فاسدة أو توجد قطعة فاسدة أو توجد قطعة فاسدة واحدة أو توجد قطعتان فاسدتان.

إن عدد الحالات الكلية هو: C^4_{20}، أما الإحتمالات المقابلة لـــ X فهي:

تنتج شركة معينة 20 قطعة في اليوم من منتوج معين، من بينهما قطعتان فاسدتان. قمنا بسحب 4 قطع من هذا المنتوج بطريقة عشوائية. أوجد القيمة المتوقعة لعدد القطع الفاسدة.

نتحصل على التوزيع التالي:

$$P(X=0)=\frac{C_2^0 C_{18}^4}{C_{20}^4}=0.63$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1 C_{18}^3}{C_{20}^4}=0.33$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2 C_{18}^2}{C_{20}^4}=0.031$$

قيم X	0	1	2	المجموع
P(X)	0.63	0.33	0.031	1
XP(X)	0	0.33	0.062	0.392=0.4

وعليه فإن التوقع الرياضي لهذه العملية هي 0.4، أننا نتوقع الحصول على 0.4 قطعة فاسدة (قيمة لـــX) من بين 20 قطعة المنتجة.

التمرين الثالث:

ليكن X الإنتاج السنوي من التمور في أحد المؤسسات، أقصى طاقة إنتاجية هي 120 طن.

دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معرفة كما يلي: $f(x)=\frac{1}{\alpha}X$

1- ما هي طبيعة ونوع المتغير X؟ علل ذلك؟

2- حدد مجال تعريف X؟ ثم أوجد قيمة α حتى تكون f(x) دالة كثافة احتمالية؟ مثلها بيانيا؟

3- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية f(x)؟ مثلها بيانيا؟

4- أحسب متوسط الإنتاج السنوي من التمور والانحراف المعياري لهذه المؤسسة؟

5- ما احتمال أن يبلغ إنتاج هذه المؤسسة؟

- ما بين 70 و 90 طن هذه السنة؟ أقل من 20 طن؟ أكثر من 100 طن؟ اشرح النتائج.

الحل:

ليكن X الإنتاج السنوي من التمور في أحد المؤسسات، أقصى طاقة إنتاجية هي 120 طن.

دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير معرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1}{\alpha}X$

1- ما هي طبيعة ونوع المتغير X مع التعليل:

أ- طبيعة المتغير: عشوائي لأن إنتاج التمور تتحكم فيه عدة عوامل عشوائية تجعل الإنتاج غير ثابت من سنة لأخرى، مثل: انقطاع التيار الكهربائي، تأخر استلام المواد الأولية، تأخر العمال...إلخ، أي لا يمكن أن نعرف مسبقا ما سينتج من التمور خلال سنة معينة.

ب- نوع المتغير: عشوائي مستمر لأن الإنتاج السنوي للتمور والمقدر بالطن قابل للعد والتجزئة.

2- تحديد مجال تعريف X، ثم ايجاد قيمة α حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية مع التمثيل البياني:

أ- مجال التعريف: بما أن أقصى طاقة إنتاجية هي 120 طن، وأن إنتاج التمور لا يمكن أن يكون سالبا فإن:

$$X \in \Omega_X = [0 - 120]$$

ب- إيجاد قيمة α حتى تكون $F(x)$ دالة كثافة إحتمالية:

حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية يجب توفر شرطين أساسين هما:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_0^{120} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

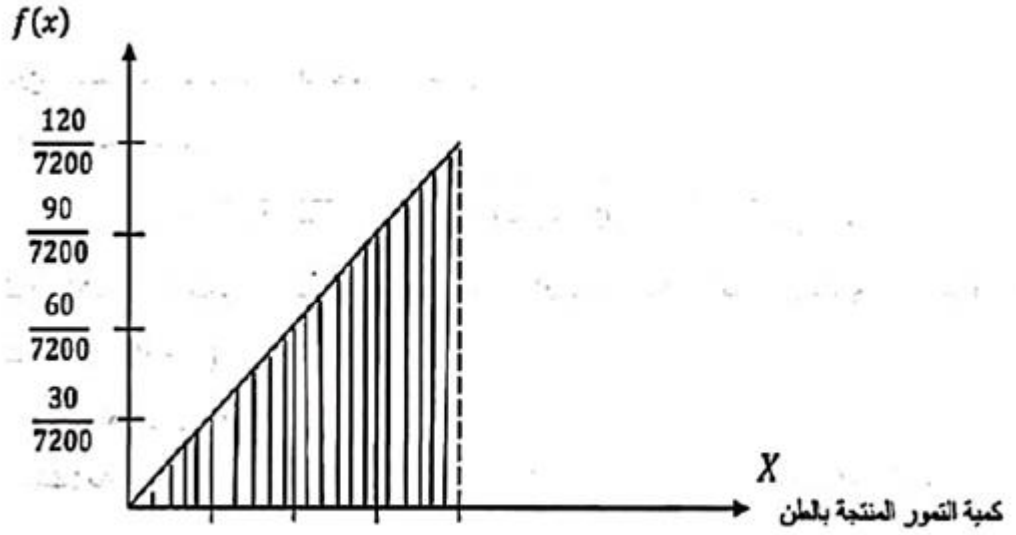
لدينا:

$$\begin{aligned} \int_0^{120} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \int_0^{120} f(x)\,dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \int_0^{120} \frac{1}{\alpha} X\,dx = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha}[X^2]_0^{120} = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 7200 \end{aligned}$$

أي أن: $x(X) = \frac{1}{7200} X$

ولدين من جهة أخرى $f(x) \geq 0$، وبالتالي فإن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

ج- التمثيل البياني:



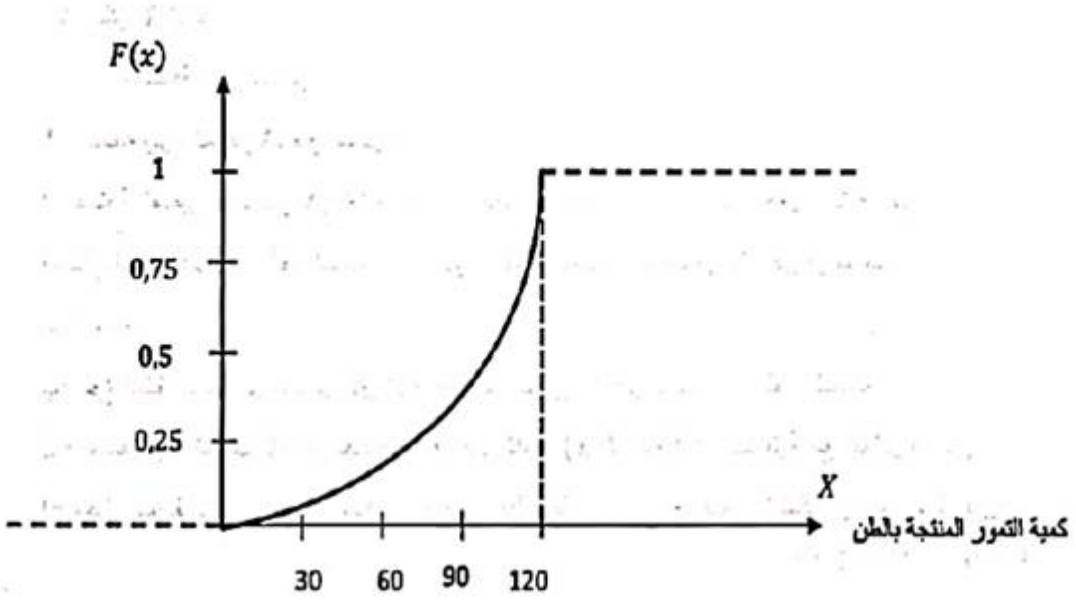
3- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$، تمثيلها بيانيا:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

$$X \in [0-120] : F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{7200} X\,dx = \frac{1}{14400} X^2$$

$$F(x) = \frac{1}{14400} X^2$$

- التمثيل البياني:



4–حساب متوسط الإنتاج السنوي من التمور والانحراف المعياري لهذه المؤسسة:

أ- حساب متوسط الإنتاج السنوي من التمور:

$$E(X) = \int_0^{120} X f(x)\,dx$$

$$E(X) = \int_0^{120} X \left(\frac{X}{7200}\right) dx$$

$$E(X) = \left[\frac{1}{21600}X^3\right]_0^{120} = 80 \text{ طن}$$

ب- الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$

$$m_1 = E(X) = 80 \Rightarrow m_1^2 = (E(X))^2 = 6400$$

$$m_2 = E(X^2) = \int_0^{120} X^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{120} X^2 \left(\frac{X}{7200}\right) dx$$

$$m_2 = \left[\frac{1}{28800}X^4\right]_0^{120} = 7200$$

ومنه:

$$\sigma(X) = \sqrt{m_2 - m_1^2} = \sqrt{7200 - 6400} = 28{,}28 \text{ طن}$$

5– حساب الاحتمالات التالية:

أ–أن يبلغ إنتاج هذه المؤسسة: ما بين 70 و 90 طن:

$$P(70 \le X \le 90) = p(X \le 90) - p(X \le 70) = F(70) = \frac{(90)^2}{14400} - \frac{(70)^2}{14400} = 0{,}22$$

الشرح: من بين 100 سنة مقبلة لنشاط هذه المؤسسة هناك 22 سنة ستحقق فيها هذه المؤسسة إنتاجا يتراوح ما بين 70 و 90 طن.

ب- أقل من 20 طن:

$$P(X< 20) = p(X < 20) = F(20) = \frac{(20)^2}{14400} = 0,027$$

الشرح: من بين 100 سنة مقبلة لنشاط هذه المؤسسة هناك 3 سنوات تقريبا ستحقق فيها هذه المؤسسة إنتاجا يقل 20 طن.

ج- أكثر من 100 طن:

$$P(X> 100) = 1- p(X \leq 100) = 1- F(100) = 1- \frac{(100)^2}{14400} = 0,305$$

الشرح: من بين 100 سنة مقبلة لنشاط هذه المؤسسة هناك 30 سنة تقريبا ستحقق فيها هذه المؤسسة إنتاجا يفوق 100 طن.

التمرين الرابع:

ليكن X متغيرا عشوائيا متصلا معرفا بالدالية الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} KX & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

- أوجد قيمة K حتى تكون f(x) دالة كثافة إحتمالية،
- أوجد $p(1\leq x \leq 2)$،
- مثل بيانيا هذه الدالة.
- **الحل:**

حتى تكون f(x) دالة كثافة إحتمالية يجب أن يكون:

$$\int f(x)dx = 1 \Rightarrow \int kxdx = 1 \Rightarrow k\int xdx = 1$$

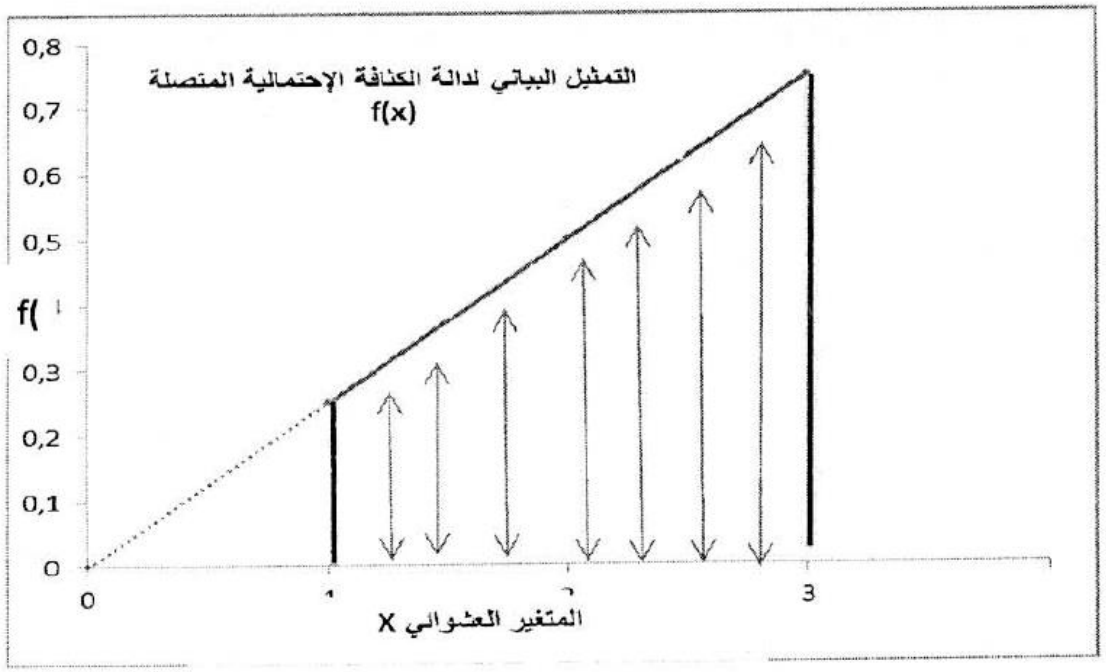
$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = k\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

- وتكون الدالة على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4X & 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{دون ذلك} \end{cases}$$

- ويمكن بسهولة إيجاد

$$P(1 \le x \le 2) = \int_1^2 \frac{1}{4} x dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{8} = 0.375$$



ملاحظة هامة:

يمكن ايجاد $p(1 \le x \le 2)$ هندسيا وذلك بحساب مساحة شبه المنحرف

وفق العلاقة:

$$\frac{AxB}{2} xh$$

أي أن:

$$P(1 \leq x \leq 2 = \frac{0.5+0.25}{2} x1 = 0.375$$

الفصل الخامس:

التوزيعات الاحتمالية

1-التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

1- توزيع بارنولي:

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه "جيمس بارنولي" في نهاية القرن السابع عشر، ويعد توزيع بارنولي أو مايسمى بمحاولات بارنولي الاساس لبناء توزيع ذي الحدين الذي سنتناوله لاحقا.

وتعرف تجربة بانولي بأنها تجربة تكون نتيجتها إما النجاح وتحدث باحتمال P أو الفشل باحتمال (1-P).

إن المتغير العشوائي X لتجربة بارنولي يأخذ قيمتين فقط هما (1.0)، القيمة (1) تمثل حالة النجاح، والقيمة (0) تمثل حالة الفشل .ويكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX على النحو التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \mathrm{p}^{\mathrm{x}}(1-\mathrm{p})^{1-\mathrm{x}}, x = 0,1 \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لتوزيع بارنولي:

1- **المتوسط الحسابي(التوقع الرياضي)**: ويحسب بالصيغة التالية:

$$E(X) = p$$

2- التباين والانحراف المعياري:

$$V(X) = pq$$

بحيث:

$$q = 1 - P$$

3- الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

خصائص توزيع بارنولي:

إن أي تجربة إحصائية تحقق الشروط التالية ، تسمى تجربة بارنولي:

1- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط، هما النجاح أو الفشل.

2- إن نتيجة كل محاولة تعد مستقلة عن نتيجة المحاولات الاخرى.

3- إن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات وليكن (P) ، لذا احتمال الفشل سيكون ثابتا هو الأخر هو $1 - P$

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتجربة بارنولي تدعى بدالة الكتلة الاحتمالية كونها تتميز بالخصائص التالية:

1- إنها دالة وحيدة القيمة بمعنى إن لكل قيمة من القيم المعرفة للمتغير X هناك قيمة واحدة فقط للدالة $P(X = x)$

2- إنها دالة موجبة موجبة وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد أي: $0 \leq P(X = x) \leq 1$

3- إن مجموع القيم الاحتمالية $P(X = x)$ المقابلة لقيم المتغير X ياوي الواحد الصحيح أي أن:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}^{\mathrm{x}}(1 - \mathrm{P})^{1-\mathrm{x}} = 1$$

مثال:

عند رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية وكان المتغير العشوائي X يمثل ظهور الصورة .F

المطلوب:

1- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغيرX مع رسم الدالة

2- احسب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري للتوزيع

الحل:

1- كتابة دالة التوزيع الاحتمالي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \mathrm{p}^{\mathrm{x}}(1 - \mathrm{p})^{1-\mathrm{x}}, x = 0,1 \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

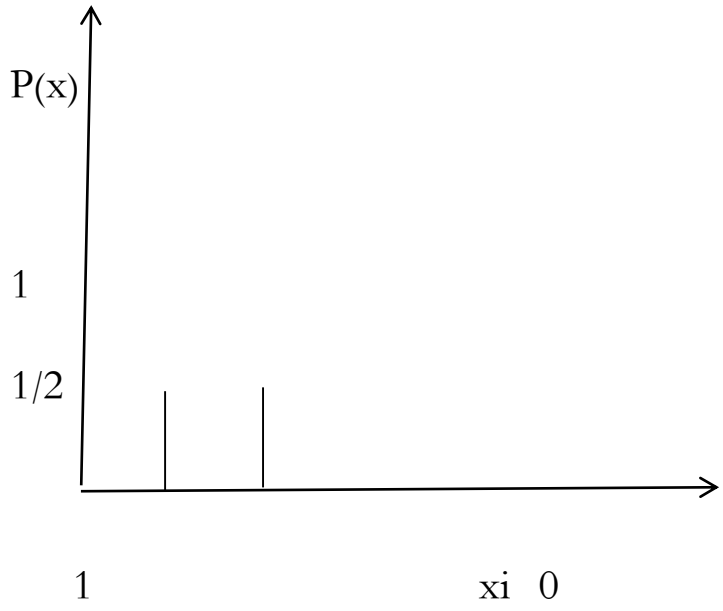
$$\Omega = \{P, F\}$$

$$P(F) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2}^{x}\ \frac{1}{2}^{1-x} & , x = 0,1 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

جدول التوزيع التكراري:

$X = x_i$	F	P	$\sum pi$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1



2-**حساب الوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري للتوزيع**

المتوسط الحسابي(التوقع الرياضي):

$$E(X) = P = \frac{1}{2}$$

التباين:

$$V(X) = pq = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

2- توزيع ذي الحدين:

عند تكرار تجربة برنولي عددا ثابتا من المحاولات المستقلة وليكن n فإننا في هذه الحالة نحصل في كل مرة إما على النجاح باحتمال p أو الفشل باحتمال q ، فإن المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد مرات النجاح لهذا النوع من التجارب، يقال بأنه توزيع دي الحدين إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_x^n p^{\mathrm{x}}(1-p)^{\mathrm{n-x}}, x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين هي عبارة عن الحد العام لمفكوك ثنائي الحدين $(p+q)^{\mathrm{n}}$ مما يجعل توزيع ذي الحدين من عائلة التوزيعات ثنائية الحدين، ويطلق على كل من n و p بمعلمتي التوزيع.وغالبا مايعبر عن توزيع ذي الحدين اختصارا بالاصطلاح التالي:

$$x \sim b(n,p)$$

وهذا يعني أن المتغير x يتبع توزيع ذي الحدين، بالمعلمتين n و p

المتوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدين:

1- **المتوسط الحسابي(التوقع الرياضي)**: ويحسب بالصيغة التالية:

$$E(X) = np$$

2- التباين :

$$V(X) = npq$$

بحيث:

$$q = 1 - P$$

3- الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{npq}$$

خصائص توزيع ذي الحدين:

إن أي تجربة تحقق الشروط التالية ، تسمى توزيع ذي الحدين:

1- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط، هما النجاح أو الفشل.

2- إن نتيجة كل محاولة تعد مستقلة عن نتيجة المحاولات الاخرى في التجربة.

3- إن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات وليكن p لذا فإن احتمال الفشل سيكون 1-p

4- تتضمن التجربة ذي الحدين على عدد من المحاولات وليكن n وهي عبارة عن حجم العينة.

مثال:

إذا كان احتمال تدمير دبابة هو 0.3، فإذا هاجمت 5 دبابات وكان المتغير العشوائيx يمثل عدد الدبابات المدمرة.

1- أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيx

2- جد احتمال تدمير 4 دبابات على الأقل.

3- جد احتمال تدمير دبابة واحدة.

الحل:

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيx

P=0.3 n=5

x~b(5,0.3)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_x^n p^{\mathrm{x}}(1-p)^{\mathrm{n-x}}, x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_x^5 (0.3)^{\mathrm{x}}(0.7)^{5-\mathrm{x}}, x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2- حساب احتمال تدمير 4 دبابات على الاقل:

$$P(X \geq 4)$$
$$= P(X = 4)$$
$$+ P(X = 5) = C_4^5 (0.3)^4 (0.7)^{5-4} + C_5^5 (0.3)^5 (0.7)^{5-5}$$
$$P(X \geq 4) = 0.02835 + 0.00243 = 0.03078$$

3- حساب احتمال تدمير دبابة على الأكثر:

$$P(X \leq 1)$$
$$= P(X = 0)$$
$$+ P(X = 1) = C_0^5(0.3)^0(0.7)^{5-0} + C_1^5(0.3)^1(0.7)^{5-1}$$
$$P(X \geq 4) = 0.16807 + 0.36015 = 0.52822$$

مثال:

إذا كان يوجد من بين كل 100 وحدة من إنتاج مؤسسة من منتوج معين 10 وحدات معيبة، سحبت عينة من 6 وحدات من المنتج، وكان المتغير العشوائي x يمثل عدد الوحدات من المنتج المعيبة.

1- أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x

2- احسب احتمال أن يكون من الوحدات المسحوبة من المنتج 3 وحدات معيبة.

3- احسب المتوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري

الحل:

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيx

P=10/100 n=6

x~b(6,0.1)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_x^n p^{\mathrm{x}}(1-p)^{\mathrm{n-x}}, x = 0,1,2,\dots,n \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_x^6(0.1)^{\mathrm{x}}(0.9)^{6-\mathrm{x}}, x = 0,1,2,3,4,5,6 \\ 0 \quad \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

حساب احتمال أن يكون من الوحدات المسحوبة من المنتج 3 وحدات معيبة.

$$P(X = 3) = C_3^6(0.1)^3(0.7)^{6-3}$$
$$P(X = 3) = 0.01458$$

حساب المتوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري:

المتوسط الحسابي(التوقع الرياضي): يحسب بالصيغة التالية:

$$E(X) = np = 6(0.1) = 0.6$$

التباين :

$$V(X) = npq = 6(0.1)(0.9) = 0.54$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{npq} = \sqrt{0.54} = 0.73$$

توزيع بواسون:

سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه الرياضي والفيزيائي (Siméon-Denis Poisson) عام 1873، ولتوزيع بواسون أهمية كبيرة في التطبيقات الاحصائية المتعددة إذ يستخدم على نطاق واسع في المجالات الإدارية وفي بحوث العمليات كونه يعد الأساس في بناء نماذج صفوف الانتظار،ويطلق على هذا التوزيع أحيانا تسمية توزيع الحوادث النادرة الوقوع حيث يستخدم لمعرفة احتمال وقوع حادث معين عدد محدد من المرات في وحدة من الزمن، بحيث يكون متوسط عدد مرات وقوع هذا الحدث ثابت في هذه الوحدة من الزمن، وتكون مرات وقوع هذا الحدث مستقلة عن بعضها البعض، مثل :عدد المكالمات الهاتفية خلال الشهر، عدد حوادث المرور خلال السنة،...الخ، وتكون صيغة قانون توزيع بواسون كالآتي

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{x}}{\mathrm{x!}} & , x = 0,1,2, \dots, \infty \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث أن :

e : تمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي وقيمتها مساوية إلى 2.

λ : تمثل معلمة توزيع بواسون وتعبر عن متوسط عدد مرات وقوع الحدث المعني في وحدة من الزمن.

X : العدد المحدد من المرات من الحدث الذي نريد حساب احتمال وقوعه.

كما يمكن التعبير عن توزيع بواسون اختصارا بالاصطلاح التالي:

$$x \sim P(\lambda)$$

المتوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري لتوزيع بواسون:

1- **المتوسط الحسابي(التوقع الرياضي)**: ويحسب بالصيغة التالية:

$$E(X) = \lambda$$

2- التباين :

$$V(X) = \lambda$$

3- الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\lambda}$$

مثال:

في أحد البنوك، وحسب الخبرة والتجربة الواقعية في الماضي، فإنه يستلم في المتوسط 5 شيكات بدون رصيد

في اليوم.

1- اكتب التوزيع الاحتمالي لتغير الشيكات بدون رصيد في اليوم

2- ماهو احتمال أن يستلم:

- 6شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي؟
- على الأقل 4 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي؟
- 10شيكات بدون رصيد في الأسبوع الموالي؟
- على الأكثر شيكين بدون رصيد في الأسبوع الموالي؟

الحل:

1- التوزيع الاحتمالي لتغير الشيكات بدون رصيد في اليوم:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع بواسون، حيث المتغير العشوائي يمثل عدد الشيكات بدون رصيد في اليوم والذي نرمز له ب Xحيث متوسطه $\lambda = 5$ وهو متوسط الشيكات بدون رصيد في اليوم، حيث يمكن دالته الاحتمالية كالتالي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{x}}{\mathrm{x!}} & ,x = 0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-5}5^{x}}{\mathrm{x!}} & ,x = 0,1,2,3,..\infty \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

احتمال أن يستلم 6 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي :

$$P(X = 6) = \frac{\mathrm{e}^{-5}5^{6}}{6!} = \frac{105.280}{720} = 0.1462$$

احتمال أن بسلتم على الأقل 4 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X<4) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2) + p(3)$$

$$= 1 - (\frac{\mathrm{e}^{-5}5^{0}}{0!} + \frac{\mathrm{e}^{-5}5^{1}}{1!} + \frac{\mathrm{e}^{-5}5^{2}}{2!} + \frac{\mathrm{e}^{-5}5^{3}}{3!})$$

$$= 1 - (1 + 5 + 12.5 + 20.833) = 0.7349$$

2- أن يستلم 10شيكات بدون رصيد في الأسبوع الموالي

متوسط عدد الشيكات بدون رصيد في الأسبوع هو :

$$\lambda_2 = 5 * 7 = 35$$

وبذلك يصبح التوزيع الاحتمالي كالتالي:

$$P(Y = y) = \frac{\mathrm{e}^{-35}35^{x}}{\mathrm{x!}}$$

$$P(Y = 10) = \frac{e^{-35}35^{10}}{10!}$$

$$\Rightarrow p(Y = 10) = \frac{35^{10}e^{-35}}{10!} = 0{,}7601817002 \times e^{-44}$$

4/ احتمال أن يستلم على الأكثر شيكين بدون رصيد في الأسبوع الموالي، هو:

$$p(Y \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{35^0e^{-35}}{0!} + \frac{35^1e^{-35}}{1!} + \frac{35^2e^{-35}}{2!}$$

$$= [1 + 35 + 612{,}5] \times e^{-35} = 0{,}6485 \times e^{-38}$$

العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون:

يعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي الحدين ومشتق منه عندما يكون احتمال نجاح المحاولة P صغير جدا ($P \to 0$) ، وأن عدد المحاولات n كبير جدا ($n \to \infty$) عليه فإن:

$$\lim_{\substack{P \to 0 \\ n \to \infty}} (n\,p) = \lambda$$

مما يجعل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين في الحالة المذكورة أعلاه شاقا، إلا أنه بالامكان من حساب الاحتمالات بواسطة توزيع بواسون مما يجعل قيمة $(\lambda = np)$ معتدلة.

مثال:

لوحظ أن احتمال الشخص بأحد الأمراض المعدية في منطقة معينة كان 0.003، قامت إحدى الفرق الطبية بإجراء فحص طبي لعينة عشوائية قوامها 1000 شخص يتوقع أنهم يعانون من الإصابة بهذا المرض.

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X
- احسب قيمة الاحتمالات التالية:

$$P(X = 4)$$
$$P(X \leq 2)$$
$$P(1 \leq X \leq 2)$$

الحل:

1- كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

بما أن احتمال وقوع المتغير العشوائي X صغير جدا وأن عدد المحاولات(العينة) كبير جدا فإن:

$$\lambda = np = 1000(0.003) = 3$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{x}}{\mathrm{x!}} & ,x = 0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-3}3^{x}}{\mathrm{x!}} & ,x = 0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2- حساب قيمة الاحتمالات التالية:

$$P(X = 4) = \frac{\mathrm{e}^{-3}3^{4}}{4!} = 0.169$$

$$P(X \leq 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-3}3^{0}}{0!} + \frac{\mathrm{e}^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{\mathrm{e}^{-3}3^{2}}{2!} = \left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{-3}$$
$$= 0.425$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(x \leq 2) - P(x<1)$$
$$= [(P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)]$$
$$= P(x = 0) = \frac{\mathrm{e}^{-3}3^{1}}{1!} + \frac{\mathrm{e}^{-3}3^{2}}{2!} = \frac{15}{2}\mathrm{e}^{-3} = 0.37$$

التوزيع الهندسي:

تعد تجارب التوزيع الهندسي مشابهة إلى حد كبير لتجارب توزيع بارنولي، التي تفترض بأن نتيجة كل تجربة إما نجاح المحاولة باحتمال P أو فشلها باحتمال (1−P) *كما وان عدد المحاولات في تجارب التوزيع الهندسي لم تكن محددة من البداية كما هو الحال في تجارب ذو الحدين، وعلى هذا الأساس فإن الماغير العشوائي المنفصل* X *في حالة تجاربال توزيع الهندسي هو عبارة عن عدد محاولات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك سيتم الحصول عليه بالمحاولة* X *تسبقة عدد من المحاولات الفاشلة* X−1

وبافتاض أنه لدينا متغير عشوائي X *يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح ففي هذه التجربة يقال بأن المتغير العشوائي* X *يتبع التوزيع الهندسي إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:*

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & ,x = 0,1,2,3,..,\infty \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الهندسي، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X \sim G(p)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة (p).

– **الأمل الرياضي والتباين للتوزيع الهندسي:** إن الأمل الرياضي E(X) والتباين V(X) والانحراف المعياري (σ_x) للتوزيع الهندسي، هي كالآتي:[3]

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

مثال:

رميت زهرة نرد متجانسة حتى يتم الحصول على أحد الأوجه

المطلوب:

- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).
- ما احتمال أن تحتاج إلى 4 محاولات على الأقل، حتى تحصل على العدد 5 على وجه زهرة النرد ؟
- كم هو معدل عدد المحاولات التي تحتاجها ؟

الحل:

- **كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:**

بما إن احتمال الحصول على احد الأوجه الستة في الرمية الواحدة يساوي $(\frac{1}{6})$ عليه فان:

$$P(X) = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{x-1} & , x = 0,1,2,3,..,\infty \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

- **حساب احتمال أن تحتاج إلى 4 محاولات على الأقل، حتى تحصل على العدد 5 على وجه زهرة النرد:**

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$
$$= 1 - \left[(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^0 + (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^1 + (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2\right] = 1 - \frac{91}{216} = 0,579$$

- **حساب معدل عدد المحاولات:**

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

التوزيع المنتظم المنفصل:

يستخدم التوزيع المنتظم المنفصل في حالة التطبيقات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائية التي تأخذ عددا من القيم الاحتمالية متساوية/ بمعنى أن لكل وحدة من وحدات التجربة العشوائية لها

نفس الفرصة بالظهور، ويطلق على هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية المتجانسة، ومن الأمثلة التطبيقية على هذا النوع من التجارب مثلا رمي زهرة نرد متجانسة مرة واحدة.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن X يأخذ عددا من القيم المنفصلة $(x_1 , x_2 , \ldots, x_n)$، ففي هذه نقول أن المتغير X يتوزع وفق التوزيع المنتظم المنفصل، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x = 0,1,2,3,..,n \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث:

n : تمثل عدد الوحدات الداخلة في التجربة $(n>0)$

المتوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري للتوزيع المنتظم:

- **المتوسط الحسابي(التوقع الرياضي)**: ويحسب بالصيغة التالية:

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

- **التباين** :

$$V(X) = \frac{n^2+1}{12}$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{n^2+1}{12}}$$

مثال:

بهدف إجراء دراسة حول تقييم الاداء العلمي للكلية، تم سحب كلية من الكليات التابعة لجامعة معينة والبالغ عددها 5 كليات.

1-اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل الكلية الظاهرة على ورقة السحب.

2-ارسم دالة التوزيع الاحتمالي

3-احسب المتوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري.

الحل:

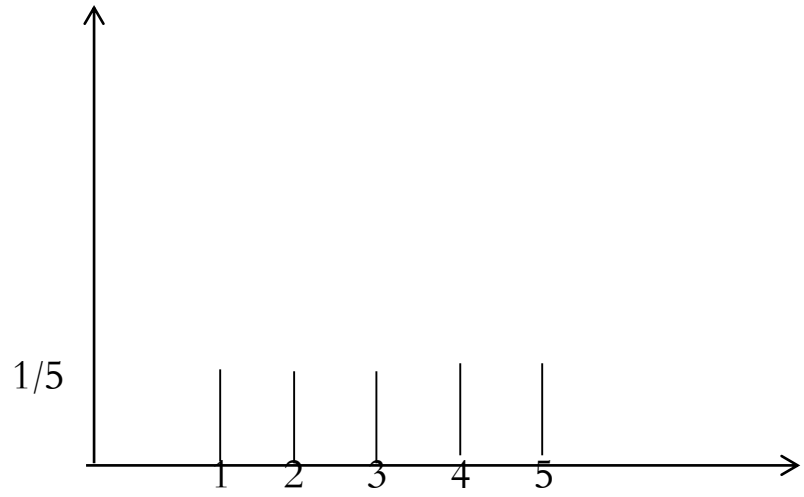
1-دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x = 0,1,2,3,..,n \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & , x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{بخلاف ذلك} \end{cases}$$

2- رسم دالة التوزيع الاحتمالي:

$X = x_i$	1	2	3	4	5	$\sum pi$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1



المتوسط الحسابي، التباين والانحراف المعياري :

- **المتوسط الحسابي(التوقع الرياضي):**

$$E(X) = \frac{\mathrm{n}+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

- **التباين :**

$$V(X) = \frac{n^2+1}{12} = \frac{5^2+1}{12} = 2$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{n^2+1}{12}} = \sqrt{2} = 1.414$$

التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

كما ذكرنا سابقا التوزيعات الاحتمالية المتقطعة و أهمها توزيع ذي الحدين، توزيع بارنولي، و توزيع بواسون، بينما يعتبر من أشهر التوزيعات الاحتمالية المستمرة وهو التوزيع الطبيعي ، لما له أهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية ، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى التوزيع الطبيعي .

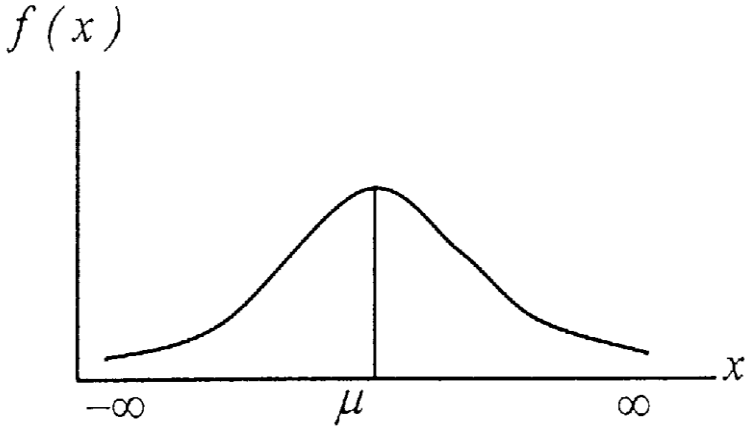
1. تعريف التوزيع الطبيعي :

إذا كان X متغير عشوائي مستمر له توزيع طبيعي فإن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير هي من الشكل التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث : $x \in (\pm\infty)$ ، $\pi = \frac{22}{7}$ ، μ: المتوسط الحسابي ، σ: الإنحراف المعياري

و التوزيع الطبيعي له منحنى متماثل يأخذ الشكل التالي:



2. خصائص التوزيع الطبيعي:

- التوزيع الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي μ .
- منحنى التوزيع الطبيعي يشبه في شكله الجرس.
- الوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي= الوسط= المنوال.
- المساحة تحت المنحنى =1.
- المساحة المحصورة ما بين $\mu -$ و $\mu + \sigma$ تساوي 68% من المساحة الكلية.

- المساحة المحصورة ما بين $\mu - 2$ و $\mu + 2\sigma$ تساوي 95% من المساحة الكلية.
- المساحة المحصورة ما بين $\mu - 3$ و $\mu + 3\sigma$ تساوي 99% من المساحة الكلية.

و توجد معلمتين لهذا التوزيع هما : $E(x) = \mu$ و $V(x) = \sigma^2$ ، و يعبر عن التوزيع بالكتابة التالية : $x \sim N(\mu\,;\sigma)$ ، و يعني ذلك أن x متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ، ونظرا لصعوبة حساب الاحتمالات بهذا التوزيع باستعمال التكامل ، قام المختصون بتحويل التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري (قياسي) ، حيث يمكن تحويل المتغير العشوائى x إلى متغير يرمز له ب z لإيجاد الاحتمالات باستخدام الجدول الاحتمالي (ستجدونه كملحق في آخر المحاضرات) حيث من الممكن إيجاد المساحات من خلال التوزيع الطبيعي المعياري مهما اختلفت قيم المتوسط الحسابي و الانحراف المعياري، إذ يمكن تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي المعياري الذي متوسطه الحسابي 0 و انحرافه المعياري 1، بالشكل التالي:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

3. قراءة الاحتمال من جدول التوزيع الطبيعي المعياري :

الجدول المستخدم في برنامجنا هو الجدول الذي يقرأ المساحة على جهة اليسار، بمعنى يقرأ المساحة التي هي أقل من القيم الحرجة، حيث بطلق على القيم Z(2،1،2،... ،0،-1،-2 ..) بالقيم الحرجة، أي، عندما تكون المتراجحة من الشكل $P(Z \leq 2)$، و ، $P(Z \leq 1{,}52)$ فيقرأ الاحتمال مباشرة من الجدول، أما عندما تكون على شكل $P(Z \geq a)$، أو ، $P(Z \leq -a)$ أو $P(-a \leq Z \leq b)$، فيتم التحويل قبل قراءة الاحتمال، وكما يلي: (الجدول موجود في أخر المحاضرات)

$$1/P(Z \leq 2) = ? \Rightarrow P(Z \leq 2) = 0.9772$$

$2/P(Z \leq 1{,}52) = 0.9357$

	.00	0,01	0,02
0	.	.	.
.	.	.	.
1,5	.	.	0,9357
2	0,9772	.	.
.	.	.	.

4. تطبيقات على التوزيع الطبيعي :

ليكن x متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي و سطه 12 و انحرافه المعياري 03 ، احسب $P(x \geq 9)$ ، $P\ (9 \leq x \leq 13)$ ،$P(x \geq 14)$ ،$P(x \leq 8)$

1. $P(x \geq 9)$

في البداية يجب تحويل المتغير x إلى المتغير z ، باستعمال الصيغة التالية :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- $P(x \geq 9) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{9-12}{3}\right) = P(z \geq -1)$

و بما أن الجدول الذي بين أيدينا يقرأ المساحة الأقل من القيمة الحرجة z فلا يمكننا قراءة الاحتمال أعلاه مباشرة من الجدول لذلك يتم تحويله وفق العلاقة التالية :

$$P(z \geq -a) = P(z \leq a) \dots\dots (01)$$

و بالتالي فإن :

$$P(z \geq -1) = P(z \leq 1) = 0{,}8413$$

- $P\ (9 \leq x \leq 13)$

لحساب الاحتمال نحول أولا إلى التوزيع الاحتمالي القياسي:

$$P\left(\frac{9-12}{3} \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{13-12}{3}\right) = P\ (-1 \leq z \leq 0{,}33)$$

لحساب الاحتمال أعلاه نطبق القاعدة التالية :

$$P\ (a \leq z \leq b) = P(z \leq b) - P(z \leq a) \dots\dots (02)$$

- $\Rightarrow P\ (-1 \leq z \leq 0{,}33) = P(z \leq 0{,}33) - P(z \leq -1)$

الاحتمال $P(z \leq 0{,}33)$ ، يمكننا استخراجه مباشرة من الجدول لكن الاحتمال $P(z \leq -1)$ لا يمكننا استخراجه إلا بتطبيق القاعدة التالية:

$$P(z \leq -a) = P(z \geq a) = 1 - P(z \leq a) \ldots..(03)$$

و بالتالي يتم حساب الاحتمال بالشكل التالي:

$$P\ (-1 \leq z \leq 0{,}33) = P(z \leq 0{,}33) - [1 - P(z \leq 1)]$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد :

$$P(z \leq 0{,}33) = 0{,}6293, P(z \leq 1) = 0{,}8413$$

و بالتالي :

$$P\ (-1 \leq z \leq 0{,}33) = 0{,}6293 - [1 - 0{,}8413] = 0{,}4706$$

- $P(x \geq 14) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{14-12}{3}\right) = P\left(z \geq \frac{14-12}{3}\right) = P(z \geq 0{,}66)$

بتطبيق القاعدة (03) ، نجد :

$$P(z \geq 0{,}66) = 1 - P(z \leq 0{,}66) = 1 - 0{,}7454 = 0{,}2546$$

- $P(x \leq 8) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{8-12}{3}\right) = P(z \leq -1{,}33)$

بتطبيق القاعدة (03) ، نجد :

$$P(z \leq -1{,}33) = P(z \geq 1{,}33) = 1 - P(z \leq 1{,}33) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$$

5. تقريب التوزيعات المتقطعة إلى التوزيع الطبيعي :

- **تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي** : يعطى التوزيع الطبيعي $\mu = np$ و تباين $\sigma^2 = npq$ كتقريب لتوزيع ذي الحدين إذا كانت n كبيرة ($n > 20$) و $np \geq$

5 و nq أكبر من 5، و بما أن توزيع ذي الحدين هو توزيع المتغير العشوائي x المنفصل ، فيتم تحويل المتغير المنفصل إلى المتغير المتصل وفق قاعدة YATES من خلال إضافة أو طرح قيمة 0,5 ، و بالتالي تصبح لدينا قيمتين $x_1 = x - 0.5$، و $x_2 = x + 0.5$ ، و هذا يعني أن :

$$p(X = x) = P(x_1 \leq x \leq x_2)$$
$$p(X > x) = p(X \geq x_2)$$
$$p(X < x) = p(X \leq x_1)$$

ومن أجل حساب الاحتمالات أعلاه ، يتم التحويل إلى التوزيع الاحتمالي الطبيعي القياسي كما ذكرنا سابق وبالشكل التالي :

$$p(X = x) = P(\frac{x_1 - np}{npq} \leq z \leq \frac{x_2 - np}{npq})$$
$$p(X > x) = p\left(z \geq \frac{x_2 - np}{npq}\right)$$
$$p(X < x) = p\left(z \leq \frac{x_1 - np}{npq}\right)$$

مثال: نرمي قطعة نقدية 25 مرة ، و لنفترض أن x متغير عشوائي يمثل عدد ظهور الصورة $(p = q = 0,5)$، أوجد احتمال أن نحصل على الصورة 14 مرة $p(X = 14)$ باستعمال توزيع ذي الحدين و التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين .

- باستعمال توزيع ذي الحدين:

$$p(X = 14) = C_{25}^{14} 0.5^{14} 0.5^{11} = 0.1328$$

- باستعمال التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين

$$x_1 = x - 0.5 = 14 - 0.5 = 13.5$$
$$x_2 = x + 0.5 = 14 + 0.5 = 14.5$$
$$\mu = np = 25 \times 0.5 = 12.5$$
$$\sigma^2 = npq = 25 \times 0.5 \times 0.5 = 6.25$$

$$p(X = 14) = P\left(\frac{13.5 - 12.5}{\sqrt{6.25}} \leq z \leq \frac{14.5 - 12.5}{\sqrt{6.25}}\right)$$
$$= P(0.4 \leq z \leq 0.8)$$

$$P(0.4 \leq z \leq 0.8) = P(z \leq 0.8) - P(z \leq 0.4)$$

من جدول التوزيع الطبيعي نجد :

$$P(z \leq 0.8) - P(z \leq 0.4) = 0.7881 - 0.6554$$

$$p(X = 14) = P(0.4 \leq z \leq 0.8) = 0.1327$$

أما إذا أردنا حساب $p(X > 14)$، فيتم حساب $p(X \geq 14.5)$ ، و إذا أردنا حساب $p(X < 14)$، فيتم حساب $p(X \leq 13.5)$

- **تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي** :

يتم استعمال التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون إذا كان قيمة λ تفوق 20 (هناك من اتفق على 10) ، وبالتالي فإن $\mu = \lambda$ و $\sigma^2 = \lambda$.

مثال : بمصنع ما تم تسجيل 45 حادث عمل سنويا، إذا علمت أن عدد الحوادث يتبع توزيع بواسون ، باستخدام التوزيع الطبيعي احسب احتمال أن يفوق عدد الحوادث في السنة 50 حادث .

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 45 > 20$$
$$p(X > 50) = p\left(z \geq \frac{50.5 - 45}{\sqrt{45}}\right) = p(z \geq 0.819)$$
$$p(z \geq 0.819) = 1 - p(z \leq 0.82) = 1 - 0.7939$$
$$p(X > 50) = 0.2061$$

2-1- التوزيع المنتظم المستمر: بافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X)، معرفا على المجال $[a - b]$ فان دالة الكثافة الاحتمالية له، تأخذ الشكل الآتي:[1]

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ)، للتوزيع المنتظم المستمر، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = \int_a^b x f(x)\, d(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, d(x) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

2-4- توزيع قاما: يعد توزيع قاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام في بعض التطبيقات الإحصائية، نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر، تقدير دالة المعولية، وتقدير دالة البقاء كما ويعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة، كالتوزيع الأسي مثلا، من جانب آخر يعالج توزيع قاما عادة المتغيرات العشوائية التي تكون قيمها موجبة دائما، والأمثلة على هذا النوع من المتغيرات كثيرة، نذكر منها مثلا: الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب بمرض عضال، الفترة الزمنية المستغرقة بفحص مريض في إحدى العيادات الطبية، الفترة الزمنية بين وصول باخرتين متتاليتين لأحد الأرصفة وغيرها.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X)، يتوزع وفق توزيع قاما، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[1]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} & \text{si: } X \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

حيث إن:

α، β تمثل معلمات توزيع قاما، وإن $[\alpha, \beta > 0]$

$\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما وتأخذ دالة قاما، الشكل الآتي:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} d(x)$$

وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد (n)، عدد صحيحا موجبا، فان دالة قاما، تأخذ الشكل الآتي:

$$\Gamma n = (n-1)!$$

وفيما يلي، بعض الحالات الخاصة لدالة قاما:

$$\Gamma 1 = 1$$
$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \pi = 3{,}14159$$

وغالبا ما يعبر عن توزيع قاما، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X \sim G(\alpha, \beta)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع قاما بالمعلمتين (α) و (β).

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) لتوزيع قاما ، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = \alpha\beta$$
$$\sigma^2 = \alpha\beta^2$$
$$\sigma = \beta\sqrt{\alpha}$$

<u>مثال (09):</u> إذا كان لديك المتغير العشوائي المستمر (X)، يمثل الفترة الزمنية لعمل آلة إنتاجية بالسنوات، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} e^{\frac{-x}{2}} & \text{si: } X \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>المطلوب:</u>

- ما هو احتمال أن تستمر الآلة بالعمل مدة 10 سنوات أخرى على الأكثر ؟
- أحسب متوسط عمر الآلة والتباين.

الحل:

- **حساب احتمال أن تستمر الآلة بالعمل مدة 10 سنوات أخرى على الأكثر:**

$$P(X \leq 10) = \int_0^{10} f(x)\,d(x) = \frac{1}{4}\int_0^{10} x\,e^{\frac{-x}{2}}d(x)$$

$$= \frac{1}{4}[(-0{,}14) - 4(0{,}007 - 1)] = 0{,}958$$

- **حساب متوسط عمر الآلة والتباين:**

$$\mu = \alpha\beta = 2 \times 2 = 4$$
$$\sigma^2 = \alpha\beta^2 = 2 \times 2^2 = 8$$

تمارين محلولة:

1- تمارين حول التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

تمرين (01) : باعت شركة تجارية 08 سيارات من نوع معين في يوم ما، احتمال أن تبقى سيارة صالحة للسير أكثر من عشر سنوات هو 0,8 ، نعرف المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد السيارات من بين ال 08 المباعة التي تبقى صالحة للسير أكثر من 10 سنوات .

1. ما هو التوزيع الاحتمالي ل x
2. احسب توقعه و تباينه
3. احسب احتمال: 1. عدد السيارات التي تبقى صالحة للسير أكثر من عشر سنوات هو 6 ، 2. عدد السيارات التي تبقى صالحة للسير أكثر من عشر سنوات هو 03 على الأقل، 3. عدد السيارات التي تبقى صالحة للسير أكثر من عشر سنوات لا يقل عن 02 ولا يزيد عن 05

الحل:

1. X : عدد السيارات التي تبقى صالحة للسير أكثر من 10 سنوات ، حيث:

$$P(X = x) = C_8^x (0.8)^x (0.2)^{8-x}$$

2. حساب توقع و تباين x :

$$E(x) = np = 8 \times 0.8 = 6.4$$
$$V(x) = npq = 8 \times 0.8 \times 0.2 = 1.28$$

3. عدد السيارات التي تبقى صالحة للسير أكثر من عشر سنوات هو 6:

$$P(X = 6) = C_8^6 (0.8)^6 (0.2)^{8-6} = 0.293$$

4. عدد السيارات التي تبقى صالحة للسير أكثر من عشر سنوات هو 03 على الأقل :

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + \cdots + P(X = 8)$$
$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X < 3)]$$
$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$
$$P(X \geq 3) = 1 - [C_8^0 (0.8)^0 (0.2)^8 + C_8^1 (0.8)^1 (0.2)^7 + C_8^2 (0.8)^2 (0.2)^6]$$
$$= 0.9987$$

1. عدد السيارات التي تبقى صالحة للسير أكثر من عشر سنوات لا يقل عن 02 ولا يزيد عن 05 :

$$P(2 \leq x \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$P(2 \leq x \leq 5)$$
$$= C_8^2 (0.8)^2 (0.2)^6 + C_8^3 (0.8)^3 (0.2)^5 + C_8^4 (0.8)^4 (0.2)^4 + C_8^5 (0.8)^5 (0.2)^3$$
$$= 0.0011 + 0.0091 + 0.0458 + 0.1468 = 0.2028$$

تمرين (02) : تصل سيارات إلى مرأب في وسط المدينة بمعدل 50 سيارة كل ساعتين .

1. ما هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يمثل عدد السيارات التي تصل إلى المراب خلال ساعتين
2. ما هو توقع المتغير x ، أحسب تباينه و انحرافه المعياري
3. أحسب احتمال أن تصل إلى المرأب خلال ساعتين : 70 سيارة، 04 سيارات

الحل:

X يمثل عدد السيارات التي تصل إلى المراب خلال ساعتين

2. التوزيع الاحتمالي للمتغير x هو توزيع بواسون مع $\lambda = 50$ حيث :

$$P(X = x) = \frac{50^x}{x!}e^{-50}$$

3. توقع و تباين المتغير x هو : $E(x) = \sigma^2 = \lambda = 50$

4. احتمال أن تصل إلى المراب 70 سيارة خلال ساعتين :

$$P(X = x) = \frac{50^{70}}{70!}e^{-50}$$

5. احتمال ان تصل إلى المرأب 04 سيارات على الأقل :

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + \cdots$$

$$\Rightarrow P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$$

$$\Rightarrow P(X \geq 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$

$$\Rightarrow P(X \geq 4) = 1 - \left[\frac{50^0}{0!}e^{-50} + \frac{50^1}{1!}e^{-50} + \frac{50^2}{2!}e^{-50} + \frac{50^3}{3!}e^{-50}\right]$$

$$\Rightarrow P(X \geq 4) = 1 - e^{-50}\left[1 + 50 + \frac{2500}{2} + \frac{125000}{6}\right]$$

تمرين (03) : إذا كان 10 % من المصابين بمرض معين يتم شفائهم ، فإذا اخترنا عينة مكونة من 06 أشخاص يعانون من هذا المرض، فإذا اعتبرنا أن المتغير العشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يتم شفائهم من هذا المرض .

1. أوجد دالة هذا التوزيع الاحتمالي
2. أوجد أن احتمالات التالية: $P(x = 1)$، $P(2 < x < 5)$، $P(x > 1)$
3. أوجد $E(x)$، $V(x)$

الحل:

1. إيجاد دالة هذا التوزيع الاحتمالي:

$$P(X = x_i) = C_6^x 0.1^x 0.9^{6-x}$$

2. إيجاد أن احتمالات $P(x = 1)$:

$$P(X = 1) = C_6^1 0.1^1 0.9^{6-1} = 0.354$$

3. إيجاد أن احتمالات $P(2 < x < 5)$:

$$P(2 < x < 5) = P(3 \leq x \leq 4) = \sum_{x=3}^{4} C_6^x 0.1^x 0.9^{6-x} = P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(2 < x < 5) = C_6^3 0.1^3 0.9^{6-3} + C_6^4 0.1^4 0.9^{6-4}$$

$$P(2 < x < 5) = \frac{6!}{3!\,3!} 0.1^3 0.9^3 + \frac{6!}{4!\,2!} 0.1^4 0.9^2$$

$$P(2 < x < 5) = 0.01458 + 0.001215 = 0.0158$$

4. إيجاد أن احتمالات $P(x > 1)$:

$$P(x > 1) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - \sum_{x=0}^{1} C_6^x 0.1^x 0.9^{6-x}$$

$$P(x > 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(x > 1) = 1 - [C_6^0 0.1^0 0.9^6 + C_6^1 0.1^1 0.9^5]$$

$$P(x > 1) = 1 - [0.531441 + 0.354294] = 0.114265$$

تمرين(04):

يحتوي كتاب على 500 صفحة، بفرض أن هناك 300 خطأ مطبعيا، فأوجد إحتمال أن تحتوي صفحة معينة على:

1) – خطأين بالضبط، ب) خطأين أو أكثر

الحل:

إن هذه التجربة الإحتمالية تتبع توزيع ذو الحدين مع: P=n=300

1/500 وحيث أن قيمة n كبيرة و p صغيرة، فإننا نستخدم توزيع بواسون كتقريب لذو الحدين مع λ=np=0.6.

أ) – احتمال الحصول على خطأين بالضبط:

$$P(X=2)=\frac{0,6^2e^{-0,6}}{2!}=0.098$$

ب)– احتمال الحصول على خطأين أو أكثر: يعني صفر خطأ أو خطأ واحد أو خطأين:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{0,6^0e^{-0,6}}{0!}+\frac{0,6^1e^{-0,6}}{1!}+\frac{0,6^2e^{-0,6}}{2!}$$
$$=0.549+0.329+0.098=0.976$$

تمارين حول التوزيع الطبيعي:

تمرين(01): إذا كانت درجات حاصل الذكاء تتوزع طبيعيا بوسط يساوي 100 ، و انحراف معياري يساوي 15. **المطلوب**:

- ما احتمال أن تفوق درجات حاصل الذكاء 125 ؟
- ما احتمال أن تقل درجات حاصل الذكاء 28 ؟

حل تمرين (01): لدينا : $\mu=100,\sigma=15$

- احتمال أن تفوق درجات حاصل الذكاء 125:

$$P(x>125)=P(\frac{x-100}{15}>\frac{125-100}{15})$$
$$P(x>125)=P(z>1.67)=1-P(z<1.67)$$
$$P(x>125)=1-0.9525=0.0475$$

- احتمال أن تقل درجات حاصل الذكاء 28:

$$P(x<80)=P(\frac{x-80}{15}<\frac{80-100}{15})$$
$$P(x<80)=P(z<-1.33)=P(z\geq 1.33)$$
$$P(x<80)=1-P(z<1.33)$$
$$P(x<80)=1-0.9082=0.0918$$

تمرين(02) : إذا كانت احدى الشركات في السنة تتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه يساوي 100 مليون دينار، و انحرافه المعياري يساوي 5 ملايين دينار. **المطلوب**:

- ما احتمال أن تزيد نفقات هذه الشركة عن 95 مليون دينار خلال سنة معينة؟
- ما احتمال أن تقل نفقات هذه الشركة عن 104 مليون دينار خلال سنة معينة؟
- ما احتمال أن تتراوح نفقات هذه الشركة مابين 93.5 مليون دينار و 105.5 مليون دينار خلال سنة

حل تمرين (02): لدينا : $\mu = 100, \sigma = 05$

- احتمال أن تزيد نفقات هذه الشركة عن 95 مليون دينار خلال سنة معينة:

$$P(x > 95) = P\left(\frac{x-100}{05} > \frac{95-100}{05}\right) = P(z > -1)$$

$$P(x > 95) = P(z \leq 1) = 0.8413$$

- احتمال أن تقل نفقات هذه الشركة عن 104 مليون دينار خلال سنة معينة:

$$P(x < 104) = P\left(\frac{x-100}{05} < \frac{104-100}{05}\right) = P(z < 0.8) = 0.7881$$

- احتمال أن تتراوح نفقات هذه الشركة مابين 93.5 مليون دينار و 105.5 مليون دينار خلال سنة معينة:

$$P(93.5 < x < 105.5) = P\left(\frac{93.5-100}{05} < \frac{x-100}{05} < \frac{105.5-100}{05}\right)$$

$$P(93.5 < x < 105.5) = P(-1.3 < z < 1.1)$$

$$P(93.5 < x < 105.5) = P(z < 1.1) - P(z < -1.3)$$

$$P(93.5 < x < 105.5) = P(z < 1.1) - [1 - P(z < 1.3)]$$

$$P(93.5 < x < 105.5) = 0.8643 - (1 - 0.9032)$$

$$P(93.5 < x < 105.5) = 0.7675$$

تمرين (03) : علامات 300 طالب في امتحان معين تخضع إلى توزيع طبيعي وسطه 11 و انحرافه المعياري 02

1. ما هي نسبة ثم عدد الطلبة التي تفوق علاماتهم 14
2. ما هي نسبة ثم عدد الطلبة التي تقل علاماتهم عن 10
3. ما هي نسبة ثم عدد الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 14

حل تمرين (03): لدينا : $\mu = 11, \sigma = 02$

1. ما هي نسبة ثم عدد الطلبة التي تفوق علاماتهم 14

- النسبة:

$$P(x \geq 14) = P\left(z \geq \frac{14-11}{02}\right) = P(z \geq 1.5)$$
$$P(z \geq 1.5) = 1 - P(z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

- العدد :

$$0.0668 \times 300 = 20$$

2. ما هي نسبة ثم عدد الطلبة التي تقل علاماتهم عن 10

- النسبة :

$$P(x \leq 10) = P\left(z \leq \frac{10-11}{02}\right) = P(z \leq -0.5) = P(z \geq 0.5)$$
$$= 1 - P(z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

- العدد :

$$0.3085 \times 300 = 93$$

3. ما هي نسبة ثم عدد الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 14 :

- النسبة :

$$P(10 \leq x \leq 14) = P\left(\frac{10-11}{02} \leq z \leq \frac{14-11}{02}\right)$$
$$= P(-0.5 \leq z \leq 1.5) = P(z \leq 1.5) - P(z \leq -0.5)$$
$$= 0.9332 - 0.3085 = 0.6247$$

- النسبة :

$$0.6247 \times 300 = 187$$

تمرين (04) : باستخدام جدول التوزيع الطبيعي، اوجد الاحتمالات التالية:

- $P(z \leq 1.69)$
- $P(z \leq -2.89)$
- $P(z \geq -1.65)$
- $(-1.96 \leq z \leq 1.96)$

حل تمرين (**04**):

- $P(z \leq 1.69) = 0.9545$
- $P(z \leq -2.89) = P(z > 2.89) = 1 - P(z \leq 2.89)$
- $P(z \leq -2.89) = 1 - 0.9981 = 0.0019$
- $P(z \geq -1.65) = P(z < 1.65) = 0.9505$
- $(-1.96 \leq z \leq 1.96) = 2[P(z < 1.96)] - 1 = 2(0.975) - 1 = 0.95$

الفصل السادس:

العزوم ودالة العزوم المتجددة

1- Les moments العزوم

كما التباين يعتبر العزم من تطبيقات توقع دالة. نميز بين نوعين من العزوم: العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل تستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس مثل معامل التماثل $\alpha 3$ (coefficient d'asymétrie) ومعامل التفلطح $\alpha 4$ (Kurtosis ou coefficient d'aplatissement)

أ-العزم المركزي Le moment central μ_r

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للم ع X كما يلي:

$$\mu_r = E\left((X-\mu)^r\right), \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$\mu_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1 \qquad \mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0 \qquad \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X) \qquad \mu_2 = \sigma^2$$

يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغيرة متقطعة أو مستمرة كما يلي:

$$\mu_r = \sum_i (x_i - \mu)^r f(x) \qquad \mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$$

مثال: أحسب العزوم المركزية من الدرجة 0، 1، 2 و3 للمتغيرة ع ذات دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 f(x)dx = 1$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mu - \mu(1) = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2 = \frac{4}{9}$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \left(x - \frac{4}{3}\right)^3 (0)dx + \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^3 \frac{x}{2}dx + \int_2^{+\infty} \left(x - \frac{4}{3}\right)^3 (0)dx = \frac{16(67)}{27(5)}$$

ب- العزم المرتبط بالأصل μ'_r Moment autour de la moyenne μ

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي:

$$\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0,1,2,...$$

$$\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1 \qquad \mu'_0 = 1$$
$$\mu'_1 = E(X^1) = E(X) = \mu \qquad \mu'_1 = \mu$$
$$\mu'_2 = \mu^2 - \sigma^2 = \mu^2 - \mu_2 \qquad \mu'_2 = \mu^2 - \mu_2$$

مثال: أحسب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة 0، 1، 2، 3 و4 للمتغيرة ع المتصلة ذات دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\mu'_0 = 1,$ $\mu'_1 = \mu = 4/3,$ $\mu'_2 = \mu^2 - \mu_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = \frac{12}{9},$

$\mu'_3 = \int_0^2 x^3 (\frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16}{5},$ $\mu'_4 = \int_0^2 x^4 (\frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$

ج- العلاقة بين العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل

$$\mu_r = \mu'_r - C_r^1 \cdot \mu'_{r-1} \cdot \mu^1 + ... + (-1)^i C_r^i \cdot \mu'_{r-i} \cdot \mu^i + ... + (-1)^r \cdot \mu'_0 \cdot \mu^r$$

يمكن أيضا الحصول على العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة r من خلال اشتقاق الدالة المتجددة للعزوم r مرة.

2- الدالة المتجددة للعزوم $M_X(t)$ La fonction génératrice des moments

الدالة المتجددة للعزوم هي دالة مرتبطة بمتغيرة (معلمة) t بالإضافة إلى ارتباطها ب X، و والدالة المتجدد للعزوم كما يلي:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

في حالة متغير عشوائي متقطعة $M_X(t) = \sum e^{tx} \int(x)$ و في حالة متغير عشوائي مستمرة:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

مثال: أكتب الدالة المتجددة للعزوم من أجل $t \neq 0$ للمتغير العشوائي المعرفة في كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}(0)dx + \int_0^2 e^{tx} f(x)dx + \int_2^{+\infty} e^{tx}(0)dx = 0 + \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tx}dx + 0$$

$$M_x(t) = \frac{1}{2}\int_0^2 UdV = \frac{1}{2}\left[[UV]_0^2 - \int_0^2 VdU\right]. \quad U = x \Rightarrow dU = dx,\ dV = e^{tx}dx \Rightarrow V = \frac{e^{tx}}{t}$$

$$M_x(t) = \frac{1}{2}\left(\left[x\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{tx}}{t}dx\right) = \frac{1}{2}\left(\left[2\frac{e^{2t}}{t}\right] - \frac{1}{t}\left[\frac{e^{2t}}{t}\right]\right) = \frac{e^{2t}}{t} - \frac{e^{2t}}{2t^2}$$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لحساب العزم المركزي من درجة r:

$$\boxed{\mu'_r = \frac{d^r M_x(t)}{dt^r} \ avec\ t = 0}$$

كما تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات تساوي توزيعين احتماليين، مثلا عند تحقق شروط معينة، ونحتاج ذلك خاصة عند دراسة التقارب بين التوزيعات الاحتمالية.

النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

لتكن المتغيرات العشوائية X و Y لهما الدالة المتجددة للعزوم $M_X(t)$ و $M_y(t)$؛ نقول أن المتغيرات العشوائية X و Y لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذا:

$$M_X(t) = M_y(t)$$

كما تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات استقلال توزيعين احتماليين .

النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

إذا X و Y متغيرات عشوائية مستقلة، لهما الدالة المتجددة للعزوم $M_X(t)$ و $M_y(t)$؛ فإن

$$M_{X+y}(t) = M_x(t).\ M_y(t)$$

خلاصة:

العزم والدالة المتجدد للعزوم هي عبارة عن توقعات دوال. يدخل العزم في حساب بعض المؤشرات مثل التباين والتوقع الرياضي، معامل التفلطح ومعامل التماثل.

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات التقارب بين توزيعات احتمالية.

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للم ع X كما يلي:

$$\mu_r = E\left((X-\mu)^r\right), \qquad r = 0,\ 1,\ 2$$

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي:

$$\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0,\ 1,\ 2.$$

تعرف الدالة المتجددة للعزوم كما يلي: $M_x(t) = E(e^{tx})$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات التقارب بين توزيعات احتمالية وذلك من خلال نظريتين أساسيتين

- نقول أن م ع X و Y لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذا: $M_X(t) = M_y(t)$
- إذا X و Y م ع مستقلتان فإن: $M_{X+y}(t) = M_x(t).\ M_y(t)$

الفصل السابع:
نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة

1- متراجحة تشيبيشيف Inégalité de Bienaymé CHEBYCHEV

متراجحة تشيبيشيف هي متراجحة مشهورة ترجع إلى عالم الرياضيات الروسي **بافنوتي تشيبيشيف** تلعب دوار مهما في نظرية الاحتمالات والإحصاء .كما أنها تعطي وسيلة للفهم الدقيق لكيفية أن التباين يقيس التغير حول المتوسط للمتغير العشوائي.

نعلم أنه إذا عرفنا الدالة الاحتمالية أو دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X فإننا نستطيع حساب كلا من $V(X)=\sigma^2$ و $E(X)=\mu$ ولكن العكس غير صحيح، بمعنى أنه إذا كنا نعرف V(X)و E(X) فإننا لا نستطيع معرفة أو بناء التوزيع الاحتمالي للمتغير X وعلى ذلك لا نستطيع حساب أي احتمالات مثل:

$$P(|x-u|\leq c)$$

والتي تصف احتمال ظهور المتغير العشوائي X ضمن المنطقة المحدودة بـ $\mu+c$ و $\mu-c$ وتحسب عادة بإجراء التكامل على دالة الكثافة الاحتمالية.

على أي حال فإنه إذا كنا لا نستطيع حساب مثل هذه الاحتمالات بمعرفة فقط E(X)و V(X) إلا

أننا نستطيع حساب حد أعلى(أو حد أدنى) لهذه الاحتمالات وذلك باستخدام متراجحة تشيبيشيف.

هي نظرية تخص م ع المتقطعة والمستمرة على السواء، التي يكون لها متوسط وتباين محدود.

تستخدم هذه النظرية في قياس التشتت حول التوقع u، وذلك عن طريق احتمال (أو نسبة) المفردات التي المسافة (الفرق) بينها وبين u تزيد عن مقدار ما: $P(-\varepsilon \geq (x-u) \geq \varepsilon)$ أو بعبارة أكثر اختصارا: $P(|x-u|\geq \varepsilon)$

قبل دراسة متراجحة تشيبيشيف ندرس المتراجحة الآتية:

إذا كان X متغيرا عشوائيا غير سالب بحيث أن $E(X) < \infty$ فإنه لأي عدد موجب a تكون:

$$P(x \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

سميت هذه المتراجحة هكذا نسبة إلى عالم الرياضيات الروسي بافنوتي تشيبيشيف، رغم أن أول من أشار إليها هو صديقه وزميله أيريني جول بيانيمي، قدم بيانيمي هذه المبرهنة بدون برهان في عام

1853وبرهن عليها في عام 1867 ، أعطى تلميذه آندريه ماركوف برهانا آخر لها في .أطروحته للدكتوراه كان ذلك عام 1884 .

إذا كان X متغيرا عشوائيا وسطه μ وتباينه σ^2 فإنه لأي عدد موجب k تكون:

$$P(|X-u| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

مثال:

إذا كان أطوال طلاب الجامعة يتبع توزيعا طبيعيا وسطه 170 سم مع انحراف معياري 8 سم استخدم متراجحة نشيبيشيف لإيجاد حدا أعلى لاحتمال أن يكون أحد الطلاب أطول أو اقصر بـ 12 سم من المتوسط.

الحل:

من المتراجحة نعلم أن:

$$P(|X-u| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} = P(|X-170| \geq 8k) \leq \frac{1}{k^2}$$

باختيار $k = 1.5$ فإن المعادلة السابقة تصبح:

$$P(|X-170| \geq 12) \leq \frac{1}{(1,5)^2} \leq \frac{1}{2,25} \leq 0,44$$

إن القيمة المضبوطة لهذا الاحتمال يمكن حسابها من جدول التوزيع الطبيعي وسنجد أنها تساوي 0.13وواضح أن هناك فرقا كبيرا بين القيمة التقريبية والقيمة المضبوطة ، ولكن في كثير من الظروف العملية عندما يكون التوزيع الاحتمالي مجهولا يكون الحد الاعلى المحسوب من متراجحة تشيبيشيف (وربما يكون غير دقيق) مفيدا جدا.

حسب نظرية شيبيشيف فإن هذه النسبة لا تزيد عن $\varepsilon^2\sigma^2/$، وذلك مهما كانت طبيعة التوزيع. ونعبر عن هذه النظرية كما يلي:

إذا كانت X م ع متصلة أو متقطعة، لها متوسط u وتباين محدود ^{2} ، فإنه مهما يكن ε عدد موجب تماما:

$$\boxed{P(|x-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

ومن أجل صياغة أكثر دلالة، نضع $\varepsilon = k\,\sigma$ فنجد:

$$\boxed{P(|x-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}}$$

❖ لاحظ أنه، انطلاقا من نفس النتيجة، لدينا أيضا:

$$P(-\varepsilon < (x-\mu) < \varepsilon) = P(|x-\mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

سؤال: هل هذه العبارة صحيحة: إذا كان أقل من 10% من الفائزين في امتحان الباكالوريا يحصلون على تقدير أكثر من حسن، فهذا يعني أن أكثر من 90% من الفائزين في الباكالوريا يحصلون على تقدير أقل من حسن.

الجواب: نعم

مثال1: لتكن X م ع تتبع توزيعا أيا كان؛ لها متوسط u وتباين محدود ^{2} ، و ε وعدد موجب تمام؛

1. أحسب الحد الأقصى للاحتمال:

$$P(-\varepsilon \geq (x-\mu) \geq \varepsilon) \text{ من أجل } \varepsilon = 2\,\sigma \text{ ،} \varepsilon = 3\,\sigma \text{ ،} \varepsilon = 4\,\sigma$$

2. أحسب الحد الأدنى للاحتمال:

$$P(-\varepsilon < (x-\mu) < \varepsilon) \text{ من أجل } \varepsilon = 2\,\sigma \text{ ،} \varepsilon = 3\,\sigma \text{ ،} \varepsilon = 4\,\sigma$$

$$P(-\varepsilon \geq (x-\mu) \geq \varepsilon) = P(|x-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = 2\sigma \Rightarrow P(-\varepsilon \geq (x-\mu) \geq \varepsilon) = P(|x-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}, \qquad \varepsilon = 3\sigma \Rightarrow P(|x-\mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9},$$

$$\varepsilon = 4\sigma \Rightarrow P(-\varepsilon \geq (x-\mu) \geq \varepsilon) = P(|x-\mu| \geq 4\sigma) \leq \frac{1}{16},$$

$$P(-\varepsilon < (x-\mu) < \varepsilon) = P(|x-\mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = 2\sigma \Rightarrow P(-\varepsilon < (x-\mu) < \varepsilon) = P(|x-\mu| < 2\sigma) > 1 - \frac{1}{4} = 3/4, \qquad \varepsilon = 3\sigma \Rightarrow P(|x-\mu| < 3\sigma) > 1 - \frac{1}{9} = 8/9,$$

$$\varepsilon = 4\sigma \Rightarrow P(-\varepsilon < (x-\mu) < \varepsilon) = P(|x-\mu| < 4\sigma) > 1 - \frac{1}{16} = 15/16,$$

مثال 2: يتم أخذ أوزان عمال مركب الحجار من أجل ترشيحهم للمشاركة في ماراتون عيد العمال 1 ماي.

1. كيف يمكن تحديد مجال القبول بحيث يتم ترشيح على الأقل 75 % من العمال، رفض ترشيح اقل من 25% من العمال؟
2. حدد قيم إذا كان الوزن المتوسط الافتراضي هو 70 كغ، والانحراف المعياري 5 كغ.

$$P(-\varepsilon < (x-\mu) < \varepsilon) = P(|x-\mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$Lorsque\ \varepsilon = 2\sigma.\ nous\ savons\ déjà\ que P(-\varepsilon < (x-\mu) < \varepsilon) = P(|x-\mu| < 2\sigma) > 1 - \frac{1}{4} = 75\%$$

$$P(\varepsilon \geq (x-\mu) \geq \varepsilon) = P(|x-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$Lorsque\ \varepsilon = 2\sigma.\ nous\ savons\ déjà\ que\ P(|x-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4} = 25\%$$

1. إن أكثر من 75 % العمال لهم أوزان لا تبعد بأكثر من σ 2 عن المتوسط، وهذا يمكن التعبير عنه بطريقة أخرى بالقول: إن اقل أو يساوي من 25 % من العمال لهم أوزان أبعد من الوزن المتوسط بأكثر من σ 2.

إذا يمكن اتخاذ بحال قبول $u \pm 2\ \sigma$ لتحقيق الهدف المسطر.

2. المجال الذي يحقق الهدف حسب القيم المعطاة للمتوسط والانحراف المعياري هو من 60 إلى 80 كغ.

مثال 3: متوسط مدة التمدرس في مجتمع معين هي 8 سنوات، والانحراف المعياري $\sigma = 1$

1. أحسب أدنى احتمال لمدة تمدرس بين 6 و 10 سنوات لفرد مختار عشوائيا من هذا المجتمع.
2. أحسب أقصى احتمال لمدة تمدرس لا تزيد عن 6 سنوات أو لا تقل عن 10 سنوات.

$$P(|x-\mu| < k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}. \qquad \mu = 8, \sigma = 1 \Rightarrow 10 = \mu + 2\sigma,\ 6 = \mu - 2\sigma. Pour\ k = 2:$$

$$P(10 > x > 6) = P(|x-\mu| < 2\sigma) > 1 - \frac{1}{2^2} = 3/4$$

أدنى احتمال لمدة تمدرس بين 6 و 10 سنوات لفرد مختار عشوائيا من هذا المجتمع هي 0.75.

$$P(|x-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}. \qquad 6 = \mu - 2\sigma.\ soit\ k = 2:$$

$$P(|x-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{2^2} = 1/4$$

أدنى احتمال لمدة تمدرس لا تزيد 6 سنوات أو لا تقل عن 10 هو 0.25.

2- نظرية الأعداد الكبيرة Théorème des grands nombres

تقول نظرية الأعداد الكبيرة بأن التردد النسبي لحادثة عشوائية يقترب أكثر فأكثر من احتمالها النظري مع ازدياد عدد مرات إعادة التجربة العشوائية.

تعتبر نظرية الأعداد الكبيرة من نتائج نظرية شيبيشيف ويستفاد منها بشكل خاص في نظرية المعاينة.

تصاغ هذه النظرية بالشكل الآتي:

لتكن المتغيرات X1، X2... متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي ولكل منها نفس المتوسط u والتباين ^{2} إذا كانت

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

بما أن $E(S_n/n)=u$ فإن مضمون هذه النظرية هو أن احتمال أن تبتعد للمتغيرة S_n/n عن قيمتها المتوقعة بأكثر من ε هو 0 عندما $n \to \infty$. تسمى هذه الصياغة أيضا بقانون الأعداد الكبيرة الضعيف.

حيث أن قانون الأعداد الكبيرة القوي هو:

$$P[\lim_{n\to\infty} S_n/n = \mu] = 1$$

مثال: تجربة رمي قطعة نقد

عدد الرميات	عدد مرات ظهور الصورة		نسبة	
	نظري	تطبيقي (مشاهد)	نظري	تطبيقي (مشاهد)
100	50	48	0.500	0.480
1000	500	491	0.500	0.491
10000	5000	4970	0.500	0.497

خلاصة:

نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة من النظريات التي تقيس تشتت المتغيرة وهي من تطبيقات توقع دالة:

- إذا كانت X م ع متصلة أو متقطعة، لها متوسط u وتباين محدود ^{2} ، فإنه مهما يكن ε عدد موجب تماما:

$$P(|x-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

- لتكن المتغيرات X1، X2،... متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي ولكل منها نفس المتوسط u والتباين ^{2} إذا كانت

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

قائمة المراجع

- نظرية الاحتمالات: مبادئ الحساب الاحتمالي- دروس وتمارين- السعدي رجال، الجزء الأول، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2012
-
-الاحصاء للإداريين والاقتصاديين، دلال القاضي، دار ومكتبة الحامد، عمان، 2005
-الاحصاء، محمود حسن المشهداني، بيت الحكمة جامعة بغداد،1989
- الاحصاء والاحتمالات نظرية وتطبيقات، حميد عويد مشرف العلكة، دار جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2019
- مدخل الى نظرية الاحتمالات الجزء الأول ، ويليام فللر، ترجمة انيس اسماعيل كنجو، جامعة الملك سعود النشر العلمي والمطابع، المملكة العربية السعودية، 2000
-مبادئ الاحصاء والاحتمالات، عدنان بن ماجد عبد الرحمان بري، جامعة الملك سعود النشر العلمي والمطابع، المملكة العربية السعودية، 1997
- مبادئ في الاحتمالات والاحصاء، مبارك أسبر ديب، جامعة تشرين،. 2009
- مقدمة في نظرية الاحتمالات، جبار عبد مضحي، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان،. 2011
- أساسيات الاحتمالات، خالد زهدي خواجة، المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية، الكويت، 2009 .
- مبادئ الاحصاء والاحتمالات للعلوم الادارية والتطبيقية، محمد المزاح، منشورات جامعة العلوم والتكنولوجيا، السودان، 2013 .
-الاحصاء في عالم الاعمال نهج صنع القرار الجزء الاول ، ترجمة ماهر دريد بدوي، دار جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية،2015 .
- الاحصاء في عالم الاعمال نهج صنع القرار الجزء الثاني، ترجمة ماهر دريد بدوي، دار جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية،2015
- أمحمد معتوق، الاحصاء الرياضي والنماذج الاحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر 2015.
- أنيس اسماعيل كنجو، الاحصاء والاحتمالات، مكتبة العبيكان للنشر، الطبعة الأولى السعودية، 2000
- بوعبد الله صالح، الاحتمالات والاحصاء الرياضي، الجزائر، 2006

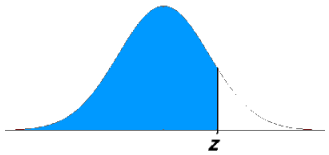
- جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2011
- جاسم محمد علي، الاحصاء باستخدام برنامج spss، مركز الكتاب الأكاديمي، العراق، 1997 ،
- جلال الصياد، مبادئ الطرق الاحصائية، الطبعة الأولى، دار تهامة للنشر والتوزيع، السعودية، 1983
- خالد زهدي خواجة، أساسيات الاحتمال، المعهد العربي للتدريب والبحوث الاحصائية، الأردن، 2017.
- دومينيك سالفادور، نظريات ومسائل في الاحصاء والاقتصاد القياسي، ملخصات شوم، الدار الدولية
للنشر والتوزيع، مصر، 1982.
- رأفت رياض رزق الله، مبادئ الاحتمالات، الجزء الأول، المكتبة الأكاديمية، القاهرة، 2001.
- رامز قدسية، الاحتمالات والإحصاء، كتاب من منشوا رت الجامعة الافتراضية السورية، الجمهورية
العربية السورية، 2018.
- سامية تيلولت، الاحتمالات، دروس، تمارين مع الحلول للأعمال الموجهة، الطبعة الأولى، مطبعة دار الحديث للكتاب، الجزائر، 2016.
- شوقي سيف النصر سيد وآخرون، الاحصاء في مجال الأعمال، كلية التجارة، جامعة القاهرة، 2017.
- صالح رشيد بطارسة، الاحصاء والاحتمالات، دار أسامة للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.
- صبري عزام، الاحصاء الرياضي، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.
- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، أساليب الاحصاء، الطبعة الأولى، دار وائل للنشر، الأردن، 2009.
- عبد الله بن عبد الكريم الشيحة، مبادئ الاحصاء والاحتمالات، ادارة المطابع والنشر العلمي بجامعة
الملك سعود، السعودية، 2007.

- كمال بوعظم، الاحصاء الاستدلالي من الجانب النظري والتطبيقي، الطبعة الأولى، دار زهران للنشر والتوزيع، الأردن، 2012
- كمال سلطان محمد سالم، الاحصاء الاحتمالي، الدار الجامعية، الطبعة الأولى، مصر، 2004
- محمد صابور، العد والاحتمالات، 100 تمرين تطبيقي، دار المفيد للنشر والتوزيع، الجزائر، 2008
- محمد صبحي أبو صالح، مبادئ الاحصاء دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2007
- محمد عبد العالي النعيمي و حسن ياسين طعمة، الاحصاء التطبيقي، دار وائل للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن، 2008
- مراد كمال عوض، أساسيات الاحصاء، الطبعة الأولى، دار البداية للنشر والتوزيع، الأردن، 2010
- نوار الأسدي، مبادئ علم الإحصاء، مكتبة الابداع الرقمية ، بدون تاريخ، العراق.
- نور الدين حامد، محاضرات وتمارين محلولة في مقياس الاحصاء الوصفي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2017.
- **ثانيا–المراجع باللغة الأجنبية**

- Admane O, et outres, statistiques,(cours et exercices) édition, office des publication universitaires, Alger , 2009
- Amar Rebbouh, statistique descriptive calcul de probabilités, édition 2006,édition Houma, Alger.
- Renée Veysseyre, statistique et probabilités 2éme édition, Dunod,paris,2001
- Murray R. Spiegel **Probabilités et statistiques : cours et problèmes**, traduit par : Romain Jacoud, 4ème édition, (1984),

الملاحق

التوزيع الطبيعي الممركز المختصر:



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990