الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة سعيدة الدكتور مولاي الطاهر
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة في مقياس:

النمذجة الإحصائية

موجهة لطلبة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
تخصص: إدارة أعمال وإدارة إستراتيجية

من إعداد الأستاذة عامر إيمان
أستاذة محاضرة " أ"

النسخة الأولى
السنة الجامعية: 2026/2025

المحتويات

المقدمـــــــــــة

مقدمة:

تُعد النمذجة الإحصائية أحد الأدوات الأساسية في البحث العلمي والتحليل الكمي، حيث تُمكّن الباحثين من فهم العلاقات بين المتغيرات، والتنبؤ بالاتجاهات، واتخاذ القرارات المبنية على البيانات. في مجال علوم التسيير، تلعب النمذجة الإحصائية دورًا حيويًا في تحليل الأسواق، إدارة المخاطر، تحسين الأداء التنظيمي، واتخاذ القرارات الاستراتيجية.

يهدف هذا المقياس إلى تزويد الطلبة بالمعرفة النظرية والمهارات التطبيقية التي تمكنهم من بناء نماذج إحصائية ملائمة لمختلف المشكلات الإدارية والاقتصادية، تقدم هذه المطبوعة مجموعة من المحاضرات والتمارين المحلولة لمقياس النمذجة الاحصائية، لطلبة السنة الأولى ماستر تخصص إدارة أعمال وإدارة إستراتيجية، حيث اعتمدت البساطة والوضوح في إخراج هذه المادة مدعما ذلك بأمثلة تطبيقية محلولة، آخذه بعين الإعتبار مدة أربعة عشر أسبوع (سداسي) في تلقي هذه المادة، بعيداً عن البراهين الرياضية المعقدة لا سيما وأن هذا المقياس موجه لطلبة غير متخصصين في النمذجة، ومن ثم فإن الهدف من هذه المطبوعة هو إتقان الطالب أدوات النمذجة الاحصائية والقدرة على توظيف الأساليب الإحصائية المناسبة بالتنبؤ بمختلف الظواهر الاقتصادية والمالية، والاستعانة به في إنجاز البحوث العلمية التطبيقية خاصة منها مذكرات التخرج، حيث تم تقسيم المطبوعة إلى خمسة فصول أساسية، الفصل الأول يتناول مقدمة في النمذجة الإحصائية (مفهوم النموذج، أنواع النموذج، تخصيص النموذج) حتى نشكل خلفية نظرية للمقياس تسهل للطالب الولوج في الفصلين الثاني والثالث الموسومين بتحليل الانحدار الخطي البسيط والمتعدد، أما الفصل الرابع والخامس فيتناول مشاكل القياس الاقتصادي التي تتعلق باختلال في فرضيات النموذج.

من خلال هذا المقياس، سيتمكن الطلبة من تطوير قدراتهم في تحليل البيانات، واستخدام الأساليب الإحصائية المناسبة، وبناء نماذج تفسيرية وتنبؤية فعالة، مما يسهم في تعزيز مهاراتهم في البحث العلمي واتخاذ القرار في المجال الإداري والاقتصادي، ويبقى هذا العمل في طبعته الأولى تحت تصرف كل الطلبة والباحثين من أجل إثرائه بملاحظاتهم وانتقاداتهم المختلفة، التي سيتم أخدها بعين الإعتبار مع جزيل الشكر والامتنان.

الفصل الأول

الفصل الأول: مقدمة في النمذجة الإحصائية

تقديم:

تُعد النمذجة الإحصائية إحدى الأدوات الرئيسية في تحليل البيانات واتخاذ القرارات المستندة إلى الأدلة. تعتمد هذه المنهجية على تطوير نماذج رياضية لوصف الظواهر وتحليل العلاقات بين المتغيرات، مما يسهم في الفهم العميق للبيانات واستنتاجات دقيقة. يهدف هذا البحث إلى تقديم إطار نظري حول النمذجة الإحصائية، واستعراض أهم تطبيقاتها في مختلف المجالات.

1-1- مفهوم النمذجة الإحصائية:

النمذجة الإحصائية هي عملية بناء نموذج رياضي يستخدم البيانات لوصف وتفسير الأنماط والعلاقات بين المتغيرات. تعتمد النماذج على معادلات رياضية يمكنها التنبؤ بالسلوك المستقبلي بناءً على البيانات المتاحة[1] . يساعد النموذج الإحصائي في تبسيط تعقيد البيانات من خلال تقديم تمثيل رياضي للعلاقات بين المتغيرات المختلفة، مما يسهم في تحسين الدقة في تحليل البيانات واتخاذ القرارات.

1-2- أنواع النماذج الإحصائية:

- **النماذج الاحتمالية** :(**Probabilistic Models**) تعتمد على التوزيعات الاحتمالية مثل التوزيع الطبيعي، والتوزيع اللوغاريتمي[2].
- **النماذج الحتمية** :(**Deterministic Models**) تعتمد على علاقات ثابتة بين المتغيرات دون وجود عشوائية.
- **نماذج الانحدار** :(**Regression Models**) مثل الانحدار الخطي البسيط والمتعدد.
- **نماذج السلاسل الزمنية** :(**Time Series Models**) مثل نموذج ARIMA المستخدم في التنبؤ بالبيانات الزمنية[3].

---

[1] Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2021). "Applied Statistics and Probability for Engineers". Wiley, p. 125

[2] Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2017). "The Elements of Statistical Learning". Springer. p. 210

[3] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2015). "Time Series Analysis: Forecasting and Control". Wiley. P 89.

- **النماذج القائمة على التعلم الآلي** :(**Machine Learning Models**) تشمل الشبكات العصبية العميقة وأشجار القرار[1] .

1-3- تخصيص النموذج الإحصائي:

تخصيص النموذج الإحصائي يشير إلى عملية ضبط معالم النموذج ليتناسب مع البيانات المدروسة بأفضل شكل ممكن. يتضمن ذلك:

- **اختيار النموذج المناسب:** بناءً على طبيعة البيانات والهدف من التحليل.
- **ضبط المعلمات:** من خلال استخدام تقنيات مثل الحد الأقصى **للاحتمالية** (Maximum Likelihood Estimation) أو المربعات الصغرى (Least Squares Method).
- **اختبار جودة النموذج** :عبر مؤشرات مثل R^2 أو RMSE للتحقق من دقة التوقعات.
- **تحسين النموذج:** من خلال تقنيات مثل التحقق المتقاطع (Cross-validation) والتقليل من فرط التخصيص (Overfitting).

1-4- التطبيقات العملية للنمذجة الإحصائية:

- **في الاقتصاد** :تحليل الأسواق المالية، التنبؤ بالنمو الاقتصادي، وتقييم المخاطر الاستثمارية[2] .
- **في الصحة** :تحليل انتشار الأوبئة، تقييم فعالية الأدوية، والنمذجة الحيوية.[3].
- **في الهندسة** :مراقبة الجودة، تحسين العمليات الإنتاجية، والنمذجة الهندسية.
- **في علوم البيانات** :تحليل البيانات الضخمة، التنبؤ بسلوك المستخدمين، والتعرف على الأنماط المخفية في البيانات.[4]

---

[1] Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2017). "The Elements of Statistical Learning". Springer. p. 210

[2] Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2021). "Applied Statistics and Probability for Engineers". Wiley, p. 125

[3] Jones, Peter (2019). "The Use of Probabilistic Models in Health Data Analysis". International Journal of Statistics, 33(2), p56.

[4] Smith, Laura (2021). "Machine Learning and Statistical Modeling: Overlap and Integration". Journal of Applied Artificial Intelligence, 12(1), p78.

1-5- طبيعة و مصادر البيانات في التحليل الاقتصادي:

يتوقف نجاح التحليل الاقتصادي على ملائمة واتاحة البيانات اللازمة. ولذلك من الأهمية تناول طبيعة و مصادر البيانات.

1-5-1- أنواع البيانات: يمكن تقسيم البيانات إلى ثلاثة أنواع هي:

- **بيانات السلاسل الزمنية**: هي مجموعة من المشاهدات التي يأخذها المتغير في أوقات مختلفة، مثل البيانات اليومية والأسبوعية والشهرية[1]...، تحتوي السلسلة الزمنية على عدد من القياسات لمتغير ما عند نقاط زمنية مختلفة، وهي تصف بذلك سلوك المتغير الإقتصادي عبر الزمن.
- **بيانات القطع العرضي**: توضح البيانات القطاعية القياسات التي يأخذها متغير ما بالنسبة لمفردات عينة ما عند نقطة زمنية معينة، مثال ذلك بيانات خاصة بدخول عينة من المستهلكين عند نقطة زمنية معينة، أو الدخل القومي لمجموعة من دول العالم في سنة معينة. وتوضح البيانات القطاعية بذلك مدى تغير قيمة متغير ما من مفردة لأخرى عند نفس النقطة من الزمن.
- **البيانات المزدوجة**: وهي تحتوي على مزيج من بيانات السلسلة الزمنية والبيانات القطاعية. فهي تعطي بيانات عن مجموعة من المفردات عبر سلسلة زمنية [2].

1-5-2- مصادر البيانات:

يعتمد نجاح أي تحليل انحدار على توافر البيانات[3]. حيث أن البيانات المستخدمة في التحليل التجريبي (الاختباري) تقوم بجمعها جهات حكومية (مثل قسم التجارة) أو جهة دولية (مثل صندوق النقد الدولي أو البنك الدولي) أو المنظمات الخاصة (مثل هيئة رعاية الفقراء) كذلك يوجد الاف الهيئات الأخرى تقوم بجمع البيانات بهدف أو بآخر.[4]

---

[1] مها محمد زكي، الإقتصاد القياسي بالأمثلة، دار حميثرا للنشر، الطبعة الأولى ، مصر العربية- القاهرة،2019 ، ص33.

[2] عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الإقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الإسكندرية الدار الجامعية، 2005، ص 23-24.

[3] مها محمد زكي، مرجع سابق ، ص35.

[4] دامودار جوجارات، تعريب ومراجعة هند عبد الغفار عودة و عفا علي حسن الدش، الإقتصاد القياسي الجزء الأول، دار المريخ للنشر، المملكة العربية السعودية- الرياض، 2015، ص.63.

الفصل الثاني

الفصل الثاني: تحليل الانحدار الخطي البسيط

تقديم:

يستخدم النموذج الخطي ذي المتغيرين، أو تحليل الإنحدار البسيط لإختبار الفروض حول العلاقة بين متغير تابع y ومتغير مستقل أو مفسر x وللتنبؤ[1]. كما يعتبر الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع نماذج الانحدار، بحيث يوجد العديد من العلاقات الاقتصادية التي يمكن قياسها باستخدام هذا الأسلوب، مثل علاقة الإنفاق الاستهلاكي والدخل المتاح، وعلاقة الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها، وأيضا مستوى البطالة مع معدل التضخم.

2-1- كتابة نموذج الإنحدار الخطي البسيط:

- ✓ يعتبر هذا النموذج الأسهل للتقدير والتحليل والتنبؤ وصيغته الرياضية تصف العلاقة بين متغيرين اثنين فقط أحدهما مستقل x والآخر متغير تابع y وتطبق هذه الصياغة إلا إذا كانت العلاقة خطية.

ومنه النموذج الخطي البسيط يعرف بالمعادلة التالية :

$$y_{\mathrm{t}} = a_0 + a_1 x_{\mathrm{t}} + \varepsilon_{\mathrm{t}} \qquad / \quad t = 1,n$$ [2]

بحيث:

y_t : المتغير التابع (الظاهرة المدروسة) Variable a expliquer (endogène)

x_{t} : المتغير المستقل Variable explicative (exogène)

a_0 ،a_1: معالم النموذج أو معاملات الانحدار البسيط Les paramètre de modèle (coefficients de regression)

ε_{t} : المتغير العشوائي (الحد العشوائي) Terme d’erreur

2-1-1- أنواع نماذج الانحدار:

- ➢ **نماذج الانحدار الزمنية** : وتكتب بالصيغة التالية

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t \qquad / \ t = 1, n$$

[1] دومينيك سلفاتور، مرجع سابق، ص 139.

[2] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9eédition, Dunod paris, 2015, p17.

➢ **نماذج الانحدار اللحظية**: وتكتب بالصيغة التالية

$$y_i = a_0 - a_1 x_i + \varepsilon_i \qquad / \, i = 1,n$$

2-1-2- صيغ نماذج الانحدار الخطي البسيط:

✓ **النموذج النظري Le modèle théorique** :

يكتب بالصيغة التالية:

$$y_i = a_0 - a_1 x_i + \varepsilon_i$$

✓ **النموذج المقدر Le models estimé** :

يكتب بالصيغة التالية:

$$y_i = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i + e_i$$

✓ **النموذج المعدل Le modèle ajusté** :

يكتب بالصيغة التالية:

$$\hat{y}_i = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i$$

2-2- تحديد قيمة معلمات النموذج:

هناك عدة طرق لتقدير معالم النموذج أهمها طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية ***M.C.O***. ففي المرحلة الأولى نفترض تحقق الفرضيات الأساسية للنموذج الخطي، وفي المراحل اللاحقة سنتعرض للحالات التي تكون فيها هذه الفروض غير صحيحة.

2-2-1- طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية ***M.C.O***:

الطريقة الشائعة لتقدير معاملات الإنحدار هي طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية ***M.C.O***، فهي ترجع إلى عالم الرياضيات Carl Friedrich Gauss. وتحت فروض معينة (سوف نناقشها)، تعتبر طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية أفضل طرق التقدير.[1]و الأكثر استخدامًا في تحليل الإنحدار، فهي أسلوب لتوفيق "أفضل" خط

[1] دامودار جوجارات، تعريب ومراجعة هند عبد الغفار عودة و عفا علي حسن الدش، الإقتصاد القياسي الجزء الأول، دار المريخ للنشر، المملكة العربية السعودية-الرياض، 2015، ص 95.

مستقيم لعينة مشاهدات XY،[1]كما أنها تحاول إيجاد مقدر النموذج عن طريق تدنية (تصغير) مجموع مربعات الأخطاء أو البواقي وفق الصيغة التالية:

$$min\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

نريد البحث عن :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$min\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = min\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i)^2$$

$$min\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = min\sum_{i=1}^{n}(s)^2 \quad / \, s = y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i$$

بالإشتقاق بالنسبة ل: a_0 و a_1 نجد:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta s}{\delta a_0} = 0 \quad \rightarrow \dfrac{\delta(\sum_{i=1}^{n} e_i^2)}{\delta a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) = 0 \\ \dfrac{\delta s}{\delta a_1} = 0 \quad \rightarrow \dfrac{\delta(\sum_{i=1}^{n} e_i^2)}{\delta a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_i) = 0 \end{cases}$$ [2]

بعد الحساب نحصل على:

$$\hat{a}_1 = \frac{cov(x,y)}{var_x}$$ [3]

ويمكن أيضًا حساب المعلمة $\hat{a}_1$ وفق العلاقة التالية:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$ [4]

إذن ولتقدير معالم نموذج الإنحدار الخطي البسيط يتم تطبيق القانون التالي:

[1] دومينيك سلفاتور، مرجع سابق، 139.

[2] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p19.

[3] Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, p 38.

[4] عبد القادر محمد عبد القادر عطية، مرجع سبق ذكره، ص 95

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2} = \\ \hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1\bar{X} \end{cases}$$ [1]

حيث $\bar{Y}$، $\bar{X}$ هما متوسط كل من Y، X على الترتيب

حالة خاصة: نموذج الإنحدار دون الحد الثابت (Modele son terme constante)

لدينا:

$$\hat{y} = \hat{a}_1 x_i$$

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \\ \hat{a}_0 = 0 \end{cases}$$ [2]

لأن $\bar{Y}$ و $\bar{X}$ نقطة الأصل (المستقيم يمر على $\bar{Y}$ و $\bar{X}$).

$\bar{X} = \bar{Y} = 0$

2-2-2- خصائص تقديرات المربعات الصغرى:

- مقدرات غير متحيزة: نقول عن مقدر أنه غير متحيز لمقدر $\hat{a}$ إذا كان $E(\hat{a}) = a$.
- كفؤة.
- متقاربة.

عند تحقق الخواص الثلاثة نتحصل على مقدرات BLUE. (سينم شرحها في الفصل اللاحق)

مثال:

الجدول التالي يمثل عدد سنوات الخدمة X_i ومعدل الأجر السنوي Y_i بآلاف الدينارات لعينة تمثل 8 موظفين:

---

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p 19.

[2] Ibid, p20.

32	25	24	20	16	12	8	4	عدد سنوات الخدمة X_i
65.8	65	62.6	59	53.9	45.4	32.7	25.6	معدل الأجر السنوي Y_i

المطلوب:

قدر معدل الأجر السنوي لـ 8 موظفين؟

<u>الحل</u>:

لتقدير المعلمة $\hat{a}_1$ نستعين بالصيغة التالية:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$
$$= \frac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2}$$

قبل تطبيق العلاقة السابقة يجب إجراء الحسابات المبينة في الجدول التالي:

X_i	Y_i	X_iY_i	X_i^2
4	25.6	102.4	16
8	32.7	261.6	64
12	45.4	544.8	144
16	53.9	862.4	256
20	59	1180	400
24	62.6	1502.4	576
28	65	1820	784
32	65.8	2105.6	1024
144	**410**	**8379.2**	**3264**

وبالتالي:

$$\hat{a}_1 = \frac{8379.2 - (8)(18)(51.25)}{3264 - (8)(18)^2}$$

إذن: $\boxed{\hat{a}_1 = 1.487}$

ولتقدير المعلمة $\hat{a}_0$ نستعين بالصيغة التالية:

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1\bar{X}$$

$$=(51.25)-(1.487)(18)$$

$$\boxed{\hat{a}_0 = 24.486}$$

مقدر معدل الأجر السنوي ل 8 موظفين هو:

$$\hat{y}_i = 24.486 - 1.487x_i$$

2-2-3- التباينات و الأخطاء المعيارية لتقديرات المربعات الصغرى:

في الإحصاء، يقاس التقلب في قيم المتغير العشوائي بتباينه σ^2، أو الجدر التربيعي للتباين σ وهو الإنحراف المعياري. في سياق الإنحدار يسمى الإنحراف المعياري للمقدر بالخطأ المعياري، ولكنه يشبه الإنحراف المعياري في مفهومه. يتم الحصول على تقدير لتباين حد الخطأ العشوائي $\hat{\sigma}^2{}_i$، أي σ^2 للخطأ كما يلي[1]:

$$\boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2}}$$

حيث: $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ [2]

n : حجم العينة

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

وبالتالي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$ [3]

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right)}$$ [4]

---

[1] مها محمد زكي، مرجع سبق ذكره ، ص 41.

[2] Isabelle cardoret, catherine benjamin, franch martin, nadine herrard, steven tanguy, Econométrie appliquée, 2e édition, groupe de boeck, Bruxelles, 2009, p 15.

[3] Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, p 40.

[4] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p26.

2-3- الفرضيات الكلاسيكية الخاصة بالحد العشوائي: *Les hypothèses classiques de l'erreur*

الحد العشوائي يمثل كل ما لم يشرح بالنموذج وله فرضيات خاصة به وهو يقيس كذلك الفرق بين القيم الحقيقية والقيم التقديرية، كما أنه عموما يتضمن عدة أنواع من الأخطاء وهي:

- **خطأ التخصيص**: هنا لا يمكن للمتغير المستقل x_i أن يشرح لوحده المتغير التابع Y_i.
- **خطأ القياس**: بمعنى أن البيانات لا تمثل بدقة الظاهرة المدروسة.
- **خطأ المعاينة**: أي خطأ اختلاف العينة (خطأ اختيار العينة).

وهناك مجموعة من الفرضيات التي تم وضعها لبناء نموذج الإنحدار الخطي البسيط وهي:

- **الفرضية الأولى**: تعني هذه الفرضية أن الأخطاء t لا تدخل في تفسير y وتعبر عن حدود عشوائية لا يمكن قياسها أو تحديدها بدقة، ويمكن كتابتها على الشكل:

$$E(\varepsilon_t) = 0 : H_1$$

- **الفرضية الثانية**: تتعلق بافتراض تباين الأخطاء وتشتتها وهو يعني أن تبعثرها حول المتوسط ثابت، ونعبر عنه رياضيا بالعلاقة:

$$\mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 : H_2$$

- **الفرضية الثالثة**: لا يوجد ارتباط بين الأخطاء المرتكبة على مشاهدات مختلف عناصر العينة معناه خطأ اللحظة ليس له علاقة مع خطأ اللحظة السابقة ونعبر عنها رياضيا كما يلي :

$$i \neq j \ / \ \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathrm{E}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 : H_3$$

- **الفرضية الرابعة**: لا يوجد علاقة بين الخطأ والمتغير المفسر X_i، بحيث يجب أن يكون x معلوم لا يوجد فيه خطأ (لأنه إذا كانت فيه أخطاء فإنه يكون في المتغير التابع Y_i أخطاء كذلك)

$$\mathrm{Cov}\,(x_{i,t}\, , \varepsilon_t) = 0 : H_4$$

4-2- إختبار المعنوية الإحصائية لمعالم النموذج:

- إختبار معنوية المعلمة a_1:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0 & \text{غير معنوي} \\ H_1 : a_1 \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-2)$$

قاعدة القرار:

إذا كان قيمة ستودنت المحسوبة أكبر من قيمة ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة $\alpha/2$ ودرجة حرية $n-2$ نرفض الفرضية الصفرية وذلك كالتالي:

$$t^*_{calculer} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} > t^{\alpha/2}_{n-2} \rightarrow H_0 \text{ رفض}$$

- **إختبار معنوية المعلمة a_0:**

$$\begin{cases} H_0 : a_0 = 0 & \text{معنوي غير} \\ H_1 : a_0 \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

$$t^* = \frac{\hat{a}_0 - a_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{\hat{a}_0 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} \rightarrow T(n-2)$$

قاعدة القرار:

إذا كان قيمة ستودنت المحسوبة أكبر من قيمة ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة $\alpha/2$ ودرجة حرية $n-2$ نرفض الفرضية الصفرية وذلك كالتالي:

$$t^*_{calculer} = \frac{\hat{a}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} > t^{\alpha/2}_{n-2} \rightarrow \ H_0 \ \text{رفض}$$

2-5- تحديد فترة الثقة لمعلمات الإنحدار a_0 و a_1:

نعني بحدود الثقة أو فترات الثقة لمعاملات الإنحدار، تقدير مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة أي معلمة المجتمع. ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى الذي يرمز له بالرمز (L) والحد الأعلى الذي يرمز له بالرمز (U). ويعني ذلك تحديد المدى الذي تتراوح فيه قيمة المعلمة a بين هاذين الحدين، بمعنى آخر يمكن القول إلى أي مدى يمكن تحريك توزيع ستودنت t إلى اليسار أو اليمين قبل أن تصل إلى القيمة الحرجة[1]. والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي كالآتي:

- **مجال الثقة ل a_1:**

$$\frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \pm \ t^{\alpha/2}_{n-2}$$

$$\boxed{IC_{a_1} : a_1 = \hat{a}_1 \pm \ t^{\alpha/2}_{n-2}.\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}$$

a_1: يقع في المجال أعلاه بإحتمال قدره (α -1).

- **مجال الثقة ل a_0:**

$$\frac{\hat{a}_0 - a_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} = \pm \ t^{\alpha/2}_{n-2}$$

$$\boxed{IC_{a_0} : a_0 = \hat{a}_0 \pm \ t^{\alpha/2}_{n-2}.\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}}$$

[1] حسين علي بخيث، سحر فتح الله، الإقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص 104.

مثال:

إختبار معنوية المعلمات المقدرة ($\hat{a}_1$، $\hat{a}_0$):

$\Sigma(\hat{Y}-\bar{Y})^2$	$(y_i-\bar{Y})^2$	$\sum(x_i-\bar{x})^2$	e_i^2	$e_i=y-\hat{Y}$	$\hat{Y}_i$
433.8264	657.9225	196	23.3611	4.8333-	30,4333
221.4928	344.1025	100	13.5494	3.6809-	36.3809
79.7895	34.2225	36	9.4336	3.0714	42.3285
8.9072	7.0225	4	31.6272	5.6238	48.2761
8.7823	60.0625	4	22.8119	4.7761	54.2238
79.4148	128.8225	36	5.8979	2.4285	60.1714
220.804	189.0625	100	1.2522	1.1190-	66.1190
432.952	211.7025	196	39.2711	6.2666-	72.0666
1485.9642	**1633.04**	**672**	**147.2047**	**0**	**410**

حساب تباين الخطأ $\hat{\sigma}_e^2$:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{147.2047}{8-2} = 24.5341$$

حساب الإنحراف المعياري ل $\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{24.5341}{672}} = \sqrt{0.0365091}$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = 0.191073}$$

حساب الإنحراف المعياري ل $\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2 = 24.5341\left(\frac{1}{8} + \frac{(18)^2}{672}\right) = 14.8921$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} = 3.8594}$$

إختبار معنوية المعلمة a_1:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0 & \text{غير معنوي} \\ H_1 : a_1 \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{|1.486904|}{0.191073} = 7.781843$$

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{8-2}^{0.05/2} t_6^{0.025} = 2.447$$

قاعدة القرار:

بما أن قيمة ستودنت المحسوبة أكبر من قيمة ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 0.975 ودرجة حرية 6 نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_1 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t_{calculer}^* = 7.781843 > t_{n-2}^{\alpha/2} = 2.447 \rightarrow H_0 \text{ رفض}$$

مجال الثقة ل a_1:

$$\frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \pm t_{n-2}^{\alpha/2}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} IC_{a_1} : a_1 = \hat{a}_1 \pm t_{n-2}^{\alpha/2}.$$

$$\boxed{a_1 =]1.019 ; 1.954[}$$

إختبار معنوية المعلمةa_0:

$$\begin{cases} H_0 : a_0 = 0 & \text{غير معنوي} \\ H_1 : a_0 \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_0 - a_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} \to T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_0 - 0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} = \frac{\hat{a}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} = \frac{|24.486|}{3.8594} = 6.344427$$

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{8-2}^{0.05/2} t_6^{0.025} = 2.447$$

قاعدة القرار:

بما أن قيمة ستودنت المحسوبة أكبر من قيمة ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 0.975 ودرجة حرية 6 نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_{1_1} معناه أن المعلمة a_0 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t_{calculer}^* = 6.344427 > t_{n-2}^{\alpha/2} = 2.447 \to H_0 \text{ رفض}$$

مجال الثقة ل a_0:

$$\frac{\hat{a}_0 - a_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} = \pm\, t_{n-2}^{\alpha/2}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} IC_{a_0} : a_0 = \hat{a}_0 \pm t_{n-2}^{\alpha/2}.$$

$$\boxed{a_0 =]15.045 \; ; \;\; 33.926[}$$

2-6- إختبار معنوية العلاقة الخطية للانحدار والقدرة التفسيرية للنموذج:

2-6-1- معادلة وجدول تحليل التباين: *(ANOVA) Tableaux d'analyse de la variance*

الهدف من هذا الجدول هو الاختبار الكلي أو الإجمالي للنموذج باستخدام اختبار فيشر Fisher، ويعطى بالصيغة التالية:

[1] $$\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

SCT =SCE +SCR

حيث أن:

SCE: مجموع مربعات تفسيرية (Somme des Carrées Expliqués)

SCR: مجموع مربعات البواقي (Somme des Carrées Résidus)

SCT: مجموع مربعات الكلي (الإجمالي) (Somme des Carrées Totales)

جدول (2-1): جدول تحليل التباين للإنحدار الخطي البسيط

مصدر التغير **Somme de variance**	درجة الحرية **Degree de liberté**	مجموع المربعات **Somme des carrées**	**Moyenne des carrées**
الانحدار **régression**	k-1 =1	$SCE = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{Y})^2$	$\frac{SCE}{1}$
البواقي **Résidu**	(n-k)=n-2	$SCR = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$	$\frac{SCR}{n-2}$
الكلي **Total**	n-1	$SCT = \sum_{i=1}^{n}(y-\bar{Y})^2$	Fisher

K: عدد معالم النموذج

Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p34.

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p33.

2-6-2- إختبار فيشر (F):

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : SCE = 0 & \text{النموذج غير معنوي} \\ H_1 : SCE \neq 0 & \text{النموذج معنوي} \end{cases}$$

نعلم أن:

$$F^* = \frac{SCE\ /ddl\ SCE}{SCR\ /\ dll\ SCR} = \frac{R2/1}{(1-R2)/n-2}$$ [1]

قاعدة القرار:

إذا كانت قيمة فيشر المحسوبة F^* أكبر من قيمة فيشر الجدولية F عند مستوى ثقة α ودرجة حرية 1 و$n-2$ نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 وبالتالي النموذج معنوي.

$$Si : F^* > F[\alpha, 1, n-2] \qquad \text{رفض } H_0$$

قاعدة:

$$SCT = SCE + SCR$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$ [2]

توضيح:

إنحراف المشاهدات (Y_i) عن خط الانحدار $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$

إنحراف المشاهدات عن وسطها الحسابي $y_i = Y_i - \bar{Y}$

إنحراف القيم المقدرة ($\hat{Y}_i$) عن الوسط الحسابي[3] $\hat{y}_i = \hat{Y}_i - \bar{Y}$

الانحراف غير الموضح بواسطة خط الانحدار +الانحراف الذي يوضحه خط الانحدار =الانحراف الكلي

---

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p35.

[2] Isabelle cardoret, catherine benjamin, franch martin, nadine herrard, steven tanguy, Econométrie appliquée, 2e édition, groupe de boeck, Bruxelles, 2009, p15.

[3] محمد صالح تركي القريشي، مقدمة في الإقتصاد القياسي، الوراق للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى 2004، ص 153.

2-6-3- معيار معامل التحديد R^2 (Coefficient of détermination)

هو مقياس يوضح نسبة التغير في المتغير التابع (Y) الذي سببها التغيير في المتغير المستقل (X_i)، أي نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية، وبالتالي فهو يحسب حسب الصيغة الآتية[1]:

$$\boxed{R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y} - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y - \bar{Y})^2}}$$ [2]

فهو يقيس جودة النموذج وتتراوح قيمته النظرية بين الصفر والواحد $0 \leq R^2 \leq 1$ فاقتراب هذا المعامل من الواحد الصحيح يعني أن النموذج أفضل[3] معناه قدرة X على تفسيرY، والعكس صحيح عند اقتراب النموذج من الصفر معناه عدم قدرة X على تفسيرY.

ويمكن كتابته أيضا بالصيغة التالية:

$$\begin{cases} y = \hat{y} + e \\ SCT = SCE + SCR \end{cases}$$

نقسم المعادلة على مجموع المربعات الكلية:

$$\frac{SCT}{SCT} = \frac{SCE}{SCT} + \frac{SCR}{SCT}$$

فنتحصل على:

$$1 = R^2 + \frac{SCR}{SCT}$$

وبالتالي يمكن أيضًا تعريف R^2 على النحو التالي:

$$\boxed{R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \ {}^{4} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(y - \bar{Y})^2}}$$ [1]

[1] حسين علي بخيث، سحر فتح الله، مرجع سابق، ص 87.

[2] Isabelle cardoret, et all, ibid, p15.

[3] كمال سلطان محمد سالم، الإقتصاد القياسي، مكتبة الوفاء القانونية لدنيا الطباعة والنشر، الإسكندرية، الطبعة الأولى، 2014. ص 90-91.

[4] مها محمد زكي، مرجع سابق، ص 47.

في نموذج الإنحدار الخطي البسيط معامل التحديد مساوي لمعامل الإرتباط بين المتغيرين x و y حسب الصيغة التالية:

$$\boxed{R^2 = r_{x,y}^2 = \frac{\left(\sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{y})\right)^2}{\sum (x_i - \bar{X})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$ [2]

2-7- التنبؤ:

بعد تقييم نموذج الانحدار والتأكد من إستيفائه للفرضيات والمعايير الإحصائية، يصبح بالإمكان استخدامه لأغراض التنبؤ، وذلك بإيجاد قيم المتغير التابع y بتغيير قيم المتغير المستقل x .[3]

- لنأخذ نموذجنا البسيط، ولنفرض أننا نعرف القيمة المستقبلية ل x في فترة التنبؤ ونرمز لها بالرمز x_{n+h}، فإذا إفترضنا أن البناء الهيكلي لا يتغير في المستقبل، تكون قيمة المتغير التابع y في هذه الفترة $n+h$ كما يلي:

$$y_{n+h} = a_0 + a_1 x_{n+h} + \varepsilon_{n+h}$$

حيث n: حجم العينة.

و h_{n+h} : يعبر عن التنبؤ النظري و h يسمى بأفق التنبؤ.

التنبؤ المحسوب ل n من أجل :

$$\boxed{\hat{y}_{n+h} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{n+h}}$$

تباين الخطأ للتنبؤ المحسوب ل n من أجل :

$$\boxed{\hat{\sigma}_{e_{n+h}}^2 = \hat{\sigma}_e^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+h} - \bar{X})^2}{\sum (x_i - \bar{X})^2} + 1 \right)}$$

مجال الثقة للتنبؤ:

$$\boxed{y_{n+h} = \hat{y}_{n+h} \pm \hat{\sigma}_{e_{n+h}} \, t_{n-2}^{\alpha/2}}$$ [4]

---

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p34.

[2] Isabelle cardoret, catherine benjamin, franch martin, nadine herrard, steven tanguy, Econométrie appliquée, 2e édition, groupe de boeck, Bruxelles, 2009, p16.

[3] شيخي محمد، طرق الإقتصاد القياسي، مرجع سابق، ص 46-47.

[4] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p39-40.

مثال:

باستخدام نفس المعطيات السابقة:

1- أحسب معامل التحديد R^2

2- من أجل $\mathbf{i = 9}$ و $\mathbf{10 = i}$ وإذا كنا نعرف القيم المقدرة لـ: $X_9 = 34$ و$X_{10} = 39$، أحسب التقديرات وانحرافاتها المعيارية واستنتج مجالات الثقة لهذه التقديرات.

الحل:

1- حساب معامل التحديد $\mathbf{R^2}$:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{1485.67}{1633.04} = 0.91$$

2- التنبؤ المحسوب ل من أجل :

تقديرات $\mathbf{i = 9}$: بحيث $X_9 = 34$

$$\hat{y}_{n+h} = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{n+h}$$

$$\hat{y}_9 = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_9$$

$$= 24.486 + 1.487(34)$$

$$\boxed{\hat{y}_9 = 75{,}27}$$

تقديرات $\mathbf{i = 10}$: بحيث $X_{10} = 39$

$$\hat{y}_{10} = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{10}$$

$$= 24.486 + 1.487(39)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\hat{y}_{10} = 82, 72}}$$

- **حساب تباين خطأ للتنبؤ:**

$$\hat{\sigma}_{e_9}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_9 - \bar{X})^2}{\sum (x_i - \bar{X})^2} + 1 \right)$$

$$= 24.534\left(\frac{1}{8} + \frac{(34-18)^2}{672} + 1\right)$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2_{e_9} = \mathbf{36.94}}$$

$$\hat{\sigma}^2_{e_{10}} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_{10}-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} + 1\right)$$

$$= 24.534\left(\frac{1}{8} + \frac{(39-18)^2}{672} + 1\right)$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2_{e_{10}} = \mathbf{43,701}}$$

مجال الثقة للتنبؤ:

$$y_9 = \hat{y}_9 {}^{+}_{-} \hat{\sigma}^2_{e_9}\ t^{\alpha/2}_{n-2}$$

$$y_9 = (75{,}27) {}^{+}_{-} (5{,}487)(2{,}447)$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_9} =]\mathbf{60,56}\ ;\ \ \mathbf{89,97}[}$$

$$y_{10} = \hat{y}_{10} {}^{+}_{-} \hat{\sigma}^2_{e_{10}}\ t^{\alpha/2}_{n-2}$$

$$y_{10} = (82{,}72) {}^{+}_{-} (6{,}6106)(2{,}447)$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{10}} =]\mathbf{66,54}\ ;\ \ \mathbf{98,90}[}$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

في عينة من 10 ملاحظات للعلاقة بين إستهلاك الأسرة الأسبوعي و دخل الأسرة الأسبوعي.

260	240	220	200	180	160	140	120	100	80	$\boldsymbol{x}$
150	155	140	120	115	110	95	90	65	70	$\boldsymbol{y}$

العمل المطلوب:

1- حساب معامل الإرتباط الخطي البسيط بين المتغيرين x و y .

2- إختبار فيما إذا كانت قيمة معامل الإرتباط تدل على وجود إرتباط ذي دلالة بين المتغيرين على أساس مستوى معنوية 5٪ .

3- حساب مقدرات معلمات النموذج $\hat{a}_0$ و $\hat{a}_1$.

4- حساب سلسلة البواقي $\boldsymbol{e}$.

5- حساب التباينات التالية:

- تباين الخطأ المقدر.
- تباينات معلمات النموذج المقدرة.

6- إختبر عند مستوى معنوية 5٪ الفرضية العدمية .

7- أعطي مجال الثقة لمعلمات النموذج.

التمرين الثاني:

الجدول التالي يبين كمية الأمطار و مردود الهكتار بالقنطار في 6 مزارع :

كمية الأمطارx	20	24	8	12	16	6
مردود الهكتارy	24	36	12	16	18	10

1-قدر مردود الهكتار إذا كانت كمية الأمطار تساوي 26.

2-إذا كان مردود الهكتار يساوي 30 قنطار، قدر كمية الأمطار المقابلة لذلك.

التمرين الثالث:

لتكن لدينا نتائج تقدير الاقتصاد القياسي كالتالي:

$$y_t = 1.251x_1 - 32.95 + e_t$$

$$\text{n} = 20$$

$$R^2 = 0.23$$

$$\hat{\sigma}_e = 10.66$$

1- من خلال المعلومات المعطاة، يطلب إيجاد الإحصائيات التالية:

- مجموع مربعات البواقي (SCR)، الكلية (SCT)، التفسيرية (SCE)

- القيمة الإحصائية لفيشر النظري (F^*) والانحراف المعياري للمعلمة $\hat{a}_1$ $\left(\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}\right)$

2- معامل المتغيرة x هو معنويا أكبر من الواحد 1 ؟؟؟؟؟

التمرين الرابع:

إذا أعطيت لك المعلومات التالية الخاصة بتطبيق طريقة المربعات الصغرى لإنحدار y على x:

$$\sum(x_i-\bar{x})^2=40; n=5; \bar{y}=8; \bar{X}=4;$$
$$\sum x_i^2=120; \sum y_i^2=444; \sum x_iy_i=230$$

1- أوجد المقدرات الخاصة بالنموذج.

2- أحسب مجموع المربعات الكلية SCT، المربعات المفسرة SCE و مربعات البواقي SCR.

التمرين الخامس:

لتكن لدينا نتائج تقدير الاقتصاد القياسي كالتالي:

$$y_t=-11.57+\ 0.58x_1+e_t$$

$n=12$

$R^2=0.38$

$\hat{\sigma}_\varepsilon=3.753531$

3- من خلال المعلومات المعطاة، يطلب إيجاد الإحصائيات التالية:

- مجموع مربعات البواقي (SCR)، الكلية (SCT)، التفسيرية (SCE)
- القيمة الإحصائية لفيشر النظري (F^*) والانحراف المعياري للمعلمة $\hat{a}_1$ $\left(\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}\right)$

4- حساب مجال الثقة للمعلمة a_1، هل a_1 معنوية ؟ (مع التعليق وبدون حساب)

5- معامل المتغيرة x هو معنويا أكبر من 0.5 ؟؟؟؟؟

6- من أجل $i=13$ وإذا كنا نعرف القيم المقدرة لـ: $X_{13}=72$، أحسب التقديرات.

حل التمرين الأول:

1- حساب معامل الارتباط البسيط واختبار معنويته مع العلم أن $\alpha=5\%$

معامل الارتباط البسيط يحسب وفق الصيغة التالية:

$$r_{x,y} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

ولتطبيق المعادلة السابقة يتم إجراء الحسابات المبينة في الجدول الموالي:

x	y	yx .	x^2	y^2
80	70	5600	6400	4900
100	65	6500	10000	4225
120	90	10800	14400	8100
140	95	13300	19600	9025
160	110	17600	25600	12100
180	115	20700	32400	13225
200	120	24000	40000	14400
220	140	30800	48400	19600
240	155	37200	57600	24025
260	150	39000	67600	22500
1700	**1110**	**205500**	**322000**	**132100**

$$\gamma_{x,y} = \frac{10(205500) - (1700)(1110)}{\sqrt{10(322000) - (1700)^2}\sqrt{10(132100) - (1110)^2}}$$

$$\boxed{\gamma_{x,y} = 0.98085}$$

$$\gamma_{x,y} = 0.98085 \ \rightarrow \ \gamma_{x,y}^2 = 0.9621$$

2- إختبار معنوية معامل الارتباط البسيط مع العلم أن α = 5%

- تشكيل الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : r_{x,y} = 0 & \text{(لا يوجد إرتباط)} \\ H_1 : r_{x,y} \neq 0 & \text{(يوجد إرتباط)} \end{cases}$$

- حساب ستودنت الاحصائي:

نعلم أن: $t^* = \frac{\gamma_{x,y} - r_{x,y}}{\sqrt{\frac{1-\gamma_{x,y}^2}{n-2}}} \rightarrow T(n-2)$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{\gamma_{x,y} - 0}{\sqrt{\frac{1-\gamma_{x,y}^2}{n-2}}} \rightarrow T(n-2)$$

$$t^* = \frac{|0.98085|}{\sqrt{\frac{1-0.9621}{10-2}}} \rightarrow T(10-2)$$

وبعد الحساب نجد قيمة ستودنت الاحصائي مساوية ل: 13.96

– حساب ستودنت الجدولي :

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{10-2}^{0.05/2} = t_8^{0.025} = 2.306$$

بالإستعانة بالملحق 1 الخاص بجدول ستودنت نجد أن قيمة ستودنت الجدولية تساوي 2.306.

قاعدة القرار:

بما أن ستودنت الإحصائي أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة **5%** ودرجة حرية 8 نرفض الفرضية الصفرية وبالتالي يوجد إرتباط معنوي و موجب بين المتغيرين x و y.

3– حساب معالم الإنحدار البسيط:

بالنسبة ل $\hat{a}_1$:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{205500 - (10)(170)(111)}{322000 - (10)(170)^2}$$

$$\boxed{\hat{a}_1 = 0.5091}$$

بالنسبة ل $\hat{a}_0$:

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1\bar{X}$$

$$=(111)-(0.5091)(170)$$

$$\boxed{\hat{a}_0 = 24.453}$$

4- حساب سلسلة البواقي:

$e_i = Y - \hat{Y}$	$\hat{Y}_i$	e_i^2	$(x_i - \bar{x})^2$
4.81818	65.18182	23.2227	8100
10.36364-	75.36364	107.3917	4900
4.45455	85.54545	19.8470	2500
0.72727-	95.72727	0.5285	900
4.09091	105.90909	16.7362	100
1.09091-	116.09091	1.1902	100
6.273-	126.27273	39.3505	900
3.54545	136.45	12.5670	2500
8.36364	146.63636	69.9397	4900
6.81818-	156.81816	46.4987	8100
0	**1110**	**337.12**	**33000**

5- حساب التباينات:

5-1- بالنسبة لتباين الخطأ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \frac{337.12}{8} = 42.14$$

5-2- بالنسبة لتباينات معلمات النموذج المقدرة:

-حساب الإنحراف المعياري ل $\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}$:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum(x_i - \bar{X})^2} = \frac{42.14}{33000} = 0.00128$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = 0.036}$$

-حساب الإنحراف المعياري ل $\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}$:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_0} = \hat{\sigma}^2_e \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(x_i - \bar{X})^2}\right)$$

$$= 42.14\left(\frac{1}{10} + \frac{(170)^2}{33000}\right) = 41.1184$$

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} = 6.412}$$

6- إختبار معنوية المعلمات المقدرة ($\hat{\mathbf{a}}_1$، $\hat{\mathbf{a}}_0$):

6-1- إختبار معنوية المعلمة $\boldsymbol{a_1}$:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0 & \text{غير معنوي} \\ H_1 : a_1 \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{|0.5091|}{\sqrt{0.00128}} = \frac{|0.5091|}{0.036} = 14.221$$

$$t^{\alpha/2}_{n-2} = t^{0.05/2}_{10-2} = t^{0.025}_{8} = 2.306$$

قاعدة القرار:

بما أن قيمة ستودنت المحسوبة أكبر من قيمة ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 0.975 ودرجة حرية 8 نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_1 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t^*_{calculer} = 14.221 > t^{\alpha/2}_{n-2} = 2.306 \rightarrow H_0 \text{ رفض}$$

6-2- إختبار معنوية المعلمة$\boldsymbol{a_0}$:

$$\begin{cases} H_0 : a_0 = 0 & \text{غير معنوي} \\ H_1 : a_0 \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_0 - a_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_0 - 0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} = \frac{\hat{a}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}} = \frac{|24.453|}{6.412} = 3.813$$

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{10-2}^{0.05/2} = t_8^{0.025} = 2.306$$

قاعدة القرار:

بما أن قيمة ستودنت المحسوبة أكبر من قيمة ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 0.975 ودرجة حرية 8 نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_0 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t_{calculer}^* = 3.813 > t_{n-2}^{\alpha/2} = 2.306 \rightarrow H_0 \text{ رفض}$$

7- مجال الثقة ل a_1:

$$\frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \pm\, t_{n-2}^{\alpha/2}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} IC_{a_1} : a_1 = \hat{a}_1 \pm t_{n-2}^{\alpha/2}.$$

$$IC_{a_1} : a_1 = 0.5091 \pm (2.306)(14.221)$$

$$IC_{a_1} : a_1 = 0.5091 \pm 0.0824$$

$$\boxed{a_1 \in \,]0.5915 \,; 0.4267[}$$

وبالتالي هناك إحتمال قدرة 95٪ أن تقع المعلمة النظرية a_1 في المجال]0.4267 ; 0.5915[

وبالتالي أثبتنا صحة إختبار الفرضية السابقة.

-مجال الثقة ل a_0:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0} IC_{a_0} : a_0 = \hat{a}_0 \pm t_{n-2}^{\alpha/2}.$$
$$IC_{a_0} : a_0 = 24.453 \pm (2.306)(3.813)$$

$$IC_{a_0} : a_0 = 24.453 \pm 14.787$$

$$\boxed{a_0 =]39.24\ ;\ 9.666[}$$

وبالتالي هناك إحتمال قدرة 95٪ أن تقع المعلمة النظرية a_0 في المجال]9.666 ; 39.24[وبالتالي

أثبتنا صحة إختبار الفرضية السابقة.

حل التمرين الثاني :

1- تقدر مردود الهكتار إذا كانت كمية الأمطار تساوي X=26:

كمية الأمطارx	20	24	8	12	16	6
مردود الهكتارy	24	36	12	16	18	10
xy	480	464	96	192	288	60
x^2	400	576	64	144	256	36

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{86}{6} = 14.33$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{116}{6} = 19.33$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{1980-(6)(14.33)(19.33)}{1476-(6)(14.33)} = 0.13$$

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x} => \hat{a}_0 = 19.33 - (0.13)(14.33) = 17.467$$

المعادلة التقديرية هي: $\hat{y} = 17.467 + 0.13\, x_i$

✓ عند x=26 $\hat{y}$=17.467+0.13(26)

$\hat{y}$= 20.847

2- تقدير كمية الأمطار المقابلة ل 30 قنطار من مردود الهكتار:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x \Rightarrow x = \frac{\hat{y} - \hat{a}_0}{\hat{a}_1} = \frac{30 - 17.467}{0.13} = 96.40$$

حل التمرين الثالث:

1- إيجاد الإحصائيات التالية:

1-1- نعلم أن: $\hat{\sigma}_e^2 = (10.66)^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} = \frac{SCR}{18}$

$$SCR = (10.66)^2(18) \Rightarrow SCR = 2045.44$$

1-2- نعلم أن:

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \Rightarrow SCT = \frac{SCR}{1-R^2} = \frac{2045.44}{1-0.23}$$

$$SCT = 2656.42$$

1-3- لدينا:

$$SCE = SCT - SCR \Rightarrow SCE = 2656.42 - 2045.44$$

SCE=610.98

1-4- لدينا: $F^* = \frac{R2/1}{(1-R2)/n-2} = \frac{0.23}{(1-0.23)/(20-2)} = 5.40$

حساب الانحراف المعياري للمعلمة $\hat{a}_1$ $(\hat{\sigma}_{\hat{a}_1})$:

نعلم أن: $t^* = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}$ وتحت الفرضية الصفرية لدينا: $t^* = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = \frac{1.251}{\sqrt{5.40}} = 0.54$$

2- إختبار ما إذا كان معامل المتغيرة x هو معنويا أكبر من الواحد 1:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 1 \\ H_1 : a_1 > 1 \end{cases}$$

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-2)$$

$$\text{Sous } \mathrm{H}_0 : t^* = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{|1.251-1|}{0.54} = 0.46$$

$$t_{n-2}^{\alpha} = t_{20-2}^{0.05} t_{18}^{0.05} = 1.734$$

قاعدة القرار:

بما أن ستودنت المحسوب أصغر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 0.95 ودرجة حرية 18 نقبل الفرضية الصفرية H_0 معناه أن المعلمة a_1 تساوي الواحد وذلك كالتالي:

$$t_c^* = 0.46 < t_{n-2}^{\alpha} = 1.734 \rightarrow H_0 \text{نقبل}$$

التمرين الرابع:

1- إيجاد المقدرات:

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{X}^2} = \dfrac{230 - (5)(4)(8)}{120 - 5(4)^2} = 1.75 \\ \hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{x} = (8) - (1.75)(4) = 1 \end{cases}$$

2- حساب مجموع المربعات:

$$\mathrm{SCT} = \sum(\hat{y} - \bar{Y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 444 - 5(8)^2 = 124$$

$$SCE = \hat{a}_1^2 \sum (x_i - \bar{x})^2 = (1.75)^2\,(40) = 122.5$$

SCR=SCT-SCE=1.5

التمرين الخامس:

2-1- نعلم أن:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} = \frac{SCR}{18} = (3.753531)^2$$

$$SCR = (3.753531)^2(12\text{–}2) => SCR = 140.889949$$

2-2- نعلم أن:

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} \;=> SCT = \frac{SCR}{1-R^2} \;= \frac{140.889949}{1-0.38}$$

$$SCT = 227.241853$$

2-3- لدينا:

$$SCE = SCT - SCR => SCE = 227.241853 - 140.889949$$

SCE=86.351904

2-4- لدينا:

$$F^* = \frac{R2/1}{(1-R2)/n-2} = \frac{0.38}{(1-0.38)/(12-2)} = 6.129032$$

حساب الانحراف المعياري للمعلمة $\hat{a}_1$ $\left(\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}\right)$:

نعلم أن: $t^* = \frac{\hat{a}_0 - a_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}}$ وتحت الفرضية الصفرية لدينا: $t^* = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = \frac{0.58}{\sqrt{6.129032}} = \frac{0.58}{2.475688} = 0.234278$$

3- حساب مجال الثقة للمعلمة a_1:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} IC_{a_1}: a_1 = \hat{a}_1 \pm t_{n-2}^{\alpha/2}.$$

$$(0.234278) = 0.58 \pm 0.521971 a_1 = 0.58 \pm 2.228$$

$$a_1 \in]0.058029; 1.101971[$$

معناه أن هناك إحتمال قدره 95٪ أن تقع المعلمة النظرية a_1 في هذا المجال، وبالتالي المعلمة a_1 معنوية لأن الصفر لاينتمي لهذا المجال.

4- إختبار ما إذا كان معامل المتغيرة x هو معنويا أكبر من 0.5:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0.5 \\ H_1 : a_1 > 0.5 \end{cases}$$

$$t^* = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-2)$$

Sous H_0 : $t^* = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{|0.58-0.5|}{0.234278} = 0.340744$

$$t_{n-2}^{\alpha} = t_{12-2}^{0.05} t_{10}^{0.05} = 1.812$$

$$t_{cal}^* < t_{n-2}^{\alpha} \rightarrow H_0 \text{نقبل}$$

قاعدة القرار: بما أن ستودنت المحسوب أصغر من ستودنت الجدولي نقبل H_0 والذي يعني أن المعلمة a_1 تساوي 0.5.

5- حساب التقديرات من أجل $\mathbf{i = 13}$:

لدينا: $\hat{y}_{n+h} = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{n+h}$

ومن أجل $i = 13$ تصبح: $\hat{y}_{13} = \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_{13}$

=-11.57+0.58(72)

$$\hat{y}_{13} = 30.20$$

تمارين غير محلولة:

التمرين الأول:

ليكن لدينا النموذج الخطي البسيط:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t$$

وليكن لدينا :

$$\bar{x} = 3, \bar{y} = 5$$

والثنائية $(x = 2\,; y = 2.5)$ يمر عليها النموذج المقدر

العمل المطلوب:

- إيجاد تقدير معاملات النموذج.

التمرين الثاني:

بإفتراض أننا نهتم بدراسة العلاقة بين نقطة الاقتصاد القياسي المتحصل عليها ونقطة الإحصاء وليكن لدينا النموذج المقترح التالي:

$$Y_i = a_0 + a_1 \ x_I + \varepsilon_i$$

- من أجل ذلك أخذنا عينة من 97 طالب (دكر و أنثى) وقدرنا نموذجين الأول لـ 54 طالب ذكر والثاني لـ 43 طالبة.

النتائج المتحصل عليها موضحة بالجدول التالي:

Modèle 1 (pour les garçon)	**Modèle 2(pour les filles)**
$Y_i= 0.81X_{1.i}+3.3 + e_i$ (2.12) $n = 54$ $R^2 = 0.84$ (.) ratio de student	$Y_i= 1.09X_{1.i}+1.5 + e_i$ (3.2) $n = 43$ $R^2 = 0.87$ (.) ratio de student

- ✓ علق على المنهجية المستخدمة
- ✓ هل يوجد علاقة معنوية بين المتغيرين؟
- ✓ من أجل النموذجين اختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 1 \\ H_1 : a_1 \neq 1 \end{cases}$$

إختبر الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \mathrm{a}_1^{\text{garçon}} = \mathrm{a}_1^{\text{filles}} \\ H_1 : \mathrm{a}_1^{\text{garçon}} \neq \mathrm{a}_1^{\text{filles}} \end{cases}$$

الفصل الثالث

الفصل الثالث: تحليل الانحدار الخطي المتعدد

تمارين

تقديم:

في الفصل السابق، قد إفترضنا بأن المتغيرة التابعة تشرح من قبل متغيرة وحيدة وهي المتغيرة المفسرة. لكن، فمن النادر للغاية بالنسبة لظاهرة إقتصادية أن يمكن الحكم عليها من قبل متغير واحدة. النموذج الخطي العام هو تعميم لنموذج الإنحدار البسيط و الذي يحتوي على العديد من المتغيرات المفسرة.[1]

3-1- الصيغة الرياضية لنموذج الإنحدار الخطي المتعدد :

نموذج الإنحدار العام يعطى بالصيغة التالية:

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1,i} + a_2 x_{2,i} + a_3 x_{3,i} + \cdots + a_k x_{k,i} + \varepsilon_i$$

مع: $i = 1,n$

a_0، a_1 ، ...، a_k : هي معالم النموذج.

y_i: هو المتغير التابع.

$x_{1,i}$ ، $x_{2,}$، ...، $x_{k,i}$: هي المتغيرات المفسرة.

ε_i: معيار الخطأ (هذا الخطأ غير معلوم ويبقى مجهول)

3-1-1- الصيغة المصفوفاتية Forme matricielle:

الكتابة السابقة للنموذج هي غير عملية، ومن أجل التخفيف من الكتابة وتسهيل التعبير عن بعض النتائج، فمن العادة إستخدام الرموز المصفوفاتية. عن طريق كتابة النموذج والمراقبة عن طريق الملاحظة، نحصل على:

n مشاهدة تعطينا n معادلة كالآتي:

$$y_1 = a_0 + a_1 x_{1,1} + a_2 x_{2,1} + a_3 x_{3,1} + \cdots + a_k x_{k,1} + \varepsilon_1$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_{1,2} + a_2 x_{2,2} + a_3 x_{3,2} + \cdots + a_k x_{k,2} + \varepsilon_2$$

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p 47.

... ...

... ...

$$y_n = a_0 + a_1 x_{1,n} + a_2 x_{2,n} + a_3 x_{3n} + \cdots + a_k x_{k,n} + \varepsilon_n$$

يمكن كتابة هذا النظام على الشكل المصفوفاتي التالي:

$$Y = Xa + \varepsilon$$

مع:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{2,1} & . & . & x_{k,1} \\ 1 & x_{1,2} & x_{2,2} & . & . & x_{k,2} \\ 1 & x_{1,3} & x_{2,3} & . & . & x_{k,3} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_{1,n} & x_{2,n} & . & . & x_{k,n} \end{pmatrix} ; a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ . \\ . \\ a_k \end{pmatrix} ; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$ [1]

(n,1) (n, k+1) (k+1, 1) (n,1)

حيث :

Y (n*1) : المتغير التابع أو المفسر

A((k+1)*1) : شعاع المعالم

Ɛ(n*1): شعاع الأخطاء

X(n*(k+1)) : مصفوفة المتغيرات المفسرة أو المستقلة

3-1-2- صيغ نموذج الإنحدار المتعدد:

على غرار نموذج الانحدار البسيط يكتب نموذج الانحدار المتعدد بإحدى الصيغ المصفوفاتية التالية:

✓ **النموذج النظري Le modèle théorique** :

يكتب بالصيغة التالية:

[1] Isabelle cardoret, catherine benjamin, franch martin, nadine herrard, steven tanguy, Econométrie appliquée, 2e édition, groupe de boeck, Bruxelles, 2009, p43.

$$Y = Xa + \varepsilon$$

✓ **النموذج المقدر Le models estimé** :

يكتب بالصيغة التالية:

$$Y = X\hat{a} + e$$

✓ **النموذج المعدل Le modèle ajusté** :

يكتب بالصيغة التالية:

$$\hat{Y} = X\hat{a}$$

مع العلم أن : e= Y−Ŷ

3-2- تقدير معاملات الانحدار Estimation de régression de coefficient :

ليكن لدينا نموذج الانحدار المعطى بالشكل المصفوفاتي لـ k متغير مستقل و n مشاهدة على النحو التالي:

$$Y = Xa + \varepsilon$$

نريد في هذه الحالة تقدير الشعاع a الذي يتضمن المعاملات من a_0 إلى a_K وذلك باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية $M.C.O$ والتي تبحث عن تقليل مجموع مربعات الأخطاء على النحو التالي:

$$min\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2 = min\varepsilon'\varepsilon = \min(Y - Xa)'\,(Y - Xa) = minS$$

مع ε' : مقلوب الشعاع ε.

من أجل تدنية هذه العلاقة فيما يتعلق ب a، نقوم بالآتي:

$$S = (Y - Xa)'(Y - Xa) = Y'Y - Y'Xa - a'X'Y + a'X'Xa$$
$$= Y'Y - 2a'X'Y + a'X'Xa$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2X'Y + 2X'X\hat{a} = 0 \rightarrow \boxed{\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y}$$ [1]

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 8e édition, Dunod paris, 2018, p 49.

ملاحظة:

- ✓ هذا الحل محقق إذا كانت المصفوفة $X'X$ قابلة للانعكاس (أي لها محدد خاص بها).
- ✓ في حالة الارتباط التام بين متغيرين مستقلين فإن $X'X$ تصبح مصفوفة شاذة Matrice singulière ومنه تصبح طريقة M.C.O غير صالحة لتقدير معالم النموذج.

➢ أيضا:

$$\hat{a} = (\frac{1}{n}X'X)^{-1}\frac{1}{n}X'Y$$

إذن:

[1]
$$\hat{a} = \left(var(x)\right)^{-1}cov(x,y) = \frac{cov(x,y)}{var(x)}$$

3-3- فرضيات وخواص التقديرات:

3-3-1- الفرضيات الأساسية للنموذج:

نميز هنا نوعان من الفرضيات العشوائية والخاصة الخطأ ε، أما النوع الثاني فيسمى بالفرضيات الهيكلية وهي مرتبطة بالمصفوفة.

➢ **الفرضيات العشوائية: Hypothèse stochastiques**

هي نفس الفرضيات التي يستند عليها النموذج البسيط لكي نحصل على النموذج المقدر:

H_1 : قيم معطاة بدون أخطاء $x_{i,t}$.

H_2 : $E(\varepsilon_t) = 0$ (التوقع الرياضي للأخطاء معدوم).

H_3: $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ (ثبات تباين الأخطاء أي لا يختلف من فترة زمنية لأخرى *(homoscédasticité)*).

H_4: $i \neq j \;/\; \mathrm{cov}(\;_i, \varepsilon_j) = \mathrm{E}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ (خطأ الفترة i لا يرتبط بخطأ الفترة j).

H_5: $\mathrm{Cov}\,(x_{i,t}\,, \varepsilon_t) = 0$ (لا يوجد إرتباط بين المتغير المستقل و الخطأ).

[1] Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, p53.

➢ الفرضيات الهيكلية:**Hypothèses structurelles**

H_6: غياب الإرتباط بين المتغيرات المستقلة بمعنى وجود المصفوفة $(X'X)^{-1}$.

H_7: يجب أن تكون $\frac{(x\dot{x})}{n}$ تؤول إلى مصفوفة منتهية غير شاذة.

H_8: عدد المشاهدات يكون أكبر من عدد المتغيرات المستقلة (n>k+1).[1]

3-3-2- خواص التقديرات:

لدينا:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y = (X'X)^{-1}X'(Xa + \varepsilon)$$

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'(Xa) + X'\varepsilon$$

$$\hat{a} = a + (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

أو:

$$E(\hat{a}) = a + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)$$

حيث:

$$E(\varepsilon) = 0$$

إذن المقدر هو غير متحيز:

$$\boxed{E(\hat{a}) = a}$$

- نحسب الآن مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعاملات الإنحدار $\hat{\Omega}_{\hat{a}}$ (Matrice des Variance et Covariances):

$$\Omega_{\hat{a}} = E\{(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)'\}$$

$$(\hat{a} - a)' = \varepsilon' X(X'X)^{-1} \text{ و } (\hat{a} - a) = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

بما أن $(X'X)^{-1}$ متناظر:

$$(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)' = (X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon' X(X'X)^{-1}$$

أو:

$$\Omega_{\hat{a}} = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p 51.

مع:

مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء $= E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 I$

في الواقع وبعد الفرضيات H_3 و H_4 لدينا: [1]

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & \dots & E(\varepsilon_1\varepsilon_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix} = \sigma_\varepsilon^2 I_n$$

تسمى المصفوفة Ω_ε مصفوفة التباين والتباين المشترك للأخطاء.[2]

➢ **تقدير تباين الأخطاء ومصفوفة التباين –التباين المشترك $\widehat{\Omega}_{\hat{a}}$:**

ليكن:

$$\Omega_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} X'X (X'X)^{-1}$$

$$\boxed{\Omega_{\hat{a}} = \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}}$$

❖ بعد الحساب المصفوفاتي، يبدو أنه يمكننا تقدير وبدون تحيز σ_ε^2:

$$\boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1} = \frac{e'e}{n-k-1}}$$

❖ نستبدل تباين الأخطاء بالتقديرات فنحصل على:

$$\boxed{\widehat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}}$$

[1] Régis Bourbonnais, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p 52

[2] شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي–محاضرات وتطبيقات–، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 59.

- ✓ مادام عدد المشاهدات يؤول إلى $+\infty$، مقدر تباين الخطأ بعد الفرضية H_7 يصبح يؤول إلى الصفر0، التقديرات إذن متقاربة.
- ✓ مقدر المعلمات مؤهل ل BLUE (Best Linear Unbiaised Estimator) لأنه هو أفضل مقدر خطي غير متحيز (بمعنى أنه يوفر أدنى تباين للمقدرات).[1]

مثال: ليكن لدينا المتغير التابع y_t والمتغيرين المستقلين $x_{1,t}$ و $x_{2,t}$ قيمها محددة في الجدول التالي ونريد البحث عن العلاقة:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1,t} + a_2 x_{2,t} + \varepsilon_t$$

الجدول (3–1) يوضح بيانات النموذج

t	y_t	x_1	x_2
1	12	7	48
2	21	9	40
3	24	11	18
4	24	12	28
5	13	7	40
6	17	9	32
7	21	12	31
8	26	14	24
9	31	19	22
10	30	21	25
$\sum$	**219**	**121**	**308**

المطلوب:

1. أكتب النموذج بالصيغة المصفوفاتية مع تحديد كل أبعاد مصفوفة جزئية.
2. قدر معالم النموذج.

الحل:

1. كتابة النموذج بالصيغة المصفوفاتية مع تحديد كل أبعاد مصفوفة جزئية:

$$\begin{cases} y_t = a_0 + a_1 x_{1,t} + a_2 x_{2,t} + \varepsilon_t \\ Y = Xa + \varepsilon \end{cases}$$

[1] Régis Bourbonnais, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p 53.

لدينا:

$$Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 24 \\ . \\ . \\ . \\ 30 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 48 \\ 1 & 9 & 40 \\ 1 & 11 & 18 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 21 & 25 \end{pmatrix} ;\ a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ;\ \varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ . \\ . \\ . \\ \varepsilon_{10} \end{pmatrix}$$

(10,1) (10, 3) (3, 1) (10,1)

2. تقدير معالم النموذج:

نريد البحث عن معالم النموذج (a) :

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

نعلم أن :

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$

نحسب X'، $X'X$ ، $(X'X)^{-1}$ و $X'Y$:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 7 & 9 & 11 & . & . & 21 \\ 48 & 40 & 18 & . & . & 25 \end{pmatrix} \leftarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 48 \\ 1 & 9 & 40 \\ 1 & 11 & 18 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 21 & 25 \end{pmatrix}$$

(3,10) (10,3)

حيث أن: X' هي مقلوب المصفوفة X.

$$y = \begin{pmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 121 & 308 \\ 121 & 1667 & 3449 \\ 308 & 3449 & 10282 \end{pmatrix}$$

نحسب محدد المصفوفة $\boldsymbol{X'X}$ ($\mathbf{det}\ \boldsymbol{X'X}$):

$$\begin{array}{ccccc} 10 & 121 & 308 & 10 & 121 \\ 121 & 1667 & 3449 & 121 & 1667 \\ 308 & 3449 & 10282 & 308 & 3449 \end{array}$$

$$\det X'X = \alpha - \beta$$

$$\det X'X = (10)(1667)(10282) + (121)(3449)(308) + (308)(121)(3449)$$

$$-(121)(121)(10282) + (10)(3449)(3449) + (308)(1667)(308)$$

$$\boxed{\mathbf{det}\boldsymbol{X'X} = \mathbf{842544}}$$

وبالتالي نجد:

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 6.225 & -0.216 & -0.114 \\ -0.216 & 0.0094 & 0.0033 \\ -0.114 & 0.0033 & 0.00242 \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & 1 \\ 7 & 9 & 11 & . & . & 21 \\ 48 & 40 & 18 & . & . & 25 \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ 24 \\ . \\ . \\ . \\ 30 \end{pmatrix}$$

$(3,10)$ $\qquad\qquad$ $(10,1)$

بما أن المصفوفتين قابلتين للجداء إذن:

$$X'Y = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 219 \\ 2904 \\ 6291 \end{pmatrix}$$

نريد البحث عن a:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 6.225 & -0.216 & -0.114 \\ -0.216 & 0.0094 & 0.0033 \\ -0.114 & 0.0033 & 0.00242 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 219 \\ 2904 \\ 6291 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18.87 \\ 0.902 \\ -0.256 \end{pmatrix}$$

3–4– اختبار المعنوية الإحصائية لمعالم الانحدار:

1– نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : a_i = 0 & \text{غير معنوي} \\ H_1 : a_i \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

نعلم أن :

$$t^* = \frac{\hat{a}_i - a_i}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_i}} \text{ [1] } \rightarrow T(n-k-1)$$

تحت الفرضية الصفرية نجد:

$$t^* = \frac{\hat{a}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_i}} \rightarrow T(n-k-1)$$

[1] Régis Bourbonnais, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p 59.

قاعدة القرار:

بما أن ستودنت المحسوب أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة $\alpha/2$ ودرجة حرية $(n-k-1)$ نرفض الفرضية الصفرية H_0 و نقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_i معنوية وتختلف عن الصفر.

وذلك كالتالي:

$$t^*_{calculer}=\frac{\hat{a}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_i}}>t^{\alpha/2}_{n-k-1}\rightarrow H_0 \text{ رفض}$$

ولتحديد فترة الثقة لمعالم الإنحدار نستعين بالصيغة التالية:

$$\frac{\hat{a}_i-a_i}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_i}}=\pm\, t^{\alpha/2}_{n-k-1}$$

إذن: $\hat{\sigma}_{\hat{a}_i} IC_{a_i}: a_i=\hat{a}_i \pm t^{\alpha/2}_{n-k-1}.$

مثال:

3. أحسب البواقي ثم استنتج تقدير تباين الأخطاء
4. قدر مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعاملات ثم إستنتج الإنحرافات المعيارية للمعاملات.
5. اختبر الفرضيات التالية مع $\alpha=5\%$

$$\begin{cases}H_0: a_1=0\\ H_1: a_1\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}H_0: a_2=0\\ H_1: a_2\neq 0\end{cases}$$

الحل:

3. **حساب البواقي** $(\mathbf{e}_t)$:

لدينا:

$$\begin{cases}y_t=18{,}87+0.902x_{1,t}-0.256x_{2,t}+e_t\\ \hat{y}_t=18{,}87+0.902x_{1,t}+-0.256x_{2,t}\end{cases}$$

بعد الحساب نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n}(y-\hat{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=31.469$$

وبالتالي تباين الخطأ $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2$ هو:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^2}{n-k-1}=\frac{31.469}{10-2-1}=4.495$$

4. تقدير مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعاملات $\boldsymbol{\hat{\Omega}_{\hat{a}}}$:

نعلم أن:

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}}=\ \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2(X'X)^{-1}$$

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}}=4.495\begin{pmatrix}6.225 & -0.216 & -0.114\\ -0.216 & 0.0094 & 0.0033\\ -0.114 & 0.0033 & 0.00242\end{pmatrix}$$

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}}=\begin{pmatrix}\mathbf{27.98} & -0.97 & -0.51\\ -0.97 & \mathbf{0.042} & 0.014\\ -0.51 & 0.014 & \mathbf{0.0108}\end{pmatrix}$$

❖ قطر مصفوفة التباين والتباين المشترك $\hat{\Omega}_{\hat{a}}$ مهم فهو يعبر عن تباين المعالم المقدرة ومنه نستنتج ما يلي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2=27.98\quad\rightarrow\quad\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}=5.28$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2=0.042\quad\rightarrow\quad\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}=0.2049$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}^2=0.0108\quad\rightarrow\quad\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}=0.104$$

5. إختبار الفرضيات:

- نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases}H_0: a_1=\ 0 & \text{غير معنوي}\\ H_1: a_1\neq\ 0 & \text{معنوي}\end{cases}$$

نعلم أن:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1 - a_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-k-1)$$

تحت الفرضية الصفرية نجد:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1 - 0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \rightarrow T(n-k-1)$$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{0.902}{0.206} = 4.378 \rightarrow T(10-2-1)$$

- **حساب قيمة ستودنت الجدولية:**

$$t_{n-k-1}^{\alpha/2} = t_{10-2-1}^{0.05/2} = t_7^{0.025} = 2.365$$

قاعدة القرار:

بما أن ستودنت المحسوب أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 95 ودرجة حرية 7 نرفض الفرضية الصفرية H_0 و نقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_1 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$\rightarrow H_0 \text{ رفض } t_{calculer}^* = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = 4.378 > t_{n-k-1}^{\alpha/2} = 2.365$$

- نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : a_2 = 0 & \text{غير معنوي} \\ H_1 : a_2 \neq 0 & \text{معنوي} \end{cases}$$

نعلم أن :

$$t^* = \frac{|\hat{a}_2 - a_2|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}} \rightarrow T(n-k-1)$$

تحت الفرضية الصفرية نجد:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_2 - 0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}} =\to T(n-k-1)$$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_2|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}} = \frac{0.256}{0.104} = 2.46 \to T(10-2-1)$$

- **حساب قيمة ستودنت الجدولية:**

$$t_{n-k-1}^{\alpha/2} = t_{10-2-1}^{0.05/2} = t_7^{0.025} = 2.365$$

قاعدة القرار:

بما أن ستودنت المحسوب أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 95 ودرجة حرية 7 نرفض الفرضية الصفرية H_0 و نقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_2 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t_{calculer}^* = \frac{\hat{a}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_2}} = 2.46 > t_{n-k-1}^{\alpha/2} = 2.365 \to H_0 \text{ رفض}$$

3-5- معادلة وجدول تحليل التباين:

- معادلة تحليل التباين تكتب بالشكل التالي:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_t (y-\bar{Y})^2 = \sum_t \left(\hat{y}-\bar{\hat{y}}\right)^2 + \sum_t e_t^2 \\ SCT = SCE + SCR\end{gathered}}$$

- التغير الكلي (SCT) يساوي التغير التفسيري (SCE) + التغير في البواقي (SCR)
- هذه المعادلة تسمح لنا بإختبار جودة التوفيق للنموذج.[1]

حيث مجموع المربعات التفسيرية هي:

$$^{2}SCE = n\ var(x\hat{a}) = (\hat{a})x'y$$

- جدول تحليل التباين يكتب كالتالي:

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p 54.
[2] Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, p60.

جدول (3-2): جدول تحليل التباين للإنحدار الخطي المتعدد

مصدر التغير **Somme de variation**	مجموع المربعات **Somme des carrées**	درجة الحرية **Degree de liberté**	النسب **Ratio**
الانحدار **Expliquée**	$SCE = \sum_{t=1}^{n} (\hat{y} - \bar{Y})^2$	*p-1*	$\frac{SCE}{p-1}$
البواقي **Résiduelle**	$SCR = \sum_{i=1}^{n} e_t^2$	*n-p*	$\frac{SCR}{n-p}$
الكلي **Total**	$SCT = \sum_{t=1}^{n} (y - \bar{Y})^2$	*n-1*	*Fisher*

$k + 1 = p$: عدد معالم النموذج.

Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, p60.

3-6- إختبار المعنوية الكلية للنموذج:

يمكن إختبار المعنوية الإجمالية للنموذج بإستخدام نسبة التباين المفسر، ويتبع هذا توزيع فيشر F، بدرجات حرية k و n-k-1 ، حيث n عدد المشاهدات و k+1 عدد المعالم المقدرة.[1]

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \text{SCE} = 0 & \text{النموذج غير معنوي} \\ H_1 : \text{SCE} \neq 0 & \text{النموذج معنوي} \end{cases}$$

نعلم أن:

$$\boxed{\text{F} *= \frac{\text{SCE}/p-1}{\text{SCR}/n-p}}\ ^{2} = \frac{\text{R2}/\text{k}}{(1-\text{R2})/\text{n}-\text{k}-1}$$

[1] شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 73.

[2] Philippe casin, ibid, p65.

قاعدة القرار:

إذا كانت قيمة فيشر المحسوبة F^* أكبر من فيمة فيشر الجدولية F عند مستوى ثقة α و درجة حرية k و $n-k-1$ نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 وبالتالي النموذج معنوي، وذلك كالآتي:

$$Si : F^* > F[\alpha , k ,n-k-1] \qquad \text{رفض } H_0$$

3-7- إختبار جودة النموذج:

عندما يكون لدينا أكثر من متغير مستقل في نموذج الانحدار الخطي، ننتقل من معامل التحديد العادي (معامل الارتباط البسيط) إلى معامل التحديد المضاعف وفي الحين أن الأول يقيس العلاقة بين متغير مستقل وآخر تابع، فإن الثاني وبالإضافة إلى نفس الدور فإنه يمكن أن يدرس العلاقة بين المتغير التابع Y وعدة متغيرات مستقلة مرة واحدة، ويسمى **بمعامل التحديد المتعدد R^2**.

3-7-1- معامل التحديد المتعدد R^2:

هو معامل يشير إلى النسبة التي يمكن تفسيرها من التغير الكلي في المتغير التابع Y بدلالة المتغيرات المستقلة المدرجة في المعادلة، ويستعمل كمقياس لجودة التوفيق في نموذج الانحدار المحتوي على k متغير مستقل، ولحسابه يمكن إتباع نفس الطريقة المستعملة في النموذج الخطي البسيط :[1]

$$SCT = SCE + SCR$$

ففي النموذج ذي k متغير مستقل:

$$y_1 = a_0 + a_1x_{1,1} + a_2x_{2,1} + a_3x_{3,1} + \cdots + a_kx_{k,1} + \varepsilon_1 \quad / \, \mathrm{i} = 1, \mathrm{n}$$

يتم حساب R^2 على الشكل:

$$\boxed{R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{\mathrm{SCR}}{\mathrm{SCT}}}$$

ويمكن أيضا إستخدام العلاقات التالية:

[1] شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص ص 67-68.

$$\boxed{R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}-\bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{Y})^2}}$$ [1]

$$R^2 = \frac{\text{variance expliquée}}{\text{variance totale}} = \frac{\text{var}(x\hat{a})}{\text{var y}} = \frac{\frac{1}{n}(x\hat{a})'(x\hat{a})}{\frac{1}{n}\text{ y}'\text{y}} = \frac{(\hat{a})'\text{x}'x\hat{a}}{\text{y}'\text{y}}$$

و بما أن:

$$(X'X)^{-1}x'y = (\frac{1}{n}X'X)^{-1}(\frac{1}{n}x'y)$$

نجد:

$$R^2 = \frac{(\hat{a})'X'X(X'X)^{-1}x'y}{y'y} = \frac{(\hat{a})'\text{x}'y}{\text{y}'\text{y}}$$

حيث:

$$\text{x}'y = n\begin{bmatrix} cov(y,x_1) \\ cov(y,x_2) \end{bmatrix}$$

و: $$\text{y}'\text{y} = \text{n var(y)}$$ [2]

أما إذا كان النموذج لا يحتوي على الثابت فإن R^2 يكتب بدون تركيز المتغيرات:

$$\boxed{R^2 = \frac{\hat{y}'\hat{y}}{\text{y}'\text{y}} = 1 - \frac{\text{e}'\text{e}}{\text{y}'\text{y}}}$$

وتتراوح قيمة R^2 بين 0 (عندما لا تفسر معادلة الانحدار أيا من التغير في y) و 1 (عندما تقع كل النقاط على خط الانحدار).

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p 54.
[2] Philippe casin, ibid, p59.

❖ إن الصعوبات في استعمال R^2 كمقياس لجودة التوفيق راجعة لأن هذا المعامل يعتمد على التغيرات الحاصلة في y (المشروحة والغير مشروحة)، وبالتالي فإنه لا يأخذ بعين الاعتبار عدد درجات الحرية في أي مشكل إحصائي. ولهذا الغرض يستعمل معامل آخر يسمى **معامل التحديد المصحح** $\bar{R}^2$.[1]

3-7-2- معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

يتم إستخدام $\bar{R}^2$ لمقارنة نموذجين أو أكثر من نماذج الإنحدار التي لها نفس المتغير التابع، ولكن تختلف في عدد المتغيرات المستقلة، و عادة ما يكون $\bar{R}^2$ أصغر من R^2 [2] ويحسب وفق الصيغة التالية:

$$\boxed{\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{Y})^2}{n-1}}}$$ [3]

ويحسب كذلك وفق الصيغة التالية:

$$\boxed{\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2)}$$

لدينا $\bar{R}^2 < R^2$ و $\bar{R}^2 \cong R^2$ إذا كان حجم العينة كبير.[4]

حيث: n: عدد المشاهدات

K+1 : عدد المعالم المقدرة.

3-8- التنبؤ:

$$y_{t+h} = \hat{y}_{t+h} \pm \hat{\sigma}^2_{e_{t+h}}\, t^{\alpha/2}_{n-k-1}$$

حيث أن تباين خطأ التنبؤ يحسب وفق المعادلة التالية: معناه تقدير الخطأ في الفترة $(t+h)$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2_{e_{t+h}} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}(1 + x'_{t+h}(X'X)^{-1}x_{t+h})}$$

[1] شيخي محمد، مرجع سابق، 2012، ص 69.

[2] مها محمد زكي، الإقتصاد القياسي بالأمثلة، دار حميثرا للنشر، الطبعة الأولى 2019، مصر العربية- القاهرة، ص 93.

[3] Isabelle cardoret, ibid, p 50.

[4] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p 55.

✓ **مجال الثقة للتنبؤ:**

$$\boxed{y_{t+h} = \hat{y}_{t+h} \pm t_{n-k-1}^{\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(x'_{t+h}(X'X)^{-1}x_{t+h} + 1)}}$$ [1]

مثال: تابع للمثال السابق

6. قم ببناء جدول تحليل التباين.
7. أحسب معامل التحديد ثم استنتج معامل الارتباط المتعدد ومعامل التحديد المصحح.
8. اختبر المعنوية الكلية للنموذج Fisher .
9. أحسب التقدير النقطي وبالمجال للتنبؤ للفترة 11 و 12 إذا علمت أن:

الفترة t	$X_{1,t}$	$X_{2,t}$
11	24	21
12	12	30

الحل:

6. **جدول تحليل التباين (ANOVA):**

- **حساب المجاميع الكلية:**

$$SCT = \sum_{i=1}^{n}(y - \bar{Y})^2 = 376.9$$

$$SCT = SCE + SCR \rightarrow SCE = SCT - SCR$$

$$SCE = 376.9 - 31.469$$

$$\boxed{SCE = 345.431}$$

- **وبالتالي يمكن كتابة جدول تحليل التباين كالاتي:**

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, pp 82-83.

مصدر التغير	درجة الحرية	مجموع المربعات	النسب
الانحدار	K=2	SCE =345.431	172.715
البواقي	n-k-1=7	=31.469$SCR =$	4.495
الكلي	n-1=9	SCT = 376.9	Fisher

7- حساب معامل التحديد 2 :

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{345.431}{376.9}$$

$$\boxed{R^2 = 0.916}$$

- **حساب معامل الارتباط:**

$$\gamma = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.916}$$

$$\boxed{\gamma = 0.957}$$

- **حساب معامل التحديد المصحح:**

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2)$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{9}{7}(1-0.916)$$

$$\boxed{\bar{R}^2 = 0.892}$$

8- إختبار المعنوية الكلية للنموذج:

نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : \text{SCE} = 0 & \text{النموذج غير معنوي} \\ H_1 : \text{SCE} \neq 0 & \text{النموذج معنوي} \end{cases}$$

نعلم أن:

$$F^{*} = \frac{SCE/k}{SCR/n-k-1} = \frac{172.715}{4.495} = 38.42$$

حساب قيمة فيشر الجدولية:

$F\,[\alpha\,,\,k\,,n-k-1] = F\,[5\%\,,\,2\,,7] = 4.74$

قاعدة القرار:

بما أن قيمة فيشر المحسوبة F^{*} أكبر من قيمة فيشر الجدولية F عند مستوى ثقة 95 ٪ و درجة حرية 2 و7 نرفض الفرضية الصفرية H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 وبالتالي النموذج معنوي، وذلك كالآتي:

$Si : F^{*} = 38.42 > F_{tab}\,[\alpha\,,\,k\,,n-k-1] = 4.74 \quad \rightarrow \quad$ رفض H_0

9- حساب التنبؤ للفترتين 11 و12:

لدينا:

$$\hat{y}_t = 18{,}87 + 0.902x_{1,t} + -0.256x_{2,t}$$

و

$$\hat{y}_{n+h} = 18{,}87 + 0.902x_{1,n+h} + -0.256x_{2,n+h}$$

التنبؤ النقطي:

1) الفترة (t=11):

لدينا: $x_{1,t} = 24\ ; x_{2,t} = 21$

و

$$\hat{y}_{11} = 18{,}87 + 0.902x_{1,11} + -0.256x_{2,11}$$

بالتعويض في النموذج المعدل نجد:

$$\hat{y}_{11} = 18{,}87 + 0.902(24) + -0.256(21)$$

$$\boxed{\hat{y}_{11} = 35.142}$$

2) الفترة (t=12):

لدينا: $x_{1,t} = 12 \; ; x_{2,t} = 30$

و $\hat{y}_{12} = 18,87 + 0.902x_{1,12} + -0.256x_{2,12}$

بالتعويض في النموذج المعدل نجد:

$$\hat{y}_{12} = 18,87 + 0.902(12) + -0.256(30)$$

$$\boxed{\hat{y}_{12} = 22.01}$$

التنبؤ بالمجال (مجال الثقة للتنبؤ):

نعلم أن:

$$y_{n+h} = \hat{y}_{n+h} \pm \hat{\sigma}^2_{e_{n+h}} \, t^{\alpha/2}_{n-2}$$

- **الفترة (t=11):**

لدينا:

$$y_{11} = \hat{y}_{11} \pm \hat{\sigma}^2_{e_{11}} \, t^{\alpha/2}_{n-2}$$

نبحث أولا عن تباين خطأ التنبؤ:

$$\hat{\sigma}^2_{e_{n+h}} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}(1 + x'_{n+h}(X'X)^{-1}x_{n+h})$$

وللفترة (t=11) تصبح المعادلة كالآتي:

$$\hat{\sigma}^2_{e_{11}} = \hat{\sigma}^2_{\varepsilon}(1 + x'_{11}(X'X)^{-1}x_{11})$$

$$\hat{\sigma}^2_{e_{11}} = 4.496\left(1 + (1 \quad 24 \quad 21)\begin{pmatrix} 6.225 & -0.216 & -0.114 \\ -0.216 & 0.0094 & 0.0033 \\ -0.114 & 0.0033 & 0.00242 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 24 \\ 21 \end{pmatrix}\right)$$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2_{e_{11}} = 8.416}$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

نستعمل نموذج الانحدار الخطي المتعدد التالي:

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات	فيشر المحسوب
الإنحدار	1504.4			
البواقي			19.6	
المجموع	1680.8			

المطلوب:

1- أكمل الجدول.

2- أحسب معامل التحديد R^2.

3- قدر تباين الخطأ $\hat{\sigma}^2$.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا 3 سلاسل إحصائية y، x_1، x_2، معرفة ل 8 مشاهدات ومعطياتها كالاتي:

$$var(x_1) = \frac{1}{4} \quad ; cov(x_1, x_2) = 0 \quad ; var(x_2) = 1 \quad ;$$

$$var(y) = \frac{37}{4} \quad ; cov(x_2, y) = 2 \quad ; cov(x_1, y) = 1$$

وليكن لدينا النموذج التالي: $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon$

1- قدر المعاملات a_1 ، a_2 بعد التحويل إلى الصيغة الممركزة $\tilde{y} = \tilde{a}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{a}_2 \tilde{x}_2 + \varepsilon$

2- أحسب معامل التحديد R^2 ومجموع مربعات البواقي SCR.

3- أحسب مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعاملات $\hat{a}_1$ ، $\hat{a}_2$ ثم إستنتج الإنحراف المعياري لكل معامل.

حل التمرين الأول:

1- نعلم أن:

$$SCR = SCT - SCE = 1680.8 - 1504.4 = 176.4$$

$$19.6 = \frac{SCR}{n-k-1} = \frac{176.4}{n-2-1} \;=> n = 12$$

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات	فيشر المحسوب
الإنحدار	1504.4	K=2	752.2	38.377
البواقي	176.4	n-k-1=9	19.6	
المجموع	1680.8	n-1=11		

2- حساب معامل التحديد R^2:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{1504.4}{1680.8} = 0.89$$

4- تقدير تباين الخطأ $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-k-1} = \frac{SCR}{n-k-1} = \frac{176.4}{12-2-1} = 19.6$$

التمرين الثاني:

1- باعتبار a_0=0 أي الإعتماد على الطريقة المركزة:

بحيث: $\tilde{y} = y - \bar{y}\,;\;\tilde{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1\,;\;\tilde{x}_2 = x_2 - \bar{x}_2$

ونعلم أن: $\hat{\tilde{a}} = (\tilde{x}'\tilde{x})^{-1}\tilde{x}'^{\tilde{y}}$

$$\hat{\tilde{a}} = \begin{pmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 \\ \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{pmatrix}$$

- ولو ضربنا المصفوفة وقسمناها على n لن يتغير شئ :

$$\hat{\hat{a}} = (n\begin{pmatrix} \sum\frac{x_1^2}{n} & \sum\frac{x_1x_2}{n} \\ \sum\frac{x_1x_2}{n} & \sum\frac{x_2^2}{n} \end{pmatrix})^{-1}n\begin{pmatrix} \sum\frac{x_1y}{n} \\ \sum\frac{x_2y}{n} \end{pmatrix}$$

$$= (n\begin{pmatrix} var(x_1) & cov(x_1,x_2) \\ cov(x_1,x_2) & var(x_2) \end{pmatrix})^{-1}n\begin{pmatrix} cov(x_1,y) \\ cov(x_2,y) \end{pmatrix}$$

$$= (8\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^{-1}8\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 1/\cancel{8}\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cancel{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2- حساب معامل التحديد $\mathbf{R^2}$ ومجموع مربعات البواقي SCR:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\sum(\hat{y}-\bar{Y})^2}{\sum(y-\bar{Y})^2} = \frac{\sum(\hat{y})^2}{n.var(y)} = \frac{\hat{a}'x'y}{n.var(y)}$$

$$R^2 = \frac{(4 \quad 2)8\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{8(37/4)} = 0.86$$

$$R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} => SCR = SCT(1-R^2) = 10.36$$

3- حساب مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعاملات $\hat{a}_1$ ، $\hat{a}_2$:

$$\Omega_{\hat{a}} = \delta_{\varepsilon}^2(x'x)^{-1}$$

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^2 = \frac{SCR}{n-k-1} = \frac{10.36}{8-2-1} = 2$$

$$\Omega_{\hat{a}} = 2(8\begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^2_{\hat{a}_1} = 1 & => \ \hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = 1 \\ \hat{\sigma}^2_{\hat{a}_2} = 1/4 & => \ \hat{\sigma}_{\hat{a}_2} = 1/2 \end{cases}$$

تمارين غير محلولة:

التمرين الأول:

من عينة 190 مشاهدة درسنا العلاقة بين x و y بحيث : $y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i + e_i$

العمل المطلوب:

1- بالاعتماد على المعلومات المستخرجة من البرنامج التطبيقي EVIEWS أحسب القيم المفقودة $(VM9 \leftarrow VM1)$ بحيث: VM:القيم المفقودة (Valeur Manquantes)

Dependent Variable : y
Method : least squares
Simple : 1 190
Included observations : 190

Variable	Cof	Std-Error	t-statistic	Prof
C	-4364.928	VM1	-16.61141	0.000
x	VM2	VM3	VM4	0.00
R. squared	VM5	Mean dependent var		2939.66
S.E of regression	322.8850	SD dependent var		VM6
Sun squared resid	VM7	F-statistic		778.96
		prob		0.000

مع العلم أن:

$$x'x = \begin{pmatrix} VM8 & 7299 \\ VM9 & 282643 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.662286 & -0.017103 \\ -0.017103 & 0.000445 \end{pmatrix}$$

$$x'y = \begin{pmatrix} 558537 \\ 21893955 \end{pmatrix}$$

2- أكتب مصفوفة التباين و التباين المشترك للمعلمات المقدرة $\hat{\Omega}_{\hat{a}}$.

3- إختبر المعنوية الجزئية للمعالم عند مستوى معنوية ($\propto = 5\%$).

4-اكتب جدول ثم إختبر عند مستوى معنوية ($\propto = 5\%$) المعنوية الكلية للنموذج.

التمرين الثاني:

البيانات التالية بخصوص المبيعات (y) و الاشهار(x_1) و الترويج (x_2) نفترض نموذج الانحدار التالي:

$y_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1,i} + \hat{a}_2 x_{2,i} + e_i$، حجم العينة n=15

$$\sum (y - \hat{y})^2 = 830121.333; \sum e_i^2 = 1976.85574$$

$$(x'y) = \begin{pmatrix} 29.135 \\ 62905.821 \\ 2447.914 \end{pmatrix}; (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 37.232 & -0.022 & 1.336 \\ -0.022 & 0.0000127 & -0.000831 \\ 1.336 & -0.000831 & 0.034034 \end{pmatrix}$$

1- قدر معلمات النموذج بإستخدام طريقة المربعات الصغرى.

2- أحسب معامل التحديد المصحح (فسره).

3- إختبر جزئيا معلمات النموذج a_1 و a_2 عند مستوى معنوية 5٪.

4- وضع جدول تحليل النموذج *ANOVA*.

5- إختبر كليا معلمات النموذج عند مستوى معنوية 5٪.

6- عند $x_1 = 2610$ و $_2 = 16$ أوجد مجال التنبؤ للمتغير التابع (درجة الثقة 95٪).

التمرين الثالث:

تبحث لجنة حماية المستهلك عن سياسة تسعير لتخفيض إستهلاك المشروبات الغازية، أجريت دراسة حول إستهلاك المشروبات الغازية بدلالة سعرها x_t والسعر z_t لمنتوج المشروبات العصيرية، هذه الدراسة أجريت خلال فترة 05 سنوات فأعطت النتائج التالية:

$$\bar{y} = 4.06;\ \bar{x} = 30.4; \bar{z} = 16.8;\ \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y - \bar{Y})^2}{n} = 0.0584$$

قبل حساب المصفوفات ، نشير إلى أن البيانات ممركزة حول مركزها.

مع:

$$x'x = \begin{pmatrix} \sum(x_t - \bar{x})^2 & \sum(x_t - \bar{x})(z_t - \bar{z}) \\ \sum(x_t - \bar{x})(z_t - \bar{z}) & \sum(z_t - \bar{z})^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 17.2 & 17.4 \\ 17.4 & 22.8 \end{pmatrix}$$

$$x'y = \begin{pmatrix} \sum(y_t - \bar{y})\,(x_t - \bar{x}) \\ \sum(y_t - \bar{y})(z_t - \bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.22 \\ -2.14 \end{pmatrix}$$

1- قدر معاملات النموذج التالي:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1,t} + a_2 x_{2,t} + \varepsilon_i$$

2- أحسب R^2 ثم إختبر المعنوية الكلية للنموذج.

3- أحسب مقدر تباين الخطأ والإنحراف المعياري ل a_1 و a_2 ، ثم إختبر معنويتهم بالنسبة ل 0.

4- إختبر الفرضيات المتصلة التالية:

$$H_0: \begin{bmatrix} a_1 = -0.1 \\ a_2 = 0 \end{bmatrix}$$

5- علق على النتائج القياسية المتحصل عليها مع تقديمها لرئيس اللجنة.

الفصل الرابع

الفصل الرابع: الارتباط والازدواج الخطي

4-1- الارتباط

4-1-1-شكل الانتشار

4-1-2- قياس معامل الارتباط الخطي البسيط

4-1-3- اختبار معنوية معامل الارتباط الخطي البسيط

4-2- الازدواج الخطي

4-2-1- أسباب وجود مشكلة الازدواج الخطي

4-3-2- الآثار المترتبة على وجود الازدواج الخطي

4-3-3- طرق اكتشاف الازدواج الخطي

4-3-3-1- اختبار*KLEIN*

4-3-3-2- اختبار *Farrar-Glauber*

4–1– الارتباط:

4–1–1– شكل الانتشار:

معامل الارتباط يقيس درجة الارتباط الموجودة بين ظاهرتين على الأقل، ولذلك يميز ما بين الارتباط البسيط والمتعدد وكذلك الخطي والغير خطي.

فإذا افترضنا أنه لدينا متغيرين فقد يكون لهما إحدى الحالات التالية:

- ارتباط موجب.
- ارتباط سالب.
- عدم وجود ارتباط بينهما.

والجدول التالي والأشكال التالية توضح الخطية والارتباطية بين ظاهرتين:

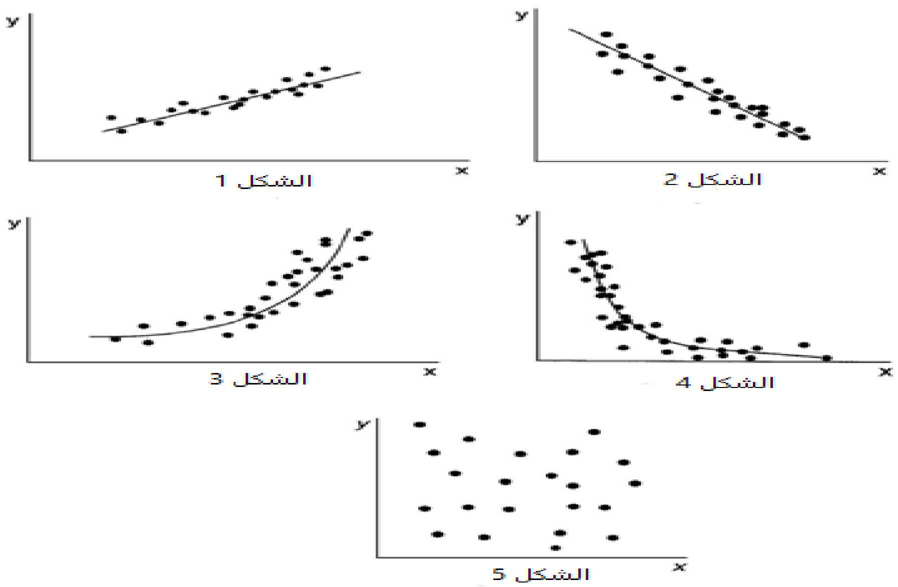
جدول (1–1) يبين الخطية والارتباطية بين ظاهرتين

غياب ارتباط	ارتباط سالب	ارتباط موجب	
شكل 5	شكل 2	شكل 1	العلاقة الخطية
شكل5	شكل 4	شكل 3	العلاقة الغير خطية

Régis Bourbonnais, Econométrie, 10e édition, Dunod, 2018, p 07

والأشكال التالية تبين الخطية والارتباطية بين ظاهرتين:

شكل (1–3): يوضح الخطية والارتباطية بين ظاهرتين



Régis Bourbonnais, Econométrie, 10e édition, Dunod, 2018 , p 07

4-1-2- قياس معامل الارتباط الخطي البسيط:

لكي نحصل على قياس ذي معنى لقوة الاقتران بين متغيرين، فنحن في حاجة إلى معلمة تكون مستقلة القيمة عن وحدات القياس. ويمكن اشتقاق هذه المعلمة بقسمة تغاير x و y على الإنحرافين المعياريين للمتغيرين. وبدقة، فإن قزة العلاقة بين x و y يمكن توضيحها بمعامل الإرتباط $r_{x,y}$:[1]

$$r_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$$ [2]

حيث:

$cov(x,y)$: هو التباين المشترك بين x و y.

σ_x، σ_y : هما الانحرافان المعياريان لكل من x و y.

كما يمكن استخدام العلاقة التالية لقياس معامل الارتباط الخطي البسيط:

$$r_{x,y} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

حيث $\bar{Y}$، $\bar{X}$ هما متوسط كل من Y، X على الترتيب.

ويمكن التعبير عن المعادلة السابقة كما يلي:

$$\boxed{r_{x,y} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}}$$ [3]

حيث أن:

$$-1 \leq r_{x,y} \leq +1$$

[1] المرسي السيد حجازي، عبد القادر محمد عطية، مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات، النشر العلمي والمطابع –جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية الرياض، الطبعة الأولى 2001، ص 54.

[2] عبد القادر محمد عبد القادر عطية، مرجع سبق ذكره، ص 65.

[3] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p8.

وباختصار، فإن معامل الارتباط يوضح كلا من إشارة العلاقة الخطية وقوتها بين متغيرين. والقيم الموجبة والسالبة ل $r_{x,y}$ توضح العلاقات الطردية والعكسية على التوالي، وكلما إقترب $r_{x,y}$ من زائد واحد أو ناقص واحد كامل زادت قوة العلاقة الخطية، أي كلما زادت قوة الإرتباط بين المتغيرين.[1]

4-1-3- اختبار معنوية معامل الارتباط الخطي البسيط:

- تشكيل الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : r_{x,y} = 0 & (\text{لا يوجد إرتباط}) \\ H_1 : r_{x,y} \neq 0 & (\text{يوجد إرتباط}) \end{cases}$$

لدينا:

$$t^* = \frac{\gamma_{x,y} - r_{x,y}}{\sqrt{\frac{1-\gamma_{x,y}^2}{n-2}}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{\gamma_{x,y} - 0}{\sqrt{\frac{1-\gamma_{x,y}^2}{n-2}}} \rightarrow T(n-2)$$

قاعدة القرار:

إذا كان ستودنت المحسوب أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة $\alpha/2$ ودرجة حرية $n-2$ نرفض الفرضية الصفرية وبالتالي يوجد ارتباط معنوي بين المتغيرين x و y وذلك كالتالي:

$$t^*_{calculer} > t^{\alpha/2}_{n-2} \rightarrow on\ regette\ H_0$$

ملاحظة:

إذا كان حجم العينة n>30 فإنه يمكن تقريب قانون ستودنت بالقانون الطبيعي (تقريب القوانين).[2]

[1] المرسي السيد حجازي، عبد القادر محمد عطية، مرجع سابق، ص 57.

[2] Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015, p10.

مثال:

مهندس فلاحي يهتم بدراسة الارتباط بين مردودية الهكتار (x) متغير مستقل وكمية السماد(y)، أخذت عينة موضحة بالجدول الآتي:

جدول (1–2): تطور مردودية الهكتار وكمية السماد

مردودية الهكتار(x)	16	18	23	24	28	29	26	31	32	34
كمية السماد (y)	20	24	28	22	32	28	32	36	41	41

1– أرسم سحابة النقاط وعلق عليها؟

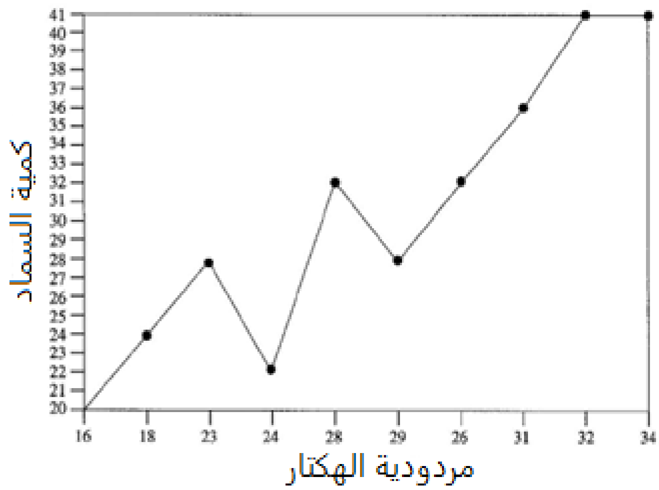
2– أحسب معامل الارتباط البسيط واختبر معنويته مع العلم أن $\alpha = 5\%$

الحل:

1– رسم سحابة النقاط والتعليق على شكل الانتشار:

برسم شكل الانتشار من بيانات الجدول (1–2) يتبين لنا أن سحابة النقاط ذات انتشار خطي موجب وبالتالي هناك ارتباط موجب ما بين المتغيرين X و Y أي هناك ارتباط موجب ما بين مردودية الهكتار وكمية السماد.

شكل (1–4): سحابة نقاط قيم مردودية الهكتار وكمية السماد



Régis Bourbonnais, Econométrie, 10e édition, Dunod, 2018, p 10

2- حساب معامل الارتباط البسيط واختبار معنويته مع العلم أن $\alpha = 5\%$:

2-1- حساب معامل الارتباط الخطي البسيط:

يحسب بالعلاقة التالية:

$$r_{x,y} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

قبل تطبيق العلاقة السابقة يجب إجراء الحسابات المبينة في الجدول (1-3).

$$r_{x,y} = \frac{10(8286) - (261)(304)}{\sqrt{10(7127) - (261)^2}\sqrt{10(9734) - (304)^2}}$$

إذن: $\boxed{r_{x,y} = \frac{3516}{3937.72}}$

وبالتالي:

$$r_{x,y} = 0.89 \rightarrow r_{x,y}^2 = 0.79$$

الجدول (1-3) حساب الارتباط بين مردودية الهكتار وكمية السماد.

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
16	20	256	400	320
18	24	324	576	432
23	28	529	784	644
24	22	576	484	528
28	32	784	1024	896
29	28	841	784	812
26	32	676	1024	832
31	36	961	1296	1116
32	41	1024	1681	1312
34	41	1156	1681	1394
$\sum x_i = 261$	$\sum y_i = 304$	$\sum x_i^2 = 7127$	$\sum y_i^2 = 9734$	$\sum x_i y_i = 8286$

وتشير النتائج السابقة إلى أن الارتباط بين مردودية الهكتار وكمية السماد طردي، وهذا يتفق مع منطق النظرية الاقتصادية. كما يوضح معامل الارتباط أن الارتباط قوي بينهما.

2-2- اختبار معنوية معامل الارتباط البسيط مع العلم أن α = 5%

- تشكيل الفرضيات:

$$\begin{cases} H_0 : r_{x,y} = 0 & \text{(لا يوجد إرتباط)} \\ H_1 : r_{x,y} \neq 0 & \text{(يوجد إرتباط)} \end{cases}$$

- حساب ستودنت الاحصائي:

نعلم أن:

$$t^* = \frac{\gamma_{x,y} - r_{x,y}}{\sqrt{\frac{1 - \gamma_{x,y}^2}{n-2}}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية لدينا:

$$t^* = \frac{\gamma_{x,y} - 0}{\sqrt{\frac{1 - \gamma_{x,y}^2}{n-2}}} \rightarrow T(n-2)$$

وبعد الحساب نجد قيمة ستودنت الاحصائي مساوية ل: 5.49

- حساب ستودنت الجدولي:

بالاستعانة بالملحق 1 الخاص بجدول ستودنت نجد أن قيمة ستودنت الجدولية تساوي 2.306.

قاعدة القرار:

بما أن ستودنت الإحصائي أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة $\alpha/2$ ودرجة حرية $n-2$ نرفض الفرضية الصفرية وبالتالي يوجد ارتباط معنوي وموجب بين المتغيرين x و y.

4-2- الازدواج الخطي:

تعد مشكلة التعدد الخطي إحدى المشكلات القياسية التي تنشأ نتيجة اختلال واحدًا من شروط طريقة المربعات الصغرى الإعتيادية و هو أن لا يكون في نموذج الإنحدار المتعدد إرتباطًا خطيًا تامًا (قويًا) بين إثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة في النموذج المراد تقديره، لذا فإن وجود علاقة خطية بين أحد المتغيرات المستقلة ومتغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة الأخرى يؤدي إلى ظهور مشكلة التعدد الخطي مما يترتب عليه العديد من المشكلات عند تحليل الانحدار[1].

4-2-1- أسباب وجود مشكلة التعدد الخطي:

ينشأ الإرتباط الذاتي من عدة أسباب منها:

- إهمال بعض المتغيرات التفسيرية في النموذج المراد تقديره.
- الصياغة الرياضية الخاطئة للنموذج.
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية.[2]

4-2-2- الآثار المترتبة على وجود الازدواج الخطي:

بتزايد درجة الإرتباط بين المتغيرات المستقلة فإن محدد المصفوفة $(x'x)$ يبدأ بالتناقص وينعكس ذلك على عناصر معكوس المصفوفة $(x'x)^{-1}$، حيث يأخذ قيم مرتفعة مما يؤدي إلى إرتفاع التباين المتحصل عليه من قطر مصفوفة التباين والتباين المشترك $\hat{\Omega}_{\hat{a}}$ والذي يقود بدوره الى زيادة حجم الأخطاء المعيارية فيؤشر بصورة خاطئة إلى عدم معنوية بعض المتغيرات المستقلة في النموذج نتيجة تناقص قيمة t المحسوبة بالمقارنة مع القيم الجدولية. والذي يقود بالباحث إلى خطأ حذف المتغيرات الغير معنوية من النموذج في حين أن السبب في عدم معنويتها هو الإرتباط الذي يجمع بين المتغيرات المستقلة، والذي يؤدي إلى كبر حجم التباين ومن ثم الوصول إلى القياسات غير الدقيقة.[3]

[1] مرجع سابق، ص 367.

[2] شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص97.

[3] حسين علي بخيث، سحر فتح الله، مرجع سابق، ص 236.

4-2-3- طرق اكتشاف الازدواج الخطي:

4-2-3-1- اختبار *KLEIN* :

يتمثل هذا الاختبار في مقارنة معامل التحديد للنموذج R_y^2 مع معامل التحديد ما بين المتغيرات أي يتمثل الإرتباط في تقديم نموذج دو k التالي:

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \cdots + \hat{a}_k x_k + e$$

ثم يتم تقدير معامل التحديد R^2 ومقارنته مع معامل التحديد ما بين المتغيرات r_{xixj}^2 حيث $i \neq j$ ،

إذا كانت $r_{xixj}^2 > R^2$ هناك إحتمال تعدد خطي.[1]

4-2-3-2- اختبار *Farrar–Glauber*:

لاكتشاف ظاهرة التعدد الخطي يتبع *Farrar-Glauber* الخطوات التالية:

الخطوة الأولى يتم حساب محدد مصفوفة معاملات الإرتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{x1x2} & r_{x1x3} & \cdots & r_{x1xk} \\ r_{x2x1} & 1 & r_{x2x3} & \cdots & r_{x2xk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{xkx1} & r_{xkx2} & r_{xkx3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

عندما تكون قيمة المحدد D تقترب من الصفر، فان هناك دليل على وجود التعدد الخطي.

الخطوة الثانية نستخدم إختبار x^2 وذلك بوضع الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : D = 1 & (\text{إستقلال خطي}) \\ H_1 : D < 1 & (\text{إرتباط خطي}) \end{cases}$$

القيمة التجريبية ل ^{2} المحسوب تعرف كما يلي:

$$x^{2*} = -[n - 1 - 1/6(2k^* + 5)]lnD$$

حيث n هو حجم العينة، k : عدد المتغيرات المفسرة في النموذج و ln هو اللوغاريتم النيبري.[2]

---

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, pp 115-116.

[2] شيخي محمد ، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 94.

فاذا كانت قيمة x^{2*} المحسوبة أكبر أو تساوي من القيمة الجدولية x^2 عند درجة حرية $1/2k(k-1)$ ومستوى معنوية $\propto$ نرفض الفرضية الصفرية وبالتالي يوجد مشكل الازدواج الخطي بين السلاسل الزمنية.

وإذاكانت قيمة x^{2*} المحسوبة أصغر تماما من القيمة الجدولية x^2، إذن نقبل فرضية الاستقلال الخطي[1].

مثال:

إذاكانت لدينا مصفوفة الارتباطات R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & 1 & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & 1 \end{bmatrix}$$

وتوفرت لدينا المعلومات التالية:

$$r_{1,2} = 0.8811;\ r_{1,3} = 0.9399;\ r_{2,3} = 0.9866$$

✓ n حجم العينة = 15 ; $k = 4\ ;\ \alpha = 1\%\ ;$

المطلوب: اختبر مشكلة الازدواج الخطي.

الحل:

- اختبار *Farrar-Glauber*:

$$\begin{cases} H_0 : D = 1 & (\text{عدم وجودتعدد خطي}) \\ H_1 : D < 1 & (\text{وجود تعدد خطي}) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0.8811 & 0.9399 \\ 0.8811 & 1 & 0.9866 \\ 0.9399 & 0.9866 & 1 \end{vmatrix} = 0.000969$$

$$x^2 = -[n - 1 - 1/6(2k^* + 5)]lnD$$

$$x^2 = -[15 - 1 - 1/6(2(4) + 5)]ln0.000969$$

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p 116.

$$\boxed{x^2 = 82.126}$$

$$x^2_{tab}\begin{cases} \alpha = 1\% \\ dff = \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}\big(4(4-1)\big) = 6 \end{cases} = 16.8$$

بما أن القيمة الإحصائية أكبر من الجدولية نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة وبالتالي يوجد مشكل الازدواج الخطي بين السلاسل الزمنية.

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

باحث اقتصادي يبحث في تفسير المتغير y بإستخدام ثلاث متغيرات تفسيرية x_1، x_2، x_3، ولاختبار مشكلة الازدواج الخطي تم الحصول على النتائج التالية:

$$\hat{y} \;= 21349.77 + 20.98x_1 - 957.93x_2 - 182.65x_3 + e$$
$$n = 33\,;\; R^2 = 0.97$$

بعد حساب معاملات الإرتباطات البسيطة بين المتغيرات التفسيرية تم التحصل على:

$$r_{x1x2} = 0.971\,; r_{x1x3} = -0.997\,; r_{x2x3} = 0.961\,;\; Det = 0.0003$$

1- اختبر عند مستوى معنوية 5% وجود مشكلة الازدواج الخطي باستعمال اختبار *Klein* واختبار *Farrar-Glauber*.

حل التمرين الأول:

- إختبار *Klein*:

$r^2_{x1x2} = 0.9428 < R^2 = 0.998 =>$ عدم وجود تعدد خطي

$r^2_{x1x3} = 0.9940 > R^2 = 0.998 =>$ وجود تعدد خطي

$r^2_{x2x3} = 0.9235 < R^2 = 0.998 =>$ عدم وجود تعدد خطي

القرار: وجود خطر التداخل الخطي بين x_1 و x_3.

- واختبار *Farrar-Glauber*:

$$\begin{cases} H_0 : D = 1 & (\text{عدم وجودتعدد خطي}) \\ H_1 : D < 1 & (\text{وجود تعدد خطي}) \end{cases}$$

$$x^2 = -[n - 1 - 1/6(2k^* + 5)]lnD$$

$$=242.05 x^2 = -\left[33-1-\frac{1}{6(4+5)}\right] ln0.003$$

$$=12.592 x_{tab}^2 \begin{cases} \alpha = 5 \\ dff = \frac{1}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}\big(4(4-1)\big) = 6 \end{cases}$$

بما أن القيمة الإحصائية أكبر من الجدولية نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة وبالتالي يوجد مشكل الازدواج الخطي بين السلاسل الزمنية.

تمارين غير محلولة:

التمرين الأول:

باحث إقتصادي يبحث في تفسير المتغير y بإستخدام ثلاث متغيرات تفسيرية x_1، x_2، x_3، ولاختبار مشكلة الازدواج الخطي تم الحصول على النتائج التالية:

$$\hat{y} = 21349.77 + 20.98x_1 - 957.93x_2 - 182.65x_3 + e$$

$$n = 33\ ;\ R^2 = 0.97$$

بعد حساب معاملات الإرتباطات البسيطة بين المتغيرات التفسيرية تم التحصل على:

$$r_{x1x2} = 0.971\ ; r_{x1x3} = -0.997\ ; r_{x2x3} = 0.961\ ;\ Det = 0.0003$$

- اختبر عند مستوى معنوية 5% وجود مشكلة الإزدواج الخطي بإستعمال إختبار Klein واختبار Farrar-Glauber.

الفصل الخامس

الفصل الخامس: مشاكل الإنحدار–إختراق فرضيات النموذج–

4-1- عدم ثبات تباين الأخطاء

4-1-1- طبيعة عدم ثبات تباين الأخطاء، أسبابه وآثاره

4-1-2- إختبارات إكتشاف عدم ثبات تباين الأخطاء

4-1-2-1- الطريقة البيانية

4-1-2-2- اختبار *Goldfeld-Quandt*

4-1-2-3- اختبار ارتباط الرتب لسبيرمان

4-1-2-4- اختبار كليجسير

4-1-2-5- إختبار *White*

4-1-3- طرق تصحيح مشكلة عدم ثبات التباين

4-2- الإرتباط الذاتي بين الأخطاء

4-2-1- أسباب وجود الارتباط الذاتي بين الأخطاء

4-2-2- الآثار المترتبة على وجود الإرتباط الذاتي

4-2-3- طرق إكتشاف مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء

4-2-3-1- الطريقة البيانية

4-2-3-2- إختبار *Derbin-Watson*

4-2-3-3- إختبار *Breush*

4-2-4- طرق معالجة الارتباط الذاتي بين الأخطاء

تقديم:

كنا نعتبر فيما سبق أن فرضيات النموذج القياسي محققة حتى نتمكن من القول بأن تقدير المعالم هو من أحسن التقديرات الخطية غير متحيزة BLUE، ولكن في الحقيقة فإن تلك الفرضيات غالبا ما تكون غير محققة في الواقع، ولذلك يجب التحقق من وجودها وفي حالة عدم وجودها كيف يجب التعامل مع النموذج حتى نتحصل على معالم جيدة يمكن الاعتماد عليها، وفي التالي سنتطرق إلى كيفية رفض هذه الفرضيات وفي حالة الرفض كيف يمكن تصحيح النموذج.

5-1- عدم ثبات تباين الأخطاء:

5-1-1- طبيعة عدم ثبات تباين الأخطاء، أسبابه وآثاره:

اذا لم يتوفر شرط طريقة المربعات الصغرى أي تباين حد الخطأ غير ثابت بالنسبة لكل قيم المتغيرات المستقلة، فإننا نواجه مشكلة إختلاف التباين، وهذا ما يؤدي إلى:

- ✓ تقديرات متحيزة و غير كفؤة.
- ✓ إختبارات إحصائية و فترات ثقة خاطئة، أي لا يمكن تطبيق صيغة تباين المعلمات من أجل الوصول إلى إختبار المعنوية.
- ✓ عدم كفاءة التنبؤات.

ويترتب على مشكلة عدم ثبات التباين عددا من الآثار تتمثل في:

- ✓ تبقى المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى متصفة بعدم التحيز والاتساق، ولكنها تفقد صفة الكفاءة.
- ✓ تصبح التباينات المقدرة وكذلك التباينات المشتركة الخاصة بالمعالم المقدرة متحيزة وغير متسقة، ولذا فإن إختبارات الفرضيات لا تصبح دقيقة أو ملائمة.
- ✓ بالرغم من أن التنبؤات القائمة على أساس المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى العادية تظل غير متحيزة، إلا أنها تفقد صفة الكفاءة، وهو ما يعني أنها تكون أقل مصداقية من التنبؤات الأخرى.[1].

[1] شيخي محمد ، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 113.

5-1-2 اختبارات اكتشاف عدم ثبات تباين الأخطاء:

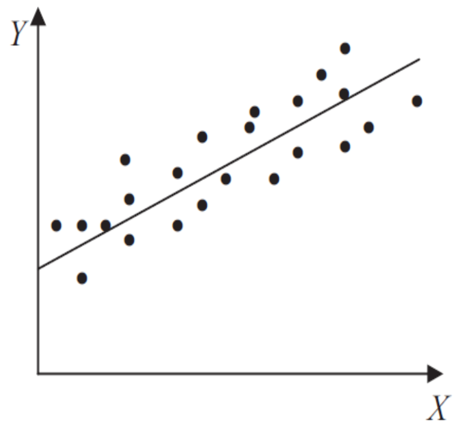
5-1-2-1- الطريقة البيانية:

يتم إجراء انحدار المربعات الصغرى لبيانات العينة و الحصول على الاخطاء العشوائية (البواقي) حيث $e_i = y_i - \hat{Y}$، ثم نحسب قيم مربع الاخطاء e_i^2 وترسم بيانات على إعتبار أن مربعات البواقي e_i^2 ينظر لها كتقدير لمربع حدود الخطأ[1]. و أخيرا إنطلاقا من الرسم البياني للعلاقة بين مربع الاخطاء و المتغيرات المستقلة يمكن إستنتاج فيما إذا كانت هناك ثبات للتباين من عدمه.

من خلال البيان نلاحظ أن الانتشار العشوائي للأخطاء ينحصر حول مدى معين من خط الانحدار.

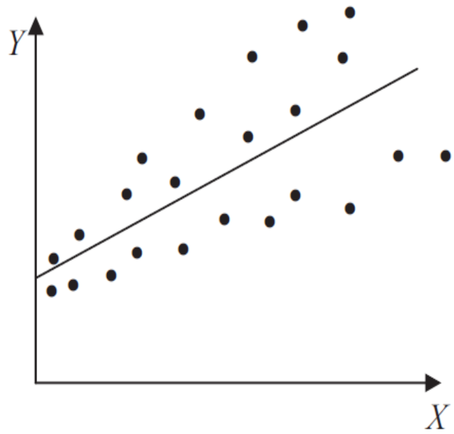
الشكل رقم (2)

ثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



الشكل رقم (3)

عدم ثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار ومكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 112

[1] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، الطبعة الأولى، الإقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق بإستخدام برنامج EVIEWS7، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان الأردن، 2013، ص 277.

5-1-2-2- اختبار ***Goldfeld and Quant***:

يستخدم هذا الاختبار في حالة ما إذا كان سبب عدم ثبات (عدم التجانس) في التباين ناجم عن القيم الصغيرة و الكبيرة للمتغيرات المستقلة، و يتم استخدامه عمومًا لما يكون عدد المشاهدات كبيرة . وذلك من خلال الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: ترتيب البيانات من الأصغر إلى الأكبر تبعًا للمتغير المستقل الذي يمثل مصدر عدم التجانس.

الخطوة الثانية: حذف المشاهدات الوسطى الخاصة بالمتغير المستقل والتابع (يتم الغاء C مشاهدة من المشاهدات الوسطى وعموما C تمثل حوالي 20% من المشاهدات أو 25% (أي الربع)).[1]

الخطوة الثالثة: إجراء انحدارين واحد للقيم الصغرى لـ (x_i) ومن ثم حساب (SCR_1) والآخر للقيم الكبرى لـ (x_i) ومن ثم حساب (SCR_2).

الخطوة الرابعة: يتم اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : SCR_2 = SCR_1 & \text{Homocédasticity لا يوجد مشكلة} \\ H_1 : SCR_2 \neq SCR_1 & \text{Hétérocedasticity يوجد مشكلة} \end{cases}$$

نعلم أن:

$$F^* = \frac{SCR_2/n_2 - k - 1}{SCR_1/n_1 - k - 1}$$

إذا كان:

$$F^* > F[\alpha, n_2 - k - 1, n_1 - k - 1\,]$$

القرار: نرفض H_0 من ثم يمكن القول ان المتغير المستقل x_i الذي تم على أساسه الترتيب هو المسؤول عن عدم تجانس التباين.

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, pp 161-162.

5-1-2-3- اختبار ارتباط الرتب لسبيرمان:

يعد هذا الإختبار من أسهل وأبسط الاختبارات المستخدمة في إكتشاف مشكلة عدم تجانس التباين، ويمكن تطبيقه على العينات الكبيرة والصغيرة[1]، حيث يعتمد هذا الإختبار على القيم المطلقة لحدوث الخطأ (أي إهمال إشارة البواقي) وقيم المتغير المستقل موضوع الدراسة ويعرف كالتالي:

$$R = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$ [2]

حيث:

d_i^2: تمثل الفرق بين رتب المتغير x_i والخطأ e_i.

ويتم إجراء اختبار ارتباط الرتب لسبيرمان بإتباع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: يتم تقدير معادلة انحدار y_i على x_i في ضوء البيانات المتاحة، ثم يتم إيجاد البواقي.

الخطوة الثانية: يتم إهمال إشارة البواقي e_i بأخذ القيمة المطلقة له ($|e_i|$).

الخطوة الثالثة: ترتيب قيم المتغير المستقل x_i وكذلك القيم المطلقة للبواقي تصاعديًا أو تنازليًا.[3]

الخطوة الرابعة: حساب الفروق بين الرتب المتناظرة بين x_i والقيمة المطلقة لـ e_i ثم تربع هذه الفروق لنحصل على مربع فروق الرتب أي (d_i^2) ثم نحسب المجموع ($\sum d_i^2$).

الخطوة الخامسة: حساب قيمة معامل ارتباط الرتب وفق العلاقة السابقة $R = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$.

الخطوة السادسة: اختبار معنوية معامل ارتباط الرتب باستخدام اختبار student أي:

$$\begin{cases} H_0 : R_{|e|,x} = 0 & (\text{لا توجد مشكلة عدم تباين الخطأ}) \\ H_1 : R_{|e|,x} \neq 0 & (\text{توجد مشكلة عدم تباين الخطأ}) \end{cases}$$

حساب t المحسوبة:

$$t_{cal} = \frac{R_{|e|,x}\sqrt{n-k-1}}{\sqrt{1-R_{|e|,x}^2}}$$ [1]

[1] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، الإقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق بإستخدام برنامج EVIEWS7، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، ص 283.

[2] Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, p 89.

[3] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص 284.

ويتم مقارنتها مع t الجدولية:

$$t_{tab} = t_{n-k-1}^{\alpha/2}$$

القرار: إذا كانت t_{cal} أكبر من t_{tab} نرفض H_0 وبالتالي توجد مشكلة عدم ثبات تباين الخطأ.

5-1-2-4- اختبار كليجسير:

يسمح هذا الاختبار من تحديد نوع عدم التجانس لتباين الأخطاء وذلك عن طريق أخذ القيمة المطلقة للأخطاء وتقديرها بدلالة المتغيرة التي نعتقد أنها سبب في وجود هذا الأخير وذلك حسب النماذج التالية:

النموذج الأول: $|e_i| = a_0 + a_1 x_i + \hat{v}_i$

إذا كانت قيمة المعلمة a_1 معنوية فإن عدم التجانس للتباين هو من النوع: $\hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i^2$

وقيمة الدالة هي: $f(x) = x_i^2$

النموذج الثاني: $|e_i| = a_0 + a_1 x_i^{1/2} + \hat{v}_i$

إذا كانت قيمة المعلمة a_1 معنوية فإن عدم التجانس للتباين هو من النوع: $\hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i$

وقيمة الدالة هي: $f(x) = x_i$

النموذج الثالث: $|e_i| = a_0 + a_1 x_i^{-1} + \hat{v}_i$

إذا كانت قيمة المعلمة a_1 معنوية فإن عدم التجانس للتباين هو من النوع: $\hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i^{-2}$

وقيمة الدالة هي: $f(x) = x_i^{-2}$

إذا كانت كل معاملات النموذج مقبولة (معنوية) نختار نوع عدم التجانس الذي لديه أكبر قيمة لـ student، التصحيح يتم بقسمة المعطيات على $\sqrt{x_i}$.[2]

مثال:

قام أحد الباحثين في الاقتصاد القياسي بتقدير نموذج الانحدار البسيط التالي:

$$\hat{y}_i = 24.09 - 4.12 x_i$$

n = 32

SCR =4465,095

[1] Philippe casin, ibid, p89.

[2] صواليلي صدر الدين، مطبوعة محاضرات في الإقتصاد القياسي مدعمة بأمثلة، 2015-2016، ص 92.

من أجل إختبار مشكلة عدم ثبات التباين للنموذج المقدر أعلاه ، قام بتقدير النماذج التالية:

$$1)\left[\begin{array}{l} |e_i| = 270.82 - 1252.4x_i^{-1} + \hat{v}_i \\ \quad (3.27) \quad (2.10) \\ \quad \hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i^{-2} \end{array}\right.$$

$$2)\left[\begin{array}{l} |e_i| = -4.581 + 2.71x_i^{1/2} + \hat{v}_i \\ \quad (1.85) \quad (5.50) \\ \quad \hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i \end{array}\right.$$

$$3)\left[\begin{array}{l} |e_i| = 1.865 + 0.217x_i + \hat{v}_i \\ \quad (1.16) \quad (5.29) \\ \quad \hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i^2 \end{array}\right.$$

المطلوب:

- اختبر عند مستوى معنوية 5% فيما إذا كان النموذج يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين باستخدام اختبار كليجسير.

الحل:

النموذج الأول: نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0 & (\text{لا توجد مشكلة عدم ثبات التباين}) \\ H_1 : a_1 \neq 0 & (\text{توجد مشكلة عدم ثبات التباين}) \end{cases}$$

نعلم أن:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1 - a_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية نجد:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1 - 0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} =\rightarrow T(n-2)$$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = 2.10 \rightarrow T(32-2)$$

- **حساب قيمة ستودنت الجدولية:**

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{32-2}^{0.05/2} = t_{30}^{0.025} = 2.042$$

قاعدة القرار: بما أن ستودنت المحسوب أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 95 ودرجة حرية 30 نرفض الفرضية الصفرية H_0 و نقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_1 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t_{calculer}^{*} = 2.10 > t_{n-2}^{\alpha/2} = 2.042 \rightarrow\ H_0 \text{ رفض}$$

✓ حسب هذا النموذج فإنه يوجد مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء لأن المعلمة a_1 معنوية.

النموذج الثاني: نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0 & \text{المعلمة غير معنوية} \\ H_1 : a_1 \neq 0 & \text{المعلمة معنوية} \end{cases}$$

نعلم أن:

$$t^{*} = \frac{|\hat{a}_1 - a_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow\ T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية نجد:

$$t^{*} = \frac{|\hat{a}_1 - 0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} =\rightarrow\ T(n-2)$$

$$t^{*} = \frac{|\hat{a}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = 5.5 \rightarrow\ T(32-2)$$

- **حساب قيمة ستودنت الجدولية:**

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{32-2}^{0.05/2} = t_{30}^{0.025} = 2.042$$

قاعدة القرار: بما أن ستودنت المحسوب أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 95 ودرجة حرية 30 نرفض الفرضية الصفرية H_0 و نقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_1 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t^*_{calculer} = 5.5 > t_{n-2}^{\alpha/2} = 2.042 \rightarrow \ H_0 \text{ رفض}$$

- ✓ حسب النموذج الثني فإنه يوجد مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء لأن المعلمة a_1 معنوية.

النموذج الثالث: نريد أن نختبر ما يلي:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0 & \text{(لا توجد مشكلة عدم ثبات التباين)} \\ H_1 : a_1 \neq 0 & \text{(توجد مشكلة عدم ثبات التباين)} \end{cases}$$

نعلم أن:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1 - a_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} \rightarrow \ T(n-2)$$

تحت الفرضية الصفرية نجد:

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1 - 0|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} =\rightarrow \ T(n-2)$$

$$t^* = \frac{|\hat{a}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = 5.29 \rightarrow \ T(32-2)$$

- **حساب قيمة ستودنت الجدولية**:

$$t_{n-2}^{\alpha/2} = t_{32-2}^{0.05/2} = t_{30}^{0.025} = 2.042$$

قاعدة القرار: بما أن ستودنت المحسوب أكبر من ستودنت الجدولية عند مستوى ثقة 95 ودرجة حرية 30 نرفض الفرضية الصفرية H_0 و نقبل الفرضية البديلة H_1 معناه أن المعلمة a_1 معنوية وتختلف عن الصفر. وذلك كالتالي:

$$t^{*}_{calculer} = 5.29 > t^{\alpha/2}_{n-2} = 2.042 \rightarrow \ H_0$$ رفض

✓ حسب النموذج الثالث فإنه يوجد مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء لأن المعلمة $_1$ معنوية.

التعليق:

بما أن المعلمة a_1 معنوية في جميع الحالات نأخذ المعادلة التي لها أكبر قيمة إحصائية لـ t وهو النموذج الثاني:

$$|e_i| = -4.581 + 2.71x_i^{\frac{1}{2}} + \hat{v}_i$$

وبالتالي: فإن عدم تجانس التباين هو من النوع $\hat{\sigma}^2 = k^2 x_i$ ، وقيمة الدالة هي $f(x) = x_i$.

ملاحظة:

❖ يلاحظ أن هذا الاختبار مفيد لأنه يعطي معلومات في تحديد نوع العلاقة الضروري في تصحيح حالة عدم ثبات التباين للجزء العشوائي (v_i)، ويعاب عليه في أن المتغير العشوائي (v_i) لا يستوفي فرضيات طريقة المربعات الصغيرة الاعتيادية (MCO).

5-1-2-5- اختبار *White*:

إقترح وايت سنة 1980 اختبارًا يعتمد على اختبار عدم تجانس التباين، وذلك بدون المعرفة الأولية لنوع عدم التجانس أو المتغيرة التي هي سبب في وجوده، أي لا يتطلب معرفة أسباب عدم ثبات التباين، ويتميز هذا الاختبار بأنه لا يعتمد على إفتراض التوزيع الطبيعي إلا أنه يصلح للعينات الكبيرة فقط.

ويتم إستعمال هذا الإختبار من خلال اتباع الخطوات التالية :

الخطوة الأولى: تقدير معادلة الإنحدار بإستخدام طريقة المربعات الصغرى، ثم حساب البواقي ومربعاتها.

الخطوة الثانية: تقدير الإنحدار الوسيط بين مربعات البواقي (e_i^2) والمتغيرات المستقلة x_i ومربعاتها x_i^2 على الشكل التالي:

$$\boxed{e_i^2 = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{b}_1 x_1^2 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{b}_2 x_2^2 + \cdots + \hat{a}_k x_k + \hat{b}_k x_k^2 + v_i}$$ [1]

[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p 163.

الخطوة الثالثة: حساب معامل التحديد R^2 وضربه في حجم العينة n أي حساب مضاعف لاغرانج LM كالآتي:

$$L.M = nR^2 \sim > x^2(\alpha,\rho)$$

$\rho = 2k$: درجة الحرية.

k : عدد المتغيرات المفسرة.

x^2: نرجع إلى جدول "كاي تربيع".

الخطوة الرابعة: اختبار الفرضيات (فرضية عدم ثبات تباين الأخطاء من عدمه) كالتالي:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \cdots = a_k = b_k = 0 & \text{(لا يوجد مشكلة)} \\ H_1 : sinon & \text{(يوجد مشكلة)} \end{cases}$$

تنص الفرضية البديلة H_1 بعدم وجود مشكلة عدم ثبات التباين أي يوجد على الأقل معلمتين مختلفتين وذلك بمقارنة قيمة إحصائية لاغرانج (LM) مع قيمة كاي تربيع (x^2) الجدولية $x^2(\alpha, 2k)$ بحيث تمثل k عدد المتغيرات المستقلة، فإذا كانت قيمة مضاعف لاغرانج المحسوبة (L.M) أكبر من قيمة $x^2_{\alpha,2k}$ فإننا نرفض H_0 وبالتالي نواجه مشكل عدم ثبات تباين الأخطاء[1].

مثال:

باستخدام بيانات المثال السابق ومن أجل اختبار مشكلة عدم ثبات التباين للنموذج المقدر قام بتقدير النماذج التالية:

$$e_i^2 = -85.48 + 11.48x_{1.i} - 0.012x_{2.i}^2 + \hat{v}_i$$
$$R^2 = 0.289$$

المطلوب: إختبار مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء باستخدام اختبار White .

الحل:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = b_1 = 0 & \text{(لا يوجد مشكلة)} \\ H_1 : sinon & \text{(يوجد مشكلة)} \end{cases}$$

[1] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص 295

$$L.M = nR^2 = 9.248$$
$$x^2(5\%, 2k) = 5.99$$
$$L.M > x^2(5\%, 2)$$

القرار: نرفضH_0 ونقبل H_1 وعليه نواجه مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء.

5-1-3- طرق تصحيح مشكلة عدم ثبات التباين:

من أبرز الطرق المستخدمة لتصحيح مشكلة عدم ثبات التباين هي طريقة المربعات الصغرى المرجحة، وتقوم هذه الفكرة على إعطاء القيم ذات الانحراف الأقل على خط الانحدار وزنا أكبر من القيم ذات الانحراف الأكبر في تقدير العلاقة محل الاعتبار. ويتوقف شكل النموذج الأصلي المُحوَّل على نمط عدم ثبات التباين المكتشف في النموذج الأصلي المقدر.[1] وتوجد عدة طرق تعالج مشكلة عدم ثبات التباين ويتوقف إستخدام هذه الطرق فيما كانت هذه التباينات معلومة أو مجهولة القيم.

حالة1: اذا كانت التباينات معلومة :

تعد طريقة المربعات الصغرى المرجحة الموزونة من أبرز الطرق المستخدمة لتصحيح مشكلة عدم ثبات التباين في حالة التباينات المعلومة القيم.

و تعود فكرة هذه الطريقة على إعطاء القيم ذات الإنحراف الأكبر عن خط الإنحدار وزنًا أقل من القيم ذات الإنحراف الأعلى في تقدير العلاقة محل التقدير، مما يؤدي إلى تقليل تأثيرها. فإذا كان النموذج الأصلي هو:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i$$

و كان الوزن المرجح الذي يعبر عن مقلوب الإنحراف المعياري للبواقي هو ω_i حيث $\omega_i = \frac{1}{\sigma_i}$ فان النموذج المعدل أو المرجح الذي يتم تقديره لتلاشي مشكلة عدم ثبات التباين هو:

$$\frac{y_i}{\sigma_i} = \frac{a_0}{\sigma_i} + \frac{a_1 x_i}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \rightarrow y_i^* = a_{0\omega} + a_{1\omega} x_i^* + \varepsilon_i^*$$

حيث:

$$y_i^* = \frac{y_i}{\sigma_i};\ x_i^* = \frac{x_i}{\sigma_i};\ \varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$$

[1] شيخي محمد ، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 116.

ويلاحظ هنا أن الخطأ العشوائي المعدل أي $_i^*$ يحقق الآن فرضي ثبات التباين حيث:

$$var(\varepsilon_i^*) = E(\varepsilon_i^*)^2 = E\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2 = E\,\frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2} = \left(\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2}\right) = 1$$

و للحصول على المربعات الصغرى المرجحة $a_{0\omega}$، $a_{1\omega}$ نتبع نفس خطوات M.C.O ولكن بالمتغيرات الجديدة:

$$\boxed{\begin{cases} \hat{a}_{1\omega} = \dfrac{\sum(x_i^* - \bar{X}^*)(y_i^* - \bar{Y}^*)}{\sum(x_i^* - \bar{X}^*)^2} \\ \hat{a}_{0\omega} = \bar{Y}^* - \hat{a}_{1\omega}\bar{X}^* \end{cases}}$$

حالة2: اذا كانت التباينات مجهولة (غير معلومة):

في الدراسات عادة تكون التباينات مجهولة، فإذا كانت مجهولة فإنه لا يمكن إستخدام طريقة المربعات الصغرى المرجحة، و بدلاً من ذلك فإنه يتم إفتراض نمط عدم ثبات التباين من خلال وضع إفتراضات معينة عن التباين ويتم تحويل نموذج الإنحدار الأصلي بحيث يستوفي فرض ثبات التباين اللازم للحصول على مقدرات تتسم بالكفاءة.

و من ضمن الإفتراضات المستخدمة الفرضيات الآتية:

الافتراض الأول: $\hat{\sigma}_i^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 x_i^2$

ويقضي هذا الفرض ان تباين ε_i الخطأ يتناسب تربيعيا مع قيم التغير المستقل x_i حيث σ^2 ثابتًا، وطبقًا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي بقسمة طرفي المعادلة على x_i كما يلي[1]:

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{a_0}{x_i} + a_1 + \frac{\varepsilon_i}{x_i} \ ^{2} \rightarrow \ y_i^* = a_0 x_i^* + a_1 + \varepsilon_i^*$$

حيث:

$$y_i^* = \frac{y_i}{x_i};\ x_i^* = \frac{1}{x_i};\ \varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{x_i}$$

[1] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص ص 297- 299.

[2] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p164.

ويلاحظ أن المتغير العشوائي الجديد غي النموذج المحول يستوفي فرض ثبات التباين:[1]

$$var(\varepsilon_i^*) = E(\varepsilon_i^*)^2 = E\left(\frac{\varepsilon_i}{x_i}\right)^2 = E\,\frac{\varepsilon_i^2}{x_i^2} = \frac{\sigma^2 x_i^2}{x_i^2} = \sigma^2$$

الافتراض الثاني: $\hat{\sigma}_i^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 x_i$

ويقضي هذا الفرض أن تباين الخطأ ε_i يتناسب خطيًا مع قيم x_i الأصلية و طبقًا لهذا الإفتراض نحول النموذج بقسمة طرفي المعادلة على الجذر التربيعي للمتغير المستقل x أي $\sqrt{x}$ كما يلي:

$$\frac{y_i}{\sqrt{x}} = \frac{a_0}{\sqrt{x}} + a_1\frac{x_i}{\sqrt{x}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x}}\ {}^{2} \rightarrow\ y_i^* = a_0 x_i^{**} + a_1 x_i^* + \varepsilon_i^*$$

حيث:

$$x_i^* = \sqrt{x};\ y_i^* = \frac{y_i}{\sqrt{x}};\ x_i^{**} = \frac{1}{x_i^*};\ \varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{x_i^*}$$

❖ الإثبات الرياضي أن صيغة التباين لا تعاني من مشكلة عدم ثبات التباين[3]:

$$V(E) = E(\varepsilon^2) = \hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i$$

$$E\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x_i}E(\varepsilon^2) = \frac{1}{x_i}\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{\cancel{x_i}}k^2\cancel{x_i} = k^2$$

تمرين:

في ضوء البيانات الإحصائية الآتية التي تبين الإنفاق الإستهلاكي (y) والدخل القابل للتصرف (x) في إقتصاد إحدى الدول للمدة 1983-1994 :

y	x	السنة
77.2	**50.1**	**1989**
86.1	**54.5**	**1990**
94.6	**60.1**	**1991**
102.4	**64.9**	**1992**

y	x	السنة
38.3	**26.1**	**1983**
43.5	**29.3**	**1984**
53.5	**35.6**	**1985**
60.8	**39.4**	**1986**

[1] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص 300.

[2] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p164.

[3] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص 300.

1987	42.7	66.4	1993	69.2	109.9
1988	46.3	71.2	1994	73.1	115.6

المطلوب :

1. إختبار عدم تجانس التباين بإستخدام إختبار Goldfeld Quandt.[1]

الحل:

البيانات الخاصة بالمتغير المستقل (x_i) مرتبة في السؤال من أصغر قيمة إلى أكبر قيمة بالصدفة، تحذف5/1 من المشاهدات، أي(12*5/1 =2.5 مشاهدة) ،حيث تحذف المشاهدتين الخاصتين بعامي 1988و1989 لكي تقسم البيانات الى مجموعتين جزئييتن متساويتين تضم كل منها 5 مشاهدات كالآتي:

المجموعة الجزئية الأولى :

السنة	y	x	y−y=yi	x−x=xi	xi*yi	xi^2	x*y	X^2	$\hat{Y}$	ei	ei^2
1983	26,1	38,3	-8,52	-14,2	120,98	201,64	999,63	1466,89	26,25	-0,15	0,021
1984	29,3	43,5	-5,32	-9	47,88	81	1274,55	1892,25	29,31	-0,01	0,00
1985	35,6	53,5	0,98	1	0,98	1	1904,6	2862,25	35,21	0,39	0,15
1986	39,4	60,8	4,78	8,3	39,67	68,89	2395,52	3696,64	39,51	-0,11	0,01
1987	42,7	66,4	8,08	13,9	112,31	193,21	2835,28	4408,96	42,82	-0,12	0,01
n=5	**173,1**	**262,5**	**0**	**0**	**321,83**	**545,74**	–	–	–	––	**0,20**

$$\bar{Y} = \frac{\sum \boldsymbol{yi}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{173.1}}{\mathbf{5}} = 34.62$$

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{262.5}{5} = 52.5$$

$$SCR_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0,2006491$$

1-تقدير المعلمات:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

[1] حسين علي بخيث، سحر فتح الله، ص 271.

$$= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{321.83}{545.74}$$

$$\boxed{\hat{a}_1 = 0.589713}$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X}$$

=(34.62)-(0.589713)(52.5)

$$\boxed{\hat{a}_0 = 3.660068}$$

إذن المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{y}_i = 3.660068 + 0.589713 x_i$$

المجموعة الجزئية الثانية :

السنة	y	x	y−y=yi	x−x=xi	xi*yi	xi^2	x*y	X^2	Ŷ	ei	ei^2
1990	54,5	86,1	-9,86	-15,62	154,01	243,98	4692,45	7413,21	54,63	-0,13	0,016
1991	60,1	94,6	-4,26	-7,12	30,33	50,69	5685,46	8949,16	59,92	0,18	0,03
1992	64,9	102,4	0,54	0,68	0,37	0,46	6645,76	10485,76	64,78	0,17	0,01
1993	69,2	109,9	4,84	8,18	39,59	66,91	7605,08	12078,01	69,46	-0,3	0,06
1994	73,1	115,6	8,74	13,88	121,31	192,65	8450,36	13363,36	73,01	0,09	0,09
n=5	321,8	508,6	0	0	345,61	554,71	-	-	-	-	0,16

$$\bar{Y} = \frac{\sum \boldsymbol{yi}}{\boldsymbol{n}} = \frac{321.8}{5} = 64.36$$

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{508.6}{5} = 101.72$$

$$SCR_2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 0.1352156$$

1-تقدير المعلمات:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{345{,}614}{545.74}$$

$$\boxed{\hat{a}_1 = \mathbf{0.623055}}$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - \hat{a}_1 \bar{X}$$

=(64.36)-(0.623055)(101.72)

$$\boxed{\hat{a}_0 = 0{,}982771}$$

إذن المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{y}_i = 0.982775 + 0.623055 x_i$$

إختبار الفرضيات:

يتم اختبار الفرضية التالية:

$$\begin{cases} H_0 : SCR_2 = \; SCR_1 & \text{Homocédasticity لا يوجد مشكلة} \\ H_1 : SCR_2 \neq \; SCR_1 & \text{Hétérocedasticity يوجد مشكلة} \end{cases}$$

نعلم أن:

$$F^* = \frac{SCR_2/n_2 - k - 1}{SCR_1/n_1 - k - 1} = \frac{0.13523/(5-2)}{2006488/(5-2)} = \frac{0.13523/(5-2)}{2006488/(5-2)}$$

$$\boxed{F^* = 0.673963}$$

إذا كان:

$$F^* > F[\alpha, n_2 - k - 1, n_1 - k - 1\,] = F[5\%, 3{,}3\,] = 9.28 \rightarrow \; H_0 \text{ رفض}$$

القرار:

بما أن فيشر المحسوب أصغر من فيشر الجدولي إذن نرفض H_0 وبالتالي يوجد مشكلة عدم تجانس التباين من ثم يمكن القول أن المتغير المستقل x_i الذي تم على أساسه الترتيب هو المسؤول عن عدم تجانس التباين.

2–إختبار سبيرمان:

السنة	**y**	**x**	**x−x=xi**	**y−y=yi**	**xi*yi**	**xi^2**	**$\hat{Y}$**	**ei**	**رتبةx**	**رتبةei**	**Di=Xi−ei**	**Di^2**
1983	26,1	38,3	-38,325	-23,175	888,18	1468,81	26,11	-0,01	1	1	0	0
1984	29,3	43,5	-33,125	-19,975	661,67	1097,27	29,26	0,05	2	3	-1	1
1985	35,6	53,5	-23,125	-13,675	316,23	534,77	35,30	0,30	3	7	-4	16
1986	39,4	60,8	-15,825	-9,875	156,27	250,43	39,71	-0,31	4	9	-5	25
1987	42,7	66,4	-10,225	-6,575	67,23	104,55	43,09	-0,39	5	10	-5	25
1988	46,3	71,2	-5,425	-2,975	16,14	29,43	45,99	0,30	6	8	-2	4
1989	50,1	77,2	0,575	0,825	0,47	0,33	49,62	0,48	7	11	-4	16
1990	54,5	86,1	9,475	5,225	49,51	89,77	55,00	-0,50	8	12	-4	16
1991	60,1	94,6	17,975	10,825	194,58	323,10	60,14	-0,038	9	2	7	49
1992	64,9	102,4	25,775	15,625	402,73	664,35	64,85	0,048	10	4	6	36
1993	69,2	109,9	33,275	19,925	663,00	1107,23	69,38	-0,18	11	5	6	36
1994	73,1	115,6	38,975	23,825	928,57	1519,05	72,83	0,27	12	6	6	36
$\sum$	**591,3**	**919,5**	**0**	**0**	**4344,61**	**7189,08**	**591,3**	**0**	**–**	**–**	**–**	**260**

$$\bar{Y} = \frac{\sum yi}{n} = \frac{591.3}{12} = 49{,}275$$

$$\bar{X} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{919.5}{12} = 76{,}625$$

1–تقدير المعلمات:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{4344.608}{7189.083}$$

$$\boxed{\hat{a}_1 = 0{,}604334}$$

$$\hat{a}_0 = \bar{Y} - n\bar{X}$$

=(49.275)-(0,604334)(76.625)

$$\boxed{\hat{a}_0 = 2{,}967902}$$

إذن المعادلة التقديرية هي:

$$\hat{y}_i = 2{,}967902 + 0{,}604334x_i$$

ولحساب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان نستعين بالعلاقة التالية:

$$R = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$R = 1 - \frac{6(260)}{12(12^2-1)}$$

$$R = 1 - \frac{1560}{12(144-1)}$$

$$R = 1 - \frac{1560}{1716}$$

$$R = 1 - 0.9090909$$

$$R = 0.0909091$$

$$\begin{cases} H_0 : R_{|e|,x} = 0 & \text{(لا توجد مشكلة عدم تباين الخطأ)} \\ H_1 : R_{|e|,x} \neq 0 & \text{(توجد مشكلة عدم تباين الخطأ)} \end{cases}$$

حساب t المحسوبة :

$$t_{cal} = \frac{R_{|e|,x}\sqrt{n-k-1}}{\sqrt{1-R_{|e|,x}^2}}$$

$$t = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091\sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(0.0909091)^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091\ (3.1622776)}{\sqrt{1-0.0082644}}$$

$$t = \frac{0.2874798}{0.9958592}$$
$$t = 0.2886751$$

وبمقارنة قيمة t_{cal} المحتسبة البالغة (0.288) مع قيمتها الجدولية $t_{tab} = t_{n-k-1}^{\alpha/2}$ البالغة (2.23) عند مستوى معنوية (5٪) و درجة حرية (10)، يتضح بأن القيمة المحتسبة أقل من القيمة الجدولية و عليه ترفض فرضية العدم H_0 وتقبل الفرضية البديلة H_1 التي تنص على تجانس تباين الخطأ، أي عدم وجود مشكلة عدم ثبات تباين الخطأ.

5-2- الارتباط الذاتي بين الأخطاء:

من بين الافتراضات الكلاسيكية التي وضعناها من قبل لتقدير معالم نموذج الإنحدار هو إستغلال القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية معينة عن القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية سابقة لها أي :

$$cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

وإذا تم إسقاط هذا الإفتراض فإن ذلك يدل على وجود ما يسمى الإرتباط الذاتي حيث أن مصفوفة التباين والتباين المشترك $\hat{\Omega}_{\hat{a}}$ $(E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega_\varepsilon \neq \sigma_\varepsilon^2 I)$ أي لا تحوي على الصفر خارج القطر الأول.[1]

5-2-1- أسباب وجود الارتباط الذاتي بين الأخطاء:

- حذف بعض المتغيرات التفسيرية المستقلة من نموذج الانحدار.
- الخطأ في صياغة الشكل الرياضي للنموذج.
- الخطأ في معالجة البيانات.[2]
- الآثار الممتدة لبيانات السلاسل الزمنية.[3]
- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية.[4]

[1] شيخي محمد، مرجع سابق، ص 97.
[2] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص 309-310.
[3] حسين علي بخيث، سحر فتح الله، مرجع سابق، ص 189.
[4] شيخي محمد، مرجع سابق، ص 97.

5-2-2- الآثار المترتبة على وجود الإرتباط الذاتي:

أما وجوده فيأثر سلبًا على نتائج المربعات الصغرى الإعتيادية من حيث:

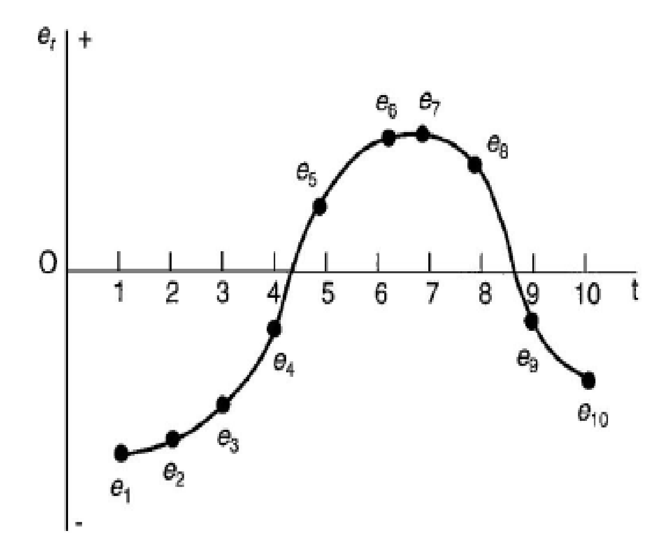
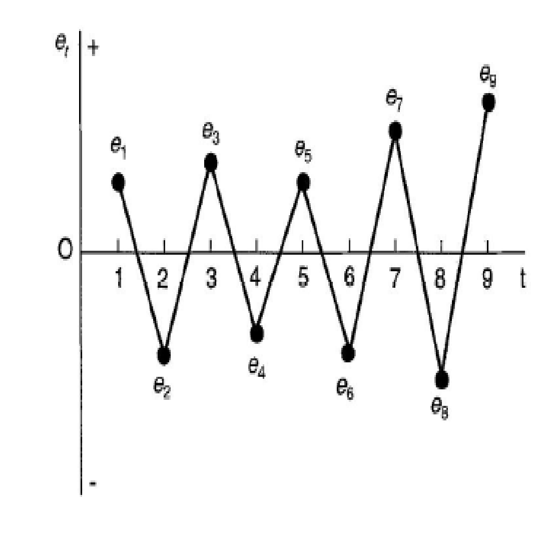
- سوف تكون المقدرات غير متحيزة.
- تباين المقدرات للنموذج سوف لا يكون أقل ما يمكن.

لذلك تستعمل عدة إختبارات للكشف عن هذا الاختلال وهي في الآتي:[1]

5-2-3- طرق اكتشاف مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء:

5-2-3-1- الطريقة البيانية:

يتمثل ذلك في تحليل البواقي بيانيًا حيث إذا كانت البواقي متتابعة (موجبة أو سالبة) لدينا إرتباط موجب بين الأخطاء، أما إذا كانت متناوبة (موجبة و سالبة) لدينا إرتباط سالب، غير أنه عادة ما يصعب التحليل البياني حيث أنه من الصعب تفسير البيان لذلك نستعمل الإختبار لمعرفة إذا كان هناك إرتباط أم لا.[2]

إرتباط موجب بين الأخطاء	إرتباط سالب بين الأخطاء
	

Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p 138.

[1] مرجع نفسه، ص 98.

[2] صواليلي صدر الدين، مرجع سابق، ص 93.

5-2-3-2- اختبار *Derbin-Watson* :

هذا الاختبار يسمح باكتشاف الإرتباط الذاتي من الدرجة الأولى تبعًا للصيغة التالية:

$$e_t = \rho e_{t-1} + v_t \qquad /|\gamma| < 1$$

ولكن يبقى: $v_t \rightarrow N(0, \delta_v^2)$ ولكن e_t لا تحقق الشروط الكلاسيكية.

و لاختبار ذلك نشكل الفرضيات التالية:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 & \text{لا يوجد مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء} \\ H_1 : \rho \neq 0 & \text{يوجد مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء} \end{cases}$$

و من أجل هذا الإختبار نقوم بحساب قيمة إحصائية داربن واطسن " Derbin-Watson " بحيث أن:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$ [1]

حيث: e_t تمثل البواقي في النموذج.

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

لما n تكون كبيرة لدينا :

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 = \sum_{t=2}^{n} e_t^2$$

$$DW = 1 - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} + 1$$

إذا:

$$DW = \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

مع العلم أن:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

---

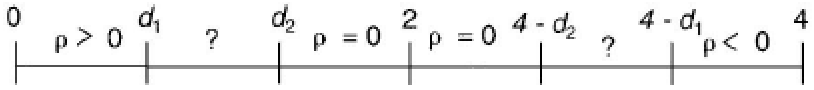
[1] Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p 140.

إذًا:

$$DW = 2(1-\hat{\rho})$$[1]

حيث: $-1 \leq \hat{\rho} \leq 1$

ترجمة إختبار داربن واطسن Derbin–Watson

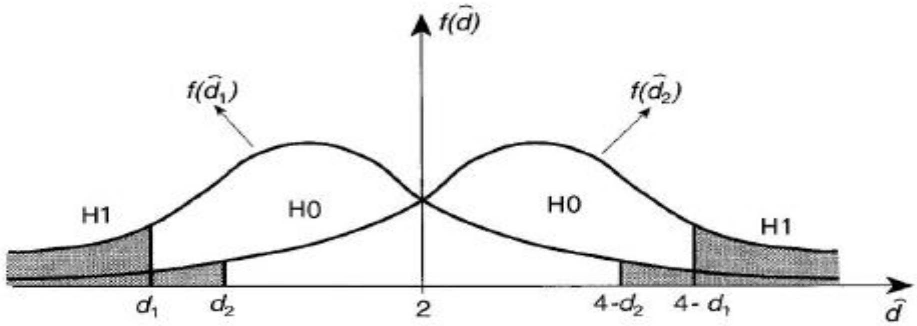


المصدر: Régis Bourbonnais, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p140

حيث d1: تسمى القيمة الصغرى

d2 :تسمى القيمة الكبرى

حيث أن d1 و d2 محصورة بين 0 و 2.[2]



المصدر: Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018, p 141

قاعدة القرار:

- $0 < DW < d_1$ ← نرفض H_0 ← يوجد مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء موجب.

---

[1] Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, p 78.
[2] Bourbonnais Régis, ibid, p 141.

- $4 < DW < 4 - d_1$ ← نرفض H_0 ← يوجد مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء سالب.
- $d_2 < DW < 4 - d_2$ ← نقبل H_0 ← لا يوجد مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء.
- $d_1 < DW < d_2$ أو $4 - d_2 < DW < 4 - d_1$ ← منطقة الشك.[1]

لإختبار *Derbin-Watson* حدود عند إستخدامه يتم ذكرها في الآتي:

- يجب أن يتضمن النموذج الحد الثابت a_0 .
- يجب أن يكون عدد الشاهدات أكبر أو يساوي 15.
- المتغير التابع يجب ألا يظهر في المتغيرات المستقلة كمتغير متباطئ (متأخر زمنيا).
- هذا الاختبار ملائم فقط في حالة الارتباط من الدرجة الأولى.

مثال:

في المثال الوارد في المحور الثاني حللنا العلاقة بين عدد سنوات الخدمة x_i ومعدل الأجر السنوي y_i لعينة تمثل 8 موظفين في أحد الدوائر حيث تم تقدير المعادلة الآتية:

$$\hat{y}_i = 24.486 - 1.487x_i$$

و في الواقع لا يمكن الأخذ بالمعادلة أعلاه بصورة نهائية إلا بعد التأكد من عدم وجود الإرتباط الذاتي و لغرض ذلك نجري الآن إختبار " Derbin-Watson " على العينة موضوع البحث.

e_t	e_{t-1}	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	e_t^2
-4,833	_	_	_	23.361
-3,6809	-4,833	1,1521	1,32733441	13.549
3,071	-3,6809	6,7519	45,8815361	9.4336
5,62	3,071	2.5523	6,497401	31.627
4,776	5,62	-0,8476	0,712336	22.8119
2,428	4,776	-2,3476	5,513104	5.897
-1 ,119	2,428	-3.5476	12,581209	1.2522

[1] Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013, pp 78-80.

-6 ,266	-1,119	-5,147	26,491609	39.2711
$\sum_{t=1}^{n} e_t \ = 0$			**98.750634**	**147,2047**

- حساب إحصائية داربن واطسن:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$DW = \frac{98.75063496}{147.204762}$$

$$DW = +0.670838589$$

- وعليه فإن النموذج أعلاه يعاني من مشكلة الإرتباط الذاتي الموجب لأن قيمة DW المحتسبة أقل من الحد الأدنى والمساوي ل 1.08.

5-2-3-3- إختبار *Breush*:

هذا الاختبار مبني على أساس إختبار Fisher الكلاسيكي لاختبار معنوية المعاملات أو إختبار مضاعف لاغرونج وهو يسمح بإختبار الإرتباط الذاتي من الدرجة ρ بحيث ρ 1< وهو صالح حتى مع ظهور المتغير التابع كمتغير متباطئ ضمن المتغيرات المستقلة.

إن الإرتباط الذاتي بين الأخطاء من الدرجة ρ يكتب بالصيغة التالية :

$$\varepsilon_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \cdots + \rho_\rho e_{t-\rho} + v_t$$

حيث : $v_t \ \rightarrow N(0, \delta_v^2)$

ρ: تمثل رتبة الإرتباط الذاتي.

- وعليه يصبح نموذج الإنحدار العام كالآتي:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1,t} + a_2 x_{2,t} + \cdots + a_k x_{k,t} + \varepsilon_t$$

و بالتعويض ε_t نجد:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1,t} + a_2 x_{2,t} + \cdots + a_k x_{k,t} + \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \cdots + \rho_\rho e_{t-\rho} + v_t$$

وهناك ثلاث خطوات لإجراء إختبار Breush:

1. تقدير معادلة الانحدار بطريقة المربعات الصغرى العادية ثم حساب البواقي e_t.
2. تقدير الإنحدار المساعد و تقديره على النحو التالي:

$$e_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1,t} + \hat{a}_2 x_{2,t} + \cdots + a_k x_{k,t} + \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \cdots + \rho_\rho e_{t-\rho} + v_t$$ [1]

3. يتم حساب معامل التحديد R^2 من الإنحدار المساعد حيث أن $(n-\rho)\ R^2$ يخضع لتوزيع كاي تربيع x^2، حيث:

n: حجم العينة.

p:عدد درجات التأخر الزمني.

4. يتم تحديد الفرضيات كما يلي :

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_\rho = 0$ لا يوجد مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء

$H_1 : sinon$ يوجد مشكلة الإرتباط الذاتي بين الأخطاء

يتم مقارنة قيمة $(n-\rho)\ R^2$ مع القيمة الجدولية في جداول كاي تربيع x^2 عند مستوى معنوية معين، فإذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من الجدولية نرفض فرض العدم H_0 ونقبل الفرض البديل H_1 و الذي يقضي بوجود إرتباط ذاتي.[2]

مثال:

لإجراء اختبار الارتباط الذاتي تم الحصول على النتائج التالية:

$$e_t = -0.07 + 0.014 x_{1,t} + 0.93 e_{t-1} - 0.35 e_{t-2}$$

(5.14) (2.08-)

$$R^2 = 0.6077$$

[1] شيخي محمد ، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 100.

[2] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص 323.

- باستعمال البيانات المتحصل عليها قم بإجراء الاختبار Breush.

الحل:

- حساب إحصائية مضاعف لاغرانج LM:

$$LM = (n-p)R^2 = (30-2)0.6077 = 17.0168$$ [1]

قاعدة القرار: بما أن إحصائية مضاعف لاغرانج أكبر تمامًا من القيمة المجدولة لكاي تربيع عند مستوى معنوية 5 و درجة حرية 2 $(LM = 0.6194 < x^2_{0.05}(2) = 5.99)$ وعليه نرفض H_0 وبالتالي يوجد إرتباط ذاتي بين البواقي.

5-2-4- طرق معالجة الارتباط الذاتي بين الأخطاء:

تتوقف الطريقة التي تعالج فيها مشكلة الارتباط الذاتي عموما على سبب حدوث المشكلة وهي في الآتي:

- ✓ عندما يكون السبب هو إهمال متغير مستقل أو أكثر من النموذج يتعين إضافة ذلك المتغير أو المتغيرات إلى النموذج.
- ✓ عندما يكون سبب المشكل هو الصياغة الغير دقيقة فإن المعالجة تتم من خلال إعادة صياغة النموذج بالشكل المناسب.
- ✓ أما إذا كان سبب المشكلة هو وجود علاقة فعلية بين البواقي فيوجد عدة طرق المتتالية الإرتباط الذاتي من الدرجة الأولى منها طريقة الفرق العام و طريقة الفرق الأول و طريقة المربعات الصغرى العامة[2].

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

مدير وحدة الإنتاج لصناعة السيارات قرر تحديد العلاقة ما بين عدد الوحدات المعابة y_i و وقت المراقبة x_i من خلال النموذج التالي:

$$y_i = a_0 + a_1x_i + \varepsilon_i$$

[1] شيخي محمد ، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012، ص 108.

[2] حسام علي داود، خالد محمد السواعي، مرجع سابق، ص 243.

من أجل هذا قام بأخذ عينة لاختبارها مقدرة بـ 30 سيارة مقسمة إلى 6 مراتب لـ5 أصناف من السيارات وطلب من كل رئيس قسم بقضاء عدد من الساعات المحددة للمراقبة، فكانت نتائج تقدير النموذج الخطي كما يليّ:

$$\hat{y}_i = 24.09 - 4.12x_i + e_i$$

ومن أجل إختبار مشكلة عدم ثبات التباين للنموذج المقدر أعلاه قمنا بتقدير النماذج التالية:

$\|e_i\| = 2.79 + 2.86x_i^{-1} + \hat{v}_i$ (2.30)	$\|e_i\| = 10.7 - 4.15x_i^{1/2} + \hat{v}_i$ (2.60)	$\|e_i\| = 8.09 - 1.46x_i + \hat{v}_i$ (2.55)

1- أعط الصيغة الرياضية للتباين لكل من النماذج الثلاث، ثم اختبر عند مستوى معنوية 5% فيما إذا كان النموذج يعاني من مشكلة عدم ثبات التباين.

2- بناء على نتائج هذا الإختبار أكتب صيغة معادلة الإنحدار المصححة من مشكلة عدم ثبات التباين وأثبت رياضيًا أن صيغة التباين لا تعاني من مشكلة عدم ثبات التباين.

3- إختبر مشكلة عدم ثبات التباين بإستخدام اختبار White مع العلم أن:

$$e_i^2 = 136.02 - 78.58x_i + 11.98x_i^2 + \hat{v}_i$$
$$n = 30\ ;\ R^2 = 0.226\ ;\ F^* = 3.956$$

التمرين الثاني:

قام باحث بتقدير العلاقة بين المتغير (y_i) والمتغير (x_i) وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{y}_i = 6.65 + 2.75x_i$$

مع المعلومات التالية:

$$\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} = 110.29\ ;\ \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 = 185.6775$$

1- إختبر مشكلة الإرتباط الذاتي بين البواقي ثم قدر قيمة معامل الإرتباط.

التمرين الثالث:

نقوم بتقدير النموذج الذي يربط بين الأجر (y_t) و الإنتاجية (x_t) و الأجر السابق (y_{t-1})

$$\hat{y}_t = 8.3091 + 0.1265x_t + 0.7982y_{t-1}$$

$$R^2 = 0.9923\ ;\ \bar{R}^2 = 0.9919\ ; DW = 1.7336\ ; n = 39$$

من أجل إختبار فرضية الإرتباط الذاتي بين البواقي قمنا بتقدير النموذج التالي:

$$e_t = 1.4159 + 0.0246x_t - 0.0391y_{t-1} + 0.1250e_{t-1}$$
$$R^2 = 0.0163$$

1- اختبر هذه الفرضية بإستعمال الإختبار الملائم.

حل التمرين الأول:

1- اختبار Glejser:

الصيغة العامة للنموذج	$\lvert e_i\rvert = a_0 + a_1x_i^{-1} + v_i$	$\lvert e_i\rvert = a_0 + a_1x_i^{1/2} + v_i$	$\lvert e_i\rvert = a_0 + a_1x_i + v_i$
الصيغة الرياضية للتباين	$\hat{\sigma}_i^2 = k^2x_i^{-2}$	$\hat{\sigma}_i^2 = k^2x_i$	$\hat{\sigma}_i^2 = k^2x_i^2$
اختبار الفرضيات	$\begin{cases} H_0 : a_1 = 0 & homoscédasticité \\ H_1 : a_1 \neq 0 & hétéroscédasticité \end{cases}$		
القيمة الإحصائية	$t^*_{a_1} = 2.30$	$t^*_{a_1} = 2.60$	$t^*_{a_1} = 2.55$
القيمة الجدولية	$t_{28}^{\alpha/2} = 2.048$		
القرار	$t^*_{a_1} > t_{28}^{\alpha/2}$ نرفض H_0 و نقبل H_1 إذن توجد مشكلة عدم ثبات التباين.		

التعليق: بما أن المعلمة a_1 معنوية في المعادلات الثلاث، نأخذ النموذج الذي له أكبر قيمة إحصائية لـ ستودنت وهو النموذج التالي: $\lvert e_i\rvert = 10.7 - 4.15x_i^{1/2} + \hat{v}_i$ و الدالة من النوع: $f(x) = x_i$

وبالتالي: فإن عدم تجانس التباين هو من النوع: $\hat{\sigma}_i^2 = k^2x_i$

2- تبعا لنتائج إختبار كلجستر سيتم إستخدام النموذج الثاني وبالتالي سيتم تحويل النموذج بقسمة طرفي المعادلة على الجدر التربيعي للمتغير المستقل كما يلي:

$$\frac{y_i}{\sqrt{x}} = \frac{a_0}{\sqrt{x}} + \frac{a_1x_i}{\sqrt{x}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x}}$$

*** الإثبات الرياضي أن صيغة التباين لا تعاني من مشكلة عدم ثبات التباين:**

$$V(E) = E(\varepsilon^2) = \hat{\sigma}_i^2 = k^2 x_i$$

$$E\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{x_i}E(\varepsilon^2) = \frac{1}{x_i}\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{\cancel{x_i}}k^2\cancel{x_i} = k^2$$

3- اختبار White:

$$\begin{cases} H_0 : a_1 = b_1 = 0 & \text{(لا يوجد مشكلة)} \\ H_1 : sinon & \text{(يوجد مشكلة)} \end{cases}$$

$$L.M = nR^2 = 30 \times 0.226 = 6.78$$

$$x^2(5\%, 2) = 5.99$$

$$L.M > x^2(5\%, 2)$$

القرار: نرفض H_0 ونقبل H_1 وعليه نواجه مشكلة عدم ثبات تباين الأخطاء.

حل التمرين الثاني:

- حساب إحصائية داربن واطسن:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} + \frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$DW = 1 - \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} + 1$$

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 = 185.67775$$

$$DW = 1 - \frac{2(110.29)}{185.67775} + 1$$

$$DW = +0.812026$$

- وعليه فإن النموذج أعلاه يعاني من مشكلة الإرتباط الذاتي لأن قيمة DW تقع في منطقة الرفض.
- حساب قيمة معامل الإرتباط:

DW=2(1-p) => $p = 1 - \left(\frac{dw}{2}\right) = 1 - \left(\frac{0.812026}{2}\right)$ =0.593987

حل التمرين الثالث:

مادام المتغير التابع يوجد كمتغير متباطئ فإن إحصائية Durbin-Watson غير صالحة لإختبار مشكلة الإرتباط الذاتي بين البواقي وبالتالي يتم إستخدام إختبار Breusch-Godfrey.

- **حساب إحصائية مضاعف لاغرانج LM:**

$$LM = (n - p)R^2 = (39 - 1)0.0163 = 0.6194$$

قاعدة القرار: بما أن إحصائية مضاعف لاغرانج إصغر من القيمة المجدولة لكاي تربيع عند مستوى معنوية 5 و درجة حرية 1 $(LM = 0.6194 < x^2{}_{0.05}(1)=3.84)$ وعليه نقبل H_0 وبالتالي لا يوجد إرتباط ذاتي بين البواقي.

تمارين غير محلولة:

التمرين الأول:

البيانات الآتية تبين بواقي المربعات الصغرى لإحدى علاقات النظرية الإقتصادية:

et: 260, 29, 148, -57, -76, -181, 40, -81, -89, 22, 81, 293, -82, -157, -363.

- إختبر مشكلة الإرتباط الذاتي علمًا أن dl=1.08 و du=1.36، ثم أحسب قيمة معامل الإرتباط.

التمرين الثاني:

إذا توفرت البيانات التالية والمتعلقة بالدخل Xi والادخارYi :

الدخل Xi	2262	2574	2834	3900	4810	5460	6500	7020
الادخارYi	270	330	420	510	570	660	900	1050

- إختبار فرض ثبات تباينات الأخطاء باستخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان عند مستوى معنوية 5% مع العلم أن $\hat{a}_1 = 0.146$ و $\hat{a}_0 = -57.454$.

التمرين الثالث:

فيما يلي بيانات عن عدد العمال xt ومتوسط الأجر yi في 30 شركة صناعية.

yi						xi
8.40	8.40	8.60	8.70	8.90	9.00	100
8.90	9.10	9.30	9.30	9.40	9.60	200
9.50	9.80	9.80	9.90	10.30	10.50	300
10.30	10.60	10.60	10.90	11.50	11.70	400
11.60	11.80	12.10	12.50	12.70	13.10	500

المطلوب:

- قم بإجراء انحدار y على العينة ككل.
- حدد فيما إذا كان تباين حد الخطأ ثابتا عند مستوى معنوية 5 باستخدام اختبار ***Goldfeld and Quant***.

التمرين الخامس:

فيما يلي نجد بيانات لعينة عشوائية مكونة من 12 عائلة تتعلق بالمتغيرين x يمثل الدخل والادخار y بألاف الدنانير.

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	التسلسل
39	27.5	26	35	32.5	27.5	28	30	42.5	18	26	30.5	الدخل x
3.4	2.2	2.7	3.2	3	2.6	2.9	2.7	4	1.5	2.2	2.6	الادخار y

- باستخدام إختبار Goldfeld-Quandt إختبر وجود مشكلة عدم تباث التباين مع العلم أن:

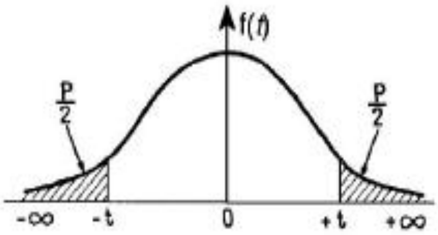
$$\hat{y} = -0.0284 + 0.092x_1$$

الجداول الإحصائية

الجداول الإحصائية:

1. جدول توزيع ستيودنت
2. جدول توزيع فيشر عند درجة حرية
3. جدول توزيع فيشر
4. جدول توزيع كاي تربيع
5. جدول توزيع دربين–واتسون

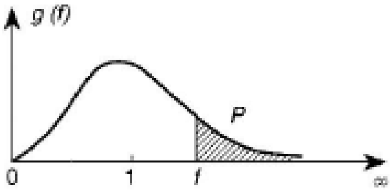
1. جدول توزيع ستيودنت



ν	$P=0,90$	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

ν : عدد درجات الحرية

2. جدول توزيع فيشر عند مستوى معنوية 1٪ و 5٪

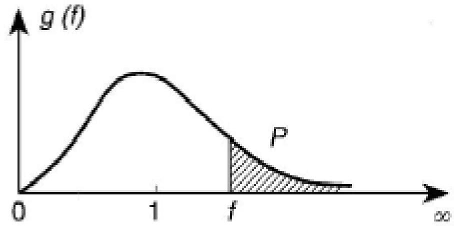


ν_2	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01
1	161,4	4052	199,5	4999	215,7	5403	224,6	5625	230,2	5764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

v_1 : عدد درجات الحرية الخاصة بالبسط

v_2 : عدد درجات الحرية الخاصة بالمقام

3. جدول توزيع فيشر عند مستوى معنوية 1٪ و 5٪ (يتبع)



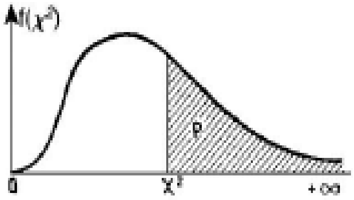
v_2	$v_1 = 6$		$v_1 = 8$		$v_1 = 12$		$v_1 = 24$		$v_1 = \infty$	
	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$
1	234,0	5859	238,9	5981	243,9	6106	249,0	6234	254,3	6366
2	19,33	99,33	19,37	99,36	19,41	99,42	19,45	99,46	19,50	99,50
3	8,94	27,91	8,84	27,49	8,74	27,05	8,64	26,60	8,53	26,12
4	6,16	15,21	6,04	14,80	5,91	14,37	5,77	13,93	5,63	13,46
5	4,95	10,67	4,82	10,27	4,68	9,89	4,53	9,47	4,36	9,02
6	4,28	8,47	4,15	8,10	4,00	7,72	3,84	7,31	3,67	6,88
7	3,87	7,19	3,73	6,84	3,57	6,47	3,41	6,07	3,23	5,65
8	3,58	6,37	3,44	6,03	3,28	5,67	3,12	5,28	2,93	4,86
9	3,37	5,80	3,23	5,47	3,07	5,11	2,90	4,73	2,71	4,31
10	3,22	5,39	3,07	5,06	2,91	4,71	2,74	4,33	2,54	3,91
11	3,09	5,07	2,95	4,74	2,79	4,40	2,61	4,02	2,40	3,60
12	3,00	4,82	2,85	4,50	2,69	4,16	2,50	3,78	2,30	3,36
13	2,92	4,62	2,77	4,30	2,60	3,96	2,42	3,59	2,21	3,16
14	2,85	4,46	2,70	4,14	2,53	3,80	2,35	3,43	2,13	3,00
15	2,79	4,32	2,64	4,00	2,48	3,67	2,29	3,29	2,07	2,87
16	2,74	4,20	2,59	3,89	2,42	3,55	2,24	3,18	2,01	2,75
17	2,70	4,10	2,55	3,79	2,38	3,45	2,19	3,08	1,96	2,65
18	2,66	4,01	2,51	3,71	2,34	3,37	2,15	3,00	1,92	2,57
19	2,63	3,94	2,48	3,63	2,31	3,30	2,11	2,92	1,88	2,49
20	2,60	3,87	2,45	3,56	2,28	3,23	2,08	2,86	1,84	2,42
21	2,57	3,81	2,42	3,51	2,25	3,17	2,05	2,80	1,81	2,36
22	2,55	3,76	2,40	3,45	2,23	3,12	2,03	2,75	1,78	2,31
23	2,53	3,71	2,38	3,41	2,20	3,07	2,00	2,70	1,76	2,26
24	2,51	3,67	2,36	3,36	2,18	3,03	1,98	2,66	1,73	2,21
25	2,49	3,63	2,34	3,32	2,16	2,99	1,96	2,62	1,71	2,17
26	2,47	3,59	2,32	3,29	2,15	2,96	1,95	2,58	1,69	2,13
27	2,46	3,56	2,30	3,26	2,13	2,93	1,93	2,55	1,67	2,10
28	2,44	3,53	2,29	3,23	2,12	2,90	1,91	2,52	1,65	2,06
29	2,43	3,50	2,28	3,20	2,10	2,87	1,90	2,49	1,64	2,03
30	2,42	3,47	2,27	3,17	2,09	2,84	1,89	2,47	1,62	2,01
40	2,34	3,29	2,18	2,99	2,00	2,66	1,79	2,29	1,51	1,80
60	2,25	3,12	2,10	2,82	1,92	2,50	1,70	2,12	1,39	1,60
120	2,17	2,96	2,01	2,66	1,83	2,34	1,61	1,95	1,25	1,38
∞	2,09	2,80	1,94	2,51	1,75	2,18	1,52	1,79	1,00	1,00

v_1 : عدد درجات الحرية الخاصة بالبسط

v_2 : عدد درجات الحرية الخاصة بالمقام

4. جدول توزيع كاي تربيع

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassées



v	$P = 0,90$	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

عندما تكون درجة الحرية v أكبر تماما من 30 تصبح تتبع القانون الطبيعي

6. جدول توزيع دربين–واتسون عند مستوى معنوية 5٪

n	K = 1		K = 2		K = 3		K = 4		K = 5	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,74	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

n : حجم العينة (عدد المشاهدات)

k : عدد المتغيرات المستقلة في النموذج بدون الحد الثابت

7. جدول توزيع دربين–واتسون عند مستوى معنوية 1٪

n	K=1		K=2		K=3		K=4		K=5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

1. تومي صالح، مدخل لنظرية القياس الإقتصادي دراسة نظرية مدعمة بأمثلة وتمارين، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزء الأول الطبعة الثانية 2011.
2. حسام علي داود، خالد محمد السواعي، الطبعة الأولى، الإقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق بإستخدام برنامج EVIEWS7، دار المسيرة للنشر والتوزيع والطباعة، عمان الأردن، 2013.
3. حسين علي بخيث، سحر فتح الله، الإقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.
4. دامودار جوجارات، تعريب ومراجعة هند عبد الغفار عودة وعفا علي حسن الدش، الإقتصاد القياسي الجزء الأول، دار المريخ للنشر، المملكة العربية السعودية- الرياض، 2015.
5. دومينيك سلقاتور، نظريات ومسائل في الإحصاء والإقتصاد القياسي، الدار الدولية للنشر والتوزيع، مصر.
6. شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي-محاضرات وتطبيقات-، دار و مكتبة الحامد للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى، 2012.
7. صواليلي صدر الدين، مطبوعة محاضرات في الإقتصاد القياسي مدعمة بأمثلة، 2015-2016.
8. عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الإقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الإسكندرية الدار الجامعية، 2005.
9. عدنان الصنوبي، محاضرات في الإقتصاد القياسي، جامعة صنعاء.
10. كمال سلطان محمد سالم، الإقتصاد القياسي، مكتبة الوفاء القانونية لدنيا الطباعة والنشر، الإسكندرية، الطبعة الأولى، 2014.
11. محمد صالح تركي القريشي، مقدمة في الإقتصاد القياسي، الوراق للنشر والتوزيع، عمان الأردن، الطبعة الأولى 2004.
12. المرسي السيد حجازي، عبد القادر محمد عطية، مقدمة في الإقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات، النشر العلمي والمطابع ، الرياض، الطبعة الأولى 2001.

13. مها محمد زكي، الإقتصاد القياسي بالأمثلة، دار حميثرا للنشر، الطبعة الأولى 2019، مصر العربية- القاهرة.

14. محمد، أحمد (2020). "تحليل النماذج الإحصائية في التنبؤ الاقتصادي". مجلة العلوم الاقتصادية، 45(3)، 112-130.

15. Bourbonnais Régis, Econométrie, 10e édition, Dunod paris, 2018.

16. Bourbonnais Régis, Econométrie, 9e édition, Dunod paris, 2015.

17. Isabelle cardoret, catherine benjamin, franch martin, nadine herrard, steven tanguy, Econométrie appliquée, 2e édition, groupe de boeck, Bruxelles, 2009.

18. Philippe casin, Exercices d'économétrie et d'analyse de données, Editions technip, paris, 2013.

19. Jones, Peter (2019). "The Use of Probabilistic Models in Health Data Analysis". International Journal of Statistics, 33(2), 75-90.

20. Smith, Laura (2021). "Machine Learning and Statistical Modeling: Overlap and Integration". Journal of Applied Artificial Intelligence, 12(1), 45-60.

21. Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2021). "Applied Statistics and Probability for Engineers". Wiley.

22. Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2017). "The Elements of Statistical Learning". Springer.

23. Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2015). "Time Series Analysis: Forecasting and Control". Wiley.