

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université de Saida– Dr. Moulay Tahar



FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL ET HYDRAULIQUE

Thèse

Présentée pour obtenir le diplôme de

Doctorat 3^{ème} Cycle

Spécialité : structure et Géo matériaux en Génie Civil

Filière :Génie Civil

Présentée par

Guerroudj Hicham Zakaria

Intitulé de la thèse

Contribution à l'étude de la vibration libre des structures composites en utilisant des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé

Soutenu le : **22/06/2019**

devant le jury composé de :

Mr. DERRAS Boumédiene	Professeur	Université de Saida	Président
Mr. YEGHNEM Redha	Professeur	Université de Saida	Directeur de thèse
Mr. KACI Abdelhakim	MCA	Université de Saida	Co-Directeur de thèse
Mr. REZGANI Laid	MCA	Université de Saida	Examineur
Mr. HOUARI Mohamed Sid Ahmed	MCA	Université de Mascara	Examineur
Mr. BOURADA Mohamed	MCA	Université de Sidi Bel Abbés	Examineur

Année universitaire 2018-2019

Remerciements

Cette thèse conclue plus de trois ans de travaux réalisés au sein des laboratoires des Ressources Hydriques et Environnement de l'université Dr Moulay Tahar de Saida et celui des Matériaux et Hydrologie de l'université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès.

. Je remercie vivement Monsieur le Professeur TOUNSI Abdelouahed et ses collègues de m'avoir accueilli dans leur laboratoire et de l'intérêt constant qu'ils ont accordé à cette thèse de doctorat.

Je tiens particulièrement à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur YEGHNEM Redha qui a su me supporter et m'encourager durant toute cette période. Je tiens à lui exprimer ma gratitude pour ses conseils, son soutien, sa patience, sa disponibilité, sa générosité et sa grande compétence qui m'ont beaucoup aidé à surmonter les obstacles. Monsieur, je suis et serai très reconnaissant pour votre aide.

Je remercie vivement, mon co-directeur de thèse Monsieur KACI Abdelhakim pour ses conseils avisés et sa très grande disponibilité.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du LMH, doctorants, permanents ou stagiaires, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces trois années une belle étape dans ma vie.

Enfin, toutes les personnes qui ont apporté leur aide à la réalisation de cette thèse, trouvent ici l'expression de mes remerciements.

ملخص: تبحث هذه الأطروحة في تحليل الاهتزاز الحر للألواح المركبة المتطورة مثل صفائح المواد ذات الخصائص المتغيرة تدريجياً (FGM) التي تستند إلى أسس مرنة ذات معاملين باستخدام نظرية شبه ثلاثية الأبعاد (مثل المثلثية وكذلك كثير الحدود) ذات الترتيب العالي (HSDT). هذه النظرية الحالية ، والتي لا تتطلب عامل تصحيح القص ، تأخذ بعين الاعتبار تشوه القص وتأثيرات تمدد السماكة عن طريق تغيير جيبي ومقطع مكافئ لكل عمليات النزوح عبر السماكة. تستمد معادلات حركة اقتراح لوحات FGM من مبدأ هاملتون. يتم الحصول على حلول النموذج المغلق باستخدام تقنية Navier ، ويتم العثور على الترددات الطبيعية ، للصفائح المدعومة ببساطة. يتم التحقق من دقة النموذج الحالي من خلال مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها مع نظرية تشوه القص من الدرجة الأولى ، وغيرها من التنبؤات عن طريق نظريات تشوه القص العليا ثلاثية الأبعاد يمكن الاستنتاج أن النظرية المقترحة فعالة وبسيطة في التنبؤ بالترددات الطبيعية للصفائح المتدرجة وظيفياً على أسس مرنة.

الكلمات المفتاحية: الاهتزاز الحر لوحة المتغيرة تدريجياً. نظرية تشوه القص من الدرجة العالية. أسس مرنة مع معاملين. تأثير التمدد.

Résumé

Résumé : Cette recherche examine l'analyse par vibration libre des plaques composites avancées telles que des plaques en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) reposant sur une fondation élastique à deux paramètres en utilisant une théorie hybride quasi-3D (trigonométrique ainsi que polynomiale) (HSDT). La présente théorie, qui n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, tient compte des effets de déformation et d'étirement d'épaisseur par une variation sinusoïdale et parabolique de tous les déplacements à travers l'épaisseur. Les équations de mouvement qui régissent les plaques FGM sont dérivées du principe d'Hamilton. Les solutions sont obtenues en utilisant la technique de Navier et les fréquences propres qui en résultent, pour des plaques simplement appuyées, la précision de la présente méthode est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre et les autres prédites par les théories quasi-3D de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur. On peut conclure que la théorie proposée est efficace et simple pour prédire les fréquences propres des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques.

Mots clés: Vibration libre; plaques fonctionnellement graduées ; théorie d'ordre élevé; fondations élastiques à deux paramètres; effet d'étirement.

Abstract

Abstract. This research investigates the free vibration analysis of advanced composite plates such as functionally graded plates (FGPs) resting on a two-parameter elastic foundations using a hybrid quasi-3D (trigonometric as well as polynomial) higher-order shear deformation theory (HSDT). This present theory, which does not require shear correction factor, accounts for shear deformation and thickness stretching effects by a sinusoidal and parabolic variation of all displacements across the thickness. Governing equations of motion for FGM plates are derived from Hamilton's principle. The closed form solutions are obtained by using Navier technique, and natural frequencies are found, for simply supported plates, by solving the results of eigenvalue problems. The accuracy of the present method is verified by comparing the obtained results with First-order shear deformation theory, and other predicted by quasi-3D higher-order shear deformation theories. It can be concluded that the proposed theory is efficient and simple in predicting the natural frequencies of functionally graded plates on elastic foundations.

Keywords: Free vibration; functionally graded plates; high-order theory; two-parameter elastic foundations; stretching effect

Table des matières

ملخص	I
Résumé.....	II
Abstract.....	III
Table des matières.....	IV
Liste des Figures	VII
Liste des Tableaux	IX
Liste des Notations.....	X
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites.....	5
I.1 Introduction.....	5
I.2 Notions sur les différents renforts disponibles :.....	6
I.2.1 Les fibres de carbone :	6
I.2.2 Les fibres d'aramide :.....	7
I.2.3 Les fibres de Verre :.....	8
I.2.4 Les fibres céramiques :.....	9
I.2.5 Les fibres végétales :.....	9
I.2.6 Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation :	10
I.2.7 Architecture des renforts.....	10
I.3 Notions sur les matrices	13
I.3.1 Les matrices organiques :.....	13
I.3.2 Les matrices céramiques	14
I.3.3 Les matrices métalliques.....	15
I.4 Charges et additifs.....	15
I.5 Les différentes structures des composites	16
I.5.1 Monocouches	16
I.5.2 Stratifiés	16
I.5.3 Sandwichs	17
I.6 La zone inter faciale.....	17
I.7 Qualités et défauts des composites.....	18
I.8 Domaines d'application des composites	18
I.8.1 Les composites dans la construction civile	18
I.8.2 Les composites dans le secteur médical.....	19
I.8.3 Les composites dans les produits aéronautiques	19
I.8.4 Les composites dans les produits militaires	20
I.8.5 Les composites dans les produits spatiaux (satellites)	20
I.9 Conclusion	20

Chapitre II : Les matériaux à gradient de propriétés (Matériaux Fonctionnellement Gradués).	21
II.1	Introduction21
II.2	Définition et Historique des FGM23
II.3	Application des Matériaux FGM26
II.4	Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM27
II.4.1	Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) 27
II.4.2	Coulage en bande (Tape casting) 28
II.4.3	Compactage des couches (poudre d'empilement) 29
II.4.4	Coulée par centrifugation 29
II.4.5	Projection plasma 29
II.4.6	Dépôt physique en phase vapeur (PVD)..... 30
II.4.7	Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)..... 31
II.4.8	Frittage : 32
II.4.9	Dépôt par électrophorèse 33
II.5	Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM34
II.5.1	Propriétés matérielles de la plaque P-FGM 35
II.5.2	Propriétés matérielles de la plaque S-FGM 36
II.5.3	Propriétés matérielles de la plaque E-FGM 37
II.6	Avantages et inconvénients des FGM :38
II.6.1	Avantages des FGM 38
II.6.2	Inconvénients des FGM 39
II.7	Conclusion.....39
Chapitre III : Aperçus bibliographiques sur les théories des plaques	40
III.1	Introduction40
III.2	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)41
III.3	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Reissner-Mindlin) (FSDPT) .42
III.4	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDPT).....43
III.5	Conclusion.....45
Chapitre IV : Etude analytique de la vibration libre des plaques FGM sur fondations élastiques	46
IV.1	Introduction46
IV.2	Configuration géométrique et propriétés des matériaux.....47
IV.3	Formulation théorique :48
IV.3.1	Relations constitutives..... 48
IV.3.2	Champ de déplacement et déformations :..... 48
IV.3.3	Équations de mouvement 51
IV.3.4	Equations de mouvement en termes de déplacements..... 56
IV.3.5	Solutions analytiques :..... 57
IV.4	Conclusion.....58

Table des matières

Chapitre V : Résultats et discussions	59
V.1 Introduction :	59
V.2 Résultats de la vibration libre :	59
V.2.1 Exemple 1 :	59
V.3 Conclusions	65
Conclusion générale et perspectives	67
Références Bibliographiques	68

Liste des figures

Chapitre I Généralités sur Les matériaux composites.....	5
Fig I.1 : Matériau composite	6
Fig1.2: Types de renforts	6
Fig I.3: Les fibres de carbone.....	7
Fig I.4 : Fibre d'aramide	8
Fig1. 5: les fibres de verre.....	9
Fig.1.6 : Exemples de tissus de renforts utilisés pour les CMO haute performance : (a) verre, (b) carbone, (c) aramide (Kevlar).	9
Fig.1.7: Les structures géométriques des composites : (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules	11
Fig 1.8 : Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression	10
Fig I.9 : les renforts unidirectionnels	11
Fig I.10 : la toile ou taffetas	11
Fig I.11 : Le sergé	12
Fig. I.12 : Le satin	12
Fig I.13: Types de matrices.....	13
Fig. I.14 : Matériau composite monocouche.....	16
Fig. I.15: Matériau composite stratifié.....	16
Fig. I.16 : Matériau composite sandwich.....	17
Chapitre II Les matériaux à gradient de propriétés (Matériaux Fonctionnellement Gradués) ...	22
Fig.II.1 Matériau composite conventionnel et matériau de gradient de propriété (Hirai T., 1996) ...	22
Fig. II.2 Exemples des FGM naturels	22
Fig. II.3 Matériau de gradient de propriété (Miyamoto Y., 1999).	24
Fig. II.4 Différentes types des FGM (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).	25
Fig. II.5 Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété FGM (Miyamoto Y., 1999).	26
Fig. II.6 Schéma du processus de production de matériaux gradué par coulage (Marple B.R., 1997).	28
Fig. II.7 Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000).	30
Fig. II.8 Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997).	31
Fig. II.9 Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y., 1999).	32
Fig. II.10 Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M., 1991).	33
Fig. II.11 Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R., 2002).	34
Fig. II.12 Caractéristiques géométriques d'une plaque FGM	35
Fig. II.13 Variation de module de Young en fonction de dans une plaque P-FGM.....	36
Fig. II.14 Variation de module de Young en fonction de dans une plaque S-FGM.....	37
Fig. II.15 Variation de module de Young dans une plaque E-FGM.....	38

Chapitre III : Aperçus bibliographiques sur les théories des plaques.....	40
Fig III.1: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques (Mahi, 2012).....	41
Fig III.2.: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre (Mahi. 2012).....	42
Fig III.3.: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques (Mahi,2012).....	43
Chapitre IV : Etude analytique de la vibration libre des plaques FGM sur fondations élastiques	
FigIV.1: Géométrie d'une plaque FG rectangulaire.....	47
Chapitre V : Résultats et discussions.....	59
Fig V. 1 Effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques carrées FG ($a/h=10$).....	63
Fig. V.2 Effet du rapport de format a / b sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques FG ($a/h=10$, $p=1$).....	63
Fig. V.3 Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques rectangulaires Al / Al ₂ O ₃ FG reposant sur une base élastique par rapport au rapport de forme ($a/h=10$, $p=1$).....	64
Fig. V.4 Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques carrées Al / Al ₂ O ₃ FG reposant sur une base élastique par rapport au paramètre ($=10$, $p=1$).....	65
Fig. V-5 Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques carrées Al / Al ₂ O ₃ FG reposant sur une base élastique par rapport au paramètre ($=10$, $p=1$).....	65

Liste des tableaux

Chapitre I : Généralités sur Les matériaux composites	5
Tableau I.1 : Propriétés des fibres de carbone	7
Tableau I-2 : Propriétés des fibres de Kevlar.....	8
Tableau I-3 : Propriétés des fibres de Verre	8
Tableau I -4 : Propriétés des Résines thermodurcissables	14
Tableau I -5 : Caractéristiques des résines thermoplastiques.....	14
Chapitre III Aperçus bibliographiques sur les théories des plaques	40
Tableau III.1: Différentes fonctions de forme des théories des plaques isotropes.....	44
Chapitre IV : Etude analytique de la vibration libre des plaques FGM sur fondations élastiques.....	46
Chapitre V : Résultats et discussions	59
V.1 Tableau V-1 Propriétés matérielles du métal et de la céramique	59
V.2 Tableau V-2 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}$ pour plaques carrées isotropes simplement appuyées	61
V.3 Tableau V- 3: Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques FG Al/Al ₂ O ₃	62

Liste des Notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[\]$	Matrice
Γ	propriété matérielle
$V(z)$	Fraction volumique locale.
$\Psi(z)$	fonction de forme
$f(z)$	fonction de forme
$g(z)$	fonctions de forme
w_b	Déplacement transversal dû à la flexion
w_s	Déplacement transversal dû au cisaillement
$w_{,x}^b$	Rotation due à la flexion suivant x
$w_{,x}^s$	Rotation due au cisaillement suivant x
E	Module de Young
$\nu(z)$	Coefficient de poisson
$\rho(z,T)$	Masse volumique
d_{ij} et d_{ijlm}	opérateurs différentielles
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s,$ D_{ij}^s, H_{ij}^s	les composantes de rigidité
u^0	Déplacement de membrane ou du plan médium suivant l'axe x,
v^0	Le déplacement du plan médium suivant l'axe Y,
w	Déplacement transversal ou la flèche,
$g(z)$	Fonction de cisaillement,
i,j	Nombre naturelle
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Epaisseur de la plaque
p	paramètre matériel pour détecter la variation du matériau suivant l'épaisseur de la plaque,
ω	Fréquence
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour des axes

Liste des notations

$\sigma_x \sigma_y \sigma_z$	Contraintes normales
$\tau_{xz} \tau_{yz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$	Déformation dans la direction
$\gamma_{xy} \gamma_{yz}$	Déformation de distorsion
$\delta u \delta v \delta w$	Champ virtuel de déplacement
$\delta \varepsilon_x \delta \varepsilon_y \delta \varepsilon_z$	Champ de déformation longitudinale virtuel
$\delta \gamma_{xy} \delta \gamma_{yz}$	Champ de déformation transversal virtuel
N_x, N_y, N_z, N_{xy}	Effort normaux
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion
S_x, S_y, S_{xy}	Moment supplémentaire du au cisaillement transvase
S^s_{xz}, S^s_{yz}	Effort de cisaillement
Q^s_{xz}, Q^s_{yz}	Effort de cisaillement
∂	Dérivée partielle

Introduction générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des matériaux composites non homogènes, proposés pour la première fois en 1984 par des scientifiques spécialistes des matériaux dans la région de Sendai (Koizumi 1993, Koizumi 1997) comme barrière thermique. Les FGM se caractérisent par la variation des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre dans le sens de l'épaisseur. Ce concept de FGM peut efficacement éliminer les problèmes d'interface couramment rencontrés dans les matériaux composites en raison de la concentration de contraintes sous l'action de charges mécaniques et / ou thermiques externes. Ces matériaux composites avancés ont les constituants primaires constitués d'un mélange de métal avec de la céramique ou d'une combinaison d'autre matériaux. Les FGM sont maintenant utilisées dans de nombreuses applications structurelles: avions, véhicules spatiaux (Kar et Panda, 2015a; Xu et Xing 2016) et dans divers autres domaines: génie civil, turbines à gaz, fusions nucléaires, électronique des biomatériaux, couches minces optiques (Bensaid et al. 2017) et d'autres applications techniques et d'ingénierie (Miyamoto et al. 1999). Cette flexibilité dans la conception des FGM est donnée par leur force et leur rigidité.

Ces dernières années, un certain nombre d'études et de techniques informatiques ont été réalisées et appliquées au domaine de l'ingénierie afin d'analyser les comportements statiques, dynamiques et de flambement des plaques FG (Jha et al. 2013; Kar et Panda 2013; Sobhy, 2013; Ait Amar Meziane et al. 2014; Kar et Panda 2014; Meksi et al. 2015; Attia et al. 2015; Kar 2015a; Kar 2015b; Kar et Panda 2015b; Kar et Panda 2015c; Kar et Panda 2015d; Boudierba et al. 2016; Kar et Panda 2016a; Kar et Panda 2016b; Kar et Panda 2016c; Kar et Panda 2016d; Houari et al 2016, Boukhari et al 2016, Kar et al 2017, Kar et Panda 2017a, Kar et Panda 2017 b, Mahapatra et al. .; 2017; Neves et al. 2017) ont conduit au développement de diverses théories sur les plaques. Cependant, ce comportement peut être prédit à l'aide de la théorie classique des plaques (CPT), de la théorie des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) et de la théorie des plaques d'ordre supérieur (HSDT). La théorie classique des plaques (CPT) néglige l'effet de la déformation de cisaillement transverse (Feldman et Aboudi 1997; Javaheri et Eslami 2002; Chen et al. 2006; Abrate 2008; Zhang et al. 2008; Mahdavian 2009; Mohammadi et al. 2010; Baferani et al. 2010 . 2011) et n'est acceptable que pour les plaques minces. La théorie des plaques de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) a été utilisée pour les plaques FG épaisses et moyennement épaisses (Yaghoobi et Yaghoobi 2013; Mantari et Granados 2015; Bellifa et al.

2016). Cette théorie prend en compte des effets de la déformation du cisaillement transversal et nécessite un facteur de correction du cisaillement approprié afin de satisfaire aux conditions limites de contrainte de cisaillement transversal nulles en haut et en bas de la plaque. Saidi et Sahraee (2006) ont utilisé la théorie de la plaque de déformation de cisaillement de second ordre (SSDT). Ils ont étudié la flexion et l'étirement axisymétriques de plaques circulaires et annulaires massives de niveaux fonctionnels. Khdeir et Reddy (1999) ont étudié la vibration libre de plaques composites stratifiées à l'aide de SSDT. Shahrjerdi et Mustapha (2011) ont utilisé la SSDT pour étudier la vibration libre des plaques FG (rectangulaires et carrées). Karami et al. (2018) ont utilisé la SSDT pour étudier la dispersion dans les ondes du graphène monté sous contrainte initiale. Nami et al. (2015) ont utilisé la théorie de la déformation de cisaillement de troisième ordre non locale pour analyser le flambement thermique des nanoplaques rectangulaires FG. Alternativement, plusieurs théories de plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été proposées pour les plaques FG, avec des variations de déplacements d'ordre supérieur (Neves et al. 2012, 2012; Bouazza et al. 2015; Bensatallah et al. 2016). Un grand nombre d'études ont été réalisées pour étudier le comportement mécanique des plaques composites avancées utilisant des fonctions non polynomiales (hyperbolique, sinusoïdale, exponentielle et tangente). L'utilisation de ces fonctions vise à décrire le gauchissement à travers l'épaisseur, en tenant compte de l'effet de déformation de cisaillement transversal dans la plaque. Mantari et al. (2012) ont utilisé la fonction trigonométrique non polynomiale dans le déplacement pour étudier la réponse en flexion des plaques sandwichs et stratifiées. Mantari (2015) a également étudié l'analyse en flexion des coques à gradation fonctionnelle en présentant une solution sous forme compacte d'une théorie de la déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-hybride de type hybride généralisé. Le comportement en flambage de plaques sandwichs avec des peaux de niveaux fonctionnels utilisant une nouvelle théorie quasi-3D de déformation en cisaillement en sinus hyperbolique a été étudié par Neves et al. (2012). Tounsi et ses collègues (Ait Amar Meziane et al. 2014; Attia et al. 2015; Hassaine Daouadji et al. 2015 et Bousahla et al. 2016) ont développé une nouvelle théorie raffinée des plaques pour l'analyse de vibrations libres de matériaux de dimension fonctionnel. Ils ont introduit des variables intégrales indéterminées dans le champ de déplacement. Cette théorie ne nécessite pas de facteur de correction de cisaillement et satisfait au cisaillement transversal nul sur les surfaces de la plaque. L'effet d'étirement de l'épaisseur est ignoré dans la théorie ci-dessus et le déplacement transversal est considéré comme constant dans le sens de l'épaisseur, comme dans les plaques de FGM minces de type Kirchhoff-Love. La majorité des théories de déformation de cisaillement

d'ordre supérieur utilisées pour étudier le comportement mécanique des plaques de MGF contiennent cinq inconnus. Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans l'équation d'équilibre, satisfaisant les effets de déformation de cisaillement sur les surfaces inférieure et supérieure de la plaque sans utiliser de facteur de correction de cisaillement, de nombreuses théories raffinées ont été proposées. Shimpi et Patel (2006) ont étudié la vibration libre de la plaque en utilisant la théorie de la plaque raffinée variable. Nguyen et ses collaborateurs (2015) ont étudié l'analyse de la flexion, de la vibration et du flambement des plaques sandwiches FG en utilisant une théorie de déformation en cisaillement raffinée. Karami et al. (2017) ont utilisé une théorie des plaques raffinée à quatre variables pour étudier l'analyse de la propagation des ondes dans des nano plaques FG sous champ magnétique dans le plan, sur la base de la théorie du gradient de déformation non local.

Karami et Janghorban (2016) ont utilisé la théorie des plaques raffinée à un paramètre et à deux variables pour étudier l'effet du champ magnétique sur la propagation des ondes dans les nano plaques, sur la base de la théorie du gradient de déformation. Toujours, Karami et Janghorban (2018) ont étudié la propagation des ondes dans des nano plaques FG poreuses.

Dans la littérature, de nombreuses études ont été menées sur les comportements de flexion, de vibration et de flambement des plaques de FG reposant sur des fondations élastiques (Ait Atmane et al. 2010; Abualnour et al. 2018; Shahsavari et 2018; Ait Atmane et Tounsi 2017). Meftah et al. (2017) ont étudié la vibration libre de plaques rectangulaires épaisses FG sur un support élastique en utilisant une théorie des plaques raffinée à quatre variables non polynomiale. Shahsavari et al. (2018) ont étudié le flambement par cisaillement de feuilles de graphène monocouche dans un environnement hygrothermique reposant sur une base élastique reposant sur différentes théories de gradient de déformation non locales. Ces fondations considérées incluent les fondations élastiques de type Winkler et Pasternak.

Dans ce travail, le comportement en vibration libre des plaques FG est analysée sur la base d'une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D hybride simple et efficace. Le point culminant de cette théorie est qu'en plus d'inclure les fondations élastiques de Winkler-Pasternak et l'effet d'étirement d'épaisseur, le champ de déplacement ne contient que cinq inconnus pour six fonctions de déplacement ou plus rencontrées dans d'autres théories. Les équations de mouvement qui régissent les plaques FG sont dérivées du principe d'Hamilton. Les solutions en forme compacte sont obtenues en utilisant la technique de Navier et les fréquences propres sont déterminées, pour des plaques simplement appuyées, en

résolvant les résultats de problèmes aux valeurs propres. De plus, la précision du HSDT quasi- 3D hybride est examinée en comparant les résultats actuels avec ceux publiés.

Ce travail s'articule autour de cinq chapitres :

Le premier chapitre présente les matériaux composites, leurs différents composants ainsi que leurs divers domaines d'application.

Le deuxième chapitre expose un aperçu bibliographique sur les matériaux à gradient de propriété, leurs caractéristiques et leurs principales méthodes de fabrication.

Le troisième chapitre englobe les différents modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour l'amélioration du champ de déplacement à travers l'épaisseur des plaques.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude analytique de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées reposant sur des fondations élastiques de type winkler-Pasternak, en tenant compte l'étirement de la plaque (stretching effect).

Le cinquième et dernier chapitre expose les différents résultats obtenus à l'issu d'une programmation numérique visant à déterminer les fréquences propres de vibration des plaques FG. Ces résultats présentés dans des tableaux et sur des graphes ont été commentés et discutés. Ils ont été validés avec ceux d'autres recherches rencontrées dans la littérature.

Finalement, la thèse est clôturée par une conclusion générale rassemblant les principaux points à retenir à l'issu de ce travail de recherche. Des perspectives des travaux futurs seront données à la fin de ce travail.

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1 I-1 Introduction

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux ou plus de nature différente; ce complément permet d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composantes prises séparément.

Les matériaux composites structuraux sont principalement constitués d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue.

La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue présente usuellement des propriétés mécaniques (rigidités et résistances) supérieures à celle de la matrice et est notée renfort.

- Le renfort : Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts.
- La matrice : assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques.

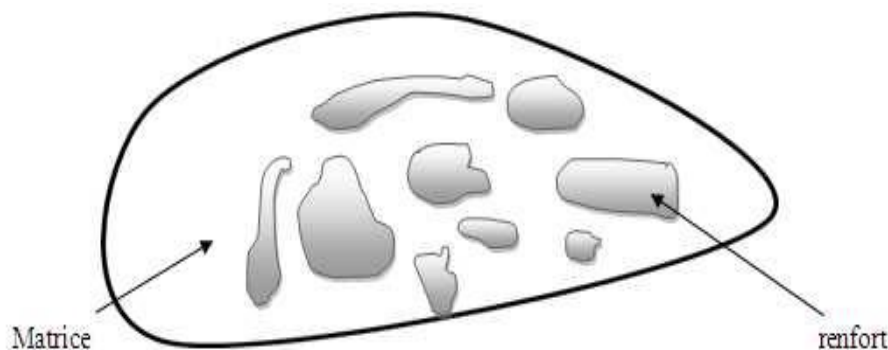


Fig I.1 : Matériau composite

D'une manière générale, les matériaux composites structuraux de part la nature du renfort sont fortement anisotropes, c'est-à-dire que leurs propriétés sont très différentes suivant la direction considérée.

D'autre part, les matériaux composites sont légers, c'est-à-dire que les masses volumiques de leurs constituants sont de l'ordre de 1 à 3.5 g / cm³.

I.2 Notions sur les différents renforts disponibles :

On peut distinguer cinq classes de fibres à savoir : les fibres de carbone, les fibres de verre, les fibres d'aramide, les fibres céramiques et les fibres végétales.

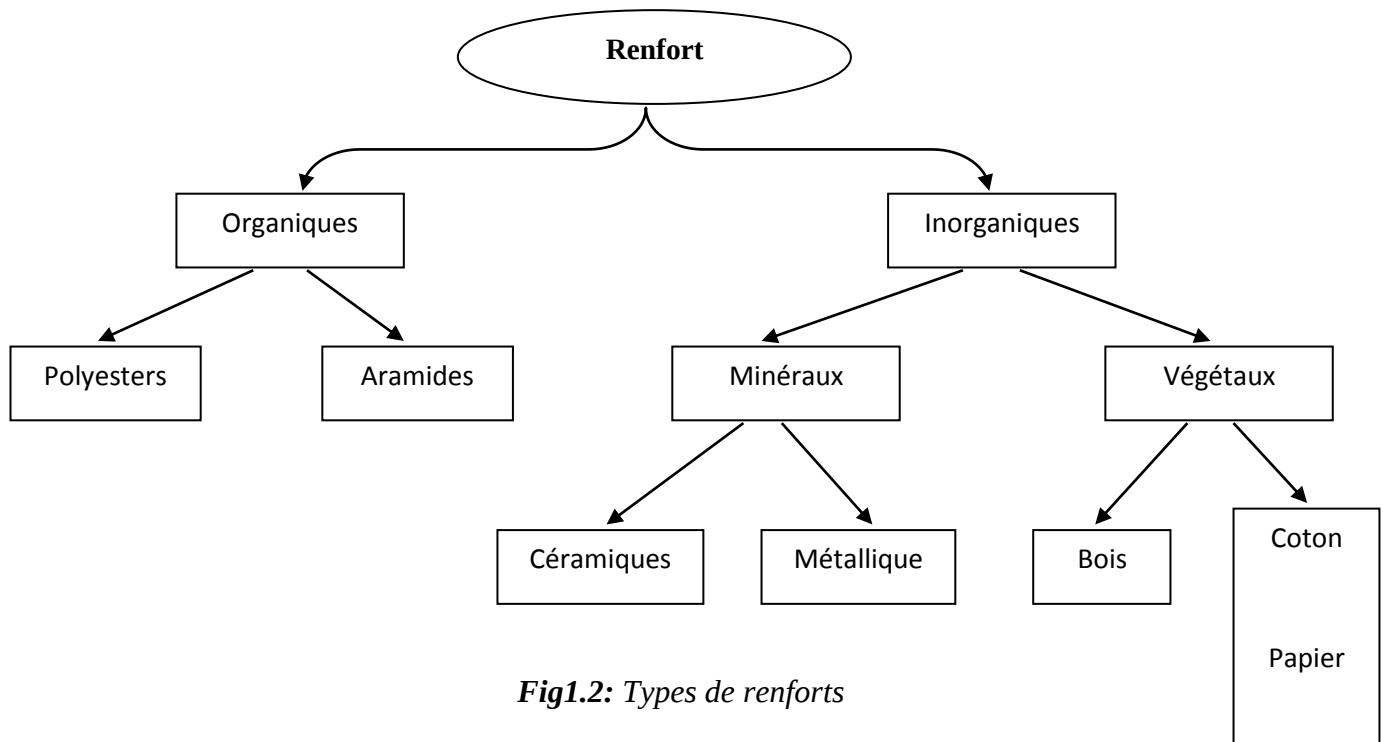


Fig1.2: Types de renforts

I.2.1 Les fibres de carbone :

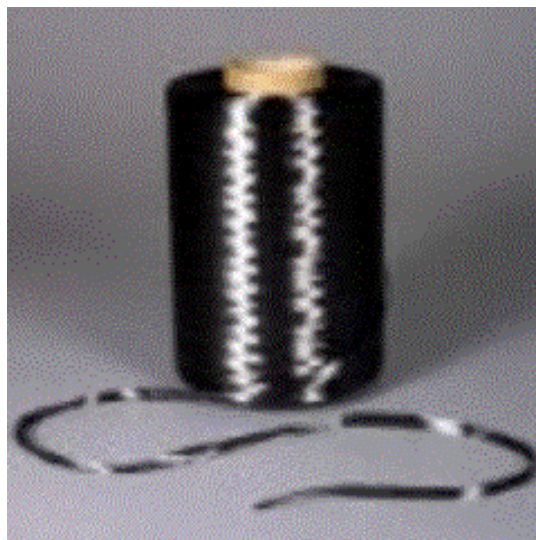


Fig I.3: Les fibres de carbone

Les fibres de carbone présentent des propriétés mécaniques très élevées (haut module, haute résistance, faible dilatation thermique) et sont utilisées pour les applications industrielles

hautes performances. Ce type de matériau est produit essentiellement aux Etats-Unis et au Japon. Le diamètre d'une fibre de carbone est de l'ordre de 5 micron. Mais, actuellement trois sortes sont commercialisées :

- 1- Les fibres haute résistance classique (types : As4, As6, T300 et X635) ;
- 2- Les fibres à haute résistance module intermédiaire (types : IM6, X636);
- 3- Les fibres à haut module (types : M40 et HM5).

D'un fabricant à l'autre, les propriétés mécaniques varient suivant les propriétés physiques et mécaniques moyennes. Elles sont données dans le tableau ci - dessous:

Tableau I.1 : Propriétés des fibres de carbone

Propriétés en traction	HR		IM	HM	
$R_t(MPa)$	3000 à 5000	4000 à 4500	47000 à 52000	2000 à 2500	1100 à 2000
$E_{oT}(MPa)$	220000 à 240000	235000 à 250000	275000 à 300000	350000 à 400000	450000 à 500000
$A_R (%)$	1.2 à 1.5	1.6 à 1.8	1.4 à 1.6	0.5 à 0.7	0.3 à 0.5
Masse volumique (g / cm ³)	1.75 à 1.8	1.75 à 1.8	1.7 à 1.8	1.8 à 1.85	1.9 à 1.95

R_t : Résistance à la rupture ;

E_{oT} : Module de Young ;

A_R : l'allongement à la rupture.

Une particularité importante de ces fibres est leur coefficient de dilatation thermique négatif ou quasi nul dans le sens de la fibre, c'est-à-dire que les fibres se raccourcissent quand on les chauffe et s'allongent quand on les refroidit.

I.2.2 Les fibres d'aramide :

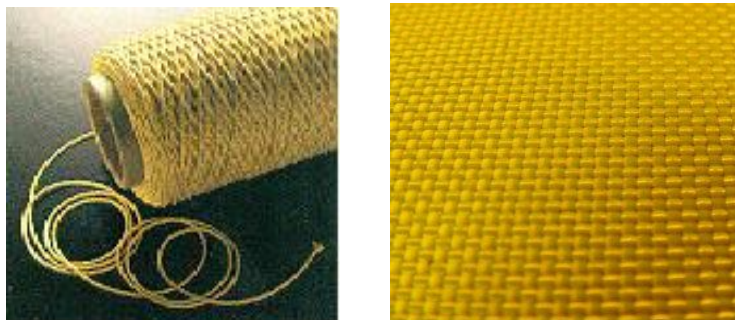


Fig I.4 : Fibre d'aramide

Dont la plus connue est le kevlar, Les fibres de Kevlar sont des fibres synthétiques à base de polyamide aromatique (les aramides). Actuellement, il existe deux types de produits :

- 1- les fibres de Kevlar 49 ;
- 2- les fibres de Kevlar 29

Tableau I-2 : Propriétés des fibres de Kevlar

Propriétés en traction	Kevlar 49	Kevlar 29
$R_t(MPa)$	3000	2700
$E_{oT}(MPa)$	120000 à 130000	60000
$A_R (%)$	2.1	4
Masse volumique (g / cm ³)	1.45	1.44

I.2.3 Les fibres de Verre :

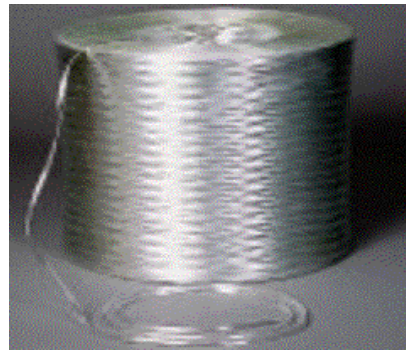


Fig I.5: les fibres de verre

Il existe une multitude de fibres de verre dont les propriétés dépendent de leur composition. Actuellement, trois types de fibres de verre sont commercialisés sous forme de files. Ce sont les variétés E, S et R. Ces deux derniers sont très voisines (l'une est Américaine et l'autre est Française)

Les propriétés des ces fibres sont présentées dans le tableau

Tableau I-3 : Propriétés des fibres de Verre

Propriétés en traction	Verre E	Verre R	Verre S
$R_t(MPa)$	3400	4400	4900
$E_{oT}(MPa)$	73000	86000	87000
$A_R (%)$	4.9	5.2	-----
Masse volumique (g / cm ³)	2.54	2.55	2.54

I.2.4 Les fibres céramiques :

Comme les fibres Sic, présentent une bonne stabilité des propriétés sa haute température (de 500°C a 1600°C). Le diamètre de ces fibres est important (100 micron) et elles présentent un Comportement anisotrope. Leur cout de fabrication est très élevé.

I.2.5 Les fibres végétales :

Comme le chanvre ou le coton, présentent des propriétés mécaniques faibles mais ont un cout de fabrication dérisoire en regard des autres types de fibre. On notera que le module de traction d'une fibre de chanvre est du même ordre de grandeur ($E \approx 70\text{GPa}$) que celui d'une fibre de verre, pour un cout bien moindre. La résistance de traction est toutefois 5 fois inferieure. Ces matériaux sont utilises dans l'industrie navale, l'industrie automobile ou le génie civil pour des applications présentant un fort aspect écologique (Berthelot D, Masson 1996)

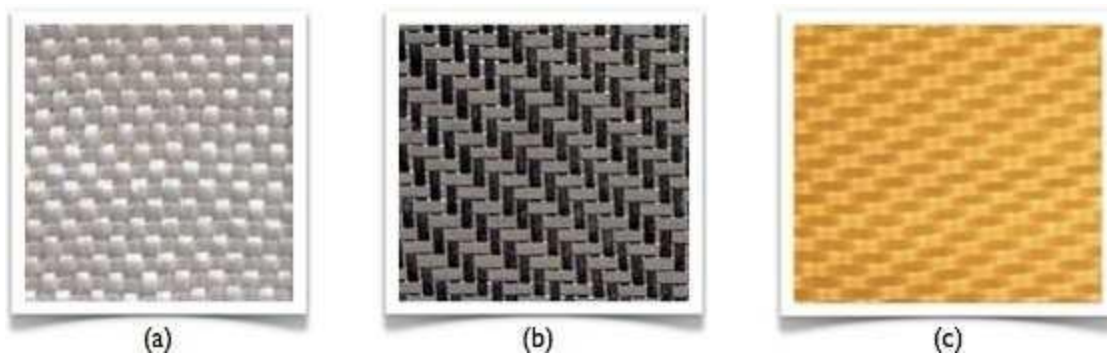


Fig I.6 : Exemples de tissus de renforts utilisés pour les CMO haute performance : (a) verre, (b) carbone, (c) aramide (Kevlar).

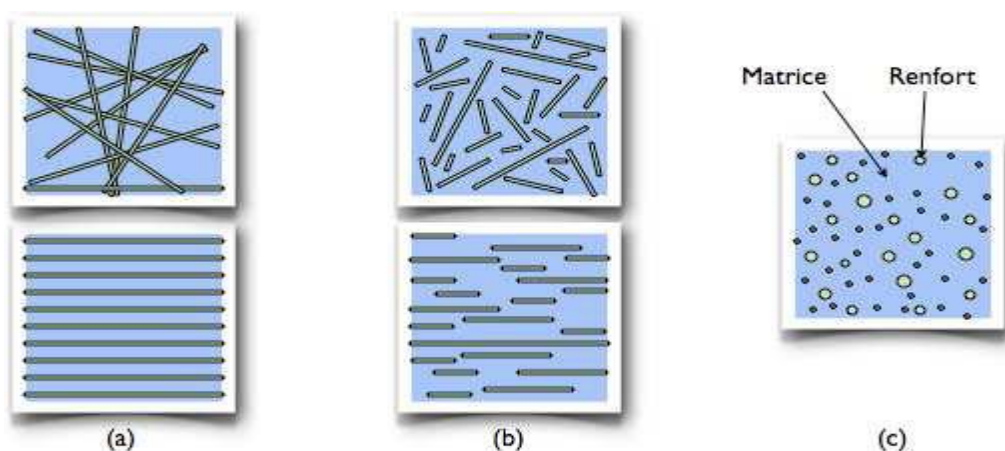


Fig I.7: Les structures géométriques des composites : (a) fibres longues, (b) fibres courtes, (c) particules

I.2.6 Intérêt de l'orientation des fibres sur la déformation :

L'orientation de la fibre est choisie de façon adaptable avec les directions d'efforts. Les fibres sont disposées de sorte qu'elles résistent aux efforts de traction et de compression. Pour résister aussi à l'effet de cisaillement, on met deux fibres orthogonales de façon à ce que l'une d'elle supporte l'effet de compression ou traction et l'autre l'effet de cisaillement.

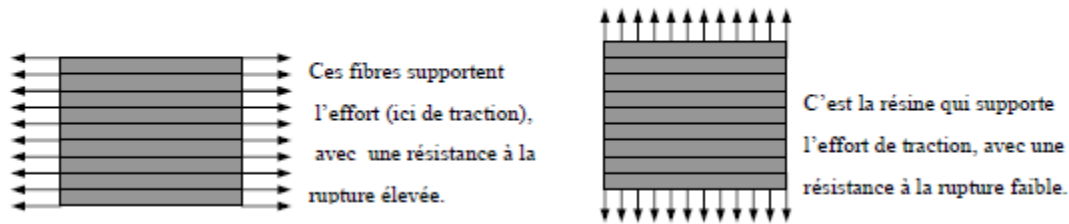


Figure I.8 : Orientation des fibres à 90°. Essai de traction-compression

I.2.7 Architecture des renforts

Les structures composites sont anisotropes. La plupart des renforts travaillent bien en traction, mais offrent de moins bonnes performances en compression et cisaillement. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée. Il existe différentes géométries et textures de renforts :

I.2.7.1 Les unidirectionnels (UD)

Dans un tissu unidirectionnel, les fils sont alignés parallèlement à la direction chaîne, et ils sont réunis par un fil fin dans la direction trame. Ainsi, le tissu est unidirectionnel avec des performances élevées dans la direction chaîne. Les performances mécaniques des divers tissus dépendent :

- Du type de fils constituant le tissu : nature (verre, carbone, etc.), fils avec ou sans torsion, etc.
- De l'armure, Les armures unidirectionnelles et haut module donnent les meilleures Performances. L'armure satin est à un degré moindre, le sergé a des performances supérieures à celles de l'armure toile.

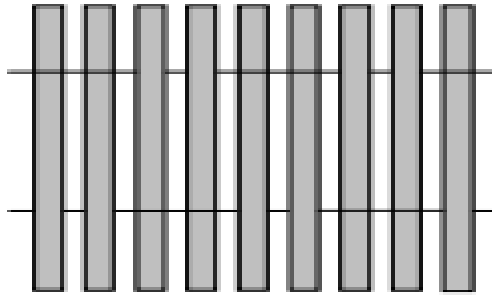


Fig I.9 : les renforts unidirectionnels

I.2.7.2 Tissus standards

a. Toile ou taffetas : Dans l'armure taffetas, les fils de chaines et de trame d'entrecroisent alternativement, conduisant à un tissu très plat, stable, mais peu déformable. Cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame. Toutefois, l'armure taffetas conduit à un haut degré de courbure des fibres qui induit une diminution des performances mécaniques des composites.

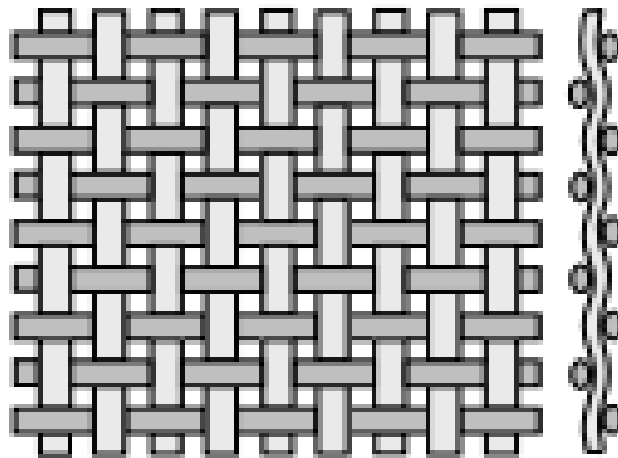


Fig I.10 : la toile ou taffetas

b. Sergé : Pour l'armure sergé, le nombre de fils chaîne et de fils trame qui s'entrecroisent peut varier. Dans un sergé 2x1, les fils trame passent sur un fil chaîne et sous deux fils chaînes, et dans un sergé 2x2, les fils trame passent sur deux fils chaîne et sous deux fils chaîne. Ce type d'entrecroisement conduit à un motif répétitif du tissu sous forme de nervures diagonales. L'armure sergé offre l'avantage d'être à la fois souple et dense. Le tissu sergé permet ainsi un glissement entre les fils chaîne et trame et s'adapte bien à des moulages de formes complexes.

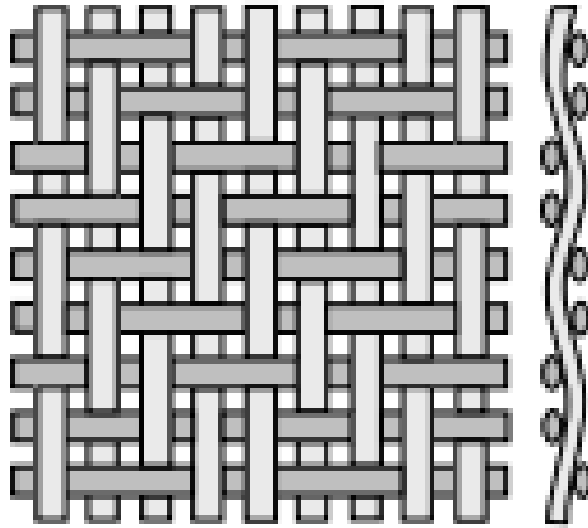


Fig I.11 : Le sergé

c. Satin : L'armure satin est assez semblable à celle du sergé, mais le nombre de fils chaîne et de fils trame qui passent les uns sur les autres avant de s'entrecroiser est plus élevé. Chaque tissu satin est caractérisé par un nombre, usuellement 4 ou 8, indiquant que les fils chaîne passent sur 4 ou 8 fils trame. Il en résulte un tissu avec une face qui contient plus de fils chaîne et une autre face plus de fils trame. L'armure satin est bien adaptée au moulage de formes complexes.

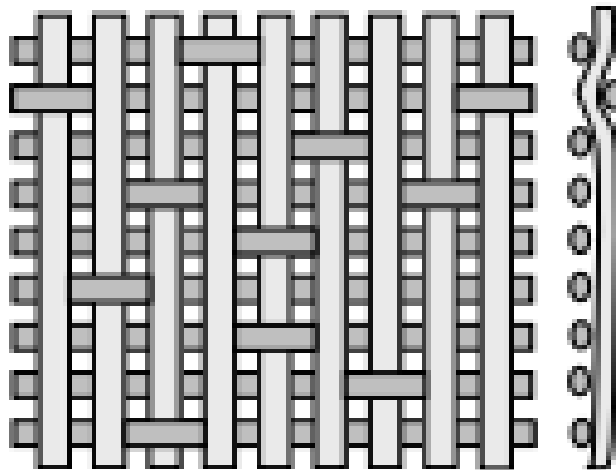


Fig. I.12 : Le satin

I.3 Notions sur les matrices

Actuellement, on distingue deux catégories de matrices :

- Les matrices organiques (résines synthétiques) ;
- Les matrices métalliques

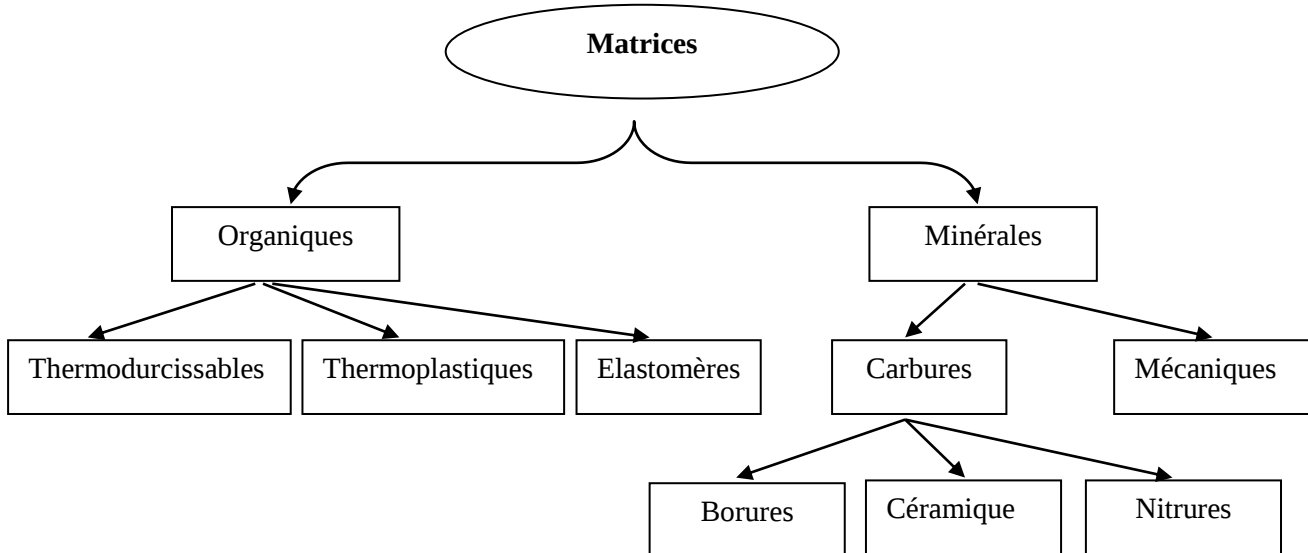


Fig I.13: Types de matrices.

I.3.1 Les matrices organiques :

Qui constituent, les principales matrices utilisées et qui sont :

I.3.1.1 Résines thermodurcissables

Les résines polyesters insaturés (UP) peu coûteuses, sont généralement utilisées avec les fibres de verre et que l'on retrouve dans de nombreuses applications de la vie de tous les jours. Les résines époxy (EP) qui possèdent de bonnes caractéristiques mécaniques. Elles sont généralement utilisées avec les fibres de carbone pour la réalisation de pièces de structure d'aéronautique. Les résines vinyliques qui sont surtout utilisées pour des applications où les résines polyester ne sont pas suffisantes. Les résines phénoliques (PF) utilisées dans les applications nécessitant des propriétés de tenue aux feux et flammes imposées par les normes dans les transports civils. Les résines polyamides thermodurcissables (PIRP) pour des applications à haute température ($\sim 300^{\circ}\text{C}$)

Le tableau I-4 présente les propriétés physiques et mécaniques de ces résines après polymérisation

Tableau I -4 : Propriétés des Résines thermodurcissables

Propriétés en traction	Polyester	Epoxyde	Polyamide	Phénolique	Silicone
$E_{oT}(MPa)$	30 à 90	30 à 100	Environ 90	20 à 60	20 à 60
A_R (%)	2000 à 3000	2500 à 4000	Environ 3000	1000 à 5000	Environ 3000
Densité (g / cm ³)	1.1 à 1.3	1.1 à 1.3	Environ 1.3	1.2 à 1.4	1 à 1.1

I.3.1.2 Résines thermoplastiques

Les résines thermoplastiques sont des polymères à chaîne linéaire. Elles développent des liaisons flexibles qui permettent leur mise en forme plusieurs fois par chauffage et refroidissement successif. Elles sont généralement, utilisées dans les produits de grande diffusion. Cependant, l'amélioration des caractéristiques des résines thermoplastiques conduit à leur utilisation dans des applications de plus en plus importantes.

Les principales résines thermoplastiques utilisées dans les composites sont : le polypropylène (PP) (polyoléfines) ; les polyamides (PA) ; le polyéthylène (PE) ; l'acrylonitrile butadiène styrène (ABS) ; le polyéther-éther-cétone (PEEK).

De même que pour les résines thermodurcissables, les matériaux les plus performants ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible : ces dernières sont présentées dans le tableau I -5.

Tableau I -5 : Caractéristiques des résines thermoplastiques

Résines	$T_f(^{\circ}C)$	$\rho(kg/m^3)$	$\sigma_t^R(MPa)$	$E(GPa)$
Polyamide	65 à 100	1 140	60 à 85	1,2 à 2,5
Polypropylène	900	1 200	20 à 35	1,2 à 2,5

I.3.2 Les matrices céramiques

Réservés aux applications de très haute technicité et travaillant à haute température comme le spatial, le nucléaire et le militaire. Dans le cas des CMC (composites à matrices

Céramiques), la matrice peut être constituée de carbone ou de carbure de silicium. Ces dernières sont déposées soit par dépôt chimique en phase vapeur (CVD) par densification

d'une préforme fibreuse, soit à partir de résines cokéfiabiles comme les résines phénoliques (dans le cas des matrices de carbone).

I.3.3 Les matrices métalliques

Trouvent leurs principales applications dans le transport aérien, maritime et ferroviaire, le bâtiment, l'aérospatial ainsi que les sports et loisirs. Dans ce cas le renfort et la matrice doivent être compatibles entre eux et se solidarisent grâce à l'intervention d'une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif

I.4 Charges et additifs

Dans une formulation, une charge est une substance solide, non miscible et dispersée par un moyen mécanique dans une matrice. Elle est introduite dans un mélange pour en particulier diminuer le coût, améliorer certaines propriétés ou modifier la densité. On distingue une toute variété des charges (minérales ou cellulosiques) et additifs (colorants, pigments, plastifiants, protecteurs, agents anti-UV,...etc.) des matières plastiques sont des éléments ajoutés aux matériaux composites au cours de leur élaboration ou de leur transformation et qui visent à leur conférer des caractéristiques particulières utiles lors de la transformation ou des fonctionnalités pour leur usage final. La typologie proposée repose sur le type de fonction de l'additif.

Enfin les charges et additifs sont incorporés dans un matériau composite pour :

- Modifier la couleur ;
- Modifier sensiblement les propriétés mécanique, électrique ou thermique ;
- Réduire le coût ;
- Résister au feu ;
- Diminuer le retrait ;
- Faciliter le démoulage ;
- Améliorer la résistance au vieillissement ;
- Modifier la densité du matériau.

I.5 Les différentes structures des composites

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre et l'empilement des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Généralement les matériaux composites sont classés en trois catégories :

- Les monocouches.
- Les stratifiés.
- Les sandwiches.

I.5.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes. Dans une nappe UD, les fibres sont assemblées parallèlement les unes par rapport aux autres à l'aide d'une trame très légère. Taux de déséquilibre très grand.

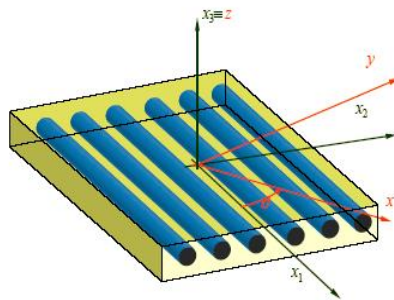


Fig. I.14 : Matériau composite monocouche

I.5.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié.

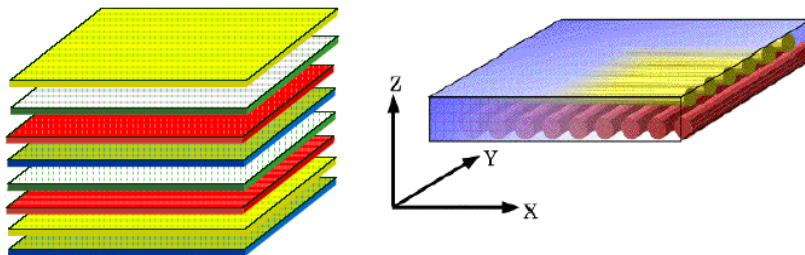


Fig. I.15: Matériau composite stratifié

I.5.3 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion c'est un excellent isolant thermique.

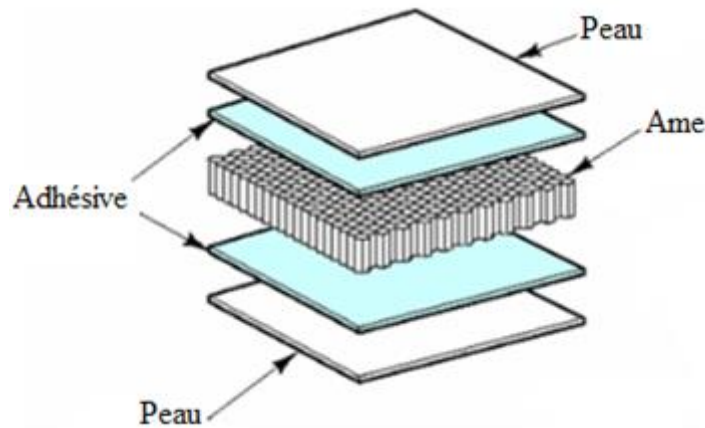


Fig. I.16 : Matériau composite sandwich

I.6 La zone inter faciale

Les composites à fibres sont généralement composés de deux matériaux aux propriétés mécaniques différentes et de deux interfaces: fibre/ensimage et résine/ensimage. L'ensimage est une opération de lubrification réalisée en sortie de filière sur les fils de base. Le filament est revêtu d'une pellicule d'ensimage constituée, en général, d'une dispersion aqueuse de divers composés chimiques présentant chacun une fonction bien définie. Cet ensimage est ensuite enlevé et remplacé par l'ensimage définitif à base de silane pour accrochage.

Il se forme donc une interface qui constitue et assure la continuité. Elle peut être considérée comme un troisième constituant avec des propriétés mécaniques particulières, si son épaisseur n'est pas négligeable.

La contrainte appliquée sur la matrice est transmise à la fibre par l'intermédiaire de l'interface. Ses propriétés ont donc une influence importante sur les propriétés du composite. L'interface joue un rôle primordial dans la résistance à la propagation des fissures.

I.7 Qualités et défauts des composites

Les qualités principales les plus cités des matériaux composites sont :

- Légèreté (gain de masse) ;
- Tenue mécanique particulière (fatigue, résiliences,...) ;
- Rigidité adaptable selon le type de renforts ;
- Bon comportement à la corrosion ;
- Résistance chimique, tenue électrique et une meilleure isolation thermique ;
- Amélioration de la tenue au feu ;
- Fabrication facile, maintenance réduite et réparation possible.

Ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les défauts principaux les plus courants sont les suivants :

- Sensibilité aux agents atmosphériques (rayons UV, humidité, température) ;
- Problèmes d'assemblage (grande concentration de contraintes dans les composites stratifiés et les sandwiches).
- Cout important du passage matériau métallique au matériau composite, prenant en compte le cout matériau (des constituants) et le cout associé au procédé de fabrication néanmoins ce cout a connu ces dernières années une baisse remarquable;
 - Dispersion matériau plus importante que les matériaux métalliques induisant un surcout des campagnes de qualification matériau due aux nombres de répétitions d'essais imposées.
 - Forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure.
 - Faible tenue à l'impact pour les stratifiés d'unidirectionnels ou de tisses 2D, ce qui constitue en revanche l'atout majeur des tisses 3D.
 - Faible conductivité électrique des composites à matrice organique, ce qui constitue un problème important pour la résistance aux impacts de foudres des fuselages composites (Zine ali , 2010-2011)

I.8 Domaines d'application des composites

I.8.1 Les composites dans la construction civile

L'utilisation des composites dans la construction civile est un nouveau créneau, qui commence à intéresser nos bâtisseurs. Le nombre de dégâts causés par les séismes à travers le

monde a poussé les chercheurs à s'intéresser aux composites. L'handicap majeur de l'utilisation des matériaux composites dans la construction civile, reste leur coût, qui est encore excessif. L'utilisation des composites renforcés de fibres de carbone, en complément des composites à fibre de verre (TD et TP) pourra se développer dans le secteur de la construction civile lorsque leur prix deviendra inférieur à 6€/kg. [Menail 2009]. Les composites apportent au bâtiment la souplesse des formes, la résistance aux contraintes climatiques, et les composites renforcés de fibres de carbone la résistance aux séismes. L'utilisation des composites dans le bâtiment ne pourra se développer que si les prescriptions techniques actuelles sont mieux adaptées à leur spécificité.

1.8.2 Les composites dans le secteur médical

Les composites TD et TP ont investi récemment le secteur médical et de la sécurité, comme ils ont investi auparavant les autres secteurs. Il s'agit surtout des composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part. L'utilisation des composites permet d'augmenter la fiabilité et la précision des instruments grâce à une meilleure résistance aux chocs, une grande rigidité et une bonne résistance à la corrosion (prothèses, brancards). Le médical reste attaché à l'utilisation des aciers spéciaux dont le prix de 9€/kg reste bien au dessous de celui des composites HP qui peut atteindre 50€/kg.

1.8.3 Les composites dans les produits aéronautiques

La principale motivation dans l'utilisation des matériaux composites pour la réalisation des structures aéronautiques est essentiellement le gain de masse apporté tout en conservant d'excellentes caractéristiques mécaniques. Les matériaux composites présentent aussi un quasi insensibilité à la fatigue, en comparaison aux matériaux métalliques qui nécessitent une maintenance et un suivi régulier de la propagation des fissures. Ils ne sont pas aussi sujets à la corrosion, mais ils nécessitent une bonne isolation électrique lors des assemblages avec des pièces en alliages légers entre le composite et le métal pour éviter la corrosion galvanique de l'aluminium (si la fibre de renfort est en carbone par exemple). Les techniques de fabrication utilisées permettent l'obtention de formes complexes directement par moulage avec possibilité de réaliser en une seule pièce un ensemble, qui réalisé en métallique, nécessite plusieurs sous éléments. Ceci permet de réduire les coûts d'assemblage de façon importante.

I.8.4 Les composites dans les produits militaires

Pour les produits militaires (missiles), le premier avantage, c'est la performance des matériaux composites, ensuite l'utilisation des composites sur les ailettes de guidage de missiles permet de garder une bonne maîtrise de la trajectoire jusqu'à la cible finale à cause de l'échauffement cinétique provoqué par le frottement de sur la structure des ailettes de missile, en fin de trajectoire les ailettes en alliage d'aluminium peuvent fondre dans certaines conditions et le missile poursuit sa trajectoire sans contrôle ce qui entraîne une perte précise de tir.

I.8.5 Les composites dans les produits spatiaux (satellites)

Les déformations de la structure peuvent avoir une origine thermique avec des expositions en température pouvant varier entre -180°C lorsque le satellite est dans l'ombre et $+160^{\circ}\text{C}$ lorsque le satellite est exposé au soleil. De plus, sur la même structure, entre la face éclairée et la face à l'ombre, le gradient de température peut être important. Les structures en matériaux composites à matrice organique peuvent, avec une orientation optimisée des différentes couches constituant la structure, présenter globalement un coefficient de dilatation thermique proche de zéro pour l'ensemble de la structure.

La stabilité géométrique de la structure aussi apportée par la raideur globale de la structure. L'utilisation des fibres de carbone à très haut module sur les composites permet de répondre à cette préoccupation. Le principal inconvénient des composites à matrices organiques pour les applications satellites est sans aucun doute la reprise d'humidité, pendant les opérations d'assemblage et pendant le stockage avant lancement.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons définis les matériaux composites et les caractéristiques mécaniques de leurs constituants, les différentes structures du matériau ainsi que l'influence de la disposition des fibres et même leur orientation pour finir avec les domaines d'application et les qualités et défauts de ces matériaux.

Chapitre II Les matériaux à gradient de propriétés (Matériaux Fonctionnellement Gradués)

II.1 Introduction

Le développement des technologies modernes exige que l'on utilise des matériaux présentant des propriétés mécaniques élevées spécifiques à leur emploi, mais dont les masses volumiques soient faibles. L'objectif est notamment de réduire la masse des structures.

Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur faible densité, grande résistance, rigidité importante et de leur excellente durabilité, les matériaux composites ont d'abord été utilisés dans de nombreuses composantes structurelles.

De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc.).

Pour les applications industrielles, il est essentiel dans l'utilisation que toutes les parties de la matière présente des propriétés uniformes. Les exigences en matière composites conventionnels ne font pas exception. La plupart des efforts dans le développement des composites dans le passé a été mis en déterminant comment mélanger uniformément la matière dispersée dans la matrice. Par conséquent, d'un point de vue macroscopique, même les composites ont été considérées comme homogènes, car dans ces matériaux les propriétés mécaniques et d'autres caractéristiques se révèlent être homogènes, comme le montre la figure II.1.1.a. En revanche, des études ont également été menées pour concevoir des matériaux qui ont deux propriétés différentes au sein du matériau donné. Ces matériaux composites sont hétérogènes qui sont caractérisés par différentes propriétés de matériaux sur des surfaces ou des pièces séparées. Un exemple d'un composite ayant des fonctions différentes dans ses différentes surface est un matériau revêtu destiné à améliorer les caractéristiques de surface d'un matériau. Cependant, ces composites présentent des limites nettes inhomogènes, comme le montre la figure II.1.1.c.

De ce fait, et d'après la littérature malgré les avantages que présentent ces matériaux, ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité, des travaux ont démontré que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes interraciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle

délaminage, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre, pour cette raison, et en se basant sur de nombreux milieux naturels qui présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. Tels que Les tissus vivants, la croûte terrestre, les océans ou encore l'os cortical. Et tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentent ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c'est ainsi que l'on vit apparaître, dans les années 1980, une proposition visant à concevoir un nouveau matériau destiné à éliminer la limite macroscopique dans les matériaux stratifiés (Niino M., 1987). Autrement dit, l'approche consiste à synthétiser des composites non homogènes, dans lesquels, les propriétés mécaniques, physiques et chimiques de la matière changent continuellement, et qui n'a pas de discontinuités dans le matériau. Ces matériaux sont appelés matériaux à gradient fonctionnel (FGM), figure. II.1.1.b. (Hirai T., 1987; Koizumi M., 1993; Hirai T., 1996).

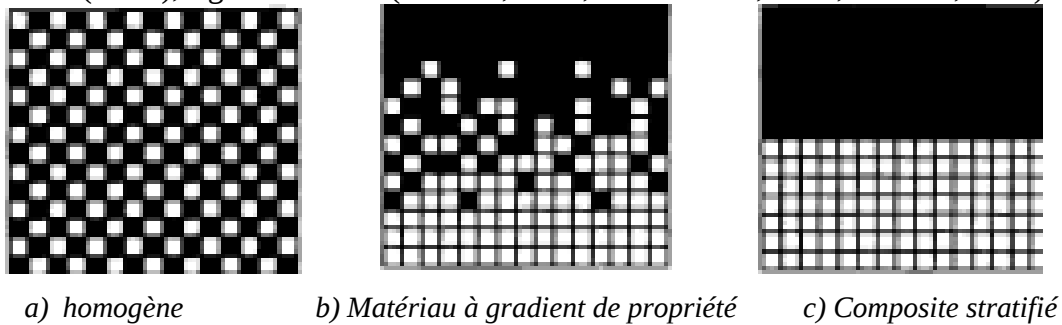


Fig.II.1. Matériau composite conventionnel et matériau de gradient de propriété (Hirai T., 1996)

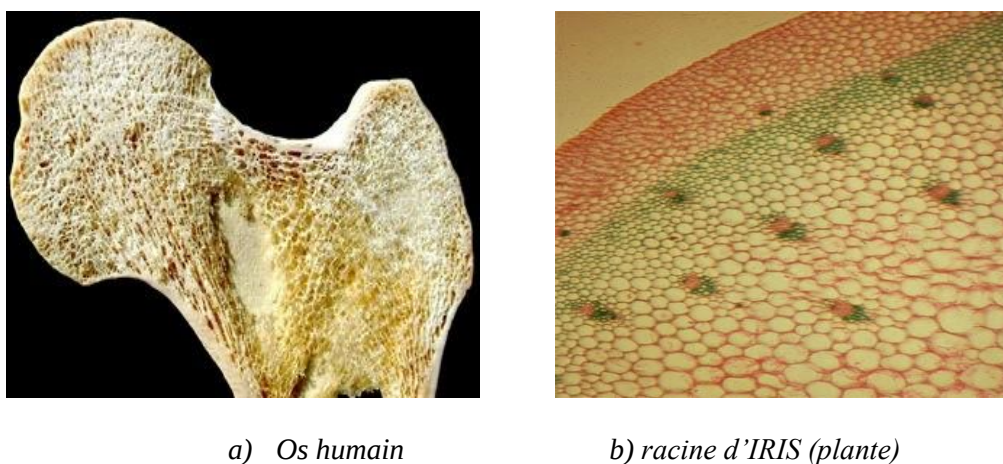


Fig. II.2. Exemples des FGM naturels

II.2 Définition et Historique des FGM

Les matériaux fonctionnellement gradués, matériaux à gradient de propriété ou matériaux à gradient évalués (FGM) : sont des matériaux de type composite macroscopiquement non homogènes, ils sont fabriqués généralement à partir de deux matériaux ou plus, le plus souvent un métal et une céramique, ou en changeant la microstructure d'un seul matériau.

Les matériaux à gradient évalués (FGM) sont des matériaux composites avec un changement spatiale continu des propriétés (Koizumi M., 1994; Kawasaki A., 1997; Borchert R., 1999).

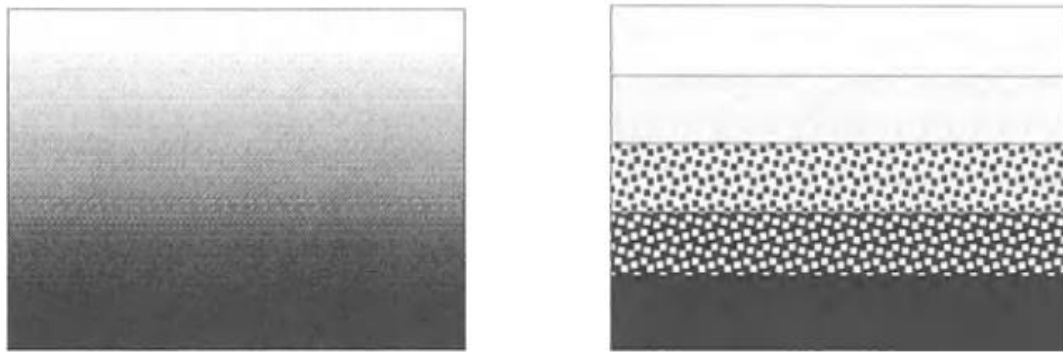
Les matériaux à gradient fonctionnelle (FGM) sont des matériaux composites dont la composition ou la structure contrôlée (Erdogan F., 1995; Yang Y.Y., 1997; Kokini K., 1997; Yang Z., 2003) et il est donc possible de fabriquer des composants avec des propriétés locales souhaités (Carvalho O., 2015).

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une classe de matériaux composites qui ont une variation continue des propriétés des matériaux d'une surface à l'autre et d'alléger ainsi la concentration des contraintes trouvées dans les composites stratifiés. La gradation des propriétés du matériel réduit les contraintes thermiques, les contraintes résiduelles et les concentrations de contraintes.

Une structure à gradation fonctionnelle est définie comme " ceux dans lesquels les fractions volumiques de deux ou plusieurs matériaux sont varié continuellement selon une fonction exiger en fonction de la position le long de certaine dimension (s) de la structure à réaliser " (Reddy J.N., 2000).

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) ont été introduits comme une classe de composite avancé qui compose de simple gradient continu ou discontinu dans la composition et de la microstructure (Siti Nur Sakinah J., 2013)

Dans les formes les plus simples, deux ingrédients de matériaux différents changent progressivement de l'un à l'autre comme l'illustre la figure II.2.a. Les ingrédients matériels peuvent également changer de façon discontinue telle que la gradation progressive illustrée à la figure II.2.b. Ce type de structure peut également être considéré comme un FGM. Le FGM le plus traditionnel est obtenu par composition d'une céramique réfractaire à un métal. Il peut intégrer des fonctions incompatibles telles que la résistance à la chaleur, l'usure, l'oxydation, une haute ténacité, la capacité de liaison des métaux, sans contrainte thermique interne grave.



a) Matériau FGM continu

b) Matériau FGM à gradation discontinue

Fig. II.3 Matériau de gradient de propriété (Miyamoto Y., 1999).

La première idée générale de gradients structurels a été avancé pour les composites et les matériaux polymères en 1972 (Bever M.B., 1972; Shen M., 1972). Différents modèles ont été proposés pour des gradients de composition, dans la concentration des fibres, et dans la polymérisation pour obtenir des structures gradués. Cependant, il n'y avait aucune enquête réelle sur la façon de concevoir, fabriquer, et d'évaluer les structures de gradient progressives jusqu'aux années 1980 (Miyamoto Y., 1999).

En 1985, l'utilisation du contrôle de la texture continue a été proposé afin d'augmenter la force d'adhérence et de minimiser les contraintes thermique dans les revêtements céramiques et les articulations en cours d'élaboration pour le moteur de fusée réutilisable (Niino M., 1984). Les développeurs ont réalisé que ce contrôle continu d'une propriété pourrait être étendu à un concept plus général qui pourrait être appliqué pour conférer de nouvelles propriétés et fonctions à tout matériau en changeant progressivement sa texture ou composition. À l'heure actuelle, le concept de l'ingrédient matière a été introduit pour la conception de tels matériaux.

En 1986, ces types de matériaux ont été appelés matériaux à gradient fonctionnel, qui est devenu bientôt en abrégé FGM. En 1995, à la suite d'une discussion lors de la troisième Symposium international sur les FGM tenue à Lausanne en 1994, il a été décidé de changer le nom complet de matériaux à gradient fonctionnel, car il est plus précis à la fois descriptive et grammaticalement.

Les FGM ne sont pas des matériaux homogènes, il a été reconnu que, pour les créer, il faudrait une méthodologie de conception et de modélisation théorique ainsi que dans le

traitement et l'évaluation des études approfondies. Par conséquent, en 1987, un programme de recherche de 5 ans, des études fondamentales sur la relaxation de la contrainte thermique, a été lancé au Japon (Miyamoto Y., 1997). L'accent mis par le programme était de développer des formes pour une utilisation à haute température. Depuis 1989, les résultats de ces programmes de recherche et de développement ont été diffusés dans le monde entier par l'intermédiaire de papiers, des articles, des réunions internationales et des programmes d'échange. Un colloque international sur les FGM a lieu tous les 2 ans à compter de la première en 1990 à Sendai suivie par San Francisco, Lausanne. Aujourd'hui, le concept de la FGM étend sur une variété de domaines des matériaux à travers le monde (Hirai T., 1996).

En fonction de la nature du gradient, les matériaux fonctionnellement gradués FGM peuvent être groupées en catégories suivantes (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).

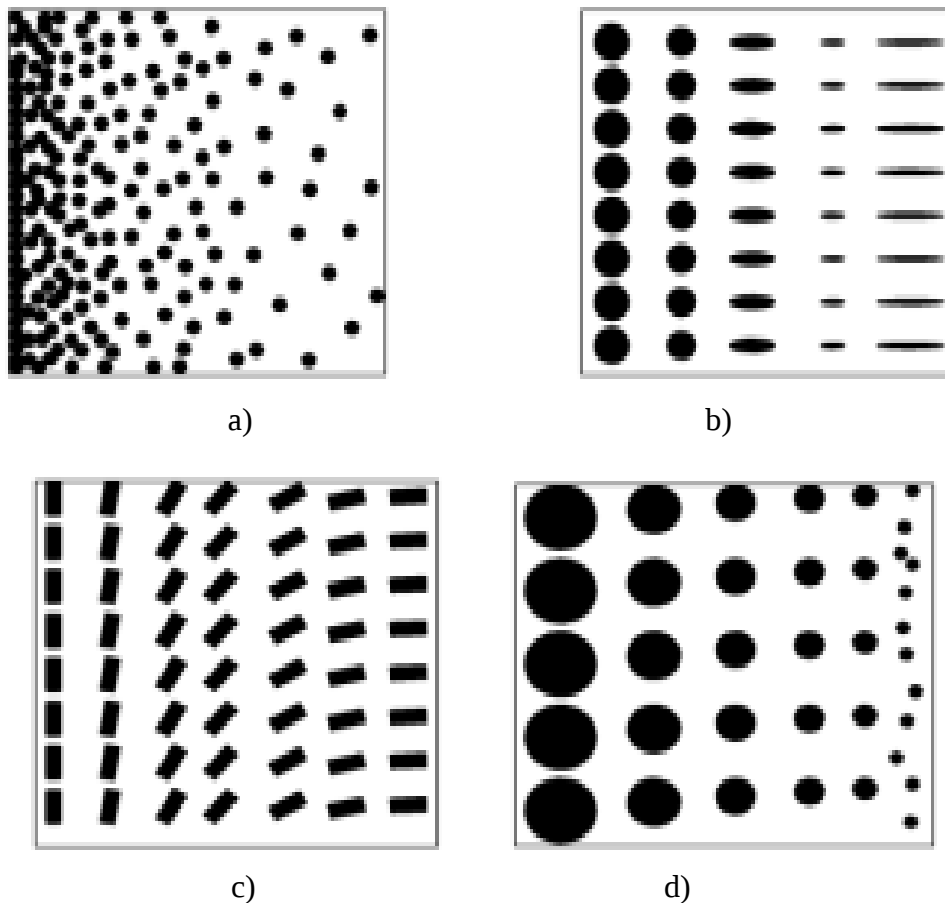


Fig. II.4 Différentes types des FGM (Gupta K.M., 2012; Neubrand A., 2001).

II.3 Application des Matériaux FGM

En raison de leurs propriétés, les FGM sont potentiellement largement applicable dans de nombreux domaines, figure II.4.

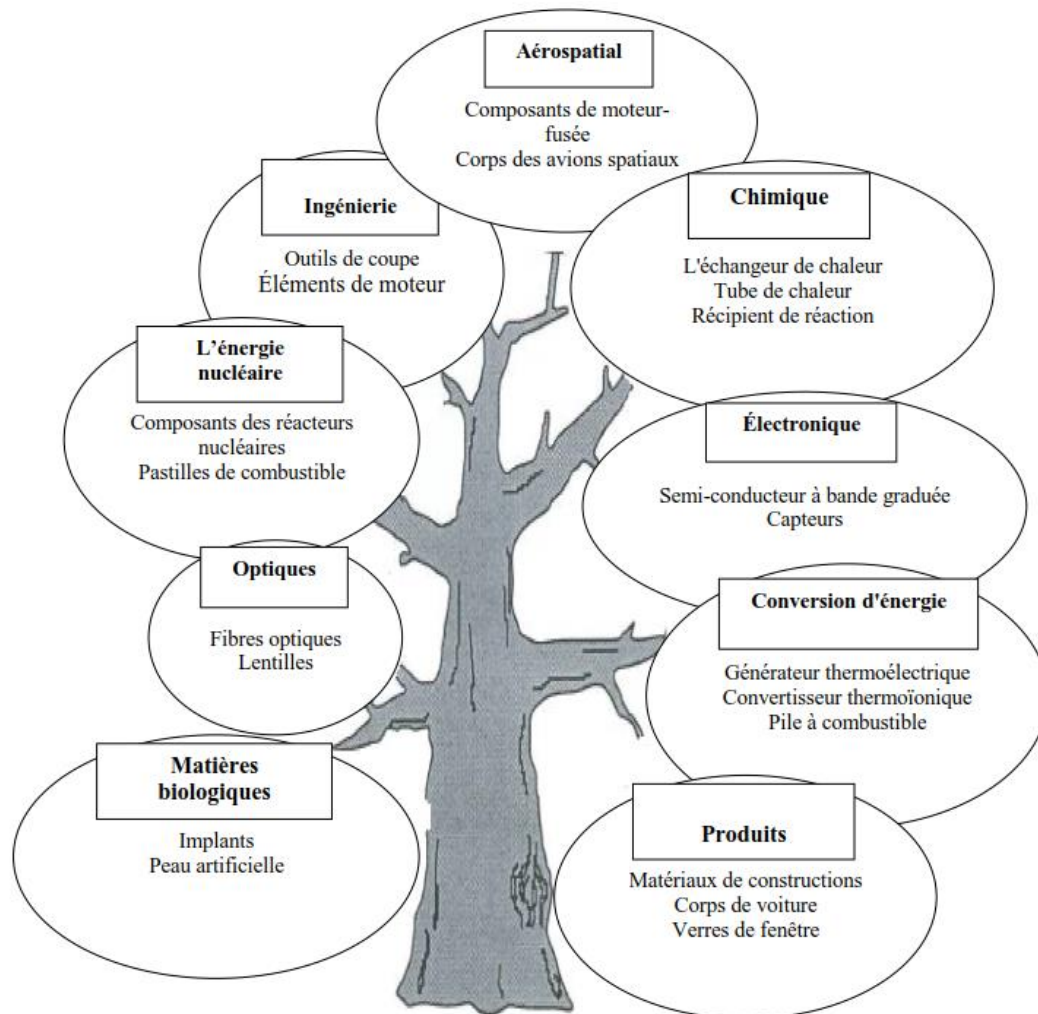


Fig. II.5 Principaux domaines d'application des matériaux à gradient de propriété FGM (Miyamoto Y., 1999).

Les matériaux à gradient de propriété ont été élaborés autant que matériaux résistants à des grandes contraintes thermiques pour les structures aéronautiques et les réacteurs à fusion (Hirai T., 1999; Uemura S., 2003).

Maintenant, ils sont développés pour une multitude d'objectifs structurels dans les environnements de haute température. Les applications des matériaux FGM sont diverses et nombreuses, ils offrent de grandes performances dans les applications où les conditions de fonctionnement sont sévères (BENATTA Mohamed A., 2011).

Le plus souvent les céramiques peuvent être utilisés comme barrières thermiques pour les moteurs, turbines à gaz, couches minces en optiques (Nguyen., 2004). Dans le domaine de

transport comme composants de véhicules spatiaux, la protection du véhicule lors de choc, les moteurs de fusée, missiles furtifs (Miyamoto Y., 1999), des sondes (Müller E., 2003), des déclencheurs (Qiu J., 2003), des outils de coupe (Cho J.R., 2002), des turbines et moteurs aéronautiques (Miyamoto Y., 1999), des détecteurs photoélectriques (Paszkievicz B., 2008) et des implants dentaires (Watari F., 2004). Plusieurs revues traitent des divers aspects de FGM ont été publiées dans les dernières années. Elles prouvent que la majeure partie de première recherche étudiée dans les FGM s'était concentrée sur l'analyse du comportement mécanique et la rupture sous l'effet des contraintes thermiques (Shen H.S., 2009).

II.4 Fabrication et Méthodes D'élaboration des FGM

Depuis 1980, des recherches sur les FGM ont été consacrées au traitement de ces matériaux et une grande variété de méthodes de production a été développée (Hirai T., 1996). Le processus de fabrication d'un FGM peut habituellement être divisé en deux étapes, la première c'est d'établir la structure non homogène dans l'espace, gradation, la deuxième c'est la transformation de cet matériau en bloc « consolidation ». Des processus constitutifs sont basés sur un habillage par étapes de la structure graduée à partir des matériaux de précurseur ou des poudres. Les principaux procédés disponibles de nos jours pour la production des matériaux FGM : coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting), coulage en bande (Tape Casting), projection thermique (plasma), dépôt chimique et physique en phase vapeur (CVD et PVD) et le frittage laser différentiel. Il ressort de notre étude bibliographique que de nombreuses méthodes d'élaboration sont employées pour la réalisation des matériaux FGMs. les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie (BENATTA Mohamed A., 2011).

II.4.1 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

La coulée en barbotine, est une technique utilisée pour la mise en forme de la céramique, un procédé typique pour la poudre empilé sous un courant induit par la pression. Une cavité dans un moule en plâtre de Paris est remplie d'une suspension contenant des particules d'un matériau céramique. Le liquide de suspension est absorbé par le moule par le biais des forces capillaires et les particules de céramique, qui sont généralement plus grands que les canaux capillaires, qui sont laissés sur les parois de la cavité du moule. Lorsque l'épaisseur de paroi souhaitée a été atteinte, la barbotine en excès est évacuée du moule et le corps vert est éliminé par séchage. La répétition de coulage en boues de compositions différentes peut être utilisée pour produire des MGF stratifiés. Un schéma de coulée à gradient dans laquelle un feuillet circule continuellement à travers le moule pendant l'étape de coulée est représenté sur la

figure II.5 (Marple B.R., 1997). D'autres configurations sont également proposées par (Marple B.R., 1996). L'élément commun est la présence de plusieurs réservoirs contenant des suspensions de matériaux et d'être jeté. La composition de la barbotine introduite dans le moule est commandée pour correspondre à la composition souhaitée des piles étant déposé. Le glissement est diffusé en continu à travers le moule, et les suspensions des réservoirs sont ajoutées par des pompes de flux à des débits contrôlés par l'ordinateur. Le mélange des suspensions est amélioré par l'utilisation des mélangeurs fixes, en forme de spirale pour créer une turbulence pendant l'écoulement à travers les tubes d'alimentation.

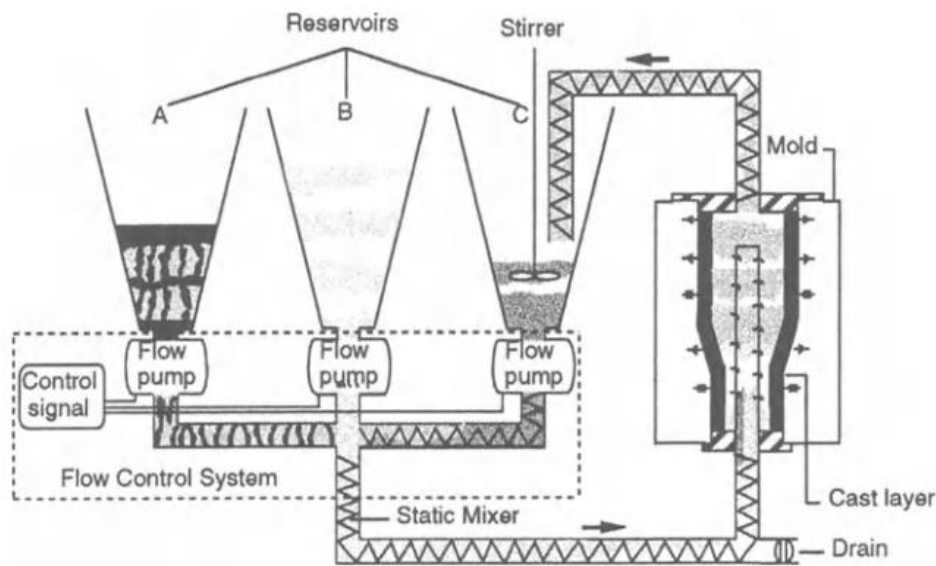


Fig. II.6 Schéma du processus de production de matériaux gradués par coulage (Marple B.R., 1997).

II.4.2 Coulage en bande (Tape casting)

La méthode de coulage en bande (Tape casting) est favorisée, du fait de faire coller facilement de grands nombres de feuilles minces d'une épaisseur uniforme entre eux. D'une manière générale, ce procédé a été effectué dans un système non aqueux (Takemura M., 1990; Kawasaki A., 1990).

Le processus de coulage en bande a été employé pour préparer les diverses bandes de poudres fines en suspension non aqueuse, dont lequel les matériaux composites laminaires et les matériaux à gradient de propriétés (FGM $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-TiC}$) ont été produits en coupant, en empilant, en stratifiant le matériau, ensuite enlevant la reliure, et ont pressant les produits obtenus à chaud, le coulage en bande est une méthode utile pour modifier les propriétés mécaniques des composants en céramique (Zeng Y.P., 2000).

II.4.3 Compactage des couches (poudre d'empilement)

Dans cette méthode simple, un gradient est constitué par le dépôt des couches de poudre avec des compositions change dans la matrice compacté (Atarashiya K., 1993) (Leushake U., 1999). Les inconvénients de ce processus sont évidents : changements discrets, nombre limité des couches (jusqu'à 10 dans l'échelle de laboratoire, mais pas plus de deux ou de trois dans la fabrication potentielle), épaisseur limitée des différentes couches (normalement pas moins de 1mm), taille limitée de la pièce ($<100 \text{ cm}^2$) en raison des limites des forces de compaction. Néanmoins cette méthode permet des études de laboratoire efficaces sur des systèmes à gradient de propriétés (Kieback B., 2003).

II.4.4 Coulée par centrifugation

Dans la coulée par centrifugation, des particules d'une phase réfractaire sont dispersées dans un métal fondu. Ces particules peuvent être formées in situ pendant le refroidissement du fondant (Zhang J., 1998), ou être dispersées dans une étape précédente. La différence de densité entre les particules et le métal fondu mène à la formation d'un gradient de concentration de particules si le fondant est moulé dans une centrifugeuse. Particules avec une plus faible densité (Mg_2Si , (Zhang J., 1998)) et une densité plus élevée (Al_3Ti , (Watanabe Y., 1997)) que le fondant a été utilisé pour préparer les tubes en aluminium à gradient de propriétés qui sont sélectivement la particule renforcée sur la surface intérieure ou extérieure du tube.

II.4.5 Projection plasma

La projection plasma consiste à introduire des particules solides (de taille inférieur à 100 μm , environ) dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m/s. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des tronçons solidifiés obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement préparé (Watrementz B., 2006).

Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques de cette méthode sont l'isolation thermique et électrique, la résistance à l'usure et à la corrosion.

Une recherche détaillée a été effectuée sur la microstructure et le contrôle de propriété des fines particules pulvérisés par plasma. La projection par plasma est un processus rapide et fournit la formation de film sur une large zone, mais a habituellement un inconvénient avec sa microstructure approximative (Omori M., 1998). (Ichikawa K., 2000) a employé les poudres

mécaniquement alliées des matériaux thermoélectriques, et a réussi à bien contrôler la teneur en dépôt dans le SiC pour former un matériau thermoélectrique transporteur gradué avec une microstructure homogène. Sa configuration de pulvérisation est montrée par la figure II.6.

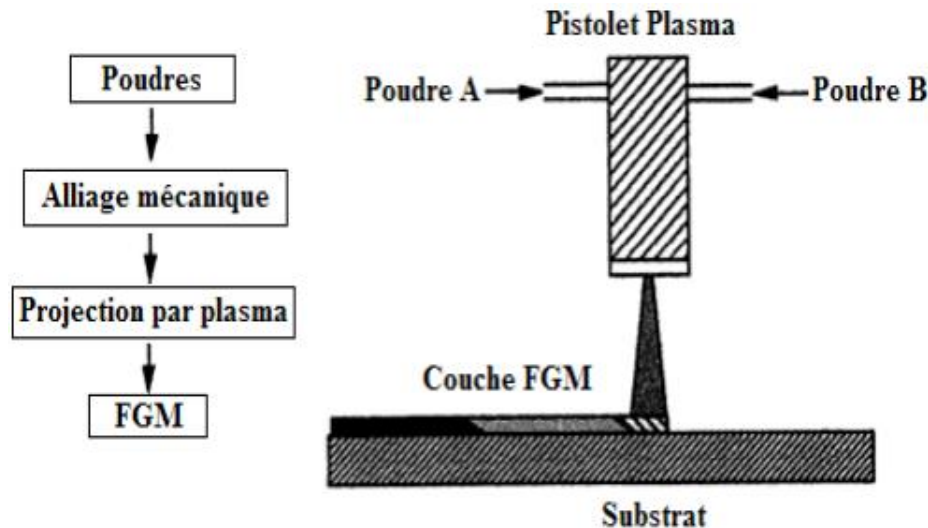


Fig. II.7 Projection plasma pour former un FGM thermoélectrique (Ichikawa K., 2000).

(La composition est graduée dans la direction plane)

II.4.6 Dépôt physique en phase vapeur (PVD)

La technique de dépôt physique en phase vapeur (Physical Vapor Deposition) est une technologie nécessaire pour la production de revêtements de barrière thermique. Parmi les avantages de PVD, les revêtements sont fabriqués ont des surfaces lisses, sans exigence, en fin il n'y a pas de fermeture de trous de refroidissement. Toutefois, le principal avantage est leur résistance exceptionnelle aux chocs thermiques, ainsi que la durée de vie considérablement plus longue. L'équipement utilisé par PVD pour déposer les revêtements d'isolation thermiques, se compose de plusieurs récipients pour le chargement, le préchauffage, et le dépôt plus un dispositif de rotation et la manipulation des échantillons ...etc. (Miyamoto Y., 1999).

Une autre approche pour obtenir une structure à gradients est d'utiliser un mélange d'aluminium, l'alumine, et de zircone, chimiquement contrôlés peuvent être fabriqués facilement par vaporisation à partir de sources multiples en utilisant un ou plusieurs pistolets électroniques. En ajustant les paramètres de faisceau d'électrons, différents taux de dépôt peuvent être obtenus pour chaque source (Miyamoto Y., 1999). Si les taux d'évaporation de

deux composants, par exemple alumine et zircone, sont changés sans interruption, un gradient défini de composition est obtenu, c'est le FGM.

Pour les systèmes de barrières thermiques plus sollicités à des environnements oxydant, notamment les aubes mobiles de turbines aéronautiques ou terrestres ne sont, toutefois, pas systématiquement élaborés par projection thermique ; dans le cas de la zircone yttrée ZrO_2 , un autre procédé différent est également employé. En l'occurrence, il s'agit de la technique de l'évaporation sous faisceau d'électrons (EB-PVD) qui conduit à des microstructures et des propriétés thermomécaniques assez différentes de celles obtenues par la technique de la projection thermique (Mévrel R., 2009).

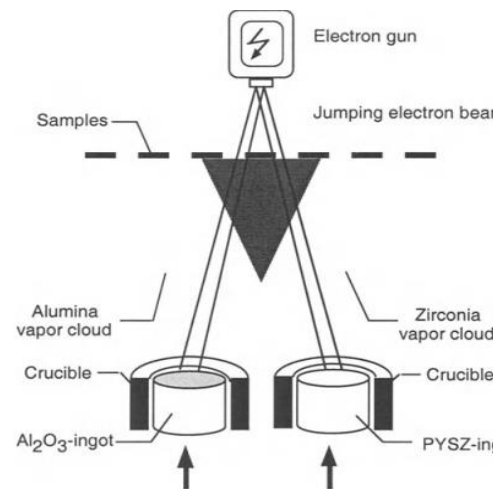


Fig. II.8 Schéma d'un faisceau d'électrons - dépôt physique en phase vapeur coucheuse à deux sources d'évaporation chauffée par un faisceau unique de saut (Schulz U., 1997).

II.4.7 Dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Dans la technique de dépôt chimique en phase vapeur (Chemical Vapor Deposition), figure I.8, un dépôt est formé sur un substrat en soumettant la source des gaz (par exemple, des hydrures, bromures ou chlorures) qui occupent la chambre de réaction, à différents types d'énergie comme la chaleur, la lumière et le plasma (Miyamoto Y., 1999).

Les FGM peuvent être synthétisés à lent pour modérer des taux de dépôt en modifiant le rapport de mélange de la source des gaz, ou par le contrôle de la température de dépôt, la pression de gaz, ou le débit de gaz. En raison de son faible taux de dépôt, CVD est largement utilisé pour l'infiltration de piles ou pour la fabrication de couches minces. Un exemple typique d'une application de FGM par CVD est la formation d'un revêtement gradué de carbure de silicium SiC sur le graphite dans lequel il y a une transition continue de SiC au C. des compositions contrôlés la source de mélanges des gaz (CH_4 - SiCl_4 - H_2) sont employés aux températures de dépôt entre 1400°C et 1500°C et aux pressions entre 1.3 et 6.5 KPa.

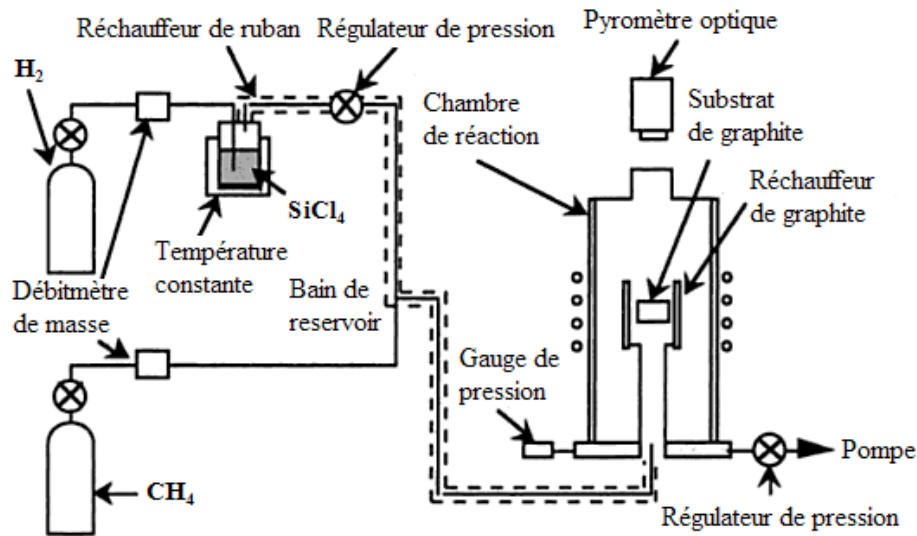


Fig. II.9 Installation pour la préparation d'un FGM SiC/C par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (Miyamoto Y., 1999).

II.4.8 Frittage :

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces solide par chauffage d'une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce. Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite FGM composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique (Takahashi M., 1990). Ce procédé peut être généralement appliqué pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

Le rayonnement thermique du laser permet le contrôle de la température et la focalisation du point à chauffer. La différence de l'intensité de l'irradiation sur différents points du matériau, provoque un frittage différentiel le long de la pièce, ce qui résulte en des microstructures différentes, dépendant de la position du point irradié.

(Yuki M., 1991) ont utilisé cette technique pour élaborer un FGM PSZ/Mo. La figure II.9.

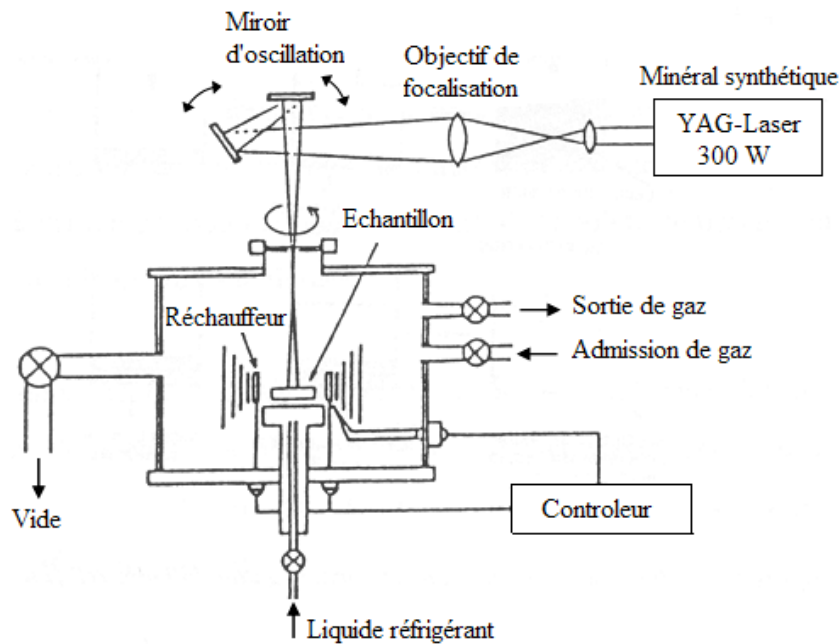


Fig. II.10 Procédé de frittage laser différentiel (Yuki M., 1991).

II.4.9 Dépôt par électrophorèse

Un autre processus est ajouté aux différentes techniques de la fabrication des FGM, ce que n'appelle le dépôt par électrophorèse (EPD) est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes (électrophorèse) et le dépôt de particules sur l'un des électrodes (Aldo R., 2002). EPD permet la conception des matériaux FG en forme de plaque binaire en déposant une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 , et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches est déterminée par la suite de la suspension au moment du dépôt, figure II.10.

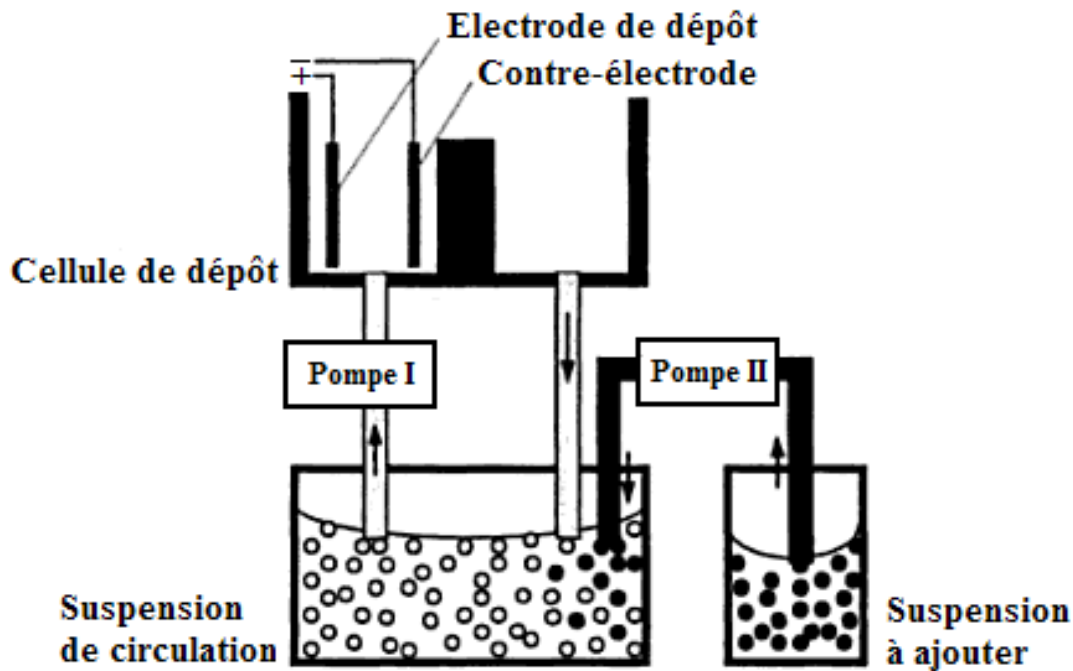


Fig. II.11 Procédé EPD pour la production des matériaux FG (Aldo R., 2002).

II.5 Lois Régissant la Variation des Propriétés Matérielles des Plaques FGM

Les matériaux à gradient de propriétés FGM consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure (HOUARI Mohammed S.A., 2011; BENATTA Mohamed A., 2011; KACI A., 2012).

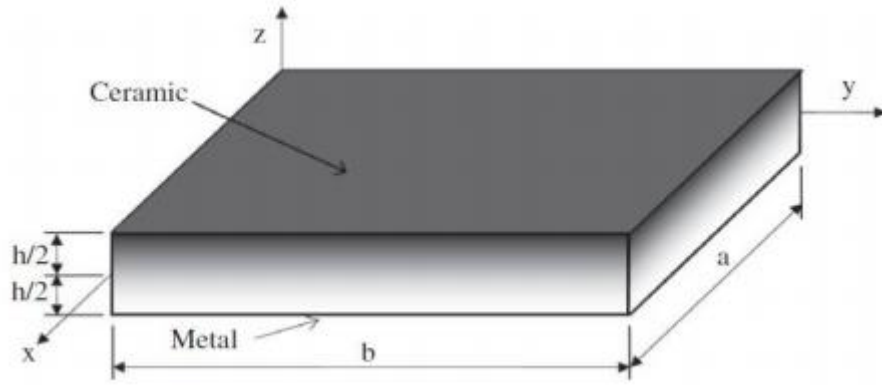


Fig. II.12 Caractéristiques géométriques d'une plaque FGM

Le plan de la plaque est défini par les coordonnées x et y ; tandis que l'axe z perpendiculaire au plan moyenne de la plaque est dans la direction de l'épaisseur. Les propriétés du matériau : dont le module de Young E , le coefficient de dilatation thermique α , la conductivité thermique K , la masse volumique ρ ou même le coefficient de Poisson ν , la variation de ce dernier à travers l'épaisseur est négligeable (Jomehzadeh E., 2009), sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes mais sont déterminées selon les besoins d'utilisation.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe z). Les propriétés de la plaque FGM changent dans la direction de l'épaisseur suivant une fonction de loi de puissance (P-FGM), une fonction exponentielle (E-FGM), au avec une fonction sigmoïdes (S-FGM).

II.5.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La fraction volumique d'une plaque P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0 \quad (\text{II.1})$$

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c) \quad (\text{II.2})$$

$$\alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m (1 - V_c) \quad (\text{II.3})$$

où k est le paramètre du matériel qui décrit le profil de variation du matériau à travers l'épaisseur h . En utilisant la loi de mélange, les propriétés des matériaux tels que le module d'élasticité E et de dilatation thermique α sont supposés être fonction des matériaux constitutifs, figure II.12.

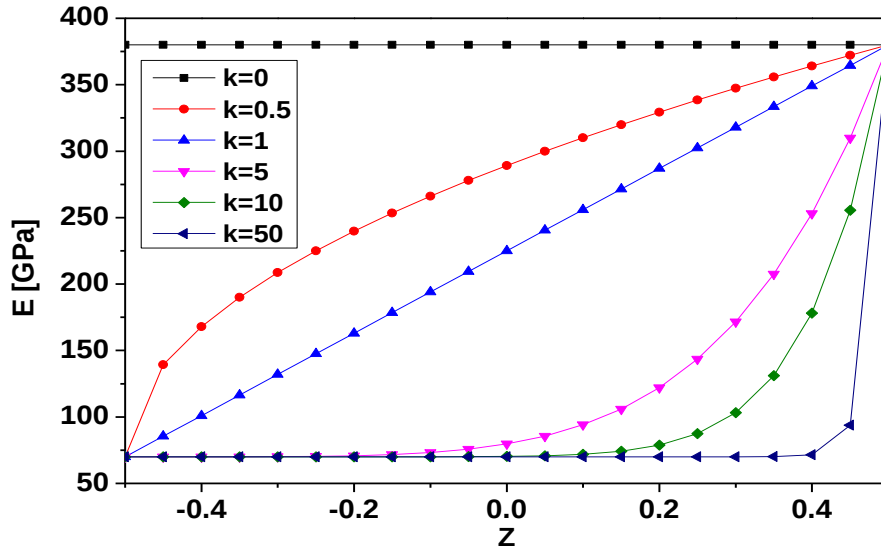


Fig. II.13 Variation de module de Young E en fonction de k dans une plaque P-FGM.

II.5.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Dans le cas de l'ajout à la plaque FGM, une fonction singulière simple aux composites multicouches, les concentrations de contraintes apparaissent sur l'une des interfaces où la matière est continue mais changent rapidement.

Par conséquent, Chung et Chi définissent la fraction volumique de puissance en utilisant deux fonctions afin d'assurer la bonne distribution des contraintes de toutes les interfaces (Chi Shyang-ho., 2003). Les deux fonctions sont définies par :

$$\begin{aligned} V_f^1(z) &= 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2z}{h}\right)^k & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2z}{h}\right)^k & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (II.4)$$

En utilisant la loi de mélange, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculée par :

$$E(z) = \begin{cases} V_f^1(z)E_c + (1 - V_f^1(z))E_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)E_c + (1 - V_f^2(z))E_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (II.5)$$

$$\alpha(z) = \begin{cases} V_f^1(z)\alpha_c + (1 - V_f^1(z))\alpha_m & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_f^2(z)\alpha_c + (1 - V_f^2(z))\alpha_m & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (II.6)$$

Où les indices α_c et α_m désignent respectivement la propriété de la céramique et le métal.

La figure II.13, montre que la variation du module de Young selon l'équation (II.5) a des distributions sigmoïdes, donc la plaque FGM est ainsi appelée Plaque S-FGM.

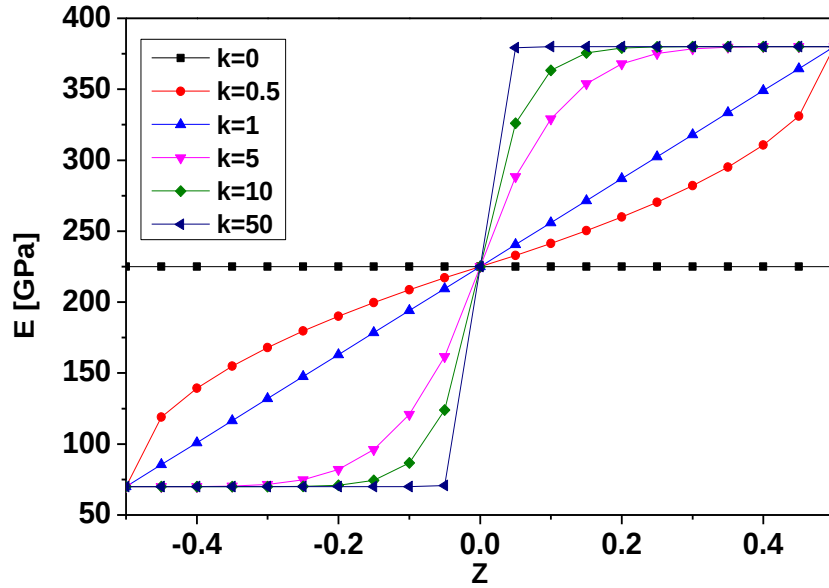


Fig. II.14 Variation de module de Young E en fonction de k dans une plaque S-FGM.

II.5.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

Beaucoup de chercheurs utilisent la fonction exponentielle pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la fonction exponentielle est donnée par (Delale F., 1983) :

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (II.7)$$

$$\alpha(z) = \alpha_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad (II.8)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \text{ ou } B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)$$

Selon la propriété du matériau cherchée.

La figure II.14, représente la variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM.

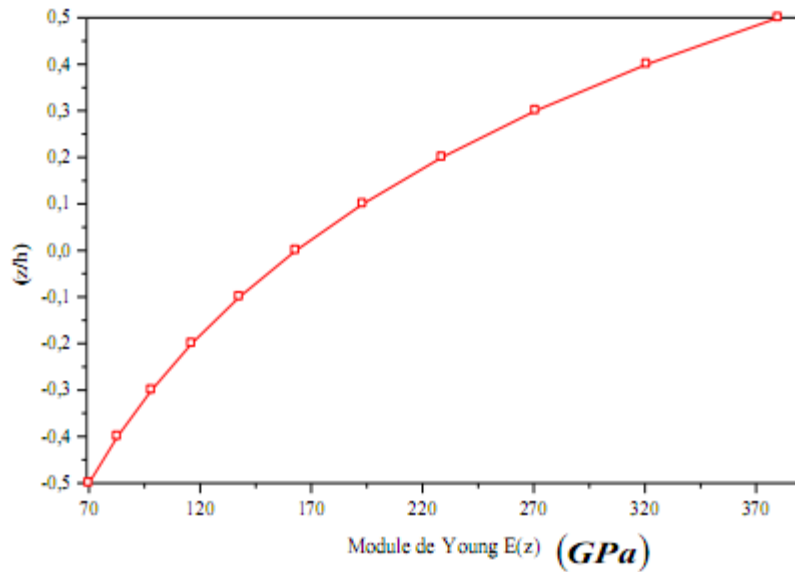


Fig. II.15 Variation de module de Young E dans une plaque E-FGM.

II.6 Avantages et inconvénients des FGM :

Les matériaux fonctionnellement gradués présentent des avantages et des inconvénients:

II.6.1 Avantages des FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement (Narottam.P et al, 2011) et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que:

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

II.6.2 Inconvénients des FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2).

Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour (T_2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou à une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses (Narottam.P et al, 2011).

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons définis les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement depuis l'idée jusqu'au premier concept, et leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les différents modèles des plaques FGMs selon les principales lois de mélange.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes unissent à la fois une rigidité, une résistance mécanique et thermique, une ténacité élevée et une grande légèreté, qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre III Aperçus bibliographiques sur les théories des plaques

III.1 Introduction

L'utilisation intensive des plaques isotropes et des plaques composites dans diverses industries, particulièrement dans les domaines de l'aéronautique, de l'automobile, et de la construction navale, a stimulé les chercheurs à développer des théories capables de décrire correctement leur comportement structural.

Définition d'une plaque : Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface plane plan (x,y) et par une petite épaisseur notée (h) par rapport aux autres dimensions (longueur, largeur) elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Les plaques peuvent être classées en trois catégories :

- 1) Les plaques isotropes : elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leurs sections transversales sont homogènes. Elles sont définies par deux paramètres élastiques respectivement (le module d'élasticité, le coefficient de Poisson). On les trouve dans les constructions civiles courantes (bâtiment, ouvrage d'art, ...etc.).
- 2) Les plaques orthotropes : leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou artificielle (dalle rédiées) le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les trouve dans les constructions navales, aéronavale, des bâtiments et ouvrages d'art (Jean-Louis Batoz 1990).
- 3) Les plaques anisotropes : leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour le devenir, elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

L'analyse des plaques est un problème tridimensionnel. Presque toutes les théories développées ont eu pour principal objet la réduction du problème 3-D à un problème 2-D en se servant des hypothèses simplificatrices concernant la cinématique des déformations et l'état des contraintes à travers l'épaisseur. Dans ce qui suit, seules les théories les plus utilisées dans l'analyse des plaques, seront exposées. Ces théories des plaques développées dans la littérature conduisent à améliorer l'évolution de la variation des champs de déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

III.2 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

En 1850, Kirchhoff (1850 ab) a développé la plus connue des théories des plaques appelée « théorie classique des plaques ».

Le champ des déplacements d'un point de coordonnées (x, y, z) à l'instant t s'écrit :

$$\bar{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{III.1a})$$

$$\bar{v}(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{III.1b})$$

$$\bar{w}(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (\text{III.1c})$$

Où u, v, w sont les déplacements le long des coordonnées x, y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$).

Etant donné que les hypothèses de Kirchhoff négligent le cisaillement transverse et l'effet de la déformation normale dans la direction transversale, la déformation de la plaque est due essentiellement à la flexion et aux déformations en plan (Figure II.1); ce qui limite la validité de cette théorie aux plaques minces (Ashton et Whitney (1970), Timoshenko et Woinowsky-Krieger (1959))

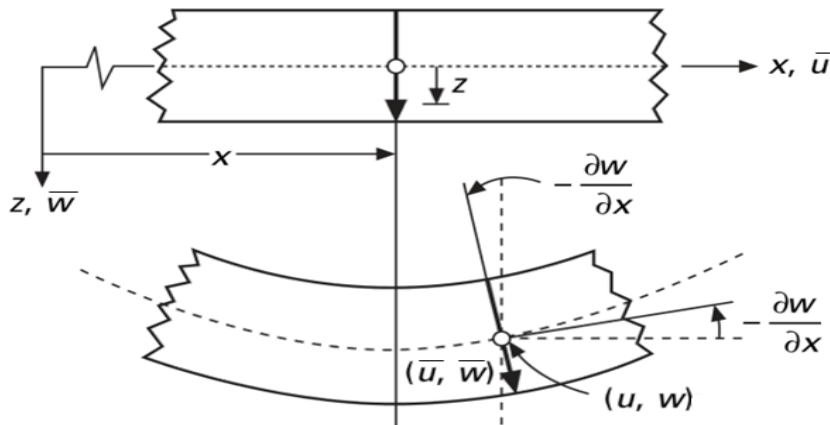


Figure III.1: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques (Mahi, 2012)

III.3 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Reissner-Mindlin) (FSDPT)

Cette théorie (également appelée théorie de Mindlin) est une extension des travaux de Timoshenko (1921, 1922) et est considérée comme une amélioration de la théorie classique des plaques minces (théorie de Kirchhoff). Cette amélioration consiste à rajouter la déformation en cisaillement transverse dans les hypothèses cinématiques. La distribution de cette déformation est supposée constante dans l'épaisseur. Le champ des déplacements est alors le suivant (Figure III.2.):

$$\bar{u}(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \quad (\text{III.2a})$$

$$\bar{v}(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \quad (\text{III.2b})$$

$$\bar{w}(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (\text{III.2c})$$

Où u , v , w sont les déplacements le long des coordonnées x , y et z d'un point du plan moyen (plan $z = 0$); ϕ_x et ϕ_y sont les rotations de la normale à la section transversale par rapport aux axes y et x respectivement.

La théorie des déformations du premier ordre nécessite un facteur de correction du cisaillement qui est difficile à déterminer à cause de sa dépendance à la fois, de la géométrie, du coefficient de Poisson à travers l'épaisseur, des charges appliquées et des conditions aux limites.

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.

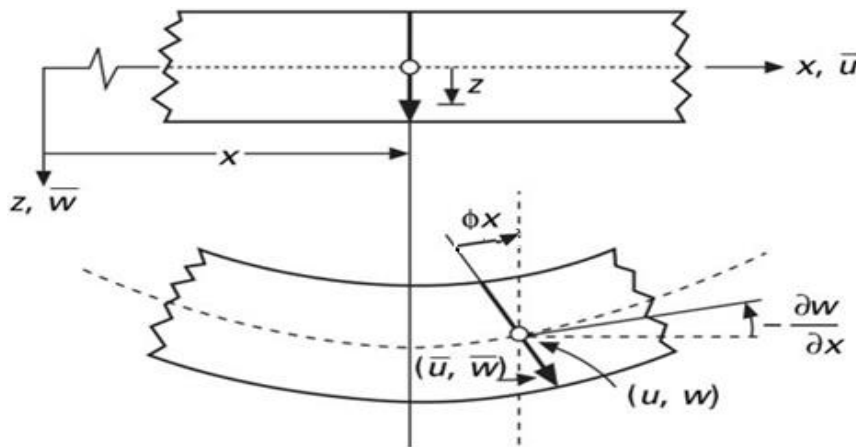


Figure III.2.: Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre (Mahi. 2012)

III.4 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élève (HSDPT)

A la différence de la théorie classique des plaques (CPT) qui se base sur la distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur et la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT) qui introduit le cisaillement transversal d'une façon uniforme à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élève (HSDT) est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur .par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale .ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction . les références sur de tels modèles peuvent être trouvées dans (Hildebrand et al.,1949 ; Naghdi,1957 ; Reissner , 1975 ; Reddy, 1984 ; Kant et swaminathan, 2002 ; Soldatos 1992 ; Akavci 2010 ; Akavci 2014 ; Mahi et al .2014 ; Mantari et al. 2011 ; mantari et guedes soares 2012 ; mantari et guedes soares 2012 ; Mantari et guedes soares 2013 ;zenkour 2007)

Le champ de déplacement de cette théorie est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{III.3a})$$

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z \frac{\partial w^0}{\partial x} + f(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{III.3b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{III.3c})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et la rotation autour des axes x et y et $f(z)$ est la fonction de forme pilotant la distribution des déformations de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque. Elle est propre à chaque théorie (Tableau III.1).

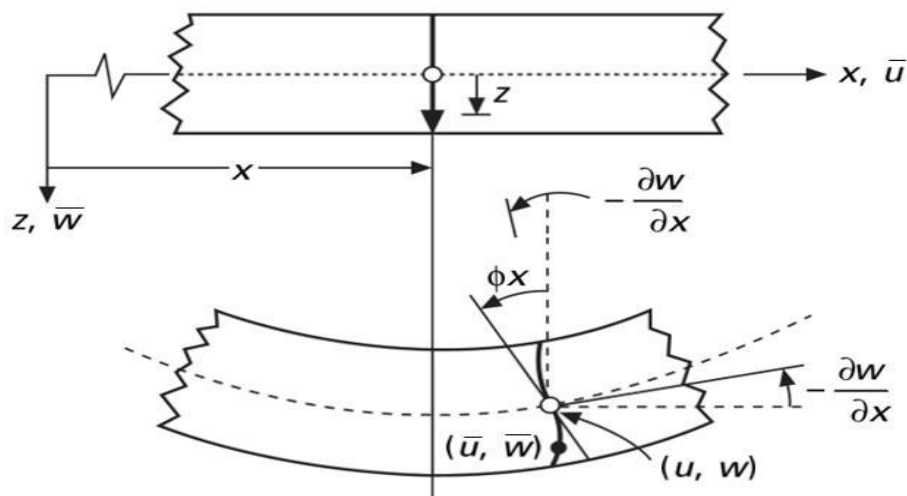


Figure III.3 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des plaques (Mahi, 2012)

Tableau III.1: Différentes fonctions de forme des théories des plaques isotropes

Théorie	Intitulé	Fonction de forme $f(z)$	Distribution de γ_{xz} et γ_{yz} suivant z	Coefficient de correction de (cisaillement)	Validité
CPT Kirchhoff (1850)	Théorie classique des plaques	0	-	-	Plaques minces
FSDPT Mindlin (1951)	Théorie de déformation des plaques du 1er ordre	z	Constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambartsuin (1958)	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non requis	Plaques minces et moyennement épaisses
TSDPT Touratier (1991)	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
ESDPT Karama, Afaq et al. (2003)	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \exp\left(-2\left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT Reddy (1984)	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche, Tounsi et al. (2011)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$ $\cosh(\pi/2 - 1)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Atmane, Tounsi et al. (2010)	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]^z}$ $-\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z$ $\cosh(\pi/2 - 1)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi (2002) (*)	Théorie raffinée des plaques	$h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a exposé les différents modèles sur les théories des plaques rencontrés dans la littérature telles que la théorie classique des plaques de Love-Kirchhoff (CPT), celle de déformation de cisaillement du premier ordre (Reissner-Mindlin, FSDPT) et la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élève (HSDPT).

Chapitre IV : Etude analytique de la vibration libre des plaques FGM sur fondations élastiques

IV.1 Introduction

Le contrôle des vibrations dans les éléments de structure tels que les plaques est une préoccupation majeure des chercheurs. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques des plaques s'avère indispensable.

Les vibrations libres sont des vibrations inhérentes aux propriétés propres de la structure en l'absence des forces extérieures. Dans tous les cas, Ces vibrations mettent en jeu un échange permanent entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation de l'élément plaque. L'énergie cinétique est associée à la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés. Alors que la déformation est associée aux contraintes dynamiques liées à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire.

Pour atténuer l'effet des ces vibrations sur le comportement des plaques, une alternative a été suivie en dotant ces plaques par des fondations élastiques de type Winkler ou Pasternak. Le développement des modèles plus réalistes de fondation et des méthodes simplifiées pour résoudre ce problème est très important pour arriver à des concepts sûrs. Ces structures de plaques peuvent être trouvées dans différents types industriels telles que les radiers, les réservoirs de stockage et les piscines. La théorie classique des plaques (CPT) qui néglige l'effet de cisaillement transverse est valable pour l'étude des plaques minces. Cependant, la théorie classique CPT sous-estime la flèche. Plusieurs théories de déformation de cisaillement ont été développées pour surmonter les insuffisances de la théorie CPT.

Dans ce chapitre, on a mené une analyse en vibration libre des plaques FGM reposant sur une assise élastique de type Winkler-Pasternak (à deux paramètres). Une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé quasi-3D (HSPDT quasi-3D) a été utilisée pour déterminer le comportement dynamique. Le point culminant de cette théorie est qu'en plus d'inclure les fondations élastiques de Winkler-Pasternak et l'effet d'étirement (Stretching effect), le champ de déplacement ne contient que cinq inconnus par rapport à d'autres comportant six fonctions de déplacement ou plus rencontrées dans la littérature. Dans cette théorie, le champ de déplacement utilise des termes intégrés indéterminés. Les équations de mouvement qui régissent les plaques FGM sont dérivées du principe d'Hamilton. Les solutions analytiques ont été obtenues en utilisant la technique de Navier. Les fréquences

propres adimensionnelles ont été calculées, pour des plaques simplement appuyées, en résolvant les problèmes aux valeurs propres. La fraction volumique des particules est supposée changée selon une loi de puissance P-FGM.

IV.2 Configuration géométrique et propriétés des matériaux

Considérons une plaque rectangulaire en FGM ayant les dimensions représentées dans la Figure VI.1. On suppose qu'elle est posée sur une base élastique de type Winkler-Pasternak avec une rigidité de Winkler de k_w et une rigidité de cisaillement de k_s . On suppose que la plaque a un comportement élastique linéaire. Les propriétés matérielles de la plaque FGM varient selon une distribution de puissance suivant l'épaisseur de la plaque sous la forme (Reddy2000) :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad \dots (IV-1)$$

P : présente les propriétés matérielles tel que le module de Young E et la masse volumique ρ , les lettres m et c indiquent le métal et la céramique, les deux matériaux qui constituent les deux surfaces de la plaque inférieure et supérieure, respectivement, Ou $-h/2 \leq z \leq h/2$.

P : est l'indice de puissance, ν est le coefficient de Poisson supposant constant. La valeur $p=0$ représente une plaque de céramique.

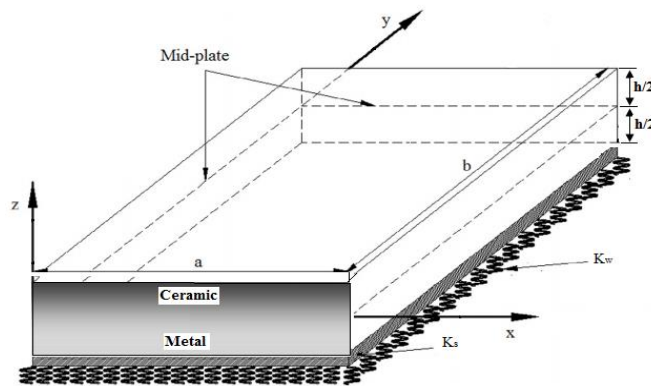


Figure IV.1: Géométrie d'une plaque FG rectangulaire

IV.3 Formulation théorique :

IV.3.1 Relations constitutives

Les relations constitutives linéaires des plaques FG sont écrites comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots (IV-2)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$ sont les composantes de contrainte et de déformation, respectivement. Les coefficients de rigidité Q_{ij} sont donnés par:

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(z)(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \dots (IV-3a)$$

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = \frac{\nu E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \dots (IV-3b)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad \dots (IV-3c)$$

IV.3.2 Champ de déplacement et déformations :

Les hypothèses de base pour le champ de déplacement de la plaque, y compris l'effet de contrainte normale transversale, sont données comme suit (Mahi et al. 2015):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}(x, y, t) \quad \dots (IV - 4a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}(x, y, t) \quad \dots (IV - 4b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + g(z) \varphi_z(x, y, t) \quad \dots (IV - 4c)$$

Où u_0 et v_0 sont les déplacements du plan médian de la plaque le long des directions x et y . w_b et w_s sont les composants de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, et le déplacement φ_z supplémentaire représente l'effet de la contrainte

normale. $f(z)$ et $g(z)$ représentent des fonctions de forme définissant la distribution des efforts de cisaillement transversaux et des contraintes à travers l'épaisseur.

Sur la base de la théorie des plaques épaisses et tenant en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur (effet de la contrainte normale transversale), les hypothèses de base relatives au champ de déplacement de la plaque FG peuvent être exprimées comme suit (Abualnour et al. 2018):

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx. \quad \dots(\text{IV} - 5a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \quad \dots(\text{IV} - 5b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + g(z)\varphi_z(x, y, t) \quad \dots(\text{IV} - 5c)$$

Les coefficients k_1 et k_2 dépendent de la géométrie de la plaque FG. Le champ de déplacements de la présente théorie, satisfait les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverses sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque, est présenté sous une forme plus Simple:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + k_1 A' f(z) \frac{d\theta}{dx} \quad \dots(\text{IV} - 6a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + k_2 \beta' f(z) \frac{d\theta}{dy} \quad \dots(\text{IV} - 6b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + g(z)\varphi(x, y, t) \quad \dots(\text{IV} - 6c)$$

On constate clairement que le champ de déplacement dans l'équation (6) ne gère que cinq inconnus, à savoir u_0 , v_0 , w_b , θ et φ .

Dans cette étude, les fonctions de forme $f(z)$ et $g(z)$ sont choisies en fonction de la forme trigonométrique (Mahi et al. 2015):

$$f(z) = \frac{h}{2} \tanh \frac{2z}{h} - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2 \cosh(1)^2} \quad \dots(\text{IV-7})$$

$$g(z) = 1 - 4 \left(\frac{z}{h} \right)^2 \quad \dots(\text{IV-8})$$

Les déformations non nulles associées au nouveau champ de déplacement dans Eq. (6) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-9a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = f'(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} + g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-9b})$$

$$\varepsilon_z = g'(z) \varepsilon_z^0 \quad \dots(\text{IV-9c})$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-10a})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-10b})$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ k_2 B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-10c})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-10d})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^1 \\ \gamma_{xz}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-10e})$$

$$\varepsilon_z^0 = \varphi_z ; g'(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial z} \quad \dots(\text{IV-10f})$$

Il peut être vu de l'équation. (9) que les efforts de cisaillement transversal

(γ_{yz} et γ_{xz}) sont égaux à zéro en haut ($z = h/2$) et le fond ($z = -h/2$) surfaces supérieure et inférieure de la plaque FG.

Nous avons utilisé la procédure de type Navier pour résoudre les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus. Nous pouvons les exprimer comme:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \dots(\text{IV-11})$$

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Les coefficients A' et B' dépendent du type de solution obtenu par la méthode Navier. Nous donnons ci-dessous, A', B', k_1 et k_2 :

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad \dots(\text{IV-12})$$

α et β sont définis dans l'équation (IV-27).

IV.3.3 Équations de mouvement

Le principe d'Hamilton a été utilisé pour déterminer les équations du mouvement, donnée par (Reddy 2002; Bennoun et al. 2016):

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V_e - \delta K) dt \quad \dots(\text{IV-13})$$

La variation de l'énergie de déformation est exprimée en

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dAdV \\ &= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_z \delta \varepsilon_z^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b \\ &\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + Q_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^0 + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz}^1 + Q_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}^1] dA \end{aligned} \quad \dots(\text{IV-14})$$

Où A est la surface supérieure et les résultantes de contrainte N, M, S et Q sont données par:

$$(N_i, M_i^b, M_i^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, f) \sigma_i dz, \quad (i = x, y, xy), \quad \dots(\text{IV-15})$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad \dots(\text{IV-16})$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} g(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \quad (Q_{xz}^s, Q_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} f'(\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz$$

$$\delta V_e = \int_A f_e \delta w_0 dA \quad \dots(\text{IV-17})$$

$$f_e = K_w w - K_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \dots(\text{IV-18})$$

L'énergie cinétique de la plaque est exprimée par:

$$\begin{aligned}
 \delta K &= \int_V [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] \rho(z) dV \\
 &= \int_A \{ I_0 (\dot{u}_0 \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \delta \dot{v}_0 + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0) + J_0 (\dot{w}_0 \delta \dot{\phi}_z + \dot{\phi}_z \delta \dot{w}_0) \\
 &\quad - I_1 \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \delta \dot{u}_0 + \dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \\
 &\quad + J_1 \left(k_1 A' \left(\dot{u}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \delta \dot{u}_0 \right) + k_2 B' \left(\dot{v}_0 \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \delta \dot{v}_0 \right) \right) \\
 &\quad + I_2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + K_2 \left((k_1 A')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + (k_2 B')^2 \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} \right) \\
 &\quad - J_2 \left(k_1 A' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + k_2 B' \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) \right) + K_0 \dot{\phi}_z \delta \dot{\phi}_z \} dA
 \end{aligned} \quad \dots (IV-19)$$

Où $(I_0, I_1, I_2, J_1, J_2, J_0, K_0, K_2)$ sont les inerties de masse données ci-dessous par les formules (IV-20a) et (IV-20b). $\rho(z)$ est la masse volumique.

$$(I_0, I_1, I_2, J_1) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z)) \rho(z) dz \quad \dots (IV-20a)$$

$$(J_2, J_0, K_0, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (zf(z), g(z), g^2(z), f^2(z)) \rho(z) dz \quad \dots (IV-20b)$$

En Substituant les expressions pour δU , δV_e et δK à partir des équations. (IV-14), (IV-17) et (IV-19) dans l'équation (IV-13) et en intégrant par parties et en collectant les coefficients de δu_0 , δv_0 , δw_0 , $\delta \theta$ et $\delta \varphi_z$, les équations de mouvement de la plaque sont exprimées par:

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 k_1 A' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \\
 \delta v_0 : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} + J_1 k_2 B' \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial y} \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} - f_e &= I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\phi} + I_1 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \nabla \ddot{w}_0 + \\
 J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) & \dots (IV-21) \\
 \delta \theta : -k_1 M_x^s - k_2 M_y^s - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}^s}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial Q_{yz}^s}{\partial y} &= -J_1 (k_1 A' \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \\
 + k_2 B' \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y}) + J_2 (k_1 A' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + k_2 B' \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2}) - K_2 ((k_1 A')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial x^2} + (k_2 B')^2 \frac{\partial^2 \ddot{\theta}}{\partial y^2}) \\
 \delta \varphi_z : \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} - N_z &= J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\phi}_z
 \end{aligned}$$

En remplaçant les équations. (IV-6) dans (IV-20), les contraintes résultantes de la plaque FG sont liées à la déformation totale par:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x^b \\ M_y^b \\ M_{xy}^b \\ M_x^s \\ M_y^s \\ M_{xy}^s \\ N_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & X_{13} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & X_{23} \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & Y_{13} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{11} & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 & Y_{13}^s \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 & Y_{23}^s \\ 0 & 0 & B_{66}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s & 0 \\ X_{13} & X_{23} & 0 & Y_{13} & Y_{23} & 0 & Y_{13}^s & Y_{23}^s & 0 & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \quad \dots (IV-22a)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{yz}^s \\ S_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{44}^s & A_{44}^s \\ G_{55}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} & k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \dots (IV-22b)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz}^s \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44}^s & G_{44}^s \\ F_{55}^s & G_{55}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 B' \frac{\partial \theta}{\partial y} & k_1 A' \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \dots (IV-22c)$$

Ou

$$(A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, g^2(z), z) dz \quad \dots (IV-23a)$$

$$(D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (z^2, f(z), z f(z)) dz \quad \dots (IV-23b)$$

$$(H_{ij}^s, F_{ij}^s, G_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (f^2(z), f'^2(z), f'(z)g(z)) dz \quad \dots(IV-23c)$$

$$(X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, z, f(z), g'(z)) g'(z) dz \quad \dots(IV-23d)$$

IV.3.4 Equations de mouvement en termes de déplacements

En remplaçant l'équation (IV-22) dans Eq. (IV-21), les équations d'équilibre peuvent être exprimées en termes de déplacements u_0, v_0, w_0, θ et φ_z par les formules suivantes.

$$A_{11} d_{11} u_0 + A_{66} d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - B_{11} d_{111} w_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} w_0 + (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_1 \theta + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{122} \theta + X_{13} d_{11} \varphi_z = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_{11} \ddot{w}_0 + (k_1 A') J_1 d_{11} \ddot{\theta} \quad \dots(IV-24a)$$

$$(A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 + A_{66} d_{11} v_0 + A_{22} d_{22} v_0 - (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} w_0 - B_{22} d_{222} w_0 + (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) d_2 \theta + (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s d_{112} \theta + X_{23} d_{22} \varphi_z = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_{22} \ddot{w}_0 + J_1 k_2 B' d_{22} \ddot{\theta} \quad \dots(IV-24b)$$

$$B_{11} d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66}) d_{112} v_0 + B_{22} d_{222} v_0 - D_{11} d_{1111} w_0 - D_{22} d_{2222} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) d_{11} \theta + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) d_{22} \theta + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s d_{1122} \theta + Y_{13} d_{11} \varphi_z + Y_{23} d_{22} \varphi_z - f_e = I_0 \ddot{w}_0 + J_0 \ddot{\varphi}_z + I_1 (d_{11} \ddot{u}_0 + d_{22} \ddot{v}_0) - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \quad \dots(IV-24c)$$

$$- (k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s) d_{11} u_0 - (k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s) d_{22} v_0 - B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') (d_{122} u_0 + d_{112} v_0) + (k_1 D_{11}^s + k_2 D_{12}^s) d_{11} w_0 + (k_1 D_{12}^s + k_2 D_{22}^s) d_{22} w_0 + 2D_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') d_{1122} w_0 - (k_1^2 H_{11}^s + k_2^2 H_{22}^s + 2k_1 k_2 H_{12}^s) \theta + (k_1 A')^2 F_{55}^s d_{11} \theta + (k_2 B')^2 F_{44}^s d_{22} \theta - H_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')^2 d_{1122} \theta - (k_1 Y_{13}^s + k_2 Y_{23}^s) \varphi_z + k_1 A' G_{55}^s d_{11} \varphi_z + k_2 B' G_{44}^s d_{22} \varphi_z = -J_1 (k_1 A' d_{11} \ddot{u}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \quad \dots(IV-24d)$$

$$- X_{13} d_{11} u_0 - X_{23} d_{22} v_0 + Y_{13} d_{11} w_0 + Y_{23} d_{22} w_0 + (k_1 (G_{55}^s - Y_{13}^s) + k_2 (G_{44}^s - Y_{23}^s)) \theta + A_{55}^s d_{11} \varphi_z + A_{44}^s d_{22} \varphi_z - Z_{33} \varphi_z = J_0 \ddot{w}_0 + K_0 \ddot{\varphi}_z \quad \dots(IV-24e)$$

où, $d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$ et sont donnés par:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad \dots(IV-25)$$

IV.3.5 Solutions analytiques :

Une plaque FG rectangulaire simplement supportée est considérée avec une longueur (b) et une largeur (a) sous une charge transversale. En utilisant la méthode de solution de Navier, les expressions de déplacements (u_0 , v_0 , w_0 , θ et φ_z) sont données par:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i \omega t} \\ V_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i \omega t} \\ W_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i \omega t} \\ X_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i \omega t} \\ \Phi_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i \omega t} \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-26})$$

ou $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}$ et Φ_{mn} Des coefficients de déplacement inconnus doivent être déterminés, correspond à la fréquence propre associée au mode propre. α et β sont exprimés comme:

$$\alpha = m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b \quad \dots(\text{IV-27})$$

En substituant Eq. IV (26) dans Eq. IV (24), les solutions analytiques peuvent alors être définies par:

$$\left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & m_{45} \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & m_{45} & m_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ \Phi_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots(\text{IV-28})$$

où éléments de s_{ij} et m_{ij} sont des matrices de rigidité et de masse, respectivement. Ces éléments sont donnés par:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \alpha^2 A_{11} + \beta^2 A_{66}, \quad s_{12} = \alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \quad s_{13} = -\alpha^3 B_{11} - \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66}), \\
 s_{14} &= -\alpha(k_1 B_{11}^S + k_2 B_{12}^S) + \alpha\beta^2 B_{66}^S (k_1 A' + k_2 B'), \quad s_{15} = \alpha X_{13}, \quad s_{22} = \alpha^2 A_{66} + \beta^2 A_{22}, \\
 s_{23} &= -\alpha^2 \beta (B_{12} + 2B_{66}) - \beta^3 B_{22}, \quad s_{24} = -\beta(k_1 B_{12}^S + k_2 B_{22}^S) + \alpha^2 \beta (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^S, \\
 s_{25} &= -\beta X_{23}, \quad s_{33} = \alpha^4 D_{11} + \beta^4 D_{22} + 2\alpha^2 \beta^2 (D_{12} + 2D_{66}) + K_w + K_s (\alpha^2 + \beta^2), \\
 s_{34} &= \alpha^2 k_1 D_{11}^S + (k_2 \alpha^2 + k_1 \beta^2) D_{12}^S + \beta^2 k_2 D_{22}^S - 2\alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B') D_{66}^S, \\
 &\dots \text{(IV-29)} \\
 s_{35} &= \alpha^2 Y_{13} + \beta^2 Y_{23}, \\
 s_{44} &= k_1^2 H_{11}^S + k_2^2 H_{22}^S + 2k_1 k_2 H_{12}^S + \alpha^2 \beta^2 (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^S + \alpha^2 (k_1 A')^2 F_{55}^S + \beta^2 (k_2 B')^2 F_{44}^S, \\
 s_{45} &= k_1 Y_{13}^S + k_2 Y_{23}^S + \alpha^2 k_1 A' G_{55}^S + \beta^2 k_2 B' G_{44}^S, \quad s_{55} = \alpha^2 A_{55}^S + \beta^2 A_{44}^S + Z_{33}, \\
 m_{11} &= m_{22} = I_0, \quad m_{13} = -\alpha I_1, \quad m_{14} = \alpha k_1 A' J_1, \quad m_{15} = 0, \\
 m_{23} &= -\beta I_1, \quad m_{24} = \beta k_2 B' J_1, \quad m_{33} = I_0 + I_2 (\alpha^2 + \beta^2), \quad m_{34} = -J_2 (k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \\
 m_{44} &= K_2 ((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2), \quad m_{35} = J_0, \quad m_{55} = K_0
 \end{aligned}$$

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un cheminement de calcul des fréquences propres de vibration des plaques FG reposant sur une assise élastique de type Winkler-Pasternak. Une théorie de déformation de cisaillement quasi-3D à cinq variables a été utilisée qui ne nécessite pas un facteur de correction de cisaillement et assure la nullité des contraintes aux bords libres de la plaque. Cette dernière utilise des termes intégrés indéterminés dans le champ de déplacement.

Chapitre V : Résultats et discussions

V.1 Introduction :

Dans le présent chapitre, divers exemples numériques sont présentés pour vérifier l'exactitude de la HSDPT actuelle dans la prédiction de la fréquence naturelle de plaques simplement appuyées. La solution analytique du présent travail est comparée à celle d'autres théories. Des plaques fonctionnellement graduées composées de deux combinaisons de matériaux en métal et céramique: Al / ZrO₂ et Al / Al₂O₃ sont considérés. Les propriétés correspondantes des matériaux sont données dans le tableau V-1.

Tableau V-1 Propriétés matérielles du métal et de la céramique

Propriétés	Metal	Céramique	
	Aluminum Al	Alumina Al ₂ O ₃	Zirconia ZrO ₂
Module de Young E(GPa)	70	380	200
Module de Poisson ν	0,3	0,3	0,3
Mass volumique $\rho(\text{kg/m}^3)$	2702	3800	5700

V.2 Résultats de la vibration libre :

V.2.1 Exemple 1 :

Les résultats numériques pour l'analyse en vibration libre sont présentés dans le (tableau V-2). Une comparaison des résultats de la fréquence propre obtenue par la présente théorie, pour une plaque carrée isotrope simplement supportée, est présentée. Par commodité, les fréquences naturelles non dimensionnelles et les paramètres non dimensionnels des fondations sont données par:

$$\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0} \quad \dots (V-1)$$

$$k_w = K_w a^4 / D_0 \quad \dots (V-2)$$

$$k_s = K_s a^2 / D_0 \quad \dots (V-3)$$

$$D_0 = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)] \quad \dots (V-4)$$

Le tableau V-2 présente les huit premières fréquences naturelles non dimensionnelles. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes 3D développées par Leissa (1973), Zhou et al. (2002), Nagino et al. (2008), une FSDT calculée par DQM (méthode des éléments en quadrature différentielle) donnée par Liu et Liew (1999), et les théories HSDT étudiées par Shufrin et Eisenberger (2005), Hosseini-Hashemi et al. (2011), Akavci (2014) et Mantari (2015).

En examinant le tableau V-2, on constate que les valeurs obtenues par le présent calcul sont très proches de celles données par les théories exactes 3D et les théories HSDT avec un rapport d'épaisseur décroissant de 1000 à 5.

D'autre part, les plaques FG (Al / Al₂O₃) sont étudiées pour déterminer les fréquences fondamentales non dimensionnelles, l'objectif principal de ce calcul est de vérifier les résultats obtenus avec une solution exacte 3D réalisée par Jin et al. (2014) et Mantari (2015).

Les résultats sont données dans le tableau V-3 pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance et de rapport d'épaisseur. Dans cette partie, les fréquences propres non dimensionnelles et les paramètres de la fondation élastique ont été utilisés (tels que définis dans les équations (V-2) à (V-8)). Idem, on constate un excellent accord entre les résultats (pour des plaques carrées et rectangulaires).

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \quad \dots (V-5)$$

$$\dots (V-6)$$

$$\dots (V-7)$$

$$\bar{\beta} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_c / E_c} \quad \dots (V-8)$$

Tableau V-2 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles pour plaques carrées
isotropes simplement appuyées

a/h	Théorie	Mode (m,n)							
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(3,1)	(2,3)	(3,2)
1000	Leissa (1973)	19.7392	49.3480	49.3480	78.9568	98.6960	98.6960	128.3021	128.3021
	Zhou <i>et al.</i> (2002)	19.7115	49.3470	49.3470	78.9528	98.6911	98.6911	128.3048	128.3048
	Akavci (2014)	19.7391	49.3476	49.3476	78.9557	98.6943	98.6943	128.3020	128.3020
	Mantari (2015)	19.7405	49.3486	49.3486	78.9580	98.6967	98.6967	128.3049	128.3049
	Présente étude	19.7391	49.3475	49.3475	78.9557	98.6943	98.6943	128.3019	128.3019
100	Liu and Liew (1999)	19.7319	49.3027	49.3027	78.8410	98.5150	98.5150	127.9993	127.9993
	Nagino <i>et al.</i> (2008)	19.7320	49.3050	49.3050	78.8460	98.5250	98.5250	128.0100	128.0100
	Akavci (2014)	19.7322	49.3045	49.3045	78.8456	98.5223	98.5223	128.0346	128.0346
	Mantari (2015)	19.7332	49.3086	49.3086	78.8550	98.5365	98.5365	128.0346	128.0346
	Présente étude	19.7323	49.3049	49.3049	78.8467	98.5241	98.5241	128.0146	128.0146
10	Liu and Liew (1999)	19.0584	45.4478	45.4478	69.7167	84.9264	84.9264	106.5154	106.5154
	Nagino <i>et al.</i> (2008)	19.0653	45.4869	45.4869	69.8093	85.0646	85.0646	106.7350	106.7350
	Akavci (2014)	19.0850	45.5957	45.5957	70.0595	85.4315	85.4315	107.3040	107.3040
	Mantari (2015)	19.1190	45.7339	45.7339	70.3148	85.7622	85.7622	107.7376	107.7376
	Présente étude	19.0914	45.6286	45.6286	70.1297	85.5289	85.5289	107.4422	107.4422
5	Shufrin and Eisenberger (2005)	17.4524	38.1884	38.1884	55.2539	65.3130	65.3130	78.9864	78.9864
	Hosseini-Hashemi <i>et al.</i> (2011)	17.4523	38.1883	38.1883	55.2543	65.3135	65.3135	78.9865	78.9865
	Akavci (2014)	17.5149	38.4722	38.4722	55.8358	66.1207	66.1207	80.1637	80.1637
	Mantari (2015)	17.5899	38.6582	38.6582	56.0674	66.3474	66.3474	80.3365	80.3365
	Présente étude	17.5324	38.5275	38.5275	55.9053	66.1815	66.1815	80.1826	80.1826

Tableau V- 3 : Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles pour des plaques FG Al/Al₂O₃

b/a	a/h	p	Théories		
			Jin <i>et al.</i> (2014)	Mantari (2015)	Présente étude
1	10	0	0.1135	0.1137	0.1135
		1	0.0870	0.0883	0.0882
		2	0.0789	0.0806	0.0806
		5	0.0741	0.0756	0.0755
	5	0	0.4169	0.4183	0.4170
		1	0.3222	0.3271	0.3261
		2	0.2905	0.2965	0.2961
		5	0.2676	0.2726	0.2720
	2	0	1.8470	1.8543	1.8538
		1	1.4687	1.4803	1.4798
		2	1.3095	1.3224	1.3237
		5	1.1450	1.1565	1.1547
2	10	0	0.0719	0.0719	0.0718
		1	0.0550	0.0558	0.0560
		2	0.0499	0.0510	0.0513
		5	0.0471	0.0480	0.0482
	5	0	0.2713	0.2721	0.2713
		1	0.2088	0.2121	0.2123
		2	0.1888	0.1928	0.1938
		5	0.1754	0.1789	0.1794
	2	0	0.9570	1.3075	1.3055
		1	0.7937	1.0371	1.0381
		2	0.7149	0.9297	0.9335
		5	0.6168	0.8248	0.8253

$$k_w = K_w a^4 / \bar{D} \quad \dots(V-9)$$

$$k_s = K_s a^2 / \bar{D} \quad \dots(V-10)$$

Avec

$$\bar{D} = h^3 / 12(1 - \nu^2) [p(8 + 3p + p^2)E_m + 3(2 + p + p^2)E_c] / [(1 + p)(2 + p)(3 + p)] \quad \dots(V-11)$$

V.2.1.1 L'effet de l'indice de puissance « p » sur la fréquence fondamentale :

Effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques carrées d'épaisseur moyenne (a/h=10) pour deux FGM (Al / ZrO₂ et Al / Al₂O₃) est Présentée sur la Fig. V-1 . On peut remarquer que la fréquence non dimensionnelle est supérieure lorsque l'Al₂O₃ est utilisé à la surface supérieure. Également, la fréquence propre d'un matériau homogène (Al / Al) est indiquée comme valeur de référence.

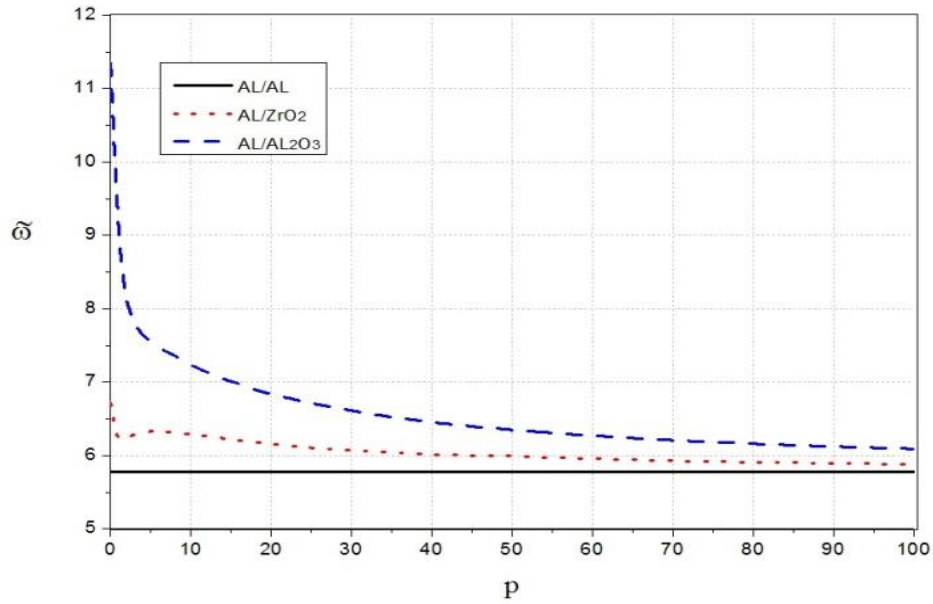


Fig V. 1 Effet de l'indice de loi de puissance p sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle $\tilde{\omega} = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho_m / E_m}$ des plaques carrées FG ($a/h=10$).

V.2.1.2 Effet du rapport de forme (a/b) sur la fréquence non dimensionnelle

La Fig.V-2 montre l'effet du rapport de forme (a/b) sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle pour les plaques moyennement épaisses ($a/h=10$, $p=1$). Nous voyons à nouveau que la fréquence non dimensionnelle est plus élevée lorsque le matériau Al_2O_3 est utilisé dans la surface supérieure. Cependant, la fréquence non dimensionnelle est proche de celle d'un matériau homogène (Aluminium) pour de petites valeurs du rapport de forme (a/b).

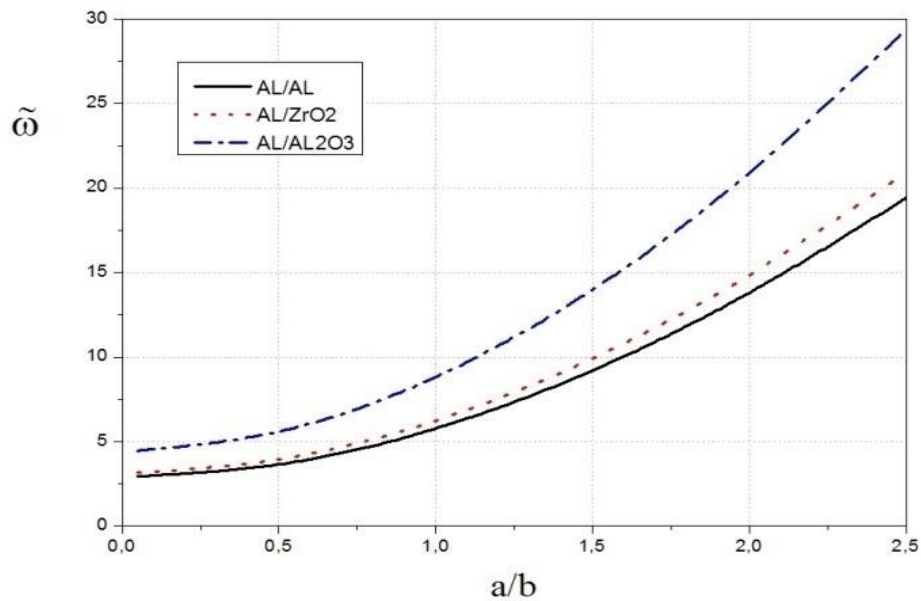


Fig. V.2 Effet du rapport de forme a / b sur la fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques FG ($a/h=10$, $p=1$).

L'effet du rapport de format (a/b) sur la fréquence non dimensionnelle des plaques FG reposant sur une fondation Winkler-Pasternak est illustré dans la Figure. V-3. Nous pouvons constater que si le paramètre k_s augmente, la fréquence propre augmente, pour un rapport de forme donné (a/b) et un paramètre k_w .

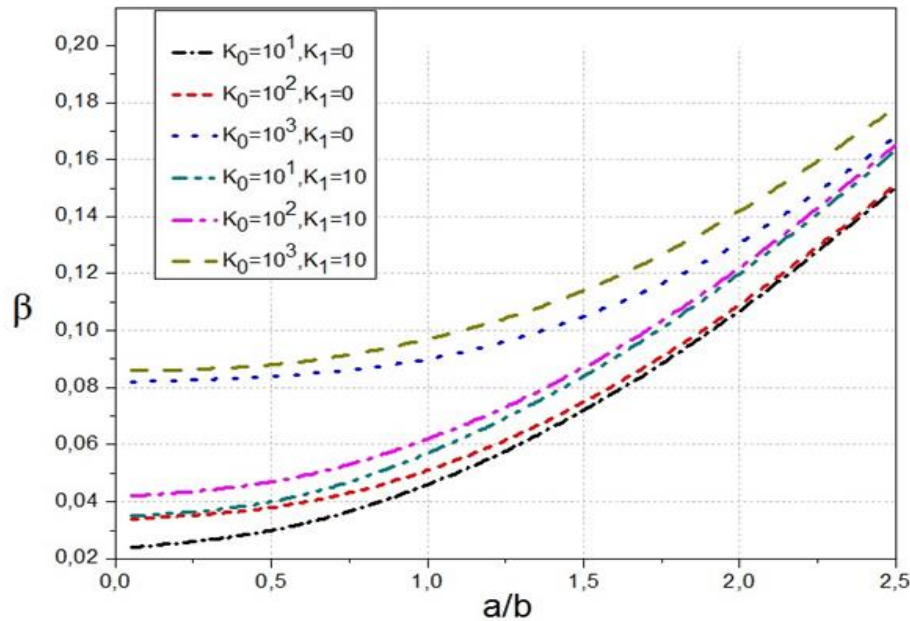


Fig. V.3 Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle β de plaques rectangulaires Al / Al₂O₃ FG reposant sur une base élastique par rapport au rapport de forme ($a/h=10, p=1$).

V.2.1.3 Effet des paramètres de la fondation élastique sur la fréquence non dimensionnelle :

Les figures V-4 et V-5 montrent l'effet des paramètres de fondation élastiques k_w et k_s respectivement sur la fréquence non dimensionnelle de plaques carrées FG en Al / Al₂O₃. On peut remarquer d'après ce résultat que les courbes affichées sur la figure V-4 présentent une tendance linéaire pour différentes valeurs de k_s . Cependant, les courbes ont une pente supérieure à celle obtenue à la Fig. V-5. Pour cela, l'influence du paramètre k_s sur les fréquences propres est supérieure à celle du paramètre

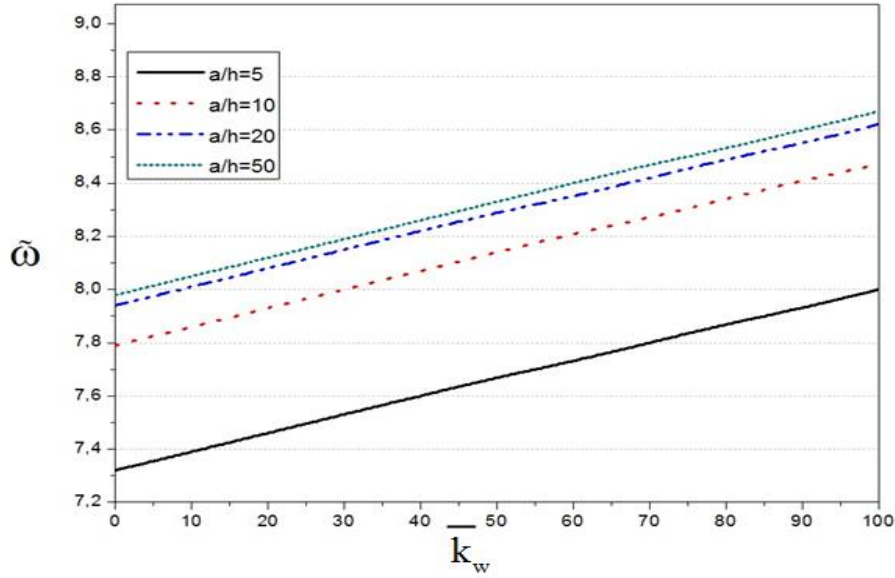


Fig. V.4 Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques carrées Al / Al₂O₃ FG reposant sur une fondation élastique ($k_s = 10$, $p = 1$).

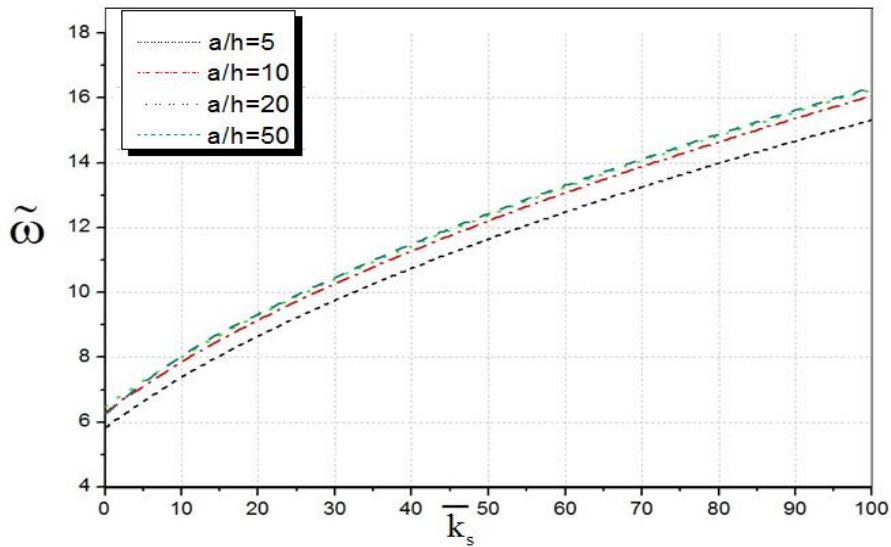


Fig. V-5 Variation de la fréquence fondamentale non dimensionnelle de plaques carrées Al / Al₂O₃ FG reposant sur une fondation élastique ($k_s = 10$, $p = 1$).

V.3 Conclusions

Dans le présent chapitre, une analyse en vibration libre des plaques composites avancées reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak à deux paramètres, utilisant une théorie de déformation de cisaillement d'ordre hybride quasi- 3D, a été étudiée. Cette théorie prend en compte les effets d'étirement en épaisseur et de déformation de cisaillement sans

nécessiter un facteur de correction de cisaillement approprié. Ladite théorie, ne contient que cinq fonctions inconnues et par conséquent cinq équations d'équilibre. En outre, ce nombre réduit d'inconnus permettra de réduire le temps de calcul et la compilation des résultats numériques. Les équations gouvernantes sont déduites en utilisant le principe d'Hamilton. Les équations du mouvement sont résolues analytiquement à l'aide de la solution de type Navier. De plus, les fréquences propres sont obtenues en résolvant les résultats de problèmes aux valeurs propres. Des résultats numériques ont été présentés pour montrer l'exactitude de la théorie proposée dans la prévision de la réponse en vibration des plaques fonctionnellement graduées. Finalement, une étude paramétrique a été menée pour constater les effets de l'indice de loi de puissance, du rapport d'épaisseur et des paramètres de la fondation élastique fréquences propres de vibration.

Conclusion générale et perspectives

Au cours des dernières années, l'utilisation des matériaux conventionnels qui ne peuvent résister aux environnements sévères auxquels ils sont confrontés,; c'est pourquoi, depuis un certain nombre d'années, on cherche à obtenir des matériaux combinant différentes propriétés, avec de meilleures performances (matériaux composites), pour les utilisés au sein de différentes secteurs tel que l'aéronautique, les constructions navales, l'industrie automobile, le génie civil, la médecine, etc...

De nombreux nouveaux types de composite ont déjà été fabriqués conformément aux propriétés des matériaux exigées par la technologie actuelle. Parmi eux on distingue les matériaux à gradient fonctionnelle FGM.

L'utilisation des matériaux à gradient fonctionnelle FGM pour la conception des structures minces et élancées tels que les plaques et les poutres nécessite la vérification de leurs stabilités.

La présente thèse porte sur une analyse en vibration libre des plaques composites avancées reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak à deux paramètres, utilisant une théorie de déformation en cisaillement d'ordre hybride quasi- 3D, a été étudiée. Cette théorie prend en compte les effets d'étirement en épaisseur et de déformation en cisaillement sans nécessiter un facteur de correction en cisaillement approprié. Ladite théorie, ne contient que cinq fonctions inconnues et par conséquent cinq équations d'équilibre. En outre, ce nombre réduit d'inconnus permettra de réduire le temps de calcul et la compilation des résultats numériques. Les équations gouvernantes sont déduites en utilisant le principe d'Hamilton. Les équations du mouvement sont résolues analytiquement à l'aide de la solution de type Navier. De plus, les fréquences propres sont obtenues en résolvant les résultats de problèmes aux valeurs propres. Des résultats numériques ont été présentés pour montrer l'exactitude de la théorie proposée dans la prévision de la réponse en vibration des plaques fonctionnellement graduées. Finalement, une étude paramétrique a été menée pour constater les effets de l'indice de loi de puissance, du rapport d'épaisseur et des paramètres de la fondation élastique fréquences propres de vibration.

En perspective, on prévoit d'élargir le champ d'application de cette nouvelle théorie de déformation de cisaillement des plaques quasi 3-D pour l'analyse dynamique et d'insatiabilité des structures fonctionnellement graduées avec des différents géométries et déférentes formes sous la combinaison des déférentes types de chargement (mécanique ,thermique ,...etc)

Références Bibliographiques

- Ait Atmane H., Tounsi A., Ziane N. and Mechab I., 2011.** "Mathematical solution for free vibration of sigmoid functionally graded beams with varying cross-section". *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 2011, Vol. 11(6), 489-504.
- Aldo R., Boccaccini O., Van der Biest, Talbot Jan B., 2002.** "Electrophoretic Deposition, Fundamentals and Applications". in *Proceedings of the International Symposium, Electrochemical Society*, Electrodeposition Division, United Engineering Foundation (U.S.), 2002.
- Alieldin S.S., Alshorbagy A.E., Shaat M., 2011.** "A first-order shear deformation finite element model for elastostatic analysis of laminated composite plates and the equivalent functionally graded plates". *Ain Shams Engineering Journal*. 2011, Vol. 2, 53-62.
- Arciniega R.A., Reddy J.N., 2007.** "Large deformation analysis of functionally graded shells". *International Journal of Solids and Structures*. 2007, Vol. 44, 2036-2052.
- Mantari, J.L., (2015), "A refined theory with stretching effect for the dynamic analysis of advanced composites on elastic foundation", *Mech. Mater.* **86**, 31-43.
- Atarashiya K., Ishida Y., Nagai T., 1993.** "Functionally Gradient Materials". in: *Holt J.B, Koizumi .M, Hirai .T, Munir Z.A. American Ceramic Society, Westerville, OH.*, Ceram. Trans., 1993, Vol. 34, 141-148.
- Meftah, A., Bakora, A., Zaoui, F.Z., Tounsi, A. and Adda Bedia, E., (2017), "A non-polynomial four variable refined plate theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundations", *Steel Composite Structures*, **23**(3), 317-330
- BAGUET S. 2001.** "Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique". *Thèse de Doctorat université Aix-Marseille II, France*. 2001.
- BENACHOUR A. 2010.** "Analyse des contraintes d'interface dans les poutres renforcées par des plaques". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie*. 2010.
- Benachour A., Tahar H.D., Ait Atmane H., Tounsi A., and Ahmed M.S., 2011.** "A four variable refined plate theory for free vibrations of functionally graded plates whit arbitrary gradient". *Composite: Part B*. 2011, Vol. 42, 1386-1394.
- BENATTA Mohamed A. 2011.** "Contribution du phénomène de gauchissement dans les poutres courtes en FGM par les théories d'ordre élevé". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie*. 2011.
- Xu, T.F. and Xing, Y.F., (2016), "Closed-form solutions for free vibration of rectangular FGM thin plates resting on elastic foundation", *Acta Mech. Sin.* , **32**(6), 1088-1103.
- BERTOLINI J. 2008.** "Contribution à l'analyse expérimentale et théorique des ruptures de structures composites en post-flambement par décollement de raidisseurs". *Thèse de Doctorat université Toulouse III – PAUL SABATIER, France*. 2008.
- Bever M.B., and Duwez P.E., 1972.** "Gradients in composite materials". *Mater. Sci. Eng.* 1972, Vol. 10, 1-8.
- Meksi, A., Benyoucef, S., Houari, M.S.A. and Tounsi, A., (2015), "A simple shear deformation theory based on neutral surface position for functionally graded plates resting on Pasternak elastic foundations", *Struct.Eng.Mech.*, **53**(6), 1215-1240.

- Borchert R., Willert-Porada, M. 1999.** "An oxidation resistant metal-ceramic functionally graded material". *Proceedings of the 9 th World Ceramic Congress and Forum on New Materials CIMTEC*. Florence, 1999, Part C, 313-320.
- Bouazza M., Tounsi A., Adda-Bedia E.A., Megueni A. 2010.** "Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach". *Computational Materials Science*. 2010, Vol. 49, 865-870.
- Bouazza M., Tounsi A., Bedia Adda E.A., and Megueni A.,. 2009.** "Buckling analysis of functionally graded plates with simply supported edges". *Leonardo J. of Sciences*. 2009, Vol. 8(15), 21-32.
- Nguyen, K., Thai, H.T. and Vo, T., (2015), "A refined higher-order shear deformation theory for bending, vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich plates", *Steel and Composite Structures*, **18** (1), 91-120.
- Neves, A.M.A., Ferreira, A.J.M., Carrera, E., Cinefra, M., Jorge, R.M.N., Mota Soares, C.M., et al., (2017), "Influence of zig-zag and warping effects on buckling of functionally graded sandwich plates according to sinusoidal shear deformation theories", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **24**(5), 360-376.
- Bouhadra A., Benyoucef S., Tounsi A., Bernard F., Bachir Bouiadjra R., and Houari Mohammed.S.A.,. 2015.** "Thermal Buckling Response of Functionally Graded Plates with Clamped Boundary Conditions". *Journal of Thermal Stresses*. 2015, Vol. 38(6), 630–650.
- Brush D.O., Almroth B.O. 1975.** "*Buckling of bars, Plates and Shells*". Second. New York : McGraw-Hill, 1975.
- Calladine C.R. 1983.** "*Theory of shell structures*". New York, Amerique : CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1983.
- Carvalho O., Buciumeanu M., Madeira S., Soares D., Silva F.S., Miranda G.,. 2015.** "Optimization of AlSi-CNTs functionally graded material composites for engine piston rings". *Mater. Des.* 2015, Vol. 80, 163-173.
- Chi Shyang-ho., Chung Yen-Ling., 2003.** "Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings". *Engineering Fracture Mechanics*. 2003, Vol. 70 (10), 1227–1243.
- Cho J.R., Park H.J.,. 2002.** "High strength FGM cutting tools: finite element analysis on thermoelastic characteristics". *J. Mater. Process. Technol.* 2002, 130-131: 351-356.
- Delale F., Erdogan F.,. 1983.** "The crack problem for a non homogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1983, Vol. 50 (3), 609-614.
- Eduard V., Theodor K.,. 2001.** "*Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications*". s.l. : Marcel Dekker, Inc. New York. Basel, 2001.
- Erdogan F. 1995.** Fracture mechanics of functionally graded materials". *Compos. Eng.* 1995, Vol. 5, 753-770.
- Fekrar A., Zidi M., Boumia L., Ait Atmane H., Tounsi A., and Bedia Adda E.A.,. 2013.** "Thermal buckling of AL/AL₂O₃ functionally graded plates based on first order theory". *Nature & Technology, J. A- Fundamental & Eng. Sci.* 2013, Vol. A(08), 12-16.

- Ghomshei M.M., and Abbasi V., 2013.** "Thermal buckling analysis of annular FGM plate having variable thickness under thermal load of arbitrary distribution by finite element method". *J. of Mech. Sci. and Tech.* 2013, Vol. 27(4), 1031-1039.
- Gupta K.M. 2012.** "Materials Science". *Metallurgy and Engineering*. Umesh Publications. New Delhi, 2012.
- Hadj Henni A., Ait ATMANE H., MECHAB I., BOUMIA L., TOUNSI A., Adda Bedia E.A., 2011.** "Static Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using an Efficient and Simple Refined Theory". *Chinese Journal of Aeronautics*. 2011, Vol. 24, 434-448.
- Hamzehei M., Raki M., 2011.** "Study and Simulation of Thermal Buckling in a Thin Rectangular FGM Plate". *International Review of Mechanical Engineering (I.R.E.M.E.)*. 2011, Vol. 5(5), 918-926.
- Hirai T. 1996.** Chapter 20, "Functional Gradient Materials". [éd.] P. Hassen and E.J. Kramer R.W. Chan. *Mater. Sci. and Tech.* 1996, Vol. 17B, 293-341.
- Hirai T., and Chen L., 1999.** "Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan". *Materials Science Forum*. 1999, 308-311, 509-514.
- Hirai T., Sasaki M., Niino M., 1987.** *J. Soc. Mater. Sci. Jpn.* 1987, Vol. 36, 1205-1211 (in Japanese).
- Hiroyuki M. 2009.** "Stress analysis of functionally graded plates subjected to thermal and mechanical loadings". *Compos. Struct.*, 2009, Vol. 87(4), 344-357.
- HOUARI Mohammed S.A. 2011.** "Analyse des contraintes thermo-élastiques : lois des puissances". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie*. 2011.
- Ichikawa K. 2000.** "Functionally graded materials". in *the 21ST CENTURY, A Workshop on Trends and Forecasts*. 2000, 264 p., Hardcover. .
- Iurlaro L., Gherlone M., Di Sciuva M., Tessler A., 2013.** "Assessment of the Refined Zigzag Theory for bending, vibration, and buckling of sandwich plates: a comparative study of different theories". *Composite Structures*. 2013, Vol. 106, 777-792.
- Iyengar N.G.R. 1988.** "Structural stability of columns and plates". [éd.] ELLIS HORWOOD LIMITED. New York. Chichester. Brisbane. Toronto : s.n., 1988.
- Jaeger L.G. 1964.** "Elementary Theory of Elastic Plates". First edition. s.l. : Pergamon Press, Oxford, 1964.
- Javaheri R., and Eslami M.R., 2002c.** "Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory". *J. Therm. Stress*. 2002c, Vol. 25(1), 603-625.
- . **2002b.** "Thermal buckling of functionally graded plates". *AIAA. J.* 2002b, Vol. 40(1), 162-169.
- Javaheri R., Eslami M.R., 2002a.** "Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading". *ZAMM Z Angew Mater Mech.* 2002a, Vol. 82(4), 277-283.
- Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour, S.R. 2009.** "An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates". *Materials & Design*. 2009, Vol. 30, 3679-3685.
- KACI A. 2012.** "Etude et analyse non linéaire des plaques minces non homogène en flexion cylindrique". *Thèse de Doctorat université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie*. 2012.

- Kaviani F., and Mirdamadi H.R., 2013.** "Static Analysis of Bending, Stability, and Dynamic Analysis of Functionally Graded Plates by a Four-Variable Theory". *Amirkabir Journal of Science & Research, ME*. 2013, Vol. 45(2), 5-7.
- Kawasaki A., and Watanabe R., 1990.** "Fabrication of sintered functionally gradient materials by powder spray forming process". In *Proc. 1st. Int. symp. FGM*. edited by : Yamanouchi M., Koizumi M., 1990, 197-202.
- Kawasaki A., Watanabe, R. 1997.** "Concept and P/M Fabrication of Functionally Gradient Materials". *Ceramics International*. 1997, Vol. 23, 73-83.
- Khalfi Y., Houari M.S.A., Tounsi A., 2014.** "A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation". *International Journal of Computational Methods*. 2014, Vol. 11(05).
- Khanh L.T. 2012.** "Etude de la résistance et de la stabilité des tôles courbes cylindriques en acier : applications aux ouvrages d'art". *Thèse de Doctorat université Paris-Est, France*. 2012.
- Kieback B., Neubrand A., Riedel H., 2003.** "Processing techniques for functionally graded materials". *Materials Science and Engineering*. 2003, Vol. A362, 81–105.
- Kim S.E., Thai H.T., Lee J., 2009.** "Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory". *Thin-Walled Structures*. 2009, Vol. 47, 455-462.
- Koizumi M. 1993.** "Ceramic Transactions Functionally Gradient Materials". *2nd Int.Symp. on Functionally Gradient Materials*. Society, American Ceramic, 1993, Vol. 34, 3-10.
- . **1994.** "The Concept of FGM", *FGM-News*". *Journal of the FGM-Forum, National Aerospace Laboratory, Nippon Oil Company*. Nippon Oil Company, 1994, Vol. 24, 3-6, pp. 3-6.
- Kokini K., Choules B.D., Takeuchi Y.R., 1997.** Thermal fracture mechanisms in ceramic thermal barrier coatings". *J. Therm. Spray Technol*. 1997, Vol. 6, 43-49.
- Koohkan H., Kimiaefar A., Mansourabadi A., and Vaghefi R., 2010.** "An analytical approach on the buckling analysis of circular, solid and annular functionally graded thin plates". *J. Mech. Eng*. 2010, Vol. ME 41(1), 7-14.
- Koteswara Rao D., Blessington P.J., Tarapada R., 2012.** "Finite Element Modeling and Analysis of Functionally Graded (FG) Composite Shell Structures". *Procedia Engineering*. 2012, Vol. 38, 3192-3199.
- Lanhe W. 2004.** "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate". *Composite Structures*. 2004, Vol. 64, 211-218.
- Leushake U., Winter A.N., Rabin B.H., Corff B.A., 1999.** "Functionally Graded Materials 1998". *Proceedings of the 5 International Symposium on FGM 1998*. in: Kaysser W.A, Trans Tech Publications, Switzerland, 1999, 13-18.
- Lü C.F., Chen W.Q., Xu R.Q and Lim C.W., 2008.** "Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams". *International Journal of Solids and Structures*. 2008, Vol. 45, 258-275.
- Manfred A.H., Rolf B., 1994.** "Construction métallique, Notions fondamentales et méthodes de dimensionnement". *Traité de Génie Civil, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, France*. 1994, Vol. 10.

- Marple B.R., and Boulanger J., 1996.** "Slip casting process and apparatus for producing graded materials". *Us. Patent*. 1996, Vol. 5, 498-383.
- Marple B.R., and Tuffe S., 1997.** "Graded casting for producing smoothly varying gradients in materials". *ibid.* 1997, 159-166.
- Matsunaga H. 2009.** "Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory". *Composite Structures*. 2009, Vol. 90, 76-86.
- Mechab I., Atmane H.A., Tounsi A., Belhadj H.A., Bedia E.A.A., 2010.** "A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates". *Acta Mech. Sinica*. 2010, Vol. 26 (6), 941–949.
- Mévrel R. 2009.** "Les systèmes barrières thermiques pour aubes de turbine. *PlastOx 2007 - Mécanismes et Mécanique des Interactions Plasticité - Environnement*. 2009, 255-264.
- Mindlin R.D. 1951.** "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates". *Journal of Applied Mechanics*. 1951, Vol. 18, 31-38.
- Miyamoto Y. 1997.** "Applications of FGM in Japan, in Functionally Graded Materials. *Manufacture, Properties, and Applications*. Ceramic Transactions. Am. Ceram. Soc, 1997, Vol. 76, 171-189.
- Miyamoto Y., Kaysser W. A., Rabin B.H. Kawasaki A., Ford Renee G., 1999.** "*FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS, Design, Processing and Applications*". [éd.] Miyamoto Y. Media New York : LLC, 1999.
- Mohammadi M., Saidi A.R., and Jomehzadeh E., 2010.** "Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates". *Appl. Compos. Mater.* 2010, Vol. 17(1), 81-93.
- Mozafari H., Abdi B., and Ayob A., 2012b.** "Optimization of temperature-dependent functionally graded material based on colonial competitive algorithm". *Applied Mechanics and Materials*. 2012b, Vol. 121-126, 4575-4580.
- Mozafari H., Abdi B., Ayob A., and Alias A., 2012c.** "Optimum critical buckling of functionally graded plates under non-linear temperature by using imperialist competitive algorithm". *Applied Mechanics and Materials*. 2012c, Vol. 110-116, 3429-3433.
- Mozafari H., and Ayob A., 2012a.** "Effect of thickness variation on the mechanical buckling load in plates made of functionally graded materials". *Procedia Technology*. 2012a, Vol. 1(2012), 496-504.
- Mozafari H., Ayob A., and Alias A., 2010a.** "Influence of thickness variation on the buckling load in plates made of functionally graded materials". *Eur. J. Sci. Res.* 2010a, Vol. 47(3), 422-435.
- Mozafari H., Ayob, A. and Alias, A. 2010b.** "Verification of the thermal buckling load in plates made of functionally graded materials". *Int. J. of Eng.* 2010b, Vol. 4 (5), 338-356.
- Müller E., Drasar C., Schilz J., and Kaysser W.A., 2003.** "Functionally graded materials for sensor and energy applications". *Materials Science and Engineering*. 2003, Vol. A362, 17-39.
- Na K.S., Kim J.H., 2004.** "Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded materials". *Composites Part B*. 2004, Vol. 35, 429–437.
- Na K.S., Kim J.K., 2006.** "Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method". *Finite Elements in Analysis and Design*. 2006, Vol. 42, 749–756.
- Najafizadeh M.M., Heydaru H.R., 2004.** "Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory". *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2004, Vol. 23, 1085-1100.

- Neubrand A. 2001.** "Functionally graded materials". In: Editors-in Chief:, K. H. J. B., Robert, W. C., Merton, C. F., Bernard, I., Edward, J. K., Subhash, M., Patrick, V. s.l. : Encyclopedia of Materials: Science and Technology (Second Edition). Elsevier, Oxford, 2001. pp. 3407-3413.
- Nguyen., Viet.Tung. 2004.** "Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques". *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées*. ParisTech, France, 2004.
- Nguyen-Xuan H., Tran L.V., Nguyen-Thoi T., Vu-Do H.C., 2011.** "Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method". *Composite Structures*. 2011, Vol. 93, 3019-3039.
- Niino M., Hirai T. and Watanabe, R. 1987.** *J. Japan Soc. Comps. Mater.* 1987, Vol. 13, 257-264 (in Japanese).
- Niino M., Kumakawa A., Watanabe R., Doi Y. 1984.** "Fabrication of a high pressure thrust chamber by the eIP forming method". *20th Joint Propulsion Conference*. Joint Propulsion Conferences, 1984, 84-1227.
- Shahsavari, D., Karami, B. and Mansouri, S.,(2018), "Shear buckling of single layer graphene sheets in hygrothermal environment resting on elastic foundation based on different nonlocal strain gradient theories", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 67, 200–214.
- Shahsavari, D., Shahsavari, M., Li, L., Karami, B., (2018), "A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation", *Aerospace Science and Technology*, 72, 134–149.
- Noor A.K. 1990.** "Bibliography of monographs and surveys on shells". *Applied Mechanics Reviews*. 1990, Vol. 43(9), 223-234.
- Noseir A., Reddy J.N., 1992.** "On vibration and buckling of symmetric laminated plates according to shear deformation theories". *Acta. Mech.* 1992, Vol. 94(3-4), 145-169.
- Omori M., Kakita T., Okubo A., and Hirai T., 1998.** *J. Jpn. Inst. Met.* 1998, Vol. 62, 986-991.
- Paszekiewicz B., Paszekiewicz R, Wosko M., Radziewicz D., Sciana B., Szyszka A., Macherzynski W., and Tlaczala M., 2008.** "Functionally Graded semiconductor layers for devices application". *Vacuum*. 2008, Vol. 82, 389-394.
- Pouladvand M. 2009.** "Thermal stability of thin rectangular plates with variable thickness made of functionally graded material". *J. of Solid Mechanics*. 2009, Vol. 1(3), 171-189.
- Praveen G.N., Reddy J.N., 1998.** "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates". *Int. J. of Solids and Struct.* 1998, Vol. 35(33), 4457-4476.
- Qiu J., Tani J., Ueno T., Morita T., Takahashi H., and Du H., 2003.** "Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators". *Smart Materials and Structures*. 2003, Vol. 12, 115-121.
- Rajasekaran S., and Wilson J.A., 2013.** "Buckling and vibration of rectangular plates of variable thickness with different end conditions by finite difference technique". *Struct. Eng. Mech., Int. J.*, 2013, Vol. 46(2), 269-294.
- Raki M., Alipour R., and Kamanbedast A., 2012.** "Thermal buckling of thin rectangular FGM plate". *World Applied Sciences Journal*. 2012, Vol. 16 (1), 52-62.

Références Bibliographiques

- Reddy J.N. 2000.** "Analysis of functionally graded plated". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000, Vol. 47, pp. 663-384.
- , **1997.** "Mechanics of Laminated Composites Plates and shells: Theory and Analysis". [éd.] second. 1997.
- Reissner E. 1945.** "The effect of transverse shears deformation on the bending of elastic plates". *J. Appl. Mech.*, 1945, Vol. 12, 69-77.
- Rohit S., and Maiti P.R., 2012.** "Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load". *Int. J. Civil and Struct. Engin.* 2012, Vol. 2(4), 1035-1050.
- Schulz U., et al. 1997.** "Graded design of EB-PVD thermal barrier coating systems". *AGARD 85th Structures and Materials Panel Meeting, Workshop 3, Thermal Barrier Coatings, Aalborg, Denmark*. 1997.
- Shariat BAS., Eslami M.R., 2005.** "Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates". *Journal of Thermal Stresses*. 2005, Vol. 28, 1183-1198.
- Shen H.S. 2009.** "Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells". s.l. : CRC Press, 2009. p. 280.
- Shen M., and Bever M.B., 1972.** "Gradients in polymeric materials". *J. Mater. Sci.* 1972, Vol. 7, 741-746.
- Siti Nur Sakinah J., Faizal, M., Dewan, M. N., Shah, N. B. 2013.** "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*. 4 June 2013, Vol. 8(21), 828-840.
- Suresh K.J., Reddy S.B., Reddy E.C., 2011.** "Nonlinear Thermal Analysis of Functionally Graded Plates Using Higher Order Theory". *Innovative Systems Design and Engineering*. 2011, Vol. 2(5), 1-14.
- Takahashi M., Itoh Y, Kashiwaya H., 1990.** "Fabrication and evaluation of W/Cu gradient material by sintering and infiltration technique". in *proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan*. 1990, 129-134.
- Takemura M., and Tamura M. et al., 1990.** "Mechanical and thermal properties of FGM fabricated by thin sheet lamination method". In *Proc. 1st. Int. symp. FGM*,. edited by: Yamanouchi. M., Koizumi M., 1990, 97-100.
- Thai H.T., Choi D.H., 2012.** "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates". *Applied Mathematical Modelling*. 2012, Vol. 36, 1008–1022.
- Timoshenko S. 1968.** "Résistance des matériaux, Théorie développée et problèmes", Tome 2. éditions Dunod, 1968.
- Timoshenko S., Gere J.M., 1963.** "Theory of Elastic Stability". New York, Amerique : McGraw-Hill Book Company,, 1963. p. second edition.
- Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1959.** "Theory of Plates and Shells". second edition. New York, Amerique : McGraw-Hill Book Company, 1959.
- Tounsi A., Houari Mohammed S.A., Benyoucef S., Adda Bedia E.A., 2013.** "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates". *Aerosp. Sci. Technol.* 2013, Vol. 24, 209–220.

- Uemura S. 2003.** "The activities of FGM on new applications". *Materials Science Forum*. 2003, 423-425, 1-10.
- Valizadeh N., Natarajan S., Gonzalez-Estrada O.A., Rabczuk T., Bui T.Q., Bordas S.P., 2013.** "NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter". *Composite Structures*. 2013, Vol. 99, 309–326.
- Vallat P. 1945.** Aérospatiale Itw, "Résistance des matériaux appliquée à l'aviation" Tome I., 1945.
- Watanabe Y., Yamanaka N., Fukui Y., Metallkd Z., 1997.** "Orientation of Al₃Ti platelets in Al-Al₃Ti functionally graded material manufactured by centrifugal method". 1997, Vol. 88 N° 09, 717–721.
- Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., and Kawasaki T., 2004.** "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology*. 2004, Vol. 64, 893-908.
- Watremetz B. 2006.** "Modèle thermomécanique 3D d'un matériau à gradient de propriétés à l'aide de techniques multigrilles. Application aux moules d'injection de polymères". *Thèse de doctorat*. Ecole doctorale des sciences pour l'ingénieur de Lyon, 2006.
- Yang Y.Y., Munz D., Schaller W., 1997.** "Effect of the stress jump at the interface of a joint on the failure behavior". *Int. J. Fract.* 1997, Vol. 87, L113–L118.
- Yang Z., Zhang L., Shen Q., Gong D., 2003.** "Theoretical design of sedimentation applied to the fabrication of functionally graded materials". *Metall. Mater. Trans. B Process Metall. Mater. Process. Sci.* 2003, Vol. 34, 605-609.
- Yuki M., Murayama T., Irisawa T., 1991.** "Temperature gradient sintering of PSZ/Mo Functionally Gradient Material by laser beam heating. in *proceeding of the first international symposium on functionally gradient materials FGM, Sendai – Japan*. 1991, 203-208.
- Z. Abdelhak., L. Hadji., T.H. Daouadji., and E.A. Bedia., 2015.** "Thermal buckling of functionally graded plates using a n-order four variable refined theory ". *Advances in Materials Research*. 2015, Vol. 4(1), 31-44.
- Zdenek .P.B., Luigi C., 2010.** "*Stability of Structures, Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*". s.l. : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
- Zeng Y.P., Jiang D.L., Watanabe T., 2000.** "Fabrication and properties of tape-cast laminated and functionally gradient alumina-titanium carbide materials". *Journal of the American Ceramic Society*. 2000, Vol. 83, N° 12, 2999-3003.
- Zenkour A.M., and Mashat D.S., 2010.** "Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates". *Natural Science*. 2010, Vol. 2(9), 968-978.
- Zhang J., Wang Y.Q., Zhou B.L., Wu X.Q., 1998.** *Mater J. Sci. Lett.* 17. 1998, 1677-1679.
- Zhao X., Lee Y.Y., Liew K.M., 2009.** "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates". *Composite Structures*. 2009, Vol. 90, 161–171.

