

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE SAIDA
DR. TAHAR MOULAY

FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

**POLYCOPIÉ DE COURS:
ONDES ET PROPAGATION**

DR. BOUHMIDI RACHID

LICENCE TÉLÉCOMMUNICATION
ANNÉE UNIVERSITAIRE 2019/2020

Sommaire

Sommaire

Sommaire	2
A propos de ce polycopié	6

Chapitre I: Les équations de Maxwell

I.1 Rappels sur les opérateurs Scalaires et vectoriels	9
I.1.1 Vecteurs et scalaires	9
I.1.2 Champ Scalaire et champ vectoriel	9
I.1.2.1 Caractérisation d'un champ vectoriel	9
I.1.2.1.1 Lignes d'un Champ de vecteurs	10
I.1.2.2 Circulation d'un champ vectoriel	11
I.1.2.2.3 Flux d'un champ vectoriel	11
I.1.3 Algèbre vectorielle	12
I.1.3.1 Produit scalaire	12
I.1.3.2 Produit vectoriel	13
I.1.3.3 Double produit vectoriel	14
I.1.3.4 Produit mixte	14
I.1.4 Les opérateurs vectoriels	15
I.1.4.1 Gradient d'un champ scalaire	15
I.1.4.1.1 Définition	15
I.1.4.1.2 Interprétation	15
I.1.4.1.3 Circulation du gradient d'un champ de potentiel	16
I.1.4.1.4 Application	16
I.1.4.2 Divergence d'un champ de vecteurs	17
I.1.4.2.1 Définition	17
I.1.4.2.2 Interprétation	17
I.1.4.2.3 Application	18
I.1.4.3 Rotationnel d'un champ vectoriel	18
I.1.4.3.1 Définition	18
I.1.4.3.2 Interprétation	18
I.1.4.3.3 Applications	19
I.1.4.4 Le Laplacien	19
I.1.4.4.1 Laplacien d'un champ scalaire	19
I.1.4.4.1.1 Définition	19
I.1.4.4.1.2 Interprétation	19
I.1.4.4.1.3 Application	20
I.1.4.4.2 Laplacien d'un champ de vecteurs	20
I.1.4.4.2.1 Définition	20
I.1.4.4.2.2 Applications	20
I.2 Les équations de Maxwell	21
I.2.1 L'électromagnétisme statique	21
I.2.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski	21
I.2.3 Théorème de Stokes	21
I.2.4 Lois de l'électromagnétisme statique	22
I.2.4.1 Loi de Gauss	22

I.2.4.2 Loi de Faraday	22
I.2.4.3 Loi de Thomson	22
I.2.4.4 Loi d'Ampère	23
I.2.4.5 Loi de conservation de l'électricité	23
I.2.5 L'électromagnétisme dynamique	24
I.2.5.1 Equation de Maxwell-Faraday	24
I.2.5.2 Equation de Maxwell-Ampère	25
I.2.5.3 Equation de Maxwell-Gauss	26
I.2.5.4 Equation de Maxwell-Thomson	26
I.2.6 Système d'équations de Maxwell	27
I.3 L'onde électromagnétique	28
I.3.1 Définition	28
I.3.2 Interaction onde-matière	28
I.3.3 Energie d'une onde électromagnétique	28
I.3.4 Bilan des puissances Transportées par une onde électromagnétique dans un milieu matériel	29

Chapitre II: Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

II.1 Des équations de Maxwell aux équations d'ondes	32
II.1.1 Forme générale des équations d'ondes	33
II.2 Propagation des ondes électromagnétiques en régime harmonique	33
II.2.1 Onde plane oblique	35
II.2.1.1 Caractéristiques de l'onde plane oblique	37
II.2.2 L'onde plane TEM	39
II.2.2.1 Caractéristiques de l'onde plane TEM	40
II.3 Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques à pertes	43
II.3.1 Propagation des ondes électromagnétiques dans les diélectriques à faibles pertes	45

Chapitre III: Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

III.1 Caractérisation des milieux conducteurs	48
III.2 Equation d'ondes dans les milieux conducteurs	52
III.3 Profondeur de pénétration des OEM dans les conducteurs	54
III.4 Vitesse et longueur de l'onde dans les conducteurs	55
III.5 Propagation dans les milieux limités par des conducteurs	57
III.5.1 Guide à paire de plans conducteurs parallèles	59
III.5.1.1 Ondes TEM	60
III.5.1.2 Ondes TE	64
III.5.1.2.1 Coupure des modes TE_m	67
III.5.1.2.2 Vitesse de phase et vitesse de groupe des modes TE_m	69
III.5.1.3 Ondes TM	70

Chapitre IV: Réflexion et Réfraction d'Ondes Planes

IV.1 Incidence d'une onde plane sur deux milieux LHI	73
IV.2 Onde plane à incidence normale sur la surface séparant deux diélectriques	73
IV.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission	75
IV.2.2 Taux d'ondes stationnaires	77
IV.3 Onde plane à incidence oblique	78
IV.3.1 Onde plane à incidence oblique parallèle	79
IV.3.1.1 Coefficients de réflexion et de transmission	81
IV.3.2 Onde plane à incidence oblique perpendiculaire	84
IV.3.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission	85
IV.3.3 L'incidence critique	86
IV.1.4 Angle de Brewster	87

Chapitre V: Propagation des Ondes Hertziennes

V.1 Milieu Dissipatif	90
V.1.1 Permittivité complexe d'un milieu dissipatif	90
V.1.2 Onde plane TEM dans un milieu dissipatif illimité	91
V.2 Propagation dans l'environnement terrestre	93
V.2.1 Caractéristiques électriques du Sol et de la basse Atmosphère	94
V.2.1.1 Paramètres du Sol	94
V.2.1.2 Caractérisation de la basse Atmosphère	95
V.2.1.2.1 Atmosphère standard	96
V.2.1.2.2 Atmosphère de référence	96
V.2.2 Ondes atmosphériques et ondes de sol	96
V.2.2.1 La Réflexion sur le sol	96
V.2.2.1.1 Cas d'un sol plan	97
V.2.2.1.2 Cas d'un sol sphérique	100
V.2.2.2 La Réfraction Troposphérique	102
V.2.2.2.1 Applications de la Réfraction Troposphérique aux Télécommunications	104

Conclusion 107

Références Bibliographiques 109

Avant propos

Avant Propos

1. Au sujet de ce polycopié

Ce manuel est destiné aux étudiants de la licence Télécommunication de l'université de Saïda et des universités d'Algérie. Il correspond au programme officiel du module *Ondes et Propagation* enseigné en troisième année (L3-S5) de la spécialité Télécommunication. Nous essayons de répondre au mieux aux recommandations du programme officiel. Les objectifs assignés portent sur l'étude, la modélisation et la caractérisation des ondes électromagnétiques. Ce programme est également destiné à fournir aux étudiants les outils physiques et mathématiques nécessaires à l'étude des transmissions Hertziennes .

Le premier chapitre est consacré en partie à l'analyse vectorielle pour introduire les opérateurs utilisés classiquement en électromagnétisme. Cette partie a pour but d'initier très rapidement les étudiants à l'utilisation de ces opérateurs dans le système de coordonnées cartésien. Dans ce chapitre, les phénomènes de l'électrostatique et de la magnétostatique qui sont à l'origine de la modélisation analytiquement des ondes électromagnétiques seront introduits. La généralisation des équations stationnaire au régime variable considéré dans les équations de Maxwell aboutit aux équations de propagation des champs électrique et magnétique et à la puissance transportée par les ondes électromagnétiques.

La propagation des ondes électromagnétiques dans les diélectriques à pertes est traitée dans le chapitre suivant. Pour respecter les recommandations du programme officiel, la solution de l'onde plane rectiligne est adoptée pour les équations de propagation des champs électrique et magnétique. La réflexion et la réfraction entre deux milieux linéaires, homogènes et isotropes dans les deux cas d'incidence oblique et normale seront sommairement abordées dans ce chapitre.

La première partie du troisième chapitre sera consacré à la propagation dans les milieux conducteurs. Le paramètre caractéristique des milieux conducteurs est leur conductivité. Ce dernier nous permet d'estimer d'autres paramètres, dont le plus important est la profondeur de pénétration des ondes électromagnétiques dans les conducteurs. La deuxième partie de ce chapitre introduit la notion d'onde guidée, les modèles de champs et les paramètres caractéristiques d'une onde plane se propageant dans un milieu diélectrique confiné entre une paire de conducteurs sont développés.

Dans le chapitre suivant, les modes d'incidences normale et oblique entre deux milieux diélectriques abordés sommairement au chapitre deux seront détaillés. Les deux types de polarisation d'incidence oblique, parallèle et perpendiculaire seront développés.

Les propriétés électromagnétiques des milieux dissipatifs sont présentées dans le dernier chapitre. Les caractéristiques électriques du sol et de la basse atmosphère seront présentées brièvement. La propagation des ondes Hertziennes sera aussi étudiée dans ce chapitre à travers la réfraction atmosphérique et la réflexion sur le sol .

Enfin, une bibliographie sommaire présente les principaux ouvrages utilisés pour la confection de ce manuel.

2. Gestion du temps pédagogique

Ce manuel est le fruit d'une pratique pédagogique de plusieurs années dans cette matière et résulte d'une recherche bibliographique sélective. Le contenu de ce programme est prévu pour être enseigné pendant un semestre de 15 semaines, à raison d'un cours hebdomadaire de 1h30mn et d'une séance de travaux dirigés de 1h30mn par semaine. Toutefois, pour diverses raisons, la durée réelle de l'enseignement de cette matière est de 12 à 13 semaines par semestre. Afin de couvrir la plus grande partie du programme officiel pendant cette durée, une gestion expérimentée du temps pédagogique ainsi qu'un synchronisme entre les cours et les travaux dirigés sont indispensables. Nous recommandons la progression tablée ci-dessus pour une durée *réelle* du semestre (12-13 semaines).

<i>Chapitres</i>	<i>Semaines</i>
<i>Equations de Maxwell</i>	<i>4</i>
<i>Propagation des ondes électromagnétique dans les milieux diélectriques</i>	<i>2</i>
<i>Propagation des ondes électromagnétique dans les milieux conducteurs</i>	<i>2</i>
<i>Réflexion et réfraction d'ondes planes</i>	<i>3</i>
<i>Propagation des ondes Hertziennes</i>	<i>2</i>

R. Bouhmidi

Chapitre I

Les équations de Maxwell

I.1 Rappels sur les opérateurs Scalaires et vectoriels

I.1.1 Vecteurs et scalaires

Le mot grandeur est une quantité susceptible d'augmenter ou de diminuer. Il est possible de quantifier cette grandeur par **un nombre**, Si ce nombre suffit à la caractériser on dit que cette grandeur est une quantité scalaire.

Exemples : Permittivité du vide, Perméabilité du vide, Conductivité du cuivre.

Cependant, de nombreuses grandeurs physiques ne sont pas des scalaires; elles ne peuvent être complètement déterminées par un seul nombre, il faut associer à ce nombre un autre paramètre géométrique : **la direction**. Dans ce cas, cette grandeur est un vecteur.

Exemples : Vitesse de propagation des ondes électromagnétiques, vecteur d'ondes électromagnétiques.

I.1.2 Champ scalaire et champ vectoriel

Un champ est défini par l'existence d'une grandeur en tout point de l'espace. Selon la nature de la grandeur, nous pouvons définir deux types de champs :

- Le Champ scalaire : La grandeur est un scalaire (réel ou complexe).

Exemples : Potentiel électrique dans un milieu diélectrique, densité de charges dans un milieu matériel.

- Le Champ vectoriel : La grandeur est un vecteur.

Exemples : Champ électrique dans un milieu diélectrique, champ magnétique dans un milieu matériel.

I.1.2.1 Caractérisation d'un champ vectoriel

Considérons un champ vectoriel $\vec{V}(M)$ défini en un point M de l'espace.

Dans le repère orthonormé cartésien $(O, \vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z)$, le champ vectoriel $\vec{V}(M)$ au point M peut alors être représenté par trois composantes, fonctions des coordonnées spatiales du point M.

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} V_{Mx}(x, y, z)\vec{a}_x \\ V_{My}(x, y, z)\vec{a}_y \\ V_{Mz}(x, y, z)\vec{a}_z \end{pmatrix}$$

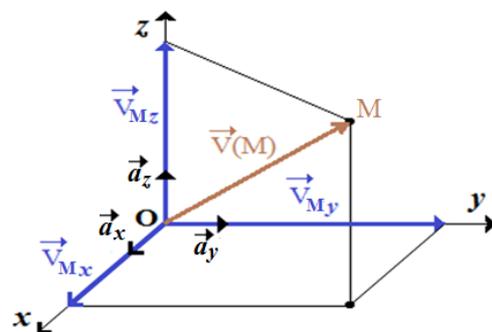


Figure I.1: Composantes d'un champ vectoriel \vec{V} en un point M.

I.1.2.1.1 Lignes d'un Champ de vecteurs

Les lignes d'un champ vectoriel $\vec{V}(M_i)$ sont des courbes tangentes en chaque point M_i à ce champ de vecteurs.

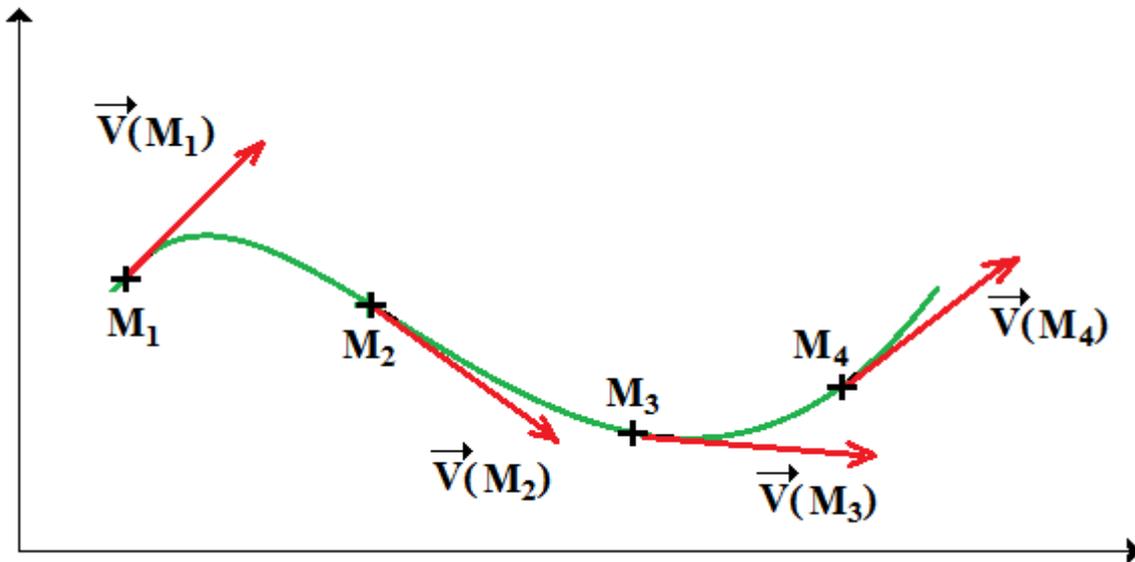


Figure I.2: Ligne de champ d'un champ vectoriel

Par exemple les lignes de champ du vecteur champ magnétique \vec{B} créés par un fil conducteur infiniment long parcouru par un courant électrique d'intensité I sont des cercles.

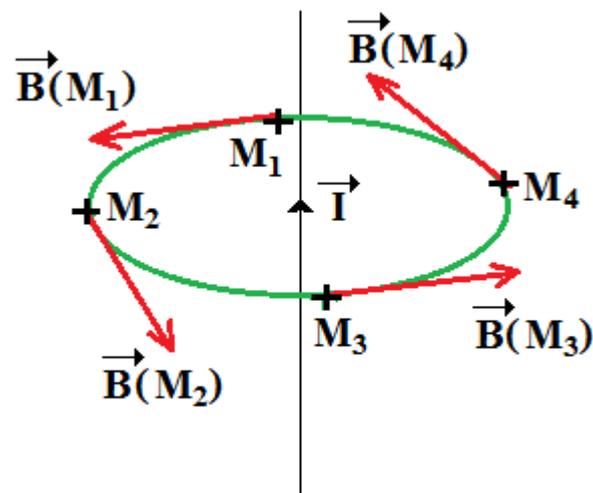


Figure I.3: Exemple de ligne de champ d'un champ magnétique créée par un courant sur un fil conducteur

I.1.2.2.2 Circulation d'un champ vectoriel

Soit une région de l'espace où est défini un champ de vecteurs \vec{V} et une courbe orientée Γ (sens de parcours positif). Soit \overrightarrow{dM} le vecteur de déplacement élémentaire sur le parcours Γ . On appelle C la circulation du champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ sur parcours Γ .

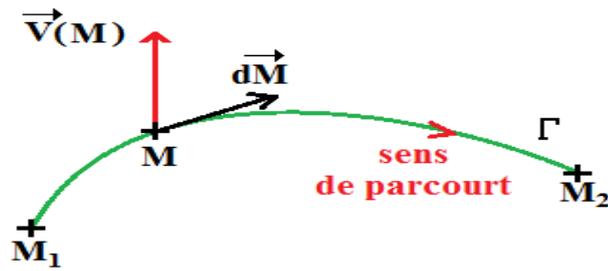


Figure I.4: Circulation d'un champ vectoriel sur un parcours Γ

$$C(\vec{V}, \Gamma) = \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} \quad (I.1)$$

Exemple : Soit un champ de force \vec{P} , la circulation de ce champ sur un parcours Γ , n'est autre que le travail effectué par cette force lorsque son point d'application se déplace le long du parcours Γ .

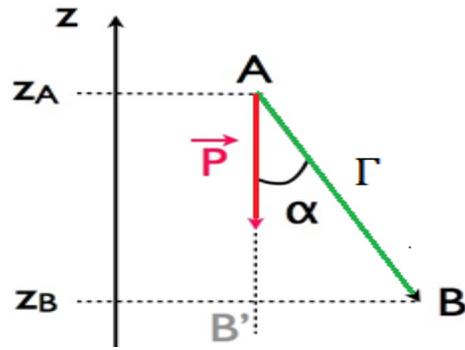


Figure I.5: Circulation un champ de force \vec{P} sur un parcours Γ

$$C(\vec{V}, \Gamma) = \int_A^B \vec{P} \cdot \overrightarrow{d\Gamma}$$

$$C(\vec{V}, \Gamma) = W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$C(\vec{V}, \Gamma) = P \cdot AB \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot AB \cdot \cos\alpha$$

$$C(\vec{V}, \Gamma) = m \cdot g \cdot AB \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$

W_{AB} Travail (Joule) , AB Déplacement (m)

I.1.2.2.3 Flux d'un champ vectoriel

Le flux élémentaire d'un champ vectoriel \vec{V} à travers l'élément de surface dS orienté par \vec{n} est défini par le scalaire :

$$d\phi = \vec{V} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Avec $\overrightarrow{dS} = \vec{n} dS$

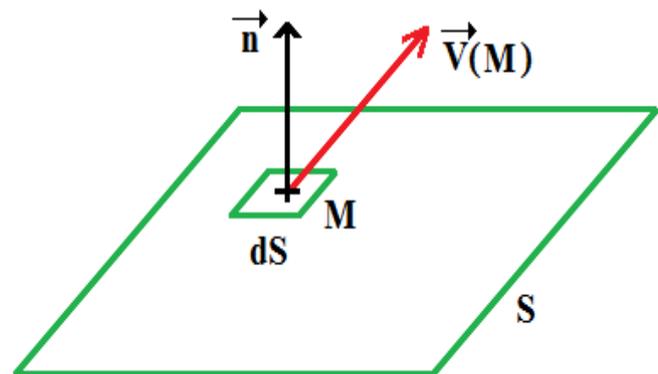


Figure I.6: Champ vectoriel \vec{V} sortant d'une surface S

Le flux à travers la surface S est donné par :

$$\phi(\vec{V}, S) = \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.2})$$

Le flux à travers une surface fermée S_f est donné par :

$$\phi(\vec{V}, S_f) = \oiint_{S_f} \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{I.3})$$

I.1.3 Algèbre vectorielle

I.1.3.1 Produit scalaire

Soit \vec{v}_1 et \vec{v}_2 deux vecteurs et θ l'angle entre ces deux vecteurs.

Le produit scalaire entre \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est donné par :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cos(\theta) \quad (\text{I.4})$$

Le produit scalaire entre deux vecteurs est un scalaire. L'angle θ entre les deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 est donné par

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|\vec{v}_1|}$$

x est la projection de \vec{v}_2 sur \vec{v}_1 . Si \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont orthogonaux alors :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

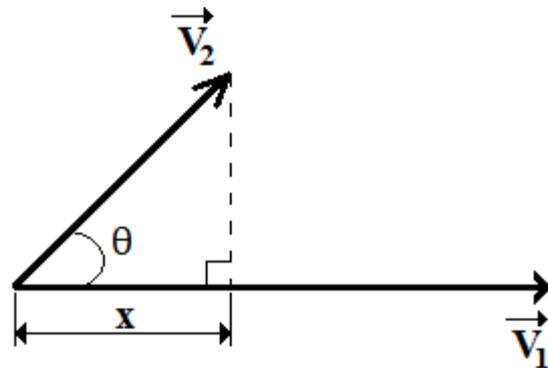


Figure I.7: Projection de vecteurs

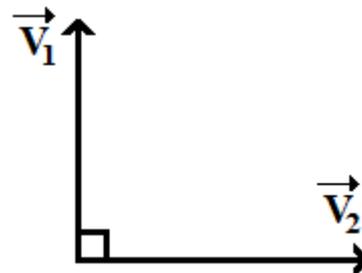


Figure I.8: Vecteurs orthogonaux

Si on se place dans un repère x, y, z de base orthonormée

$\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$, les relations scalaires entre les vecteurs de cette base sont :

$$\begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_y = 1 \\ \vec{a}_z \cdot \vec{a}_z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = 0 \\ \vec{a}_x \cdot \vec{a}_z = 0 \\ \vec{a}_y \cdot \vec{a}_z = 0 \end{cases}$$

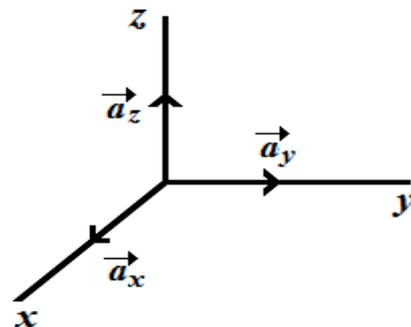


Figure I.9: Vecteurs orthonormés

En exprimant \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans un repère cartésien de sorte que :

$$\vec{V}_1 = x_1\vec{a}_x + y_1\vec{a}_y + z_1\vec{a}_z$$

$$\vec{V}_2 = x_2\vec{a}_x + y_2\vec{a}_y + z_2\vec{a}_z$$

Alors le produit scalaire entre les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est donné par :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Si on veut déterminer l'angle θ formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_2 on aura :

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

I.1.3.2 Produit vectoriel

Soit \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux vecteurs et θ l'angle entre ces deux vecteurs.

Si on se place dans un repère x, y, z de base orthonormée

$\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$, alors le produit vectoriel entre les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans cette base est le déterminant de la matrice suivante :

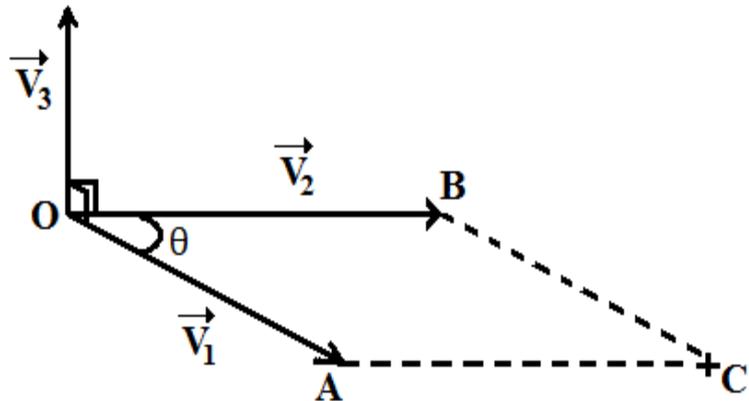


Figure I.10: Produit vectoriel

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{pmatrix} \quad (I.5)$$

Le produit vectoriel entre les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est un vecteur, sa direction est donnée par le vecteur \vec{V}_3 orthogonale au plan OACB formé par les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_3$$

Son intensité est donnée par :

$$|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \sin\theta \quad (I.6)$$

Une fois les coordonnées du vecteur \vec{V}_3 déterminées, l'angle θ peut être exprimé par :

$$\sin(\theta) = \frac{|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \frac{|\vec{V}_3|}{|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2|} = \frac{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Les relations vectorielles entre les vecteurs orthonormés $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ donnent :

$$\begin{cases} \vec{a}_x \wedge \vec{a}_y = \vec{a}_z \\ \vec{a}_y \wedge \vec{a}_z = \vec{a}_x \\ \vec{a}_z \wedge \vec{a}_x = \vec{a}_y \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{a}_y \wedge \vec{a}_x = -\vec{a}_z \\ \vec{a}_z \wedge \vec{a}_y = -\vec{a}_x \\ \vec{a}_x \wedge \vec{a}_z = -\vec{a}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_x \wedge \vec{a}_x = 0 \\ \vec{a}_y \wedge \vec{a}_y = 0 \\ \vec{a}_z \wedge \vec{a}_z = 0 \end{cases}$$

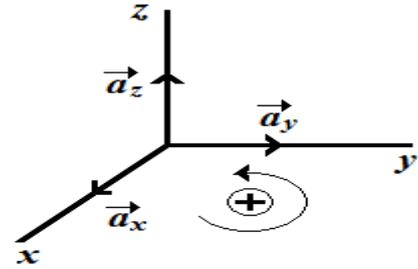


Figure I.11: Orientation du produit vectoriel

I.1.3.3 Double produit vectoriel

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_4 \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_5$$

\vec{V}_4 est orthogonale au plan formé par les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 . \vec{V}_5 est orthogonale au plan formé par les

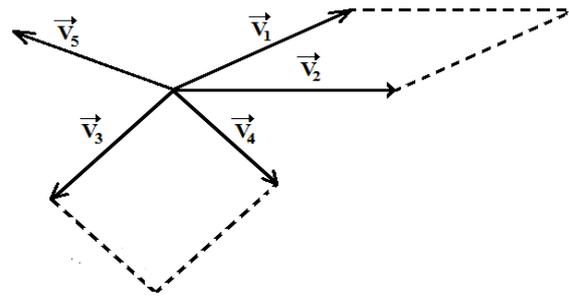


Figure I.12: Double produit vectoriel

vecteurs \vec{V}_3 et \vec{V}_4 .

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = -(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1) \wedge \vec{V}_3 = \vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1)$$

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_1) \vec{V}_2 - (\vec{V}_3 \cdot \vec{V}_2) \vec{V}_1 \quad (I.7)$$

La différence entre deux vecteurs est un vecteur.

I.1.3.4 Produit mixte

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \vec{V}_4 \cdot \vec{V}_3$$

Le produit mixte entre les vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 est un scalaire, il est égale au volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs.

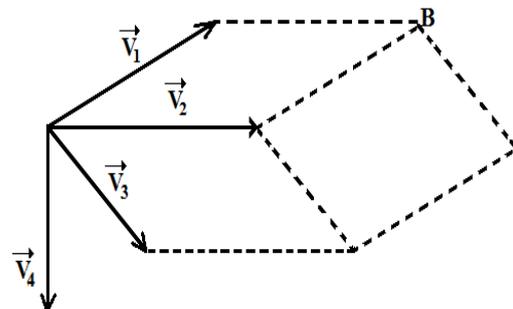


Figure I.13: Produit mixte

I.1.4 Les opérateurs vectoriels

I.1.4.1 Gradient d'un champ scalaire

I.1.4.1.1 Définition

Le gradient qui provient du mot graduation définit le taux de variation d'un champ scalaire en fonction de l'espace. Soit un champ scalaire $U(x, y, z)$, on appelle gradient de U le vecteur :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} \vec{a}_z \quad (\text{I.8})$$

Pour rendre plus compacte l'écriture précédente on introduit un opérateur symbolique appelé opérateur Nabla.

$$\vec{\nabla} = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{I.9})$$

L'opérateur Nabla exprimé en coordonnées cartésiennes n'a aucun sens tout seul. Pour lui donner une signification mathématique, il faut lui associer à travers une opération de multiplication une autre quantité scalaire ou vectorielle. Le champ vecteur $\vec{V}(x, y, z)$ résultant du gradient du champ scalaire $U(x, y, z)$ s'écrit alors:

$$\vec{V} = \vec{\nabla}U \quad (\text{I.10})$$

I.1.4.1.2 Interprétation

Dans le cas d'un champ scalaire $U(x)$ à une dimension, le vecteur $\vec{V}(x)$ en un point $M(x)$ définit pente tangente à ce champ $U(x)$ en ce point $M(x)$.

$$\vec{\nabla}U = \frac{dU}{dx} \vec{a}_x$$

$\frac{dU}{dx}$ est la dérivée du champ scalaire $U(x)$ au point $M(x)$, c'est la pente de la tangente à la courbe $U(x)$ en ce point.

Cette dérivée représente la variation infinitésimale dU de la fonction $U(x)$ par rapport à un déplacement infinitésimal dx autour du point $M(x)$. Dans le cas d'un champ scalaire $U(x, y, z)$ à trois dimensions, le vecteurs $\vec{V}(x, y, z)$ résultant du gradient de $U(x, y, z)$ représente les variations infinitésimales dU de la fonction

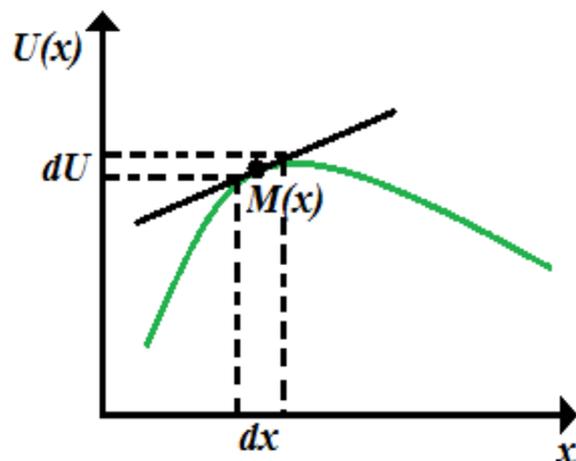


Figure I.14: Interprétation du gradient d'un champ scalaire

$U(x, y, z)$ par rapport aux déplacements infinitésimaux dx, dy, dz orientés autour d'un point $M(x, y, z)$ de l'espace.

I.1.4.1.3 Circulation du gradient d'un champ de potentiel

Considérons un déplacement infiniment petit :

$$\vec{dr} = dx \vec{a}_x + dy \vec{a}_y + dz \vec{a}_z$$

Dans l'espace cartésien (O, x, y, z) où est représenté un champ scalaire $U(x, y, z)$.

La circulation du vecteur \vec{V} gradient du champ scalaire $U(x, y, z)$ entre deux points A et B d'un chemin quelconque AB est égale à :

$$C(\vec{V}, AB) = \int_A^B \vec{\nabla}U \cdot \vec{dr}$$

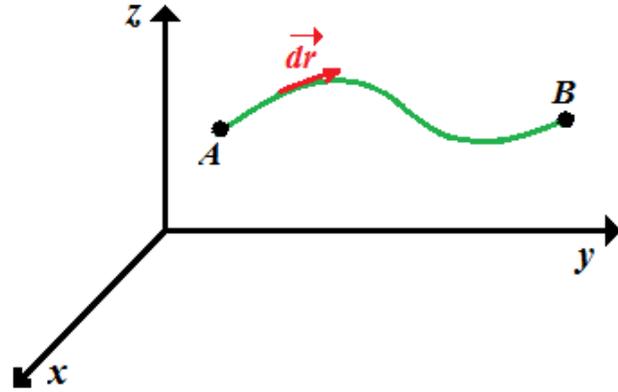


Figure I.15: Circulation du gradient d'un champ scalaire

Le produit scalaire entre le vecteur \vec{V} et le chemin orienté \vec{dr} est égale à :

$$\vec{\nabla}U \cdot \vec{dr} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

La circulation du vecteur \vec{V} entre les deux points A et B est donc donnée par :

$$C(\vec{V}, AB) = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

Dans le cas où le champ scalaire $U(x, y, z)$ est un champ de potentiel, la circulation du vecteur \vec{V} gradient de ce champ scalaire entre deux points de l'espace est égale à la différence de ce potentiel entre ces deux points.

I.1.4.1.4 Application

Définition d'un champ électrique \vec{E} à partir d'un potentiel électrostatique U :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U$$

I.1.4.2 Divergence d'un champ de vecteurs

I.1.4.2.1 Définition

Soit un champ de vecteurs :

$$\vec{V} = V_x \vec{a}_x + V_y \vec{a}_y + V_z \vec{a}_z$$

La divergence \vec{V} notée $div \vec{V}$ est égale au produit scalaire de ce champ de vecteurs avec le vecteur \vec{V} .

$$div \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (I.11)$$

I.1.4.2.2 Interprétation

La divergence d'un champ vectoriel rend compte de la tendance qu'a ce champ à s'éloigner d'un point $A(x, y, z)$ de l'espace.

Une divergence positive correspond à un champ de vecteurs \vec{V} majoritairement sortant autour du point A , champ \vec{V} divergent.

Une divergence négative en un point $A(x, y, z)$ correspond à un champ de vecteurs \vec{V} majoritairement entrant autour de ce point A , champ \vec{V} convergent.

Une divergence nulle en un point $A(x, y, z)$ correspond à un champ uniforme de vecteurs \vec{V} entrants et sortants autour de ce point A en se compensant, champ \vec{V} uniforme.

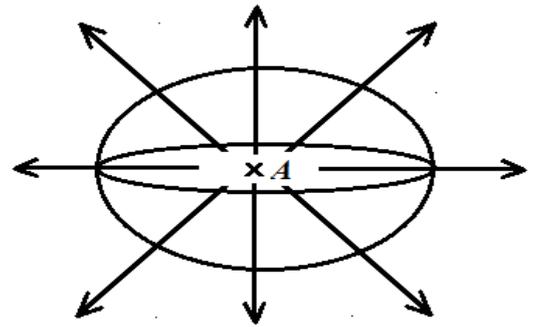


Figure I.16: Divergence d'un champ de vecteurs

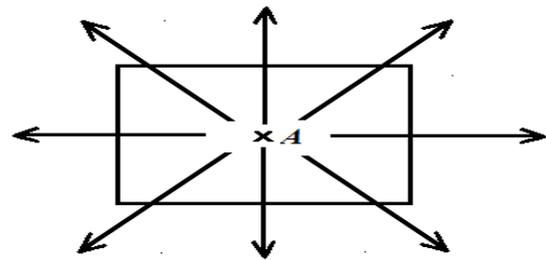


Figure I.17 : Champ de vecteurs sortants d'un point A : $div \vec{V} > 0$

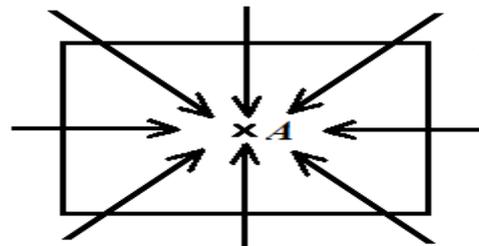


Figure I.18 : Champ de vecteurs entrants vers un point A : $div \vec{V} < 0$

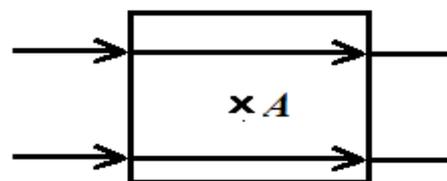


Figure I.19: Champ de vecteurs entrants et sortants d'un point A : $div \vec{V} = 0$
 $div \vec{V} = 0$

I.1.4.2.3 Application

Loi de Maxwell-Gauss : $div \vec{D} = \rho$

Loi de Maxwell-Thomson : $div \vec{B} = 0$

I.1.4.3 Rotationnel d'un champ vectoriel

I.1.4.3.1 Définition

Le mot rotationnel qui n'est pas d'usage courant, relatif au mot rotation, définit le mouvement de rotation d'un champ de vecteurs \vec{V} autour d'un point M de l'espace. En anglais on utilise le mot "Curl" qui signifie boucler, tourbillonner...

Soit le champ de vecteurs :

$$\vec{V}(x, y, z) = V_x(x, y, z)\vec{a}_x + V_y(x, y, z)\vec{a}_y + V_z(x, y, z)\vec{a}_z$$

On appelle le rotationnel de $\vec{V}(x, y, z)$ le produit vectoriel entre le vecteur $\vec{\nabla}$ et ce champ de vecteurs :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (I.12)$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{a}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{a}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{a}_z \quad (I.13)$$

I.1.4.3.2 Interprétation

Le vecteur rotationnel du champ de vecteurs \vec{V} en un point M de l'espace, indique la façon dont ce champ de vecteurs \vec{V} tourne autour de ce point.

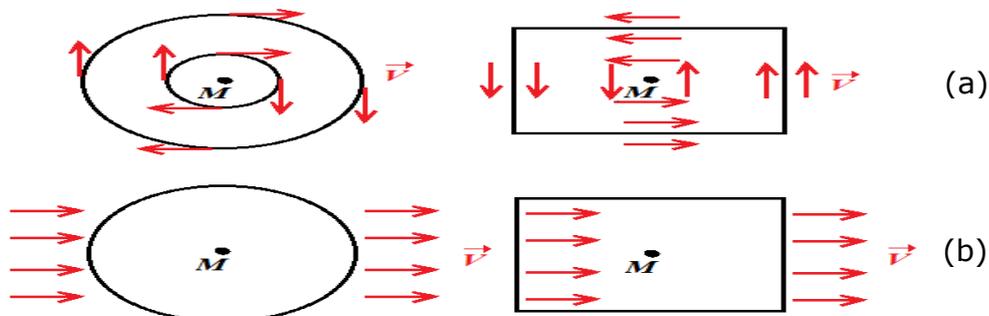


Figure I.20: Champ de vecteurs autour d'un point M : (a) $\overrightarrow{rot}\vec{V} \neq 0$
(b) $\overrightarrow{rot}\vec{V} = 0$

I.1.4.3.3 Applications

Loi de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Loi de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

I.1.4.4 Le Laplacien

I.1.4.4.1 Laplacien d'un champ scalaire

I.1.4.4.1.1 Définition

Soit un champ scalaire $U(x,y,z)$, on appelle le Laplacien de $U(x,y,z)$ la divergence de son gradient.

$$\text{div}(\overrightarrow{grad}U) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}U) = \nabla^2 U = \Delta U \quad (\text{I.14})$$

$$\Delta U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{I.15})$$

On définit un opérateur appelé le Laplacien :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I.16})$$

I.1.4.4.1.2 Interprétation

Prenons le cas d'un champ scalaire $U(x)$ à une dimension. Le Laplacien $U(x)$ est égal à sa dérivée seconde en fonction de x .

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

$\frac{dU}{dx}$ au point $M(x)$ est la pente de la tangente à la courbe $U(x)$ en ce point.

Elle représente la variation infinitésimale de $U(x)$ par rapport à une variation infinitésimale de x en ce point.

$\frac{d^2 U}{dx^2}$ au point $M(x)$ représente la pente de la

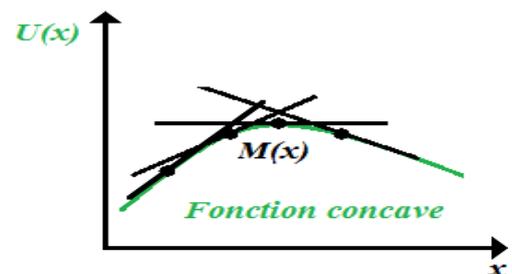


Figure I.21: Laplacien d'un champ scalaire concave $\Delta U < 0$

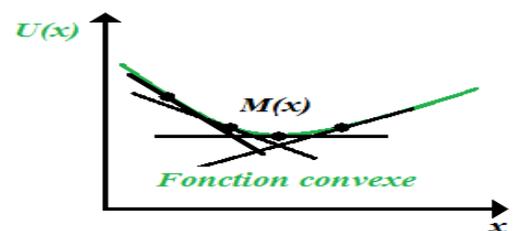


Figure I.22: Laplacien d'un champ scalaire convexe $\Delta U > 0$

tangente à la courbe $U'(x)$ en ce point. Elle représente la variation infinitésimale de $U'(x)$ par rapport à une variation infinitésimale de x en ce point.

Le Laplacien d'un champ scalaire en un point M indique sa concavité en ce point.

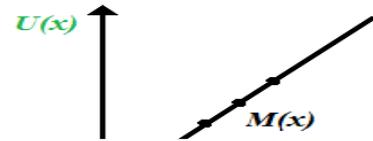


Figure I.23: Laplacien d'un champ scalaire uniforme $\Delta U = 0$

I.1.4.4.1.3 Application

Equation de propagation d'un champ de potentiel électrique ϕ dans un milieu matériel:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

I.1.4.4.2 Laplacien d'un champ de vecteurs

I.1.4.4.2.1 Définition

Soit un champ de vecteurs :

$$\vec{V} = V_x \vec{a}_x + V_y \vec{a}_y + V_z \vec{a}_z$$

Le Laplacien du champ de vecteurs \vec{V} est un vecteur dont les composantes sont égales au Laplacien des composantes du vecteur \vec{V} .

$$\Delta\vec{V} = \Delta V_x \vec{a}_x + \Delta V_y \vec{a}_y + \Delta V_z \vec{a}_z \quad (\text{I.17})$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \vec{a}_x \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \vec{a}_y \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \vec{a}_z \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

I.1.4.4.2.2 Applications

Equation de propagation du champ électrique: $\Delta\vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

Equation de propagation du champ magnétique: $\Delta\vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$

I.2 Les équations de Maxwell

I.2.1 L'électromagnétisme statique

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie l'ensemble des phénomènes créés par des charges électriques statiques (immobiles). La magnétostatique étudie les effets des champs magnétiques statiques (constants) sur la matière. L'électromagnétisme représente la branche de la physique qui étudie les interactions entre particules chargées, qu'elles soient au repos ou en mouvement et plus généralement les effets de l'électricité, du magnétisme et leur interaction.

Electricité + Magnétisme ⇒ Electromagnétisme

Avant d'aborder les lois de l'électromagnétisme, nous allons faire le rappel de deux importants théorèmes utilisés en électromagnétisme : le théorème de Gauss-Ostrogradski et le théorème de Stokes.

I.2.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski

Le théorème de Gauss-Ostrogradski appelé aussi théorème de la divergence est donné par:

$$\oiint_{S_f} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv \quad (I.19)$$

Interprétation: Soit une surface fermée (S) entourant un volume (V). Le flux d'un champ vectoriel \vec{E} sortant de la surface (S_f) est égal à l'intégral de la divergence de ce champ

vectoriel \vec{E} sur le volume (V) entouré par la surface (S_f).

I.2.3 Théorème de Stokes

Considérons une surface ouverte (S) orientée, composée d'une infinité d'éléments dS.

Le théorème de Stokes appelé aussi théorème du rotationnel, indique que la circulation d'un champ de vecteurs \vec{H} le long d'un chemin (C) qui entoure une surface (S) est égale au flux de son rotationnel à travers cette surface.

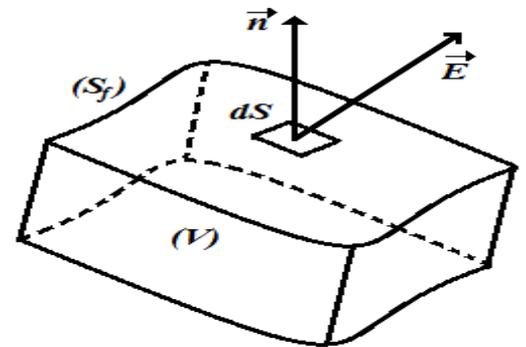


Figure I.24: Domaine d'application du théorème de Gauss-Ostrogradski

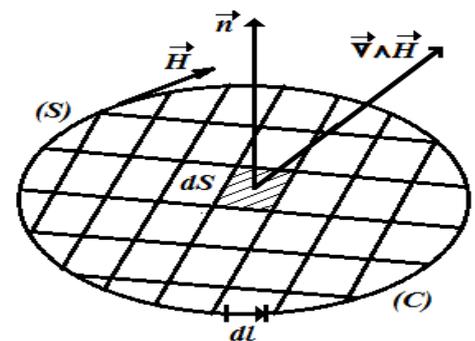


Figure I.25: Domaine d'application du théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{dl} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{dS} \quad (I.20)$$

$$\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS$$

I.2.4 Lois de l'électromagnétisme statique

I.2.4.1 Loi de Gauss

Le théorème de Gauss exprime le flux électrostatique ψ sortant d'une surface S comme étant égal au quotient par la permittivité ϵ de la charge totale Q contenu dans le volume V entouré par la surface S. En exprimant la charge totale Q à l'aide de la densité de charge volumique, nous aurons :

$$\psi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho(V) dv \quad (I.21)$$

I.2.4.2 Loi de Faraday

Le théorème de Faraday énonce que le champ électrostatique \vec{E} le long d'un parcours C fermé est à circulation conservatrice.

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \quad (I.22)$$

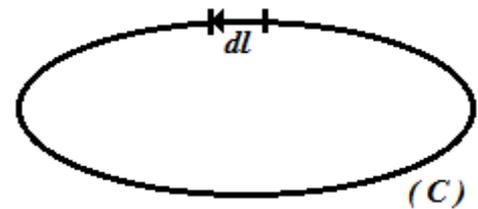


Figure I.26: Parcours d'application de la loi de Faraday

I.2.4.3 Loi de Thomson

La loi de Thomson appelée aussi loi du flux magnétique, montre que le flux du vecteur champ magnétique \vec{B} à travers une surface fermée (S) est conservatif.

$$\oiint_{S_f} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (I.23)$$

Avec : $\vec{dS} = \vec{n} \cdot dS$

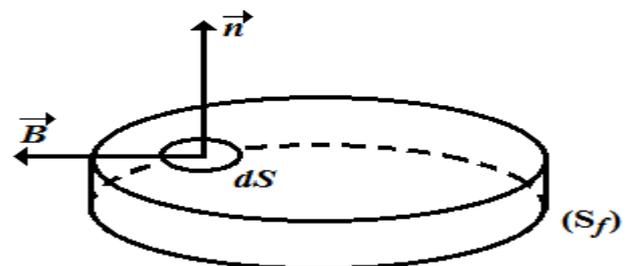


Figure I.27: Domaine d'application de la loi de Thomson

I.2.4.4 Loi d'Ampère

Le Théorème d'Ampère montre que la circulation de l'induction magnétique

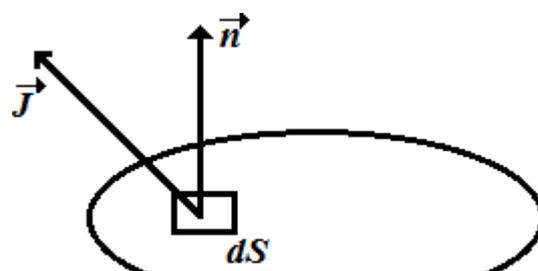


Figure I.28: Domaine d'application de la loi d'Ampère

\vec{B} sur une boucle fermée C est égale à la perméabilité magnétique μ fois le flux de la densité de courant \vec{J} sur la surface limitée par le parcours C.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.24})$$

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.25})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.26})$$

(I.25) dans (I.24) donne :
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.27})$$

I.2.4.5 Loi de conservation de l'électricité

Considérons un volume (V) entouré par une surface fermée (S). Le courant sortant de la surface (S) est égale au courant contenu dans le volume (V), ce dernier est donné par :

$$I_V = -\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(v) dv \quad (\text{I.28})$$

Le signe (-) du courant contenu dans le volume (V) provient du fait que se sont des charges sortantes de ce volume.

Le courant sur la surface (S_f) est :

$$I_{S_f} = \oiint_{S_f} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.29})$$

La continuité des courants contenu dans le volume (V) et sortant de la surface (S_f) implique :

$$\oiint_{S_f} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(v) dv \quad (\text{I.30})$$

Ce qui aboutit à :

$$\oiint_{S_f} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(v) dv \quad (\text{I.31})$$

L'application du théorème d'Ostrogradski sur le premier terme de l'équation (I.31) donne :

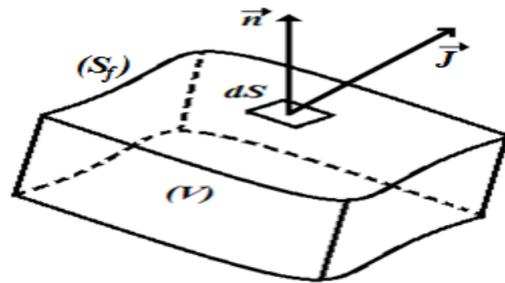


Figure I.29 : Application de la loi de conservation de l'électricité

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho(v) dv = 0 \quad (\text{I.32})$$

Après élimination des intégrales volumiques on aura :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho(v)}{\partial t} \quad (\text{I.33})$$

I.2.5 L'électromagnétisme dynamique

Maxwell montra que pour donner une description logiquement cohérente des phénomènes électriques et magnétiques connus, il était nécessaire d'admettre l'existence d'un phénomène réciproque d'induction : **un champ électrique variable dans le temps est une source de champ magnétique et réciproquement un champ magnétique variable dans le temps est une source de champ électrique.** Ce point de vue, exprimé dans quatre équations appelées équations de Maxwell établit définitivement l'unité des phénomènes électriques et magnétiques.

I.2.5.1 Equation de Maxwell-Faraday

L'équation de Faraday en électrostatique exprime une circulation conservatrice du vecteur champ électrique \vec{E} en régime permanent. La signification de l'équation de Maxwell-Faraday apparaît en examinant la circulation à l'instant t du champ électrique \vec{E} le long d'un contour fermé (C) sur lequel s'appuie une surface (S).

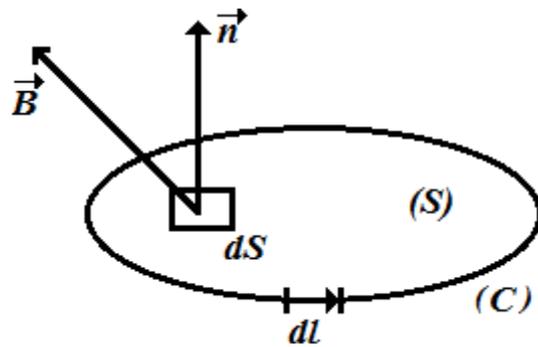


Figure I.30: Domaine d'application de la loi de Maxwell-Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.34})$$

L'utilisation du théorème de Stokes au premier terme de l'équation de Maxwell-Faraday aboutit à :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.35})$$

(I.34) et (I.35) donnent:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.36})$$

En éliminant les intégrales surfaciques, on aboutit à :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.37})$$

La relation (I.37) est celle de Maxwell-Faraday sous sa forme différentielle, elle exprime qu'un champ magnétique dépendant du temps donne naissance à un champ électrique à circulation non conservatrice.

I.2.5.2 Equation de Maxwell-Ampère

L'équation d'Ampère exprime la circulation du champ magnétique \vec{H} le long d'un parcours (C) sur lequel s'appuie une surface (S) en fonction du flux de la densité de courant électrostatique \vec{J} .

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.38})$$

En régime dynamique Maxwell s'appuyant sur l'équation d'Ampère établit que la circulation à l'instant t du champ magnétique \vec{H} le long du contour fermé (C) sur lequel s'appuie une surface (S) est la somme de deux flux : l'un de la densité de courant de conduction \vec{J}_C et l'autre de la densité de courant de déplacement \vec{J}_D .

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_C \cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{J}_D \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.39})$$

Avec :

$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.40})$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.41})$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{I.42})$$

L'utilisation de l'équation (I.41) et l'application du théorème de Stokes au premier terme de l'équation (I.39) donne:

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{J}_C + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.43})$$

L'élimination des intégrales surfaciques donne:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_C + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.44})$$

La relation (I.44) est celle de Maxwell-Ampère sous sa forme différentielle, elle montre qu'un champ électrique dépendant du temps est au même titre qu'un courant, et une source de champ magnétique.

I.2.5.3 Equation de Maxwell-Gauss

Maxwell a confirmé la validité de l'équation d'Ampère en régime permanent. Le flux électrique sortant à l'instant t d'une surface (S) limitant un volume (V) en fonction de la charge totale Q contenu à l'instant t dans le volume (V) est donnée par:

$$\oiint_{S_f} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho(v) dv \quad (\text{I.45})$$

L'utilisation du théorème d'Ostrogradski pour le premier terme de l'équation ci-dessus mène à:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dv = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V \rho(v) dv \quad (\text{I.46})$$

L'élimination des intégrales volumiques donne:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{I.47})$$

L'équation (I.47) est celle de Maxwell-Gauss sous sa forme différentielle, elle montre que la divergence d'un champ électrique \vec{E} sortant d'une surface (S_f) entourant un volume (V) chargé est non nulle.

I.2.5.4 Equation de Maxwell-Thomson

Maxwell a généralisé l'équation de Gauss au régime dynamique. Le flux magnétique sortant d'une surface (S_f) entourant un volume (V) est conservatif.

$$\oint = \oiint_{S_f} \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (\text{I.48})$$

L'application du théorème d'Ostrogradski au premier terme de l'équation (I.48) donne :

$$\oiint_{S_f} \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dv = 0 \quad (\text{I.49})$$

Ce qui nous permet de déduire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.50})$$

L'équation (I.50) est celle de Maxwell-Thomson, elle exprime le caractère conservatif du flux magnétique.

I.2.6 Système d'équations de Maxwell

Le système d'équations de Maxwell est un ensemble de quatre équations dont deux couplées : celle de Faraday et d'Ampère. Ces équations différentielles

linéaires de premier ordre donnent la relation entre les champs vecteurs électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} .

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.51})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_C + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.52})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{I.53})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{I.54})$$

La forme intégrale de ce système est donnée par :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.55})$$

$$\iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{J}_C + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.56})$$

$$\oiint_{S_f} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho(v) dv \quad (\text{I.57})$$

$$\oiint_{S_f} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{I.58})$$

Les équations qui donnent les relations des champs vectoriels avec les paramètres caractéristiques du milieu sont :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{I.59})$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{I.60})$$

$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.61})$$

Les relations (I.51) à (I.61) sont les équations sur lesquelles est bâtie la théorie des champs électromagnétiques.

I.3 L'onde électromagnétique

I.3.1 Définition

Une onde électromagnétique est une vibration qui se propage dans un milieu quelconque. Elle est créée par la circulation d'un courant sur un support métallique.

L'onde électromagnétique est définie par un champ électrique \vec{E} , un champ magnétique \vec{H} et une direction de propagation \vec{r} .

I.3.2 Interaction onde-matière

L'onde électromagnétique se propage dans un milieu caractérisé par sa permittivité ε , sa perméabilité μ , sa conductivité σ , et sa densité de charges libres ρ .

L'interaction de l'onde électromagnétique avec le milieu matériel donne naissance à une induction électrique \vec{D} , une induction magnétique \vec{B} , et une densité de courant surfacique \vec{j} .

I.3.3 Energie d'une onde électromagnétique

Une onde électromagnétique est non seulement porteuse d'une information mais aussi d'une énergie. L'énergie électromagnétique transmise en espace libre ou dans un milieu quelconque est stockée dans les champs électrique et magnétique et est dissipée sous forme de chaleur dans le milieu. Cette énergie exprimée par un vecteur appelé vecteur de **Poynting** est donnée par la valeur moyenne du produit vectoriel des intensités des vecteurs champs électrique et magnétique.

$$\vec{P} = \frac{1}{2} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad (\text{I.62})$$

L'équation (I.62) exprime le vecteur de Poynting complexe. Le vecteur de Poynting réel est donné par :

$$\langle \vec{P} \rangle = \langle \vec{E} \wedge \vec{H} \rangle = \frac{1}{2} \text{Réal}(\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad (\text{I.63})$$

En régime harmonique nous avons : $\partial/\partial t = j\omega$, dans ce cas les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère deviennent :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (\text{I.64})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_c + j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (\text{I.65})$$

La multiplication de (I.64) par \vec{H}^* et le conjugué de (I.65) par \vec{E} donne :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{H}^* = -j\omega\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^* \quad (\text{I.66})$$

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}^*) \cdot \vec{E} = (\vec{j}_c^* - j\omega\varepsilon\vec{E}^*) \cdot \vec{E} \quad (\text{I.67})$$

On soustrait l'équation (I.66) de l'équation (I.67):

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}^*) - \vec{H}^* \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{J}_c^* - j\omega (\varepsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2) \quad (\text{I.68})$$

Le terme de gauche de l'équation (I.68) est égal à :

$$\vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}^*) - \vec{H}^* \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) \quad (\text{I.69})$$

Ce qui donne dans l'équation (I.68):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H}^*) = -\vec{E} \cdot \vec{J}_c^* + j\omega (\varepsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2) \quad (\text{I.70})$$

En substituant l'équation (I.62) dans l'équation (I.70) nous aurons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \sigma \vec{E}^* + \frac{j\omega}{2} (\varepsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2) \quad (\text{I.71})$$

I.3.4 Bilan des puissances Transportées par une onde électromagnétique dans un milieu matériel

L'intégration de l'équation (I.71) dans un volume de matière homogène donne:

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dv = \frac{j\omega}{2} \iiint_V (\varepsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2) dv - \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dv \quad (\text{I.72})$$

L'application du théorème de Gauss-Ostrogradski au terme de gauche de l'équation (I.72) aboutit à :

$$\iint_S \vec{P} \cdot \vec{dS} = \frac{j\omega}{2} \iiint_V (\varepsilon |\vec{E}|^2 - \mu |\vec{H}|^2) dv - \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dv \quad (\text{I.73})$$

L'équation [11] est connu comme étant le théorème de Poynting complexe, qui peut être écrit en tenant compte du bilan des différents types de puissances parcourant un milieu.

$$P_{tr} = j2\omega \langle W_e - W_m \rangle - \langle P_d \rangle \quad (\text{I.74})$$

- La puissance transmise par l'onde électromagnétique dans le milieu:

$$P_{tr} = \iint_S \vec{P} \cdot \vec{dS} \quad (\text{I.75})$$

- L'énergie électrique moyenne stockée dans le milieu matériel:

$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \iiint_V \varepsilon |\vec{E}|^2 dv \quad (\text{I.76})$$

- L'énergie magnétique moyenne stockée dans le milieu matériel:

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{4} \iiint_V \mu |\vec{H}|^2 dv \quad (\text{I.77})$$

- L'énergie électrique dissipée dans le milieu sous forme de chaleur :

$$\langle P_d \rangle = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\vec{E}|^2 dv \quad (\text{I.78})$$

Chapitre II

Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

II.1 Des Equations de Maxwell aux Equations d'Ondes

Soit un milieu **L**inéaire, **H**omogène, et **I**sotrope (**LHI**); prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

Les dérivations spatiales et temporelles sont indépendantes, donc l'ordre des dérivations peut être inversé. De plus nous avons l'identité suivante:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (\text{II.2})$$

Alors :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

De plus, le rotationnel de l'induction magnétique \vec{B} est donné par l'équation de Maxwell-Ampère:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu \left(\vec{J}_C + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{II.4})$$

(II.4) dans (II.3) donne:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial(\mu(\vec{J}_C + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}))}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

L'utilisation de Maxwell-Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Dans l'équation (II.5) aboutit à:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}_C}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{II.6})$$

en arrangeant l'équation ci-dessus on aboutit à l'équation de propagation du champ électrique \vec{E} dans un milieu quelconque:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial \vec{J}_C}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

Dans un milieu non chargé $\rho = 0$ et faiblement conducteur $\vec{J}_C \simeq 0$, l'équation précédente devient:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.8})$$

L'équation ci-dessus de second ordre aux dérivées partielles, spatio-temporelle, linéaire et homogène est l'équation de propagation du champ électrique.

En procédant de la même manière, en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère, on aboutit à l'équation de propagation du champ magnétique dans un milieu isotrope, homogène et non chargé.

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.9})$$

II.1.1 Forme générale des équations d'ondes

La forme générale de l'équation de propagation des deux champs vectoriels, électrique et magnétique est donnée par:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{II.10})$$

Où $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ est la vitesse de propagation de l'onde. Si le milieu où se propage l'onde est le vide, alors:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H/m}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{F/m} = 8.8541878 \text{F/m}$$

$$v_p = c = \sqrt{8.987552 \cdot 10^{16} \text{m}^2/\text{s}^2} \simeq 3 \cdot 10^8$$

\vec{A} : est soit le champ électrique \vec{E} , soit le champ magnétique \vec{H} .

\vec{r} : système de coordonnées, dans la suite de ce cours cartésiennes (x, y, z) .

t : est la variable temps.

II.2 Propagation des ondes électromagnétiques en régime harmonique

En régime harmonique les solutions générales des équations de propagation (II.8) et (II.9) sont de formes complexes:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (\text{II.11})$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_0(x, y, z)e^{j\omega t} \quad (\text{II.12})$$

Le passage du régime temporel vers le régime harmonique se fait par une double dérivation de ces solutions par rapport au temps. Dans le cas du champ électrique \vec{E} nous aurons:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(x, y, z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}(x, y, z, t) \quad (\text{II.13})$$

Ce qui nous permet d'affirmer que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (\text{II.14})$$

La substitution de (II.14) dans les équations de propagation (II.8) et (II.9) des champs EM exprime les équations de propagation des champs électrique et magnétique en régime harmonique.

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0 \quad (\text{II.16})$$

On pose :

$$\omega^2 \mu \epsilon = k^2 \quad (\text{II.17})$$

On appellera la quantité k nombre d'ondes. La vitesse de propagation de l'onde est donnée par :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (\text{II.18})$$

Cette vitesse de propagation dans un milieu quelconque peut aussi être exprimée par la vitesse de propagation de l'onde dans le vide.

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (\text{II.19})$$

Avec : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ et n indice de réfraction du milieu que l'onde traverse.

Les équations de propagation (II.15) et (II.16) deviennent:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (\text{II.21})$$

Les équations de propagations des champs EM sont donc de la même forme, leurs solutions seront aussi de la même forme. Nous allons donc solutionner

seulement l'équation de propagation du champ électrique et l'appliquer pour le champ magnétique.

L'équation de propagation du vecteur champ électrique peut être décomposée en trois équations de propagation des composantes scalaires du champ électrique.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \begin{pmatrix} E_x \vec{a}_x \\ E_y \vec{a}_y \\ E_z \vec{a}_z \end{pmatrix} + k^2 \begin{pmatrix} E_x \vec{a}_x \\ E_y \vec{a}_y \\ E_z \vec{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \vec{a}_x \\ 0 \vec{a}_y \\ 0 \vec{a}_z \end{pmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Ce qui va conduire au système d'équations scalaires suivant :

$$\begin{cases} \nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0 \\ \nabla^2 E_y + k^2 E_y = 0 \\ \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Les équations de propagation des composantes scalaires du champ électrique sont de même forme. Nous allons donc solutionner l'équation de l'une des composantes scalaires et généraliser la solution pour les autres composantes.

II.2.1 Onde plane oblique

Nous supposons que l'onde se propage dans une direction arbitraire. Dans ce cas le champ électrique ainsi que ces composantes sont fonctions des trois directions de l'espace x , y et z . Résonnons sur l'équation de propagation de la composante E_x , et développons le Laplacien de cette composante:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (\text{II.24})$$

Pour résoudre cette équation nous avons utilisé la méthode de séparation des variable, pour cela nous supposons que la variation de la composante E_x en fonction de l'une des variables est indépendante des autres variables et vis versa. En conséquence, nous pouvons considérer que la composante E_x est le produit de trois fonctions:

$$E_x(x, y, z) = e_x(x)e_x(y)e_x(z) \quad (\text{II.25})$$

La substitution de l'équation (II.25) dans l'équation (II.24) puis la division du résultat par le produit $e_x(x)e_x(y)e_x(z)$ donnent:

$$\frac{1}{e_x(x)} \frac{\partial^2 e_x(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{e_x(y)} \frac{\partial^2 e_x(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{e_x(z)} \frac{\partial^2 e_x(z)}{\partial z^2} + k^2 = 0 \quad (\text{II.26})$$

Pour que cette équation soit vérifiée il faut que la somme des trois termes fonctions des dérivées secondes soit de même ordre de grandeur que k^2 mais de signe opposé, on pose:

$$\begin{cases} \frac{1}{e_x(x)} \frac{\partial^2 e_x(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{e_x(y)} \frac{\partial^2 e_x(y)}{\partial y^2} = -k_y^2 \\ \frac{1}{e_x(z)} \frac{\partial^2 e_x(z)}{\partial z^2} = -k_z^2 \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

Donc le carré du nombre d'onde sera exprimé par:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (\text{II.28})$$

Dans le cas où l'on considère seulement les ondes incidentes, c'est à dire qui progressent dans les sens positifs des variables spatiales, les solutions du système d'équations (II.27) seront de formes:

$$\begin{cases} e_x(x) = C_1 e^{-jk_x \cdot x} \\ e_x(y) = C_2 e^{-jk_y \cdot y} \\ e_x(z) = C_3 e^{-jk_z \cdot z} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

La substitution des solutions (II.29) dans la composante E_x exprimée par l'équation (II.25) donne:

$$E_x(x, y, z) = C_4 e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$$C_4 = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3$$

Le même raisonnement sera suivi pour les composantes E_y et E_z , ce qui donnera:

$$E_y(x, y, z) = C_5 e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \quad (\text{II.31})$$

$$E_z(x, y, z) = C_6 e^{-j(k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z)} \quad (\text{II.32})$$

Le vecteur champ électrique est de la forme:

$$\vec{E} = E_x \vec{a}_x + E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z \quad (\text{II.33})$$

La substitution des équations (II.30), (II.31) et (II.32) dans l'équation (II.33) aboutit à:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (\text{II.34})$$

Avec :

$$\vec{E}_0 = C_4 \vec{a}_x + C_5 \vec{a}_y + C_6 \vec{a}_z$$

L'amplitude \vec{E}_0 du champ électrique est un vecteur à coefficients constants (C_4 , C_5 et C_6 ne dépendent pas des variables x , y et z).

On pose Le vecteur d'ondes :

$$\vec{k} = k_x \vec{a}_x + k_y \vec{a}_y + k_z \vec{a}_z \quad (\text{II.35})$$

Et le vecteur position :

$$\vec{r} = x \vec{a}_x + y \vec{a}_y + z \vec{a}_z \quad (\text{II.36})$$

Le vecteur champ électrique peut ainsi être exprimé comme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{II.37})$$

II.2.1.1 Caractéristiques de l'onde plane oblique

Dans le cas d'un milieu non chargé ($\rho = 0$) l'équation de Thomson devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{II.38})$$

La substitution de l'expression (II.37) du champ électrique dans l'équation (II.38) donne :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} &= -j\vec{k} \cdot \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0 \\ \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

La relation (II.39) montre que le vecteur d'ondes \vec{k} porté par la direction de propagation et le vecteur champ électrique \vec{E} sont orthogonaux.

Le champ magnétique \vec{H} peut être déterminé à partir de l'équation de Maxwell-Faraday.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \vec{E}_0 \wedge \vec{\nabla} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \vec{E}_0 \wedge -j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \vec{n} \wedge \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu} \vec{n} \wedge \vec{E} \quad (\text{II.40})$$

L'utilisation de (II.18) dans (II.41) donne :

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{n} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{\xi} \quad (\text{II.41})$$

On pose :

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (\text{II.42})$$

ξ est un quantité homogène à une impédance, définie comme étant l'impédance caractéristique du milieu où se propage l'onde, dans le cas du vide :

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$$

Les relations (II.39) et (II.41) montrent que puisque le vecteur d'onde \vec{k} est orthogonale au vecteur champ électrique \vec{E} et que le vecteur champ magnétique \vec{H} résulte du produit vectoriel des vecteurs \vec{k} et \vec{E} ; alors nous pouvons affirmer comme montré sur la figure en face que le vecteur champ magnétique \vec{H} et le vecteur d'onde \vec{k} sont orthogonaux.

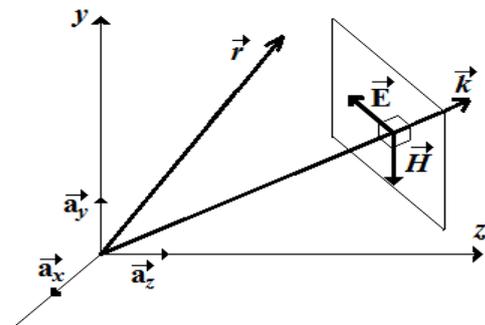


Figure II.1 : Orientation des champs et direction de propagation d'une onde plane oblique

En conclusion nous pouvons énoncer que lorsqu'une onde EM pénètre un milieu quelconque dans une direction arbitraire, les vecteurs champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} possèdent toutes leurs composantes (E_x, E_y, E_z et H_x, H_y, H_z) variables dans les trois directions ($x, y,$ et z) de l'espace. De plus, ces vecteurs champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} sont orthogonaux et tous deux perpendiculaires au vecteur d'ondes \vec{k} porté par la direction de propagation.

II.2.2 L'onde plane TEM

Considérons une onde EM qui se propage dans milieu sans pertes (ϵ_r réelle), supposons que la direction de propagation est déterminée, prenons la direction z . Dans ce cas le vecteur d'onde est donné par :

$$\vec{k} = k\vec{a}_z \quad (\text{II.43})$$

Dans le cas d'une onde plane, les vecteurs champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} sont portés par des plans perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} porté par l'axe z , dans ce cas les vecteurs champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} sont invariables dans les deux autres directions (x et y).

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.45})$$

Dans le cas d'un milieu non conducteur donc sans pertes ($\sigma = 0$ donc ϵ_r réelle), électriquement neutre ($\rho = 0$), et tenant compte des équation (II.44) et (II.45), les équations de propagation des champs électrique et magnétique deviennent:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k_z^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{II.46a})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} + k_z^2 \vec{H} = 0 \quad (\text{II.46b})$$

Les solutions générales des équations de propagation (II.46) sont de la forme:

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_i(z) + \vec{E}_r(z) \quad (\text{II.47})$$

$$\vec{H}(z) = \vec{H}_i(z) + \vec{H}_r(z) \quad (\text{II.48})$$

Où $\vec{E}_i(z)$, $\vec{E}_r(z)$, $\vec{H}_i(z)$ et $\vec{H}_r(z)$ sont respectivement les champs électriques et magnétiques incidents (progressifs) et réfléchis (régressifs) respectivement. Le

développement des ces expressions tenant compte de la direction de propagation z aboutit à :

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_{0i}e^{-jk_z z} + \vec{E}_{0r}e^{+jk_z z} \quad (\text{II.49})$$

$$\vec{H}(z) = \vec{H}_{0i}e^{-jk_z z} + \vec{H}_{0r}e^{+jk_z z} \quad (\text{II.50})$$

Dans le cas où l'on considère que l'onde se propage dans un milieu homogène sans obstacles, alors il ne se propage dans ce milieu que des ondes **progressives** : qui sont solutions des équations (II.46) et sont de formes :

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_0 e^{-jk_z z} \quad (\text{II.51})$$

$$\vec{H}(z) = \vec{H}_0 e^{-jk_z z} \quad (\text{II.52})$$

Si ces ondes progressives sont **monochromatiques**, c'est à dire composées d'une seule longueur d'onde λ (ou d'une seule fréquence) : alors en régime harmonique les expressions des champs EM sont des grandeurs instantanées complexes, de la forme :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \quad (\text{II.53})$$

$$\vec{H}(z, t) = \vec{H}_0 e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \quad (\text{II.54})$$

Les quantités instantanées réelles des champs EM sont extraites des équations (II.53) et (II.54), et sont données par :

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega(t - z/v)) \quad (\text{II.55})$$

$$\vec{\mathcal{H}}(z, t) = \vec{H}_0 \cos(\omega(t - z/v)) \quad (\text{II.56})$$

Comme déjà donnée dans l'équation (II.18), la vitesse de propagation de l'onde dans le cas de l'onde plane TEM est :

$$v = \frac{\omega}{k_z} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{II.57})$$

II.2.2.1 Caractéristiques de l'onde plane TEM

Dans le cas d'un milieu électriquement neutre, l'équation de Thomson :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{II.58})$$

Le développement de cette équation donne :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.59})$$

Tenant compte que le champ électrique est invariable suivant les directions x et y , l'équation (II.59) se réduit à :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.60})$$

L'équation (II.60) est aussi valable pour la composante instantanée réelle portée par la direction de propagation.

$$\vec{\mathcal{E}}_z(z, t) = C_z \cos(\omega(t - z/v)) \vec{a}_z \quad (\text{II.61})$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z(z, t)}{\partial z} = C_z \frac{\omega}{v} \cos(\omega(t - z/v)) = 0 \quad (\text{II.62})$$

$$\Rightarrow C_z = 0 \quad (\text{II.63})$$

Donc la composante du champ électrique suivant la direction de propagation z est nulle.

$$E_z = 0 \quad (\text{II.64})$$

Nous pouvons aussi démontrer que la composante du champ magnétique est aussi nulle suivant la direction de propagation. Pour le démontrer, prenons l'équation de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II.65})$$

Puisque :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.66})$$

Alors :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (\text{II.67})$$

Le développement de l'équation (II.67) donne :

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.68})$$

Tenant compte que le champ magnétique est invariable suivant les directions x et y , l'équation (II.68) se simplifie à :

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.69})$$

L'équation (II.69) est aussi valable pour la composante instantanée réelle portée la direction de propagation.

$$\vec{\mathcal{H}}_z(z, t) = M_z \cos(\omega(t - z/v)) \vec{a}_z \quad (\text{II.70})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z(z, t)}{\partial z} = M_z \frac{\omega}{v} \sin(\omega(t - z/v)) = 0 \quad (\text{II.71})$$

$$\Rightarrow M_z = 0 \quad (\text{II.72})$$

Donc la composante du champ électrique suivant la direction de propagation est nulle.

$$H_z = 0 \quad (\text{II.73})$$

D'après les équations (II.64) et (II.73) nous pouvons énoncer qu'une onde plane qui se propage suivant la direction z ne possède pas de

composantes du champ EM suivant cette direction. C'est une onde EM transversale, en anglais TEM (Transvers Electric and Magnetic). Le champ EM est contenu dans le plan transversal (orthogonal) à la direction de propagation, c'est à dire le plan xoy .

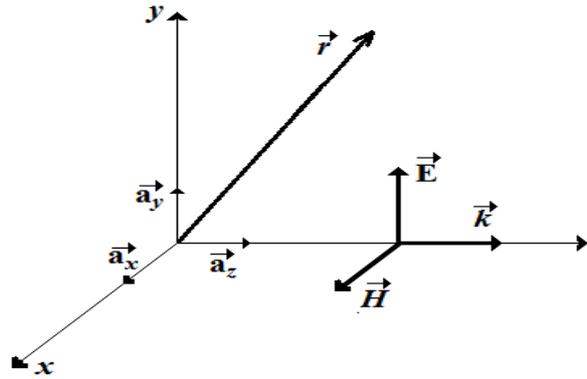


Figure II.2 : Onde plane TEM se propageant dans la direction z

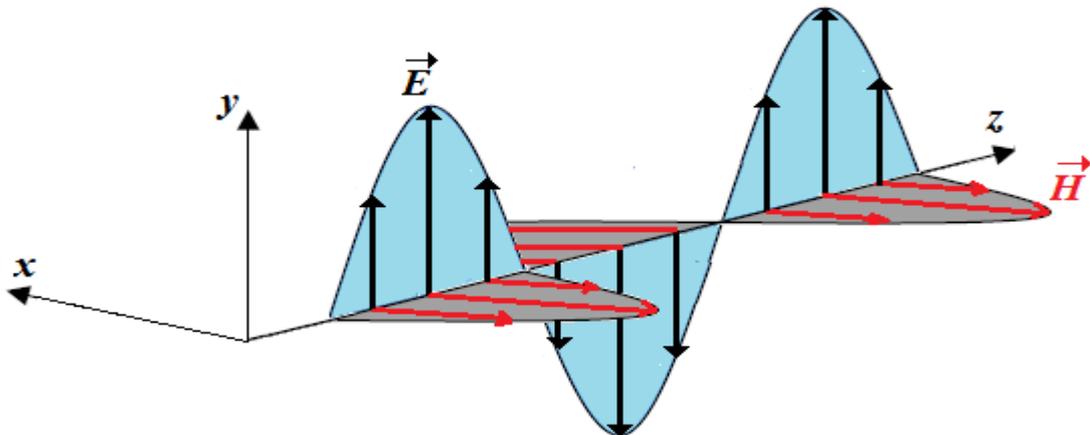


Figure II.3 : Variation sinusoïdale d'une onde plane TEM se propageant dans la direction z

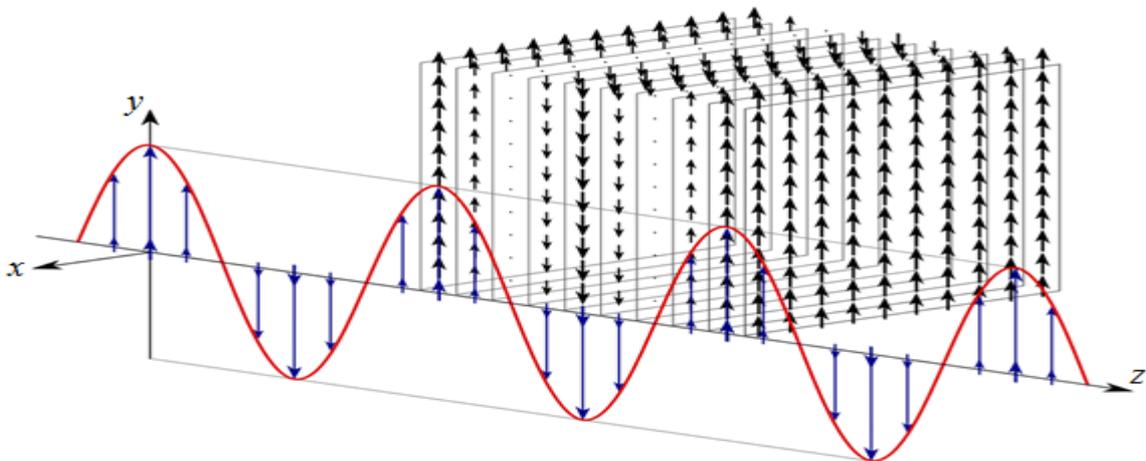


Figure II.4 : Fronts d'onde infinis d'une onde plane TEM se propageant dans la direction z

Les fronts d'ondes d'une onde plane sont définis à partir de la variation du champ électrique, ce sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation.

II.3 Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques à pertes

La propagation dans les milieux diélectriques à pertes est le cas général à partir duquel les autres cas de milieux peuvent être considérés.

Un milieu diélectrique à pertes est un milieu où l'onde électromagnétique perd de la puissance en le traversant, ceci est dû à sa faible conductivité. En d'autres termes, un milieu à pertes est partiellement conducteur (diélectrique imparfait ou conducteur imparfait si $\sigma \neq 0$), contrairement à un milieu sans pertes (diélectrique parfait si $\sigma = 0$ ou conducteur parfait si $\sigma = \infty$).

Considérons un milieu diélectrique à pertes, linéaire, isotrope, homogène et non chargé. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère en régime harmonique est donnée par :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} \quad (\text{II.74})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} \quad (\text{II.75})$$

on pose :

$$\tilde{\epsilon}_e = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (\text{II.76})$$

$\tilde{\epsilon}_e$ est la permittivité complexe d'un diélectrique à pertes. En substituant cette permittivité complexe dans l'équation (II.75) on obtient.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega \tilde{\epsilon}_e \vec{E} \quad (\text{II.77})$$

Les équations de propagation des champs EM dans le cas d'un milieu à pertes sont de la même forme que ceux d'un milieu sans pertes, seules les expressions des permittivités diffèrent.

$$\nabla^2 \vec{E} - \tilde{\gamma}^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{II.78})$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \tilde{\gamma}^2 \vec{H} = 0 \quad (\text{II.79})$$

$\tilde{\gamma}$ est la constante de propagation :

$$\tilde{\gamma} = j\omega \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}_e} \quad (\text{II.80})$$

Les solutions complexes des équations de propagation (II.78) et (II.79) en régime harmonique, dans le cas où l'on considère seulement les ondes progressives dans la direction de propagation z sont de la forme :

$$\vec{e}(z, t) = \vec{E}_{0i} e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \quad (\text{II.81})$$

$$\vec{h}(z, t) = \vec{H}_{0i} e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \quad (\text{II.82})$$

La constante de propagation est une quantité complexe qui peut être écrite sous la forme :

$$\tilde{\gamma} = \alpha + j\beta \quad (\text{II.83})$$

α paramètre d'affaiblissement intervenant dans les expressions des champs EM par le terme $e^{-\alpha z}$, il est exprimé en Np/m ($1\text{Np}=20\log_{10}(e)=8.686\text{dB}$).

β paramètre de phase intervenant dans les expressions des champs EM par le terme $e^{-j\beta z}$, l'unité de mesure de ce terme est rad/m ($1\text{rad}=57.2958^\circ$).

La substitution de l'équation (II.76) dans (II.80) donne :

$$\tilde{\gamma} = j\omega \sqrt{\mu \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)} = j\omega \sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}} \quad (\text{II.84})$$

En élevant (II.83) et (II.84) au carré on aura :

$$\tilde{\gamma}^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta \quad (\text{II.85})$$

$$\tilde{\gamma}^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon + j\omega \mu \sigma \quad (\text{II.86})$$

En utilisant l'équation (II.85), nous aurons :

$$|\tilde{\gamma}^2| = \alpha^2 + \beta^2 = \omega \mu \sqrt{\sigma^2 + \omega^2 \varepsilon^2} \quad (\text{II.87})$$

Des équations (II.85) et (II.86), nous avons aussi :

$$-\text{Réal}(\tilde{\gamma}^2) = \omega^2 \mu \varepsilon = \beta^2 - \alpha^2 \quad (\text{II.88})$$

En combinant les équations (II.87) et (II.88), l'atténuation et le déphasage introduits par un milieu diélectrique à pertes sont donnés par:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right)} \quad (\text{II.89})$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right)} \quad (\text{II.90})$$

L'impédance intrinsèque d'un milieu diélectrique à pertes est donnée par :

$$\tilde{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\varepsilon}_e}} \quad (\text{II.91})$$

La substitution de l'expression de la permittivité complexe $\tilde{\varepsilon}_e$ donnée par l'équation (II.76) dans l'équation (II.91) donne:

$$\tilde{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad (\text{II.92})$$

II.3.1 Propagation des OEM dans les diélectriques à faibles pertes

Un milieu diélectrique à faibles pertes est un mauvais conducteur et en conséquence un bon diélectrique, sa permittivité équivalente est donnée par :

$$\tilde{\varepsilon}_e = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

Elle peut être réécrite sous la forme :

$$\tilde{\varepsilon}_e = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} e^{-j\delta} \quad (\text{II.93})$$

avec :

$$tg(\delta) = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad (\text{II.94})$$

$tg(\delta)$ est la tangente de l'angle de pertes δ du diélectrique :

$$\delta = arctg\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \quad (\text{II.95})$$

Un diélectrique à faibles pertes est un cas spécial du diélectrique à pertes. Dans ce cas on le considère comme un matériau partiellement conducteur s'il satisfait la condition suivante :

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1 \quad (\text{II.96})$$

L'utilisation de la considération (II.96) dans l'équation (II.84) donne :

$$\tilde{\gamma} \simeq j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right) \quad (\text{II.97})$$

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\sigma}{2\varepsilon} + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (\text{II.98})$$

Par identification des deux équations (II.83) et (II.98) nous aurons les coefficients d'affaiblissement et de phase dans le cas d'un milieu diélectrique à faibles pertes comme:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \\ \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \end{cases} \quad (\text{II.99})$$

Dans le cas d'un milieu diélectrique à faibles pertes, l'impédance d'ondes sera de la forme:

$$\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega}\right) \quad (\text{II.100})$$

Dans le cas de l'espace libre : $\sigma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ les constante de phase et l'impédance d'ondes seront données par :

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$$

Chapitre III

Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

III.1 Caractérisation des milieux conducteurs

Dans le chapitre II, nous avons abordé la propagation des ondes dans les milieux diélectriques. Nous allons au cours de ce chapitre modéliser la propagation des OEM dans des milieux conducteurs; le principe de l'étude des champs EM dans les conducteurs et le même que celui des diélectrique, seul les paramètres caractéristiques des milieux diffèrent. Comme le montre la figure III.1, considérons une onde plane arrivant à l'interface d'un milieu conducteur avec une incidence normale. Une partie de l'énergie incidente est réfléchiée, alors que le reste de l'énergie pénètre dans le conducteur.

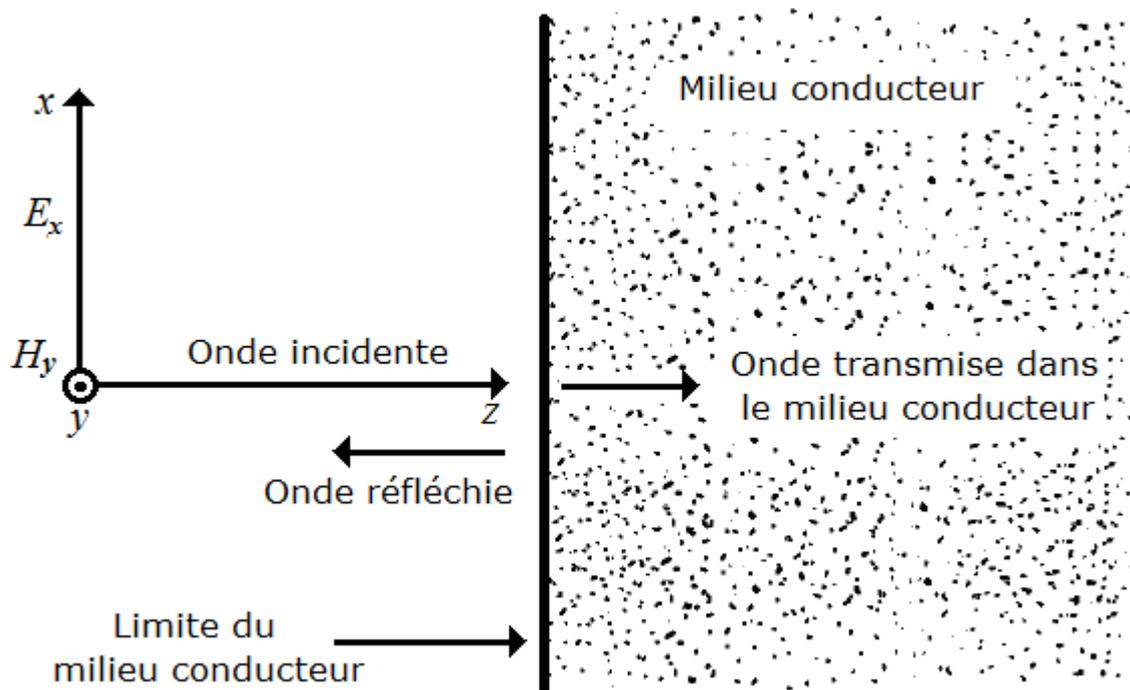


Figure III.1: Onde à incidence normale sur un milieu conducteur

Notre raisonnement sera focalisé sur l'onde transmise. Prenons l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{III.1})$$

Dans un milieu non conducteur $\vec{J} = 0$; alors que dans milieu conducteur \vec{J} peut être non négligeable. En substituant $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ dans l'équation (III.1) nous aurons:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{III.2})$$

Tenant compte des caractéristiques d'une onde plane TEM polarisée linéairement et se propageant dans la direction z avec un champ électrique polarisé dans la direction x ; l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à une équation différentielle en champs scalaires E_x et H_y .

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (\text{III.3})$$

Cette équation comporte deux terme en E_x . En assumant que E_x est une fonction harmonique du temps $E_x = E_0 e^{j\omega t}$, alors l'équation (III.3) devient:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + j\omega\varepsilon E_x \quad (\text{III.4})$$

Chacun des termes de l'équation (III.4) a la dimension d'une densité de courant. Comme déjà mentionné au chapitre II, Le terme σE_x représente la densité du courant de conduction, alors que le terme $j\omega\varepsilon E_x$ représente la densité du courant de déplacement. Ce qui nous permet d'affirmer, que la variation de H_y dans la direction de propagation est égale à la somme des densités de courants de conduction et de déplacement.

Une onde électromagnétique est rapidement atténuée dans un milieu conducteur. En effet, dans un bon conducteur, l'atténuation est si rapide qu'en hautes fréquences, l'onde ne pénètre dans le conducteur qu'à une très faible profondeur. Comme déjà abordée au chapitre II, dans le cas d'une conductivité nulle, le terme du courant de conduction s'annule et le milieu sera considéré comme sans pertes. Si la conductivité σ n'est pas nulle, nous tenant arbitrairement compte des trois conditions suivantes:

$$(1) \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$$

$$(2) \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$$

$$(3) \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \approx 1$$

Le rapport $\sigma/\omega\varepsilon$ est sans dimension. Lorsque le courant de déplacement est très supérieur au courant de conduction dans le cas de la condition (1), le milieu se comporte comme un diélectrique imparfait c'est à dire à pertes. Dans le cas où $\sigma=0$ le milieu est un diélectrique parfait c'est à dire sans pertes. Dans le cas où le courant de conduction est très supérieur au courant de déplacement; c'est le cas de la condition (2), le milieu peut être classé comme conducteur. Dans le cas ou l'amplitude de courant de conduction est comparable à celle du courant de déplacement $\omega\varepsilon \sim \sigma$ alors le milieu peut être considéré comme semi- conducteur.

Selon le rapport $\sigma/\omega\varepsilon$, une classification arbitraire en trois types de milieux est même spécifié dans les littératures scientifiques comme suit:

- Diélectriques : $\sigma/\omega\varepsilon < \frac{1}{100}$
- Semi-conducteurs : $\frac{1}{100} < \sigma/\omega\varepsilon < 100$
- Conducteurs: $100 < \sigma/\omega\varepsilon$

σ = Conductivité du milieu en S m^{-1} ,

ε = Permittivité du milieu en F m^{-1} ,

ω = Vitesse angulaire en $\text{rad s}^{-1} = 2\pi f$, où f est la fréquence en Hz .

En plus des caractéristiques du milieu, la fréquence est aussi un facteur important de classification. Prenons l'exemple des sols ruraux de permittivité relative $\varepsilon_r = 1.4$ et de conductivité $\sigma = 10^{-2} \text{S m}^{-1}$, si ces valeurs restent inchangées en basses fréquences (BF), le tableau III.1 présente le rapport $\sigma/\omega\varepsilon$ pour trois fréquences distinctes:

Tableau III.1

Fréquence en Hz	Rapport $\sigma/\omega\varepsilon$
10^3	1.3×10^4
10^7	1.3
3×10^{10} ($\lambda = 10 \text{ mm}$)	4.3×10^{-7}

A la fréquence de 1 KHz le sol rural se comporte comme un conducteur; alors qu'à 30 GHz il se comporte comme un diélectrique. A 10 MHz son comportement est celui d'un semi-conducteur.

Sur la figure III.2 le rapport $\sigma/\omega\varepsilon$ est tracé en fonction de la fréquence pour un certain nombre de milieux. Dans ce tracé, les valeurs des paramètres de ces milieux en BF sont considérées comme constantes. Les courbes de cette figure ne doivent donc pas être considérées comme précises dans la région des hyperfréquences, car les constantes caractéristiques des milieux peuvent varier avec la fréquence, particulièrement pour les fréquences de l'ordre de 1 GHz et plus.

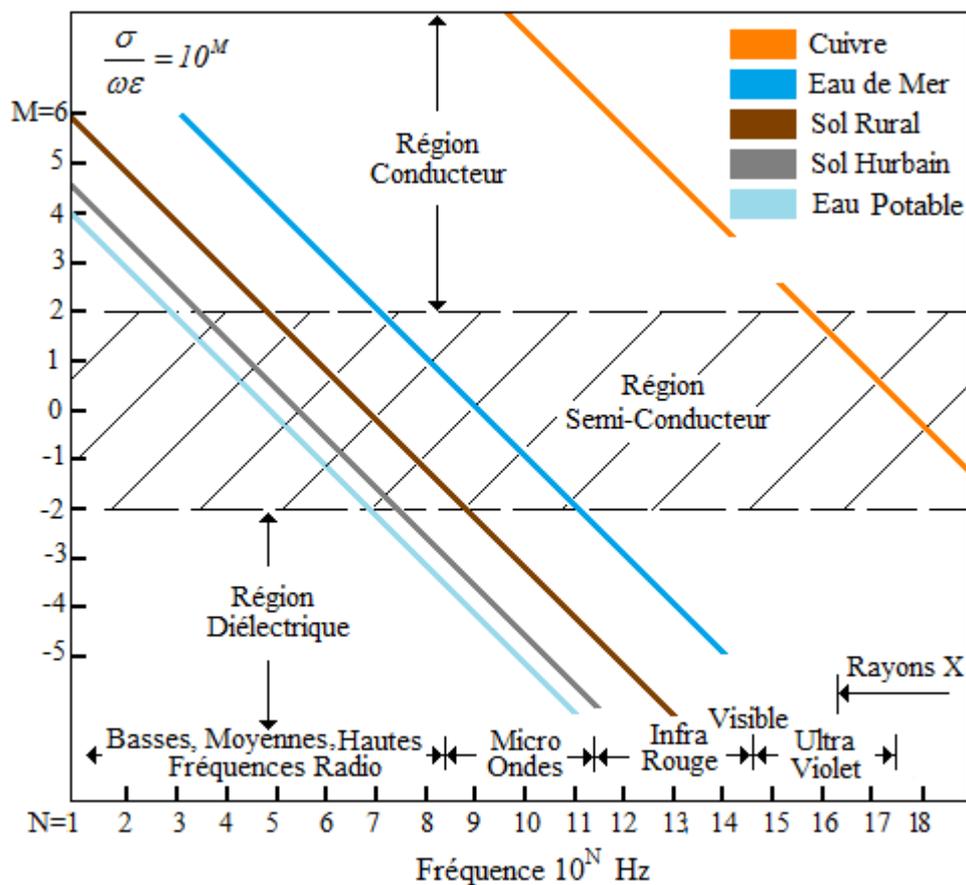


Figure III.2: Rapport $\sigma / \omega\epsilon$ en fonction de la fréquence pour un certain nombre de milieux.

En se référant à la figure III.2, notons que le cuivre se comporte comme un très bon conducteur aux fréquences très éloignées de la région des micro-ondes. D'un autre côté, l'eau potable se comporte comme un diélectrique aux fréquences supérieures à 10 MHz. Les rapports $\sigma / \omega\epsilon$ pour l'eau de mer, sol rural, et sol urbain se trouve entre celui des extrêmes; le cuivre et l'eau potable. Une liste des valeurs des caractéristiques en BF des milieux de la figure III.2 est présentée au tableau III.2.

Tableau III.2: Caractéristiques en BF des milieux de la figure III.2

Milieu	Permittivité relative ϵ_r , sans dimension	Conductivité σ , S m^{-1}
Cuivre	1	5.8×10^7
Eau de mer	80	4
Sol rural	14	10^{-2}
Sol urbain	3	10^{-4}
Eau potable	80	10^{-3}

III.2 Equation d'ondes dans les milieux conducteurs

L'onde électromagnétique s'atténue rapidement dans les milieux conducteurs. En effet, dans les bons conducteurs l'atténuation est si rapide qu'en hautes fréquences les ondes pénètrent les conducteurs seulement à une faible profondeur

Pour la calculer cette profondeur de pénétration, commençons d'abord par développer l'équation d'onde de la composante E_x pour une onde plane dans un milieu conducteur. A partir de la solution de cette équation, l'expression de la profondeur de pénétration peut être obtenue.

A partir des équations couplées de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday nous avons pour une onde à polarisation rectiligne dans la direction z avec E polarisé dans la direction x .

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \sigma E_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (\text{III.6})$$

En dérivant (III.5) et (III.6) par rapport à t et z respectivement, nous obtenons:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (\text{III.7})$$

$$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (\text{III.8})$$

Comme les variables spatiales et la variable temps sont indépendantes, alors l'ordre des dérivations est sans importance et le terme de droite de l'équation (III.7) est égale au terme gauche de l'équation (III.8). Nous aurons ainsi:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.9})$$

L'équation (III.9) est l'équation d'onde de la composante E_x d'une onde plane TEM se propageant dans un milieu conducteur. Elle est plus générale que celle d'une onde se propageant dans un milieu sans pertes. Le terme comportant σ tient compte de la conductivité du milieu.

Dans le cas d'une variation harmonique de E_x , l'équation (III.9) devient:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon) E_x = 0 \quad (\text{III.10})$$

Posons :

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon \quad (\text{III.11})$$

Donc l'équation (III.10) devient:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0 \quad (\text{III.12})$$

Cette équation est la forme simplifiée de l'équation (III.9). La variation harmonique étant assumée, la variable temps n'apparaît pas explicitement. Le paramètre γ abordé au chapitre II est la constante de propagation.

En tenant compte seulement de l'onde se propageant dans la direction des z positives, la solution de l'équation (III.12) est de la forme:

$$E_x = E_0 e^{-\gamma z} \quad (\text{III.13})$$

Dans le cas des bons conducteurs $\sigma \gg \omega\varepsilon$, l'équation (III.11) se réduit à:

$$\gamma^2 \approx j\omega\mu\sigma \quad (\text{III.14})$$

Alors:

$$\gamma \approx \sqrt{j\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (\text{III.15})$$

Comme dans le cas des diélectriques à pertes γ est une quantité complexe, mise sous la forme:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (\text{III.16})$$

La partie réelle α est associée à l'atténuation alors que la partie imaginaire β est un paramètre phase.

La substitution de l'équation (III.15) dans l'équation (III.13) donne :

$$E_x = E_0 \exp\left[-(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] = E_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right) \exp\left(-j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right) \quad (\text{III.17})$$

Dans l'équation (III.17), le terme d'atténuation de E_x est donné par :

$$\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right) \quad (\text{III.18})$$

Alors que le terme du déphasage est:

$$\exp\left(-j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right) \quad (\text{III.19})$$

$\omega = \text{pulsation} = 2\pi f, \text{ rad.s}^{-1}$

$\mu = \text{permeabilite du milieu}, \text{ H.m}^{-1}$

$\sigma = \text{Conductivite du milieu}, \text{ } \mathfrak{U}.\text{m}^{-1}$

$z = \text{distance}, \text{ m}$

$j = \text{Operateur complexe}, \text{ sans dimension}$

L'équation (III.17) est la solution de l'équation d'une onde plane TEM traversant un milieu conducteur dans la direction des z positives. Son amplitude diminue exponentiellement en fonction de z , alors qu'en augmentant z elle est retardée linéairement en phase.

III.3 Profondeur de pénétration des OEM dans les conducteurs

Tenant compte du raisonnement précédent, quantifions maintenant la pénétration de l'onde dans un conducteur. En se référant à la figure III.1, considérons une onde plane TEM qui pénètre un milieu conducteur, c'est à dire, l'onde transmise. Prenons $z = 0$ la limite du milieu conducteur, de sorte que z croît positivement à fur et à mesure qu'on le pénètre.

Prenons les équations (III.17), (III.18), et (III.19). Posons $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ et réécrivons E_x sous la forme:

$$E_x = E_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp\left(-j\frac{z}{\delta}\right) \quad (\text{III.20})$$

En $z = 0$, $E_x = E_0$ est l'amplitude du champ électrique à la surface du milieu conducteur. Dans l'équation (III.20) le paramètre δ a la dimension d'une distance. A la distance $z = \delta$ l'amplitude du champ électrique est:

$$|E_x| = E_0 \exp(-1) = E_0 \frac{1}{e} \quad (\text{III.21})$$

Ainsi, E_x diminue de 36.8% de sa valeur initiale, lorsque l'onde pénètre d'une distance δ dans le conducteur. δ est appelée profondeur de pénétration $1/e$.

Comme exemple considérons la profondeur de pénétration d'une onde électromagnétique plane incidente normalement sur un bon conducteur, comme le cuivre. Comme $\omega = 2\pi f$; la profondeur $1/e$ devient:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{f\pi\mu\sigma}} \quad (\text{III.22})$$

La conductivité du cuivre $\sigma = 58 \text{ M}\Omega \cdot \text{m}^{-1}$, sa perméabilité est $\mu = 4\pi 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$. Utilisons ces valeurs dans l'équation (III.22); nous obtenons pour le cuivre une profondeur de pénétration fonction de la fréquence égale à:

$$\delta = \frac{6.6 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{f}} \quad (\text{III.23})$$

L'évaluation de δ à des fréquences distinctes donne:

- A 60 Hz $\delta = 8.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- A 1 MHz $\delta = 6.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$
- A 30 GHz $\delta = 3.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

ainsi, à 60 Hz, la profondeur de pénétration est de 8,5 mm, cette pénétration est inversement proportionnelle à la racine carrée de la fréquence. A une longueur de l'onde de 10 mm (30 GHz) la pénétration de l'onde est à seulement 0.00038 mm, inférieure à $1/2 \mu\text{m}$. Un champ haute fréquence pénètre dans un conducteur sur une distance plus courte que celle d'un champ basse fréquence. Ce phénomène est appelé effet de peau.

Quelque soit la profondeur de pénétration, nous pouvons affirmer que le champ électrique diminue arbitrairement par rapport à sa valeur de référence. Par exemple considérons la profondeur pour laquelle le champ diminue de 1% par rapport à sa valeur initiale. Cette profondeur est obtenue en multipliant $1/e$ par 4.6 est peut être appelée la profondeur de pénétration 1%.

III.4 Vitesse et longueur de l'onde dans les conducteurs

La vitesse de phase est donnée par ω/β . En se référant aux équations (III.15) et (III.16), dans le cas des conducteurs: $\beta = 1/\delta$; de sorte que la vitesse de phase devient:

$$v_c = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu}} \quad (\text{III.24})$$

Comme la profondeur de pénétration δ est petite, alors la vitesse de phase dans le conducteur est petite. Il apparait sur la formule (III.24) que la vitesse est en fonction de la fréquence et en conséquence fonction de la longueur d'onde. En conséquence, les conducteurs sont des milieux dispersifs.

Le rapport entre la vitesse de phase en espace libre $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ et celle dans un milieu conducteur est égal à l'indice de réfraction du milieu conducteur. En basse fréquence, pour les conducteurs cet indice est très grand.

$$n = c/v_c \quad (\text{III.25})$$

Pour déterminer la longueur de l'onde λ_c dans le conducteur, nous avons la relation:

$$v_c = f\lambda_c \quad (\text{III.26})$$

La substitution de l'équation (III.26) dans l'équation (III.24) donne:

$$f\lambda_c = \omega\delta \quad (\text{III.27})$$

La longueur de l'onde dans le conducteur est ainsi exprimée par:

$$\lambda_c = 2\pi\delta \quad (\text{III.28})$$

Dans (III.28), λ_c et δ sont de même dimension, celle d'une longueur. Par conséquent la longueur de l'onde dans un conducteur est de 2π multiple de la profondeur $1/e$. Comme la profondeur $1/e$ est petite pour les conducteurs, la longueur de l'onde est aussi petite.

Les valeurs des profondeurs de pénétration $1/e$ et 1% , de la longueur de l'onde, de l'indice de réfraction du cuivre sont donnés dans le tableau III.3 pour trois fréquences.

Dans le conducteur, il est intéressant de noter que le champ électrique est amorti de 1% de son amplitude initiale à une distance à peu près égale à $3/4\lambda$.

Comme la profondeur de pénétration est inversement proportionnelle à la racine carrée de la fréquence, une fine épaisseur d'un matériau conducteur peut agir comme un filtre passe bas pour les ondes électromagnétiques.

Tableau III.3: Profondeur de pénétration, longueur d'onde, vitesse et indice de réfraction dans le cuivre

	Fréquence		
	60 Hz	1 MHz	30 GHz
Longueur d'onde en espace libre λ , m	5 Mm	300 m	10 mm
Profondeur de pénétration $1/e$, m	$8.5 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-7}$
Profondeur de pénétration 1% , m	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$

III.5 Propagation dans les milieux limités par des conducteurs

Différents types de propagation des ondes appelées modes peuvent exister le long de support de transmission composés d'un milieu diélectrique entouré par des conducteurs. Ces structures peuvent être des lignes de transmission ou des guides d'ondes. Les lignes de transmission composées de deux conducteurs ou plus peuvent supporter des ondes électromagnétiques transverses (TEM), caractérisées par l'absence de composantes longitudinales du champ EM. Les guides d'ondes constitués d'un seul conducteur, supportent des ondes transverses électriques (TE) et/ou transverses magnétiques (TM), caractérisées par la présence des composantes longitudinales des champs magnétique et/ou électrique.

Les solutions générales des équations de Maxwell pour les cas spécifiques de propagation des ondes TEM, TE et TM dépendent de la topologie des support de transmission . Sur figure III.3 est illustrée la géométrie d'une ligne de transmission ou d'un guide d'onde arbitraires caractérisée par des limites conductrices parallèles à l'axe de propagation z . L'étude de la propagation le long de ces structures suppose qu'elles sont de formes et de dimensions uniformes dans la direction z . Les conducteurs seront supposés de conductivité infinie (sans pertes).

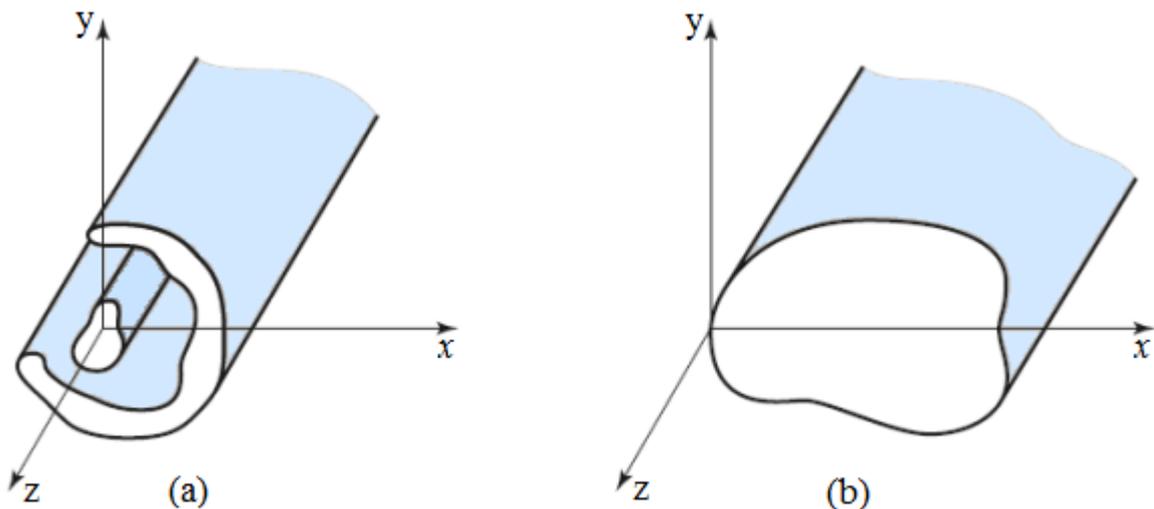


Figure III.3: Supports de transmission métalliques: (a) Support à deux conducteurs. (b) Support à un seul conducteur.

La propagation des ondes le long de ces deux structures de guidage est orientée suivant l'axe z . Les champs électrique et magnétique peuvent alors être formulés par:

$$\vec{E} = [\vec{E}_T(x, y) + \vec{E}_z(x, y)\vec{a}_z]e^{-j\beta z} \quad (\text{III.29a})$$

$$\vec{H} = [\vec{H}_T(x, y) + \vec{H}_z(x, y)\vec{a}_z]e^{-j\beta z} \quad (\text{III.29b})$$

\vec{E}_T et \vec{H}_T représentent les composantes transverses des champs électrique et magnétique respectivement, \vec{E}_z et \vec{H}_z sont les composantes longitudinales. Les équations III.29 sont celles d'une onde qui se propage dans la direction $+z$, la direction $-z$ peut être considérée en prenant β au lieu de $-\beta$. La constante de propagation de l'onde dans un milieu à pertes est prise en compte en remplaçant $j\beta$ par $\gamma = \alpha + j\beta$.

Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre II, dans le cas où le milieu entouré par les conducteurs est sans sources et sans pertes, les équations de Maxwell-Ampère et maxwell-faraday en régime harmonique s'écrivent alors:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (\text{III.30a})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (\text{III.30b})$$

La dépendance des champs électrique et magnétique en fonction du terme $e^{-j\beta z}$, et le développement des équations (III.30) aboutit aux équations différentielles couplées suivantes:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \quad (\text{III.31a})$$

$$-j\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -j\omega\mu H_y \quad (\text{III.31b})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (\text{III.31c})$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega\varepsilon E_x \quad (\text{III.32a})$$

$$-j\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -j\omega\varepsilon E_y \quad (\text{III.32b})$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -j\omega\varepsilon E_z \quad (\text{III.32c})$$

En combinant les équations ci-dessus, les quatre composantes transversales des champs vecteurs électrique et magnétique peuvent être exprimées en fonction des composantes longitudinales E_z et H_z comme suit:

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (\text{III.33a})$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left(-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III.33b})$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III.33c})$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (\text{III.33d})$$

Avec :

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad (\text{III.34})$$

k_c est le nombre d'onde à la coupure. Cette terminologie est plus claire dans la formulation de la propagation des ondes électromagnétique le long des guides d'ondes métalliques. Comme abordé au chapitre II:

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = 2\pi/\lambda \quad (\text{III.35})$$

est le nombre d'onde ou la constante de propagation de l'onde dans le matériau illimité c'est à dire qui n'est entouré par aucun conducteur. Comme mentionné au chapitre II, dans le cas où le matériau est un diélectrique à pertes, c'est à dire de conductivité σ non nulle, la permittivité sera substituée par une expression équivalente complexe:

$$\epsilon_{eq} = \epsilon(1 - j \tan \delta) \quad (\text{III.36})$$

δ est l'angle de pertes du matériau:

$$\tan \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (\text{III.37})$$

III.5.1 Guide à paire de plans conducteurs parallèles

Lorsqu'on désire confiner une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique, on limite ce diélectrique par une paire de plans conducteurs. Une paire de plaques conductrices parallèles comme montrée sur la figure III.4 est la forme la plus simple d'un guide d'onde métallique. Ces plans conducteurs distants d'une épaisseur d , sont de dimensions infinies dans la direction de propagation de l'onde.

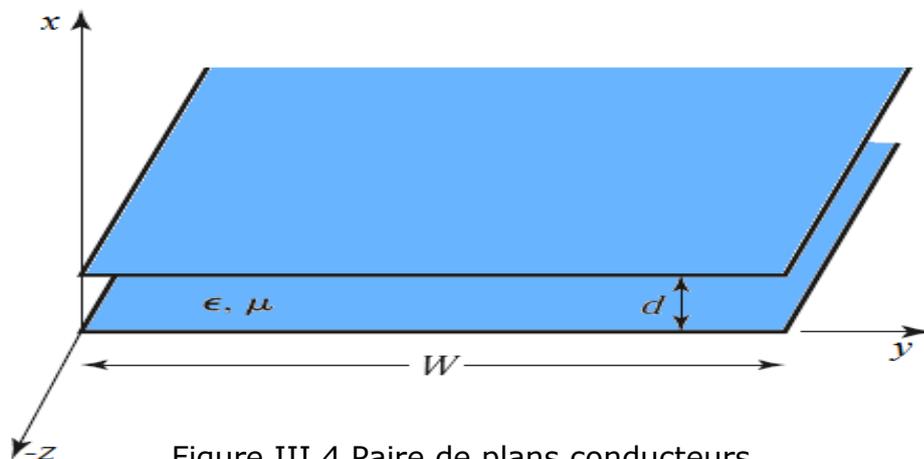


Figure III.4 Paire de plans conducteurs

Dans la topologie de la paire des plans conducteurs, la largeur W est assumée assez supérieure à la distance de séparation d pour minimiser les champs de bords des cotés latéraux du guide d'onde de part et d'autre de l'axe x . Pour faire l'étude des différents modes de propagation, il est supposé que le diélectrique entre les deux plans conducteurs est un milieu homogène de permittivité ϵ et de permittivité μ .

La propagation des ondes électromagnétiques dans ce support de transmission a des modèles de champ particuliers appelés modes. Ces modes de types TE (Transvers Electric) et TM (Transvers Magnetic) sont déterminés à l'aide des équations de Maxwell et peuvent même être de type TEM (Transvers Electric and Magnetic) puisqu'il s'agit de deux conducteurs séparés par un diélectrique. Les champs électromagnétiques qui se propagent dans le milieu confiné entre les deux plaques conductrices sont uniformes dans le plan transversal à la longueur des plaques, c'est à dire ne varient que dans l'une des deux dimension spatiale de ce plan transversal. Les champs électriques et magnétiques variant dans le temps devraient satisfaire les équations différentielles de propagation de l'onde entre les deux plans conducteurs et satisfaire les conditions aux limites aux interfaces conducteur-diélectrique.

III.5.1.1 Ondes TEM

Comme nous l'avons vu au chapitre II, l'onde plane uniforme est une solution de l'équation d'onde différentielle tridimensionnelle. Dans le domaine temporel, elle est également appelée onde harmonique temporelle. L'onde électromagnétique obéit au principe de superposition, de sorte que la somme d'ondes planes uniformes avec le même nombre d'onde, mais avec des directions de déplacement différentes constitue une solution unique dans une région donnée de l'espace. Appliquant ce principe de superposition, le comportement d'une onde électromagnétique dans un diélectrique limité dans le sens de sa longueur par des conducteurs peut être commodément analysé au moyen d'ondes planes uniformes.

Considérons la paire de plans conducteurs séparés par un diélectrique montrée ci-dessus sur la figure III.4, les deux plaques parallèles sont supposées parfaitement conductrices, les effets de bords seront négligés. Une seule onde plane uniforme peut exister dans l'espace entre les plaques si le vecteur d'onde est parallèle à la surface des plaques, dans ce cas les champs électriques seront perpendiculaires aux surfaces conductrices.

Si les conditions aux limites sont satisfaites, le champ électrique ne possèdera aucune composante tangentielle sur les surfaces parfaitement conductrices. En conséquences, les deux champs vecteurs électrique et magnétique se trouvent dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, comme illustré sur la figure III.5. Une onde avec ces modèles de champs qui peuvent se

propager entre les deux plans conducteurs sans changement de formes est appelée mode TEM .

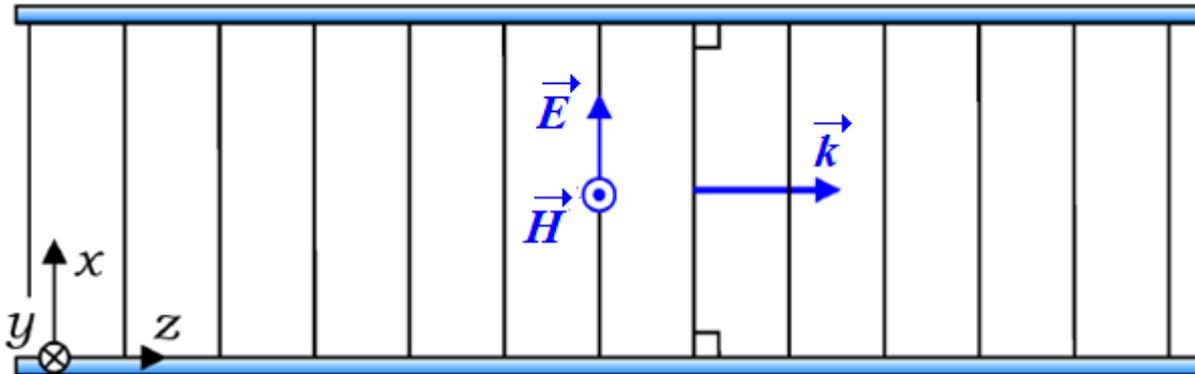


Figure III.5: mode TEM dans un guide d'ondes à plaques parallèles

Les ondes TEM sont caractérisées par des composantes longitudinales E_z et H_z nulles. En conséquences, comme le montre les équations (III.33), les champs transversaux seront également tous nuls. L'utilisation de $E_z = H_z = 0$ dans les équations (III.31) et (III.32) et l'élimination de H_y à partir de (III.31b) et (III.32a), permet d'obtenir la constante de phase β :

$$\beta^2 E_x = \omega^2 \mu \epsilon E_x \Rightarrow \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad (\text{III.38})$$

La substitution des équations (II.35) et (II.38) du nombre d'ondes k et de la constante de phase β respectivement dans l'expression (II.34) du nombre d'ondes à la coupure k_c , démontre que ce dernier est nul pour les ondes TEM. Rappelons que dans le chapitre précédent, l'équation d'onde développée pour la composante E_x est de la forme:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0 \quad (\text{III.39})$$

Puisque le milieu diélectrique le long de la paire de conducteurs est supposé sans pertes, alors comme démontré au chapitre II les champs seront fonction du terme $e^{-j\beta z}$. Ainsi, on aura:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x = -\beta^2 E_x = -k^2 E_x \quad (\text{III.40})$$

L'équation (III.39) se réduit donc à:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0 \quad (\text{III.41})$$

Le même résultat peut être obtenu pour la composante E_y . Ainsi, nous pouvons formuler l'équation de propagation du champ électrique TEM comme suit:

$$\nabla_T^2 \vec{E}_T(x, y, z) = 0 \quad (\text{III.42})$$

$\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ est le Laplacien transverse, $\vec{E}_T(x, y, z) = E_x(x, y, z)\vec{a}_x + E_y(x, y, z)\vec{a}_y$ est le vecteur champ électrique transverse.

Le résultat (III.42) montre que les champs électriques transverses, $\vec{E}_T(x, y, z)$, d'une onde TEM satisfont l'équation de Laplace. Pour une onde TEM, l'équation de Laplace est également satisfaite pour les champs magnétiques transverses, $\vec{H}_T(x, y, z)$:

$$\nabla_T^2 \vec{H}_T(x, y, z) = 0 \quad (\text{III.43})$$

Les équations (III.42) et (III.43) nous permettent d'affirmer que les champs transverses d'une onde TEM se comportent comme les champs statiques pouvant exister entre la paire de conducteurs.

Dans le cas électrostatique, l'équation de Faraday nous exprime la variation spatiale du champ électrique:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(x, y, z) = 0 \quad (\text{III.44})$$

Nous pouvons aussi démontré qu'un champ scalaire $V(x, y, z)$ que nous définissons comme un potentiel électrique vérifie la relation suivante:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V(x, y, z)) = 0 \quad (\text{III.45})$$

Les relations (III.44) et (III.45) nous permettent d'affirmer que le champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ dérive d'un gradient du potentiel scalaire, $V(x, y, z)$:

$$\vec{E}_T(x, y, z) = -\vec{\nabla}_T V(x, y, z) \quad (\text{III.46})$$

$\vec{\nabla}_T = \partial/\partial x \vec{a}_x + \partial/\partial y \vec{a}_y$ est l'opérateur transverse de Laplace, le signe moins provient du fait que le champ électrique $\vec{E}_T(x, y, z)$ s'oppose au potentiel $V(x, y, z)$. Dans le cas où le milieu confiné entre les deux conducteurs est supposé homogène et non chargé, l'utilisation de l'équation (III.46) dans l'équation de Maxwell-Gauss montre que le potentiel $V(x, y, z)$ satisfait aussi l'équation de Laplace suivante:

$$\nabla_T^2 V(x, y, z) = 0 \quad (\text{III.47})$$

En se référant à la figure III.4, et tenant compte des considérations susmentionnées pour le milieu entre les deux conducteurs, le potentiel $V(x, y, z)$

en un plan équiphasé (z fixe) ne dépend que de la coordonnée x . Ainsi, l'équation (III.47) se réduit à :

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq d \quad (\text{III.48})$$

La solution de l'équation (III.48) est linéairement dépendante de la variable spatiale x .

$$V(x,y) = A + Bx \quad (\text{III.49})$$

Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions aux limites fixées pour le potentiel électrique $V(x,y)$ sur les deux plans conducteurs.

$$V(0,y) = 0 \quad \text{et} \quad V(d,x) = V_0 \quad (\text{III.50})$$

L'application de ces conditions aux limites permet d'exprimer le potentiel électrique en tout point x du plan transversal équiphasé en $z=0$.

$$V(x,y) = \frac{V_0}{d}x \quad (\text{III.51})$$

La substitution de l'expression (III.51) dans l'équation (III.46), exprime le champ électrique transverse :

$$\vec{E}_x(x,y) = -\vec{\nabla}_T V(x,y) = -\frac{V_0}{d} \vec{a}_x \quad (\text{III.52})$$

Du fait que l'onde TEM confinée entre la paire de conducteurs est une onde plane qui se déphase le long de l'axe de propagation z , alors le champ électrique en fonction des coordonnées spatiales est donné par :

$$\vec{E}_x(x,y,z) = -\frac{V_0}{d} e^{-jkz} \vec{a}_x \quad (\text{III.53})$$

Le paramètre $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ est la constante de propagation de l'onde TEM. Le champ magnétique est celui d'une onde TEM déjà exprimé au chapitre II.

$$\vec{H}_y(z) = \frac{1}{\eta} \vec{a}_z \wedge \vec{E}_x(x,y,z) = \frac{V_0}{\eta d} e^{-jkz} \vec{a}_y \quad (\text{III.54})$$

La quantité $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ est l'impédance intrinsèque du milieu entre les deux plaques conductrices.

Le potentiel électrique sur le long du conducteur supérieur est obtenu à l'aide de la circulation du champ électrique sur le parcours l orienté de $x=d$ à $x=0$.

$$V(z) = - \int_{x=0}^{x=d} \vec{E}_y(x,y,z) \cdot \vec{dl} = V_0 e^{-jkz} \quad (\text{III.55})$$

$V(0)$ et $V(d)$ représentent les potentiels sur les conducteurs inférieur et supérieur, respectivement. Le flux de courant sur l'un des deux conducteurs peut être trouvé à l'aide de la loi d'Ampère sous sa forme intégrale:

$$I = \oint_C \vec{H} \cdot \overline{d\vec{l}} \quad (\text{III.56})$$

C est le contour transverse du conducteur.

Les ondes TEM peuvent exister en présence de deux conducteurs ou plus. Dans le cas où les deux conducteurs sont considérés comme deux plans infiniment grands séparés d'une distance infinie, alors les ondes planes qui se propagent suivant l'un des axes de l'espace tridimensionnel sont des ondes TEM car elles ne possèdent pas de composantes de champs dans la direction de propagation. L'impédance d'onde d'un mode TEM peut être trouvée à partir du rapport des champs transverses électrique et magnétique:

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (\text{III.57})$$

Puisque au départ le milieu entre les deux conducteurs est considéré sans pertes, alors la relation (III.57) est l'impédance sans pertes du mode TEM.

III.5.1.2 Ondes TE

Le mode TEM susmentionné n'est pas le seul mode de propagation dans un guide d'onde à plaques parallèles. Comme montrée sur la figure III.6, considérons une onde plane uniforme incidente sur la plaque conductrice supérieure avec un angle θ par rapport à l'axe z . Cette onde sera réfléchiée par la plaque supérieure, puis par la plaque inférieure, et ainsi de suite. L'onde qui se propage le long des deux plaques conductrices rebondit indéfiniment en zigzag entre ces plaques. Donc nous pouvons énoncer que deux ondes planes uniformes satisfaisant l'équation d'onde différentielle se propagent dans l'espace entre les deux plaques, l'une dans le sens ascendant et l'autre dans le sens descendant. L'entretien de l'onde entre la paire de conducteurs par réflexions successives est justifiée par les conditions aux limites imposées aux surfaces conductrices alors que sa propagation provient de l'équation d'onde différentielle dans le milieu homogène entre les deux plaques conductrices.

Sur la figure III.6, les fronts d'onde de l'onde ascendante sont indiqués par des lignes continues, tandis que ceux de l'onde descendante sont indiqués par des lignes pointillées. Les lignes bleues, continues ou pointillées, correspondent aux vecteurs d'ondes des ondes ascendantes et descendantes respectivement. Bien que les deux ondes ont les composantes du champ électrique parallèles aux surfaces conductrices, elles peuvent être combinées linéairement de façon à ne pas avoir de composantes tangentielles sur la surface des plaques. En fonction

de cette distribution spatiale des champs électriques qui ne possède pas de composantes longitudinales, le mode entre les plans conducteurs est appelé mode TE.

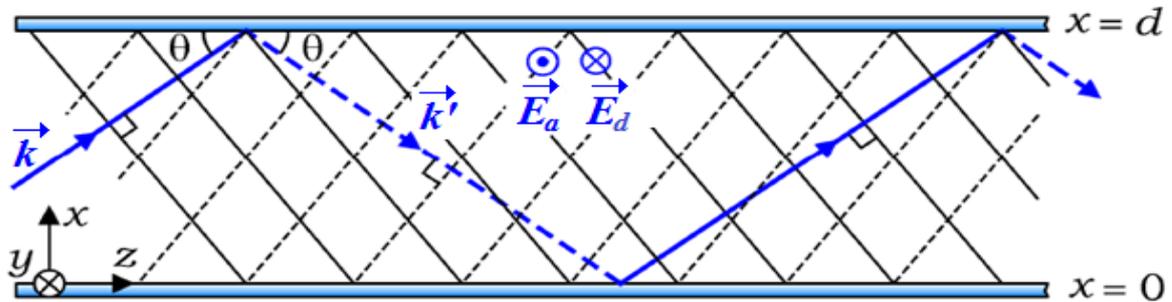


Figure III.6: Mode TE entre deux plaques conductrices parallèles

La relation de phase entre les ondes planes ascendantes et descendantes est obtenue en examinant sur la figure III.6 la propagation du mode TE. Considérons une onde plane uniforme avec un vecteur de champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence (plan xz), incidente sur la plaque conductrice supérieure avec un angle θ par rapport à l'axe z . L'onde que nous appellerons onde ascendante a pour expression complexe du champ électrique:

$$\vec{E}_a = E_0 e^{-j(k_x x + k_z z)} \vec{a}_x \quad (\text{III.58})$$

E_0 et \vec{a}_x sont respectivement l'amplitude et le vecteur unitaire de l'orientation du champ électrique. Dans l'équation ci-dessus, k_x et k_z sont les composantes suivant x et z du vecteur d'onde donné par:

$$\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_z = k \sin \theta \vec{a}_x + k \cos \theta \vec{a}_z \quad (\text{III.59})$$

Le nombre d'onde k est donc:

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2 \quad (\text{III.60})$$

Selon la loi de la réflexion, l'onde réfléchie ou l'onde descendante, devrait avoir un vecteur d'onde de même forme que celui de l'onde ascendante à l'exception du signe négatif pour la composante suivant x :

$$\vec{k}' = -\vec{k}_x + \vec{k}_z = -k \sin \theta \vec{a}_x + k \cos \theta \vec{a}_z \quad (\text{II.61})$$

Les modules de k et k' sont de mêmes grandeurs car le milieu où se propagent les ondes ascendantes et descendantes est homogène. Le champ électrique de l'onde descendante s'écrit donc sous forme complexe comme:

$$\vec{E}_d = -E_0 e^{-j(-k_x x + k_z z)} \vec{a}_x \quad (\text{III.62})$$

Le signe moins sur le côté droit de l'équation (III.62) provient du coefficient de réflexion sur la surface parfaitement conductrice des plaques. Pour les modes TE (polarisation perpendiculaire) ce coefficient donné par :

$$\Gamma_{\perp} = -1 \quad (\text{III.63})$$

Ce coefficient de réflexion montre que le champ électrique \vec{E}_d est déphasé de 180° par rapport à \vec{E}_a . La différence de phase de 180° est indiquée par la ligne pointillée sur la figure III.6. Le champ électrique total dans le guide d'onde est égal à la superposition des deux champs \vec{E}_a et \vec{E}_d :

$$\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_d = E_0[e^{-jk_x x} - e^{jk_x x}]e^{-jk_z z} \vec{a}_x \quad (\text{III.64})$$

En réécrivons l'équation (III.64) nous aurons :

$$\vec{E} = -2jE_0 \sin(k_x x) e^{-jk_z z} \vec{a}_x \quad (\text{III.65})$$

L'application des conditions aux limites au champ électrique sur les surfaces conductrices, annule les composantes tangentielles de \vec{E} en $x = 0$ et $x = d$. Ces conditions aux limites appliquées à l'équation (III.65) conduisent à :

$$k_x = \frac{m\pi}{d} \quad (m = 1, 2, 3, \dots \dots \dots) \quad (\text{III.66})$$

L'équation (III.65) révèle que champ électrique est orienté suivant l'axe x , il varie dans le plan transversal xy en fonction de la coordonnée x et se propage dans la direction z avec la constante de phase k_z . Le mode d'ondes TE guidé exprimé par l'équation (III.65) n'a pas de composante longitudinale du champ électrique. L'entier m dans l'équation (III.66) est le numéro de mode, le mode TE est alors nommé mode TE_m .

Nous pouvons obtenir les valeurs propres des modes TE_m données dans l'équation (III.66) à partir de la condition de résonance transversale pour les ondes ascendantes et descendantes. Le terme sinus dans l'équation (III.65) signifie qu'une onde stationnaire (équation (III.64)) résultante de l'interférence de deux ondes planes $e^{-jk_x x - jk_z z}$ et $e^{+jk_x x - jk_z z}$ se forme dans le plan transversal le long de la direction x . Bien que les deux ondes planes se propagent avec des vecteurs d'ondes différents, elles se superposent dans le guide d'ondes pour former une seule onde plane parcourant un chemin en zigzag. Le long d'un parcours de la plaque supérieure à la plaque inférieure, puis de nouveau à la plaque supérieure, l'onde subit dans le plan transversal un déphasage total φ égal à :

$$\varphi = k_x d + \Phi + k_x d + \Phi = 2\pi m \quad (\text{III.67})$$

$k_x d$ est le déphasage dû au parcours ascendant ou descendant d'une distance d ; \emptyset est le déphasage dû à la réflexion totale sur la surface conductrice des paires de plaques. Une réflexion totale $\Gamma_{\perp} = -1$ pour le mode TE implique $\emptyset = \pi$. La résonance transversale nécessite que le déphasage φ soit un multiple entier de 2π . Sinon, les deux ondes interféreraient de façon destructrice et aucun champ électrique ne pourrait exister entre la paire de plaques conductrices. La valeur propre k_x de l'équation (III.67) est celle donnée dans l'équation (III.66), alors qu'il est plus pratique d'identifier le mode TE en donnant k_z au lieu de k_x . La constante de phase du mode m est donnée par:

$$\beta_m = k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2} \quad (\text{II.68})$$

Pour un diélectrique non magnétiques et sans pertes entre les deux plaques, c'est à dire $\mu = \mu_0$ et $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, la constante de phase dans ce diélectrique non limité par la paire de plaques est donnée par:

$$k = n\omega/c \quad (\text{III.69})$$

Dans l'équation ci-dessus, $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ est l'indice de réfraction, c est la vitesse de la lumière dans l'espace libre. En insérant les équations (III.66) et (III.69) dans l'équation (III.68), la constante de phase du mode m devient:

$$\beta_m = \pm \sqrt{\left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2} \quad (\text{III.70})$$

Il est important de rappeler que k est la constante de phase de l'onde supposée se propager dans le diélectrique illimité, alors que β_m est la constante de phase du mode m se propageant dans la direction $+z$ le long du diélectrique limité par la paire de conducteurs.

III.5.1.2.1 Coupure des modes TE_m

Le champ électrique harmonique instantané réel du mode m est obtenu en multipliant l'équation (III.65) par le terme dépendant du temps $e^{j\omega t}$ et en prenant la partie réelle. Au-dessus de la coupure $f > f_{c(m)}$, le champ électrique harmonique du mode TE_m est donc:

$$\vec{e}_{TE_m} = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) \sin(\omega t - \beta_m z) \vec{a}_x \quad (\omega > \omega_{c(m)}) \quad (\text{III.71})$$

Pour une fréquence de fonctionnement f donnée, un mode m se propage le long du guide d'onde dans la direction $+z$ avec une constante de phase β_m donnée dans l'équation (III.70). On définit la fréquence de coupure $f_{c(m)}$ d'un mode m comme étant la fréquence à laquelle aucun champ ne se propage entre la paire de plaques conductrices. Un mode TE_m ne se propage pas si sa constante de

phase β_m est nulle. L'expression (III.68) s'annule en remplaçant le nombre d'onde k par le nombre d'onde à la coupure k_c , c'est à dire:

$$k = k_c \quad (III.72)$$

Le nombre d'onde à la coupure est donné par:

$$k_c = \frac{n\omega_c(m)}{c} \quad (III.73)$$

Avec $\omega_c(m) = 2\pi f_c(m)$. En utilisant (III.71) et (III.72) dans (III.70), la fréquence de coupure $f_{c(m)}$ d'un mode m sera définie à partir de la constante de phase k_x donnée par l'équation (III.66):

$$f_{c(m)} = \frac{mc}{2nd} \quad (III.74)$$

En prenant le signe positif de la constante de phase β_m d'un mode m , l'équation (III.73) nous permet de réécrire l'équation (III.70):

$$\beta_m = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c(m)}}{f}\right)^2} \quad (III.75)$$

Si la fréquence de fonctionnement f est inférieure à la fréquence de coupure $f_{c(m)}$, le radical de l'équation (III.74) devient négatif. Dans ce cas de figure, nous pouvons formuler l'équation (III.74) comme:

$$\beta_m = -j|\alpha_m| \quad (III.76)$$

Nous avons pris le signe moins pour une raison évidente, car la substitution de l'équation (III.75) dans l'équation (III.65) montre que le champ électrique d'un mode m donné décroît exponentiellement le long du guide avec le terme $e^{-|\alpha_m|z}$.

α_m est appelé la constante d'atténuation, elle est définie par:

$$\alpha_m = \frac{n\omega_c(m)}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{c(m)}}\right)^2} \quad [\text{Np/m}] \quad (III.77)$$

Le champ électrique harmonique instantané réel du mode m est obtenu en multipliant l'équation (III.65) par le terme dépendant du temps $e^{j\omega t}$ et en prenant la partie réelle. Au-dessus de la coupure $f > f_{c(m)}$, le champ électrique harmonique du mode TE_m est donc:

$$\vec{e}_{TE_m} = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) \sin(\omega t - \beta_m z) \vec{a}_x \quad (\omega > \omega_{c(m)}) \quad (III.78)$$

Comme mentionné ci-dessus, en dessous de la fréquence de coupure, $f < f_{c(m)}$, la constante de phase est purement imaginaire $\beta_m = -j|\alpha_m|$. Par conséquent, le champ électrique du mode TE_m en dessous de la coupure est exprimé comme :

$$\vec{e}_{TE_m} = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-|\alpha_m|z} \sin(\omega t) \vec{a}_x \quad (\omega < \omega_{c(m)}) \quad (\text{III.79})$$

Le terme $e^{-|\alpha_m|z}$ dans l'expression (III.79) montre qu'en dessous de la fréquence de coupure, le mode considéré ne se propage pas entre la paire de plaques conductrices, il s'atténue fortement avec la constante α_m et est appelé mode évanescent.

III.5.1.2.2 Vitesse de phase et vitesse de groupe des modes TE_m

Comme indiqué sur la figure III.6, l'angle d'incidence θ est formé par le vecteur d'onde \vec{k} et l'axe z . Pour une fréquence au dessus de la coupure, l'angle d'incidence θ_m pour un mode m , est obtenu à partir de la figure III.6 :

$$\sin\theta_m = \frac{k_x}{k} = \frac{f_{c(m)}}{f} \quad (\text{III.80})$$

Nous constatons dans l'équation (III.76) que l'angle θ_m devient égale à $\pi/2$ lorsque f tend vers de $f_{c(m)}$. Dans ce cas, l'onde se déplace dans la direction transversale x , et aucune propagation de l'onde le long de la paire de plaques conductrices c'est à dire le long de l'axe $+z$.

L'équation (III.64) montre que le mode TE_m est composé de deux ondes planes, qui se propagent avec la même vitesse de phase $v_p = \omega/k = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = c/n$ mais dans des directions différentes θ_m et $-\theta_m$. v_p est la vitesse de phase dans le milieu diélectrique illimité. Se servant des relations $\beta_m = k_z = k \cos\theta_m$ et $k = n\omega/c$, la vitesse de phase du mode TE_m notée $v_{p(m)}$ mesurée le long du guide d'onde, est exprimée par :

$$v_{p(m)} = \frac{\omega}{\beta_m} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{n \cos\theta_m} \quad (\text{III.81})$$

D'après la relation (III.77), la vitesse $v_{p(m)}$ est supérieure à la vitesse de phase v_p des deux ondes dans le diélectrique illimité.

Entre la paire de plaques conductrices, l'énergie électromagnétique se propage avec une vitesse de groupe. De l'équation (III.77), la vitesse de groupe du mode m est :

$$v_{g(m)} = \frac{d\omega}{d\beta_m} = \frac{1}{d\beta_m/d\omega} = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c(m)}}{f}\right)^2} \quad [\text{m/s}] \quad (\text{III.82})$$

La réécriture de l'équation (III.78) à l'aide de l'équation (III.76), nous permet d'exprimer la vitesse de groupe du mode m simplement par:

$$v_{g(m)} = \frac{c}{n} \cos\theta_m \quad (\text{III.83})$$

Nous constatons dans l'équation (III.79) que la vitesse de groupe du mode m est égale à la projection de la composante de la vitesse de phase v_p de l'onde plane dans la direction de propagation du mode, c'est à dire dans la direction $+z$. Par conséquent, la vitesse de groupe $v_{g(m)}$ est toujours inférieure à la vitesse de phase dans le diélectrique illimité.

Le champ électrique harmonique instantané réel du mode m est obtenu en multipliant l'équation (III.65) par le terme dépendant du temps $e^{j\omega t}$ et en prenant la partie réelle. Au-dessus de la coupure $f > f_{c(m)}$, le champ électrique harmonique du mode TE_m est donc:

$$\vec{e}_{TE_m} = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) \sin(\omega t - \beta_m z) \vec{a}_x \quad (\omega > \omega_{c(m)}) \quad (\text{III.84})$$

En dessous de la fréquence de coupure, $f < f_{c(m)}$, la constante de phase β_m exprimée par l'équation (III.74) devient imaginaire tel que $\beta_m = -j|\alpha_m|$. Par conséquent, en dessous de la coupure, le champ électrique du mode TE_m est exprimé comme:

$$\vec{e}_{TE_m} = 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{d}x\right) e^{-\alpha_m z} \sin(\omega t) \vec{a}_x \quad (\omega < \omega_{c(m)}) \quad (\text{III.85})$$

α_m est appelé la constante d'atténuation, elle est définie par:

$$\alpha_m = \frac{n\omega_{c(m)}}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{c(m)}}\right)^2} \quad [\text{Np/m}] \quad (\text{III.86})$$

III.5.1.3 Ondes TM

La figure III.7 illustre une onde plane uniforme à polarisation parallèle couplée obliquement dans un guide d'onde à plaques conductrices parallèles. Le champ électrique \vec{E} est parallèle au plan d'incidence formé par le vecteur d'onde \vec{k} et l'axe perpendiculaire à la l'interface entre le diélectrique et les conducteurs c'est à dire l'axe y , la composante du champ magnétique \vec{H} suivant la direction de propagation est nulle. La distribution des champs électrique et magnétique dans le cas de la polarisation parallèle est appelée *mode Transverse Magnétique (TM)*.

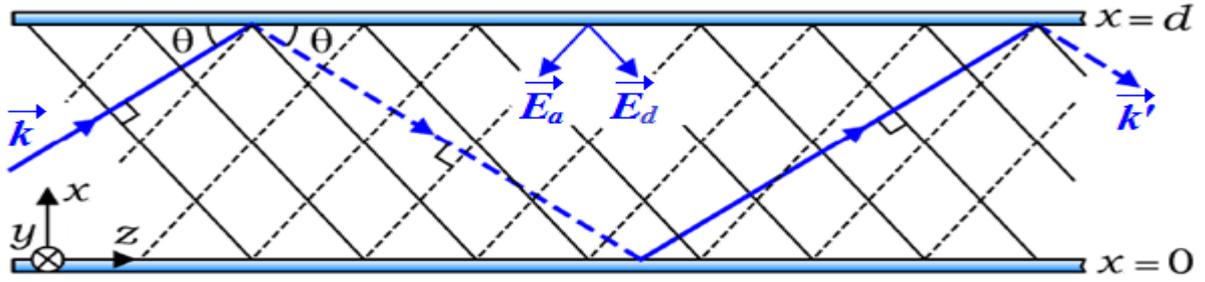


Figure III.7: Mode TM dans un guide d'onde à plaques parallèles.

D'après l'incidence oblique parallèle qui sera abordée au chapitre IV, la réflexion sur une surface parfaitement conductrice est totale, elle est quantifiée par le coefficient:

$$\Gamma_{\parallel} = -1 \quad (\text{III.87})$$

Compte tenu de ces considérations, les vecteurs champs électriques \vec{E}_a et \vec{E}_d des ondes ascendantes et descendantes, doivent se situer dans le plan de l'incidence, comme le montre la figure III.7. Le champ électrique total entre les deux plaques conductrices est donc:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_a + \vec{E}_d \\ &= (-\cos\theta \vec{a}_y + \sin\theta \vec{a}_z) E_0 e^{-j(k_y y + k_z z)} - (\cos\theta \vec{a}_y + \sin\theta \vec{a}_z) E_0 e^{j(k_y y - k_z z)} \end{aligned} \quad (\text{III.84})$$

Les vecteurs d'ondes des ondes ascendantes et descendantes sont exprimées par:

$$\vec{k} = \vec{k}_y + \vec{k}_z = k \sin\theta \vec{a}_y + k \cos\theta \vec{a}_z \quad (\text{III.85})$$

$$\vec{k}' = -\vec{k}_y + \vec{k}_z = -k \sin\theta \vec{a}_y + k \cos\theta \vec{a}_z \quad (\text{III.86})$$

Comme montré sur la figure III.4, la réécriture l'équation (III.84), nous donne:

$$\vec{E} = -2E_0 [\cos\theta \cos(k_y y) \vec{a}_y + j \sin\theta \sin(k_y y) \vec{a}_z] e^{-jk_z z} \quad (\text{III.87})$$

L'insertion de l'équation (III-87) dans l'équation (III.30a) de Maxwell-Faraday en régime harmonique, exprime le champ magnétique dans le guide d'onde:

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{2E_0}{\eta} \cos(k_y y) \vec{a}_x \quad (\text{III.88})$$

$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ est l'impédance intrinsèque du diélectrique entre les deux plans conducteurs. Les champs électriques et magnétiques exprimés par les équations (III-87) et (III-88) forment un mode, qui se propage le long de la direction +z avec la constante de phase k_z . Comme mentionné ci-dessus, ce mode d'onde guidé qui n'a pas de composante du champ magnétique suivant l'axe z, est appelé mode TM.

Chapitre IV

Réflexion et réfraction d'ondes planes

IV.1 Incidence d'une onde plane sur deux milieux LHI

Dans les chapitres précédents, nous avons limité la plupart de nos démonstrations sur des ondes planes se propageant dans des milieux homogènes. Il n'en est bien sûr pas ainsi dans la réalité de la prospection géophysique où les hétérogénéités constituent justement l'objet de toute étude de la propagation des OEM. Nous avons vu précédemment que pour une onde plane se propageant dans un milieu LHI, les champs \vec{E} et \vec{H} sont perpendiculaires à la direction de propagation qui est celle du vecteur d'onde \vec{k} .

Soit une onde plane incidente sur un plan S séparant deux milieux aux propriétés électriques (σ , μ , ϵ) différentes (Figure IV.1). Il est évident que \vec{k} et \vec{n} (la normale au plan S) sont tous les deux dans le plan d'incidence. Comme le montre la figure IV.1, deux cas d'incidence peuvent se présenter. Pour une incidence normale les vecteurs \vec{k} et \vec{n} sont parallèles, alors que dans le cas d'une incidence oblique le vecteur \vec{k} forme un angle θ avec la normale \vec{n} .

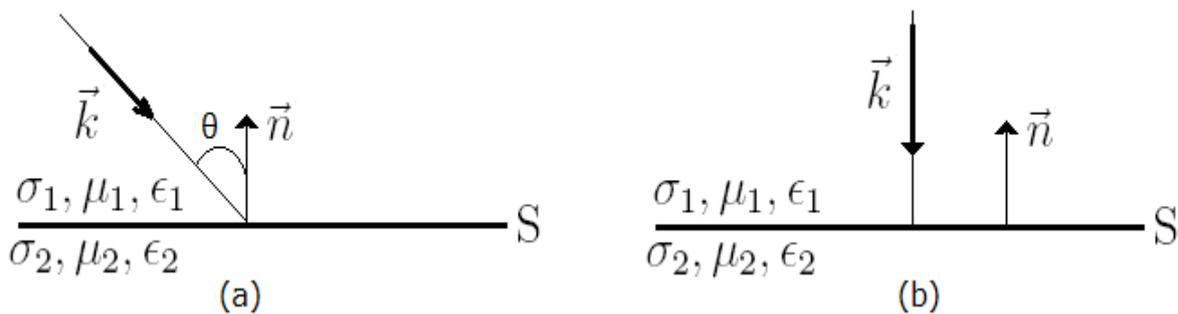


Figure IV.1 : Incidence d'une onde plane à l'interface S séparant deux milieux distincts : (a) incidence oblique, (b) incidence normale

IV.2 Onde plane à incidence normale sur la surface séparant deux diélectriques

Le cas d'incidence le plus simple est celui d'une onde plane de direction de propagation orthogonale à l'interface séparant deux milieux linéaires, homogènes et isotropes (LHI).

Pour l'étude de ce cas de propagation, comme indiqué sur la figure IV.2 nous prenons le plan xoy comme interface séparant les deux milieux, et l'axe z comme axe de propagation de l'onde plane. On suppose que le champ électrique est polarisé rectilignement suivant l'axe x .

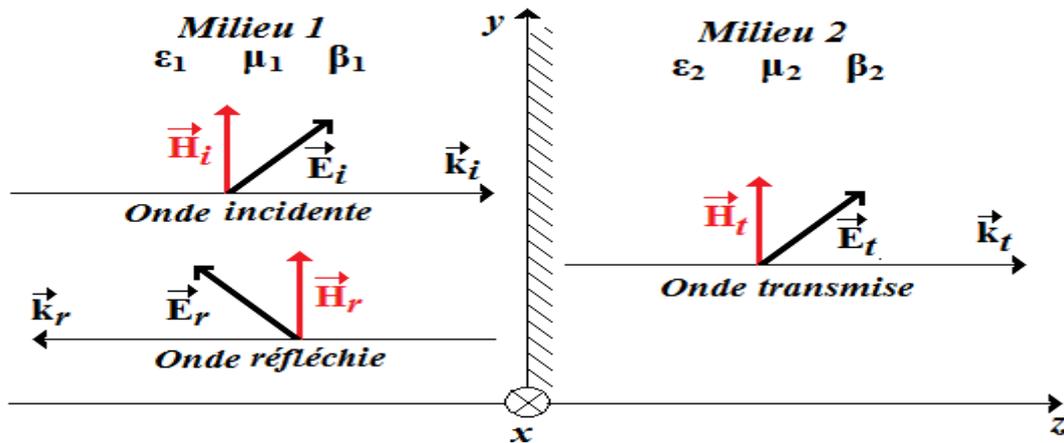


Figure IV.6 : Ondes à incidence normale entre deux milieux LHI

Les expressions des champs électrique et magnétique de l'onde incidente dans le milieu 1 sont données par :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = E_{0i} e^{-\gamma_1 z} \vec{a}_x \quad (\text{IV.1})$$

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{n}_{i\wedge} \vec{E}_i}{\xi_1} = \frac{\vec{e}_{z\wedge} \vec{E}_i}{\xi_1} = \frac{E_{0i}}{\xi_1} e^{-\gamma_1 z} \vec{a}_y \quad (\text{IV.2})$$

on pose :

$$H_{0i} = \frac{E_{0i}}{\xi_1} \quad (\text{IV.3})$$

L'expression (IV.2) devient donc:

$$\vec{H}_i = H_{0i} e^{-\gamma_1 z} \vec{a}_y \quad (\text{IV.4})$$

L'onde réfléchie est caractérisée par :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = E_{0r} e^{\gamma_1 z} \vec{a}_x \quad (\text{IV.5})$$

$$\vec{H}_r = \frac{\vec{n}_{r\wedge} \vec{E}_r}{\xi_1} = \frac{-\vec{e}_{z\wedge} \vec{E}_r}{\xi_1} = -\frac{E_{0r}}{\xi_1} e^{\gamma_1 z} \vec{a}_y \quad (\text{IV.6})$$

on pose :

$$H_{0r} = -\frac{E_{0r}}{\xi_1} \quad (\text{IV.7})$$

L'expression (IV.6) devient donc:

$$\vec{H}_r = H_{0r} e^{\gamma_1 z} \vec{a}_y \quad (\text{IV.8})$$

L'onde totale dans le milieu 1 est la superposition des deux ondes, l'onde incidente et l'onde réfléchie, il s'agit d'une onde stationnaire.

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = (E_{0i}e^{-\gamma_1 z} + E_{0r}e^{\gamma_1 z})\vec{a}_x \quad (\text{IV.9})$$

$$\vec{H}^{(1)} = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{1}{\xi_1} (E_{0i}e^{-\gamma_1 z} - E_{0r}e^{\gamma_1 z})\vec{a}_y \quad (\text{IV.10})$$

L'onde transmise dans le milieu 2 est donnée par:

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_{0t}e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} = E_{0t}e^{-\gamma_2 z}\vec{a}_x \quad (\text{IV.11})$$

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{\vec{n}_t \wedge \vec{E}_t}{\xi_2} = \frac{\vec{e}_{z\wedge} \vec{E}_t}{\xi_2} = \frac{E_{0t}}{\xi_2} e^{-\gamma_2 z} \vec{a}_y \quad (\text{IV.12})$$

on pose :

$$H_{0t} = \frac{E_{0t}}{\xi_2} \quad (\text{IV.13})$$

$$(\text{IV.13})$$

L'expression (IV.12) devient donc:

$$\vec{H}_t = H_{0t}e^{-\gamma_2 z}\vec{a}_y \quad (\text{IV.14})$$

IV.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission

On définit le coefficient de réflexion comme étant le rapport entre les champs électrique réfléchi et incident à l'interface séparant les deux milieux.

$$\Gamma = \frac{\vec{E}_r(z=0)}{\vec{E}_i(z=0)} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = -\frac{H_{0r}}{H_{0i}} \quad (\text{IV.15})$$

On définit le coefficient de transmission comme étant le rapport entre les champs électrique transmis et incident à l'interface séparant les deux milieux.

$$T = \frac{\vec{E}_t(z=0)}{\vec{E}_i(z=0)} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \quad (\text{IV.16})$$

On pose:

$$E_{0i} = E_0 \quad (\text{IV.17})$$

Tenant compte de l'égalité (IV.17), les expressions des amplitudes des ondes réfléchie et transmise en fonction des coefficients de réflexion et de transmission seront:

$$\begin{cases} E_{0r} = \Gamma E_0 \\ E_{0t} = T E_0 \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Les champs EM incidents, réfléchis et transmis en fonction des coefficients de réflexion et de transmission sont donnés par :

$$\vec{E}^{(1)} = E_0(e^{-\gamma_1 z} + \Gamma e^{\gamma_1 z})\vec{a}_x \quad (\text{IV.19})$$

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{E_0}{\xi_1}(e^{-\gamma_1 z} - \Gamma e^{\gamma_1 z})\vec{a}_y \quad (\text{IV.20})$$

$$\vec{E}^{(2)} = TE_0 e^{-\gamma_2 z}\vec{a}_x \quad (\text{IV.21})$$

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{TE_0}{\xi_2} e^{-\gamma_2 z}\vec{a}_y \quad (\text{IV.22})$$

Dans ce problème les grandeurs inconnues sont: le coefficient de réflexion Γ , et le coefficient de transmission T . Ces inconnues peuvent être déterminées par les conditions aux limites imposées à l'interface séparant les deux milieux. Les conditions aux limites sont appliquées à la composante tangentielle du champ électrique, c'est à dire E_x . La continuité de cette composante à l'interface séparant les deux milieux implique:

$$\vec{E}_x^{(1)}(z = 0) = \vec{E}_x^{(2)}(z = 0) \quad (\text{IV.23})$$

$$E_0(1 + \Gamma) = TE_0 \quad (\text{IV.24})$$

L'équation (II.124) nous permet d'aboutir à:

$$T = 1 + \Gamma \quad (\text{IV.25})$$

L'impédance de l'onde EM dans le milieu 1 est donnée par:

$$Z^{(1)}(z) = \frac{\vec{E}^{(1)}}{\vec{H}^{(1)}} = \frac{\xi_1(e^{-\gamma_1 z} + \Gamma e^{\gamma_1 z})\vec{a}_x}{(e^{-\gamma_1 z} - \Gamma e^{\gamma_1 z})\vec{a}_y} \quad (\text{IV.26})$$

L'impédance de l'onde EM dans le milieu 2 est donnée par:

$$Z^{(2)}(z) = \frac{\vec{E}^{(2)}}{\vec{H}^{(2)}} = \xi_2 \frac{\vec{a}_x}{\vec{a}_y} \quad (\text{IV.27})$$

La continuité de l'impédance à l'interface séparant les deux milieux implique:

$$Z^{(1)}(z = 0) = Z^{(2)}(z = 0) \quad (\text{IV.28})$$

$$\Rightarrow \frac{\xi_1(1+\Gamma)}{(1-\Gamma)} = \xi_2 \quad (\text{IV.29})$$

$$\Gamma = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1} \quad (\text{IV.30})$$

L'utilisation de l'équation (IV.30) dans l'équation (IV.25) donne l'expression du coefficient de transmission:

$$T = \frac{2\xi_2}{\xi_2 + \xi_1} \quad (\text{IV.31})$$

Nous pouvons aussi déterminer les coefficients de réflexion et de transmission à partir de l'application des conditions aux limites sur le champ magnétique à l'interface séparant les deux milieux:

$$\vec{H}_y^{(1)}(z = 0) = \vec{H}_y^{(2)}(z = 0) \quad (\text{IV.32})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\xi_1}(1 - \Gamma) = \frac{T}{\xi_2} \quad (\text{IV.33})$$

L'utilisation de l'équation (IV.25) dans l'équation (IV.33) aboutit à :

$$T = \frac{2\xi_2}{\xi_2 + \xi_1} \quad (\text{IV.34})$$

L'utilisation de l'équation (IV.34) dans l'équation (IV.25) donne :

$$\Gamma = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1} \quad (\text{IV.35})$$

IV.2.2 Taux d'ondes stationnaires

Le taux d'ondes stationnaires TOS , SWR en anglais (Standing Waves Ratio) est défini comme étant le rapport entre les valeurs maximale et minimale du champ électrique. Puisque les ondes stationnaires n'existe que dans le milieu (1) alors:

$$SWR = \frac{|E^{(1)}|_{max}}{|E^{(1)}|_{min}} \quad (\text{IV.36})$$

Pour déterminer cette grandeur, nous allons supposer que les deux milieux sont sans pertes. Dans ce cas le coefficient de réflexion sera réel et le champ électrique dans le milieu 1 sera exprimé à partir de l'équation (IV.19) par :

$$\vec{E}^{(1)} = E_0 e^{-j\beta_1 z} (1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}) \vec{a}_x \quad (\text{IV.37})$$

Nous allons résonner sur la valeur efficace du champ électrique, pour cela on détermine le module du champ électrique.

$$|\vec{E}^{(1)}| = |E_0| |1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}| \quad (\text{IV.38})$$

$$|\vec{E}^{(1)}| = |E_0| |1 + \Gamma(\cos(2\beta_1 z) + j\sin(2\beta_1 z))| \quad (\text{IV.39})$$

$$|\vec{E}^{(1)}| = |E_0| \sqrt{1 + 2\Gamma\cos(2\beta_1 z) + \Gamma^2} \quad (\text{IV.40})$$

Dans l'équation (IV.40), le terme qui dépend de la direction de propagation est $\cos(2\beta_1 z)$ dont les valeurs extrêmes sont $+1$ et -1 , donc nous allons raisonner sur ces extrêmes pour déterminer les valeurs maximale et minimale du champ électrique.

Le champ électrique est maximal pour :

$$\cos(2\beta_1 z) = +1 \Rightarrow 2\beta_1 z_{max} = 2n\pi$$

$$|\vec{E}^{(1)}|_{max} = |E_0|(1 + \Gamma) \quad (\text{IV.41})$$

Le champ électrique est minimal pour :

$$\cos(2\beta_1 z) = -1 \Rightarrow 2\beta_1 z_{max} = (2n + 1)\pi$$

$$|\vec{E}^{(1)}|_{min} = |E_0|(1 - \Gamma) \quad (\text{IV.43})$$

Les équations (IV.36), (IV.41) et (IV.42) nous permettent d'exprimer le taux d'ondes stationnaires comme :

$$SWR = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \quad (\text{IV.44})$$

Dans le cas de milieux avec pertes, le coefficient de réflexion est complexe et l'expression du taux d'ondes stationnaires sera de la forme :

$$SWR = \frac{1+|\tilde{\Gamma}|}{1-|\tilde{\Gamma}|} \quad (\text{IV.45})$$

IV.3 Onde plane à incidence oblique

On considère deux milieux diélectriques sans pertes, non chargés, et LHI. Le plan d'incidence de l'onde est défini par la direction de propagation de l'onde incidente portant le vecteur d'onde \vec{k} et l'axe normal à l'interface séparant les deux milieux. Dans le cas d'une incidence oblique, le vecteur de l'onde incidente \vec{k}_i forme un angle θ_i avec la normale à l'interface séparant les deux milieux.

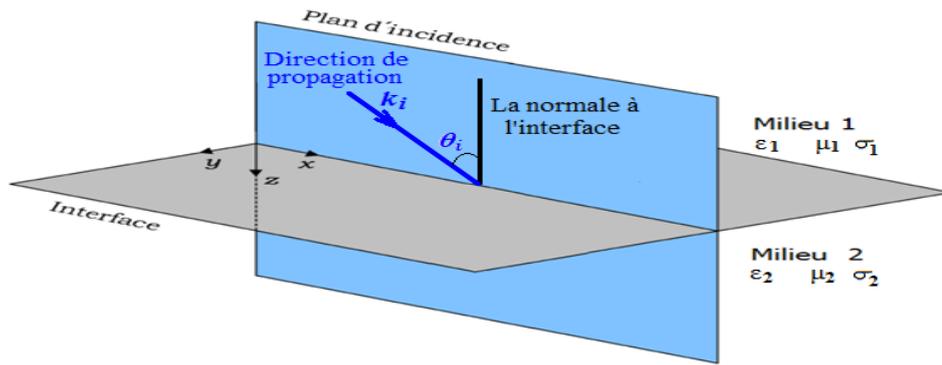


Figure IV.7: Onde à incidence oblique, plan d'incidence et interface entre deux milieux LHI

IV.3.1 Onde plane à incidence oblique parallèle

Comme montré sur les figures IV.8 et IV.9, dans le cas d'une incidence oblique parallèle, le champs électrique est parallèle au plan d'incidence.

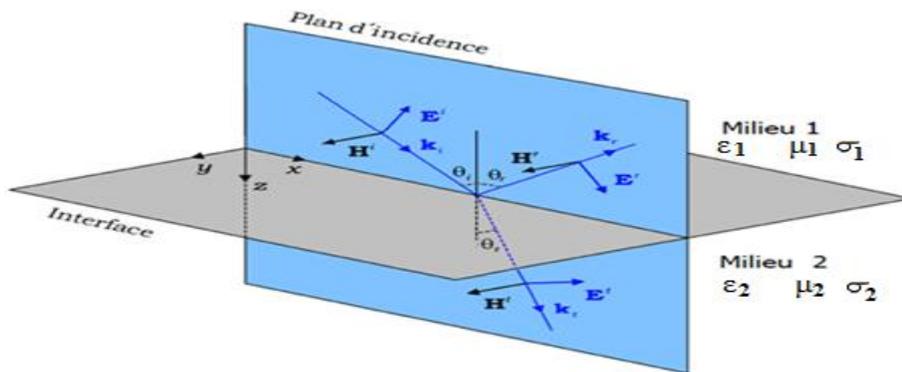


Figure IV.8 : Onde à incidence oblique parallèle

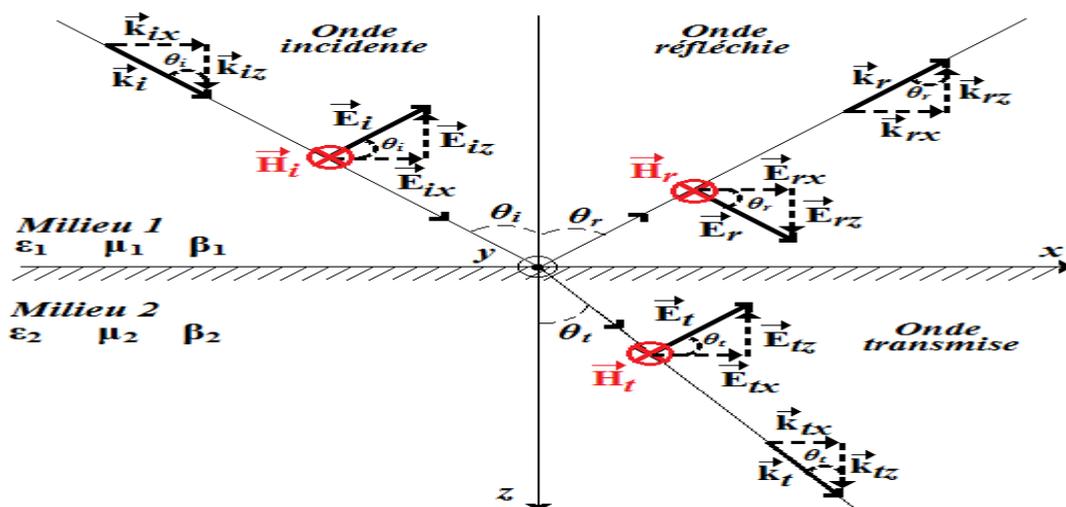


Figure IV.9 : Onde à incidence oblique parallèle, composantes des ondes incidentes, réfléchies et transmises

Le vecteur d'onde de l'onde incidente dans le milieu 1 est donné par:

$$\begin{aligned}\vec{k}_i &= \vec{k}_{ix} + \vec{k}_{iz} = k_{ix}\vec{a}_x + k_{iz}\vec{a}_z \\ \vec{k}_i &= k_i \sin(\theta_i)\vec{a}_x + k_i \cos(\theta_i)\vec{a}_z = k_i\vec{n}_i\end{aligned}\quad (\text{IV.46})$$

Le vecteur d'onde de l'onde réfléchié dans par l'interface séparant les deux milieux est donné par:

$$\begin{aligned}\vec{k}_r &= \vec{k}_{rx} + \vec{k}_{rz} = k_{rx}\vec{a}_x - k_{rz}\vec{a}_z \\ \vec{k}_r &= k_r \sin(\theta_r)\vec{a}_x - k_r \cos(\theta_r)\vec{a}_z = k_r\vec{n}_r\end{aligned}\quad (\text{IV.47})$$

Le vecteur d'onde de l'onde transmise au milieu 2 est donné par:

$$\begin{aligned}\vec{k}_t &= \vec{k}_{tx} + \vec{k}_{tz} = k_{tx}\vec{a}_x + k_{tz}\vec{a}_z \\ \vec{k}_t &= k_t \sin(\theta_t)\vec{a}_x + k_t \cos(\theta_t)\vec{a}_z = k_t\vec{n}_t\end{aligned}\quad (\text{IV.48})$$

Les nombres d'ondes dans les deux milieux sont exprimés par:

$$k_1 = k_i = k_r = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\quad (\text{IV.49})$$

$$k_2 = k_t = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\quad (\text{IV.50})$$

Les constantes de propagation dans les deux milieux sont données par:

$$\gamma_1 = j\beta_1\quad (\text{IV.51})$$

$$\gamma_2 = j\beta_2\quad (\text{IV.52})$$

Les constantes de phase dans les deux milieux sont exprimées par:

$$\beta_1 = k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\quad (\text{IV.53})$$

$$\beta_2 = k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\quad (\text{IV.54})$$

En tenant compte de ses composantes ainsi que celles de son vecteur d'onde, l'expression du champ électrique incident dans le milieu 1 est donnée par:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i}e^{-j\vec{k}_1\cdot\vec{r}} = (\vec{E}_{0ix} + \vec{E}_{0iz})e^{-j\vec{k}_1\cdot\vec{r}}\quad (\text{IV.55})$$

Posons:

$$E_{0i} = E_0$$

En se référant à la figure IV.9, le développement de l'expression (IV.55) aboutit à :

$$\vec{E}_i = E_0(\cos(\theta_i) \vec{a}_x - \sin(\theta_i) \vec{a}_z) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_i) + z\cos(\theta_i))} \quad (\text{IV.56})$$

Sachant que l'onde est plane, alors le champ magnétique incident dans le milieu 1 est exprimé à partir du champ électrique incident :

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{n}_{i\wedge} \vec{E}_i}{\xi_1} = \frac{E_0}{\xi_1} e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_i) + z\cos(\theta_i))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.57})$$

En suivant le même raisonnement, les champs électromagnétiques réfléchis et transmis seront exprimés par :

$$\vec{E}_r = E_{0r}(\cos(\theta_r) \vec{a}_x + \sin(\theta_r) \vec{a}_z) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))} \quad (\text{IV.58})$$

$$\vec{H}_r = \frac{\vec{n}_{r\wedge} \vec{E}_r}{\xi_1} = -\frac{E_{0r}}{\xi_1} e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.59})$$

$$\vec{E}_t = (\vec{E}_{0tx} + \vec{E}_{0tz}) e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad (\text{IV.60})$$

$$\vec{E}_t = E_{0t}(\cos(\theta_t) \vec{a}_x - \sin(\theta_t) \vec{a}_z) e^{-j\beta_2(x\sin(\theta_t) + z\cos(\theta_t))} \quad (\text{IV.61})$$

$$\vec{H}_t = \frac{\vec{n}_{t\wedge} \vec{E}_t}{\xi_2} = \frac{E_{0t}}{\xi_2} e^{-j\beta_2(x\cos(\theta_t) + z\sin(\theta_t))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.62})$$

IV.3.1.1 Coefficients de réflexion et de transmission

On définit le coefficient de réflexion comme étant le rapport entre les champs électriques réfléchi et incident à l'interface séparant les deux milieux. A l'interface $z = 0$ les angles des ondes incidente et réfléchie sont nuls :

$$\theta_i = \theta_r = 0 \quad (\text{IV.63})$$

$$\Gamma = \frac{\vec{E}_r(x, z=0, \theta_r=0)}{\vec{E}_i(x, z=0, \theta_i=0)} = \frac{E_{0r}}{E_0} \quad (\text{IV.64})$$

L'amplitude du champ électrique réfléchi peut alors être exprimée à l'aide du coefficient de réflexion :

$$E_{0r} = \Gamma E_0 \quad (\text{IV.65})$$

On définit le coefficient de transmission comme étant le rapport entre les champs électriques transmis et incident à l'interface séparant les deux milieux. A l'interface $z = 0$ les angles des ondes incidente et transmise sont nuls :

$$\theta_t = 0 \quad (\text{IV.66})$$

$$T = \frac{\vec{E}_t(x, z=0, \theta_t=0)}{\vec{E}_i(x, z=0, \theta_i=0)} = \frac{E_{0t}}{E_0} \quad (\text{IV.67})$$

L'amplitude du champ électrique transmis dans le milieu 2 peut alors être exprimée à l'aide du coefficient de transmission :

$$E_{0t} = TE_0 \quad (\text{IV.68})$$

L'utilisation des expressions des amplitudes des ondes réfléchies et transmises exprimées en fonction des coefficients de réflexion et de transmission dans les équations des champs électromagnétiques réfléchis et transmis donne :

$$\vec{E}_r = \Gamma E_0 (\cos(\theta_r) \vec{a}_x + \sin(\theta_r) \vec{a}_z) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))} \quad (\text{IV.69})$$

$$\vec{H}_r = -\frac{\Gamma E_0}{\xi_1} e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.70})$$

$$\vec{E}_t = TE_0 (\cos(\theta_t) \vec{a}_x - \sin(\theta_t) \vec{a}_z) e^{-j\beta_2(x\sin(\theta_t) + z\cos(\theta_t))} \quad (\text{IV.71})$$

$$\vec{H}_t = \frac{TE_0}{\xi_2} e^{-j\beta_2(x\cos(\theta_t) + z\sin(\theta_t))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.72})$$

Le champ total dans le milieu 1 est la superposition des deux ondes incidente et réfléchie.

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \quad (\text{IV.73})$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)} = E_0 [& (\cos(\theta_i) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_i) + z\cos(\theta_i))} + \Gamma \cos(\theta_r) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))}) \vec{a}_x \\ & + (\Gamma \sin(\theta_r) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))} - \sin(\theta_i) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_i) + z\cos(\theta_i))}) \vec{a}_z] \end{aligned} \quad (\text{IV.75})$$

$$\vec{H}^{(1)} = \vec{H}_i + \vec{H}_r \quad (\text{IV.76})$$

$$\vec{H}^{(1)} = \frac{E_0}{\xi_1} (e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_i) + z\cos(\theta_i))} - \Gamma e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))}) \vec{a}_y \quad (\text{IV.77})$$

Le champ total dans le milieu 2 est égal au champ transmis dans ce milieu.

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_t \quad (\text{IV.78})$$

$$\vec{E}^{(2)} = TE_0 (\cos(\theta_t) \vec{a}_x - \sin(\theta_t) \vec{a}_z) e^{-j\beta_2(x\sin(\theta_t) + z\cos(\theta_t))} \quad (\text{IV.79})$$

$$\vec{H}^{(2)} = \vec{H}_t \quad (\text{IV.80})$$

$$\vec{H}^{(2)} = \frac{TE_0}{\xi_2} e^{-j\beta_2(x\cos(\theta_t) + z\sin(\theta_t))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.81})$$

Comme dans le cas de l'incidence normale, les grandeurs inconnues sont ; le coefficient de réflexion Γ , le coefficient de transmission T , l'angle de l'onde réfléchi θ_r et l'angle de l'onde transmise θ_t . Ces inconnues peuvent être déterminées par les conditions aux limites imposées à l'interface séparant les deux milieux. Les conditions aux limites sont appliquées aux composantes tangentielles du champ électrique, c'est à dire E_x et H_y . La continuité de ces composantes à l'interface séparant les deux milieux implique :

$$\vec{E}_x^{(1)}(x, z = 0) = \vec{E}_x^{(2)}(x, z = 0) \quad (\text{IV.82})$$

$$\vec{H}_y^{(1)}(x, z = 0) = \vec{H}_y^{(2)}(x, z = 0) \quad (\text{IV.83})$$

L'application de ces conditions aux limites aux équations (IV.75), (IV.77), (IV.79) et (IV.81) aboutit aux égalités suivantes:

$$\cos(\theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_i)} + \Gamma \cos(\theta_r) e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_r)} = T \cos(\theta_t) e^{-j\beta_2 x \sin(\theta_t)} \quad (\text{IV.84})$$

$$\frac{1}{\xi_1} e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_i)} - \frac{\Gamma}{\xi_1} e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_r)} = \frac{T}{\xi_2} e^{-j\beta_2 x \sin(\theta_t)} \quad (\text{IV.85})$$

Les deux termes en exponentiel de chacune des deux équations (IV.84) et (IV.85) sont des termes de phases fonctions de x . Si les composantes E_x et H_y sont continues à l'interface $z = 0$, alors la variation des phases en fonction de x de ces deux termes à cette interface doit être la même, ce qui mène à :

$$\beta_1 \sin(\theta_i) = \beta_1 \sin(\theta_r) = \beta_2 \sin(\theta_t) \quad (\text{IV.86})$$

L'équation (IV.86) mène aux deux lois de Snell de la réflexion et de la réfraction.

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ \beta_1 \sin(\theta_i) = \beta_2 \sin(\theta_t) \end{cases} \quad (\text{IV.87})$$

Les équations (IV.84), (IV.85) et (IV.87), nous permettent d'exprimer les coefficients de réflexion et de transmission d'une incidence oblique parallèle:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\xi_2 \cos(\theta_t) - \xi_1 \cos(\theta_i)}{\xi_2 \cos(\theta_t) + \xi_1 \cos(\theta_i)} \quad (IV.88)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2\xi_2 \cos(\theta_i)}{\xi_2 \cos(\theta_t) + \xi_1 \cos(\theta_i)} \quad (IV.89)$$

IV.3.2 Onde plane à incidence oblique perpendiculaire

Dans le cas d'une incidence oblique perpendiculaire, le champ électrique est orthogonal au plan d'incidence. Comme montré sur la figure IV.11, le champ électrique est orienté suivant l'axe y alors que le champ magnétique possède deux composantes dirigées suivant x et z .

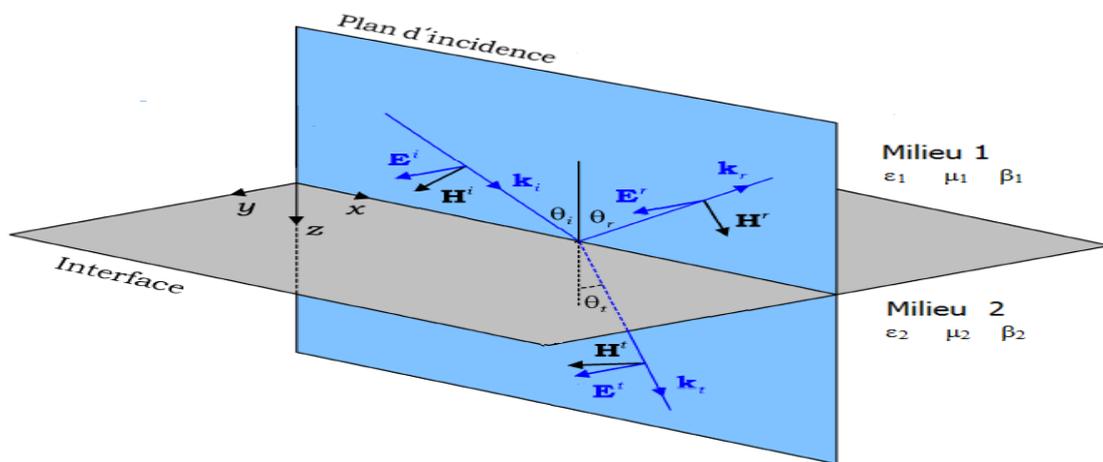


Figure IV.10: Ondes à incidence oblique perpendiculaire, plan d'incidence et interface entre deux milieux LHI

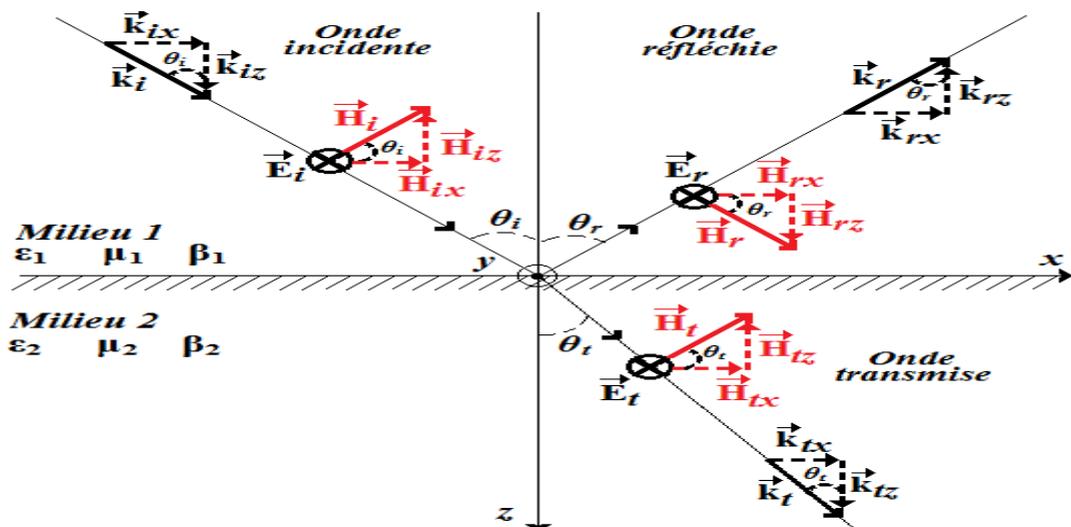


Figure IV.11: Onde à incidence oblique perpendiculaire, composantes des ondes incidentes, réfléchies et transmises

Dans le cas d'une incidence oblique perpendiculaire, les vecteurs des ondes incidentes, réfléchi et transmises \vec{k}_i , \vec{k}_r et \vec{k}_t respectivement, auront les mêmes expressions que ceux de l'incidence oblique parallèle.

En se référant aux figures IV.10 et IV.11, les expressions des champs EM incidents, réfléchis dans le milieu 1 et transmis au milieu 2 sont:

$$\vec{E}_i = E_0 e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_i) + z\cos(\theta_i))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.90})$$

$$\vec{H}_i = \frac{E_0}{\xi_1} (\cos(\theta_i) \vec{a}_x - \sin(\theta_i) \vec{a}_z) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_i) + z\cos(\theta_i))} \quad (\text{IV.91})$$

$$\vec{E}_r = \Gamma E_0 e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.92})$$

$$\vec{H}_r = \frac{\Gamma E_0}{\xi_1} (\cos(\theta_r) \vec{a}_x + \sin(\theta_r) \vec{a}_z) e^{-j\beta_1(x\sin(\theta_r) - z\cos(\theta_r))} \quad (\text{IV.93})$$

$$\vec{E}_t = T E_0 e^{-j\beta_2(x\sin(\theta_t) + z\cos(\theta_t))} \vec{a}_y \quad (\text{IV.94})$$

$$\vec{H}_t = -\frac{T E_0}{\xi_2} (\cos(\theta_t) \vec{a}_x - \sin(\theta_t) \vec{a}_z) e^{-j\beta_2(x\sin(\theta_t) + z\cos(\theta_t))} \quad (\text{IV.95})$$

IV.3.2.1 Coefficients de réflexion et de transmission

En suivant le même raisonnement de l'incidence oblique parallèle, les coefficients de transmission et de réflexion de l'incidence oblique perpendiculaire peuvent être déterminés à l'aide de la continuité des composantes tangentielles E_y et H_x du champ électromagnétique à l'interface séparant les deux milieux:

$$e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_i)} + \Gamma e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_r)} = T e^{-j\beta_2 x \sin(\theta_t)} \quad (\text{IV.96})$$

$$-\frac{1}{\xi_1} \cos(\theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_i)} + \frac{\Gamma}{\xi_1} \cos(\theta_r) e^{-j\beta_1 x \sin(\theta_r)} = -\frac{T}{\xi_2} \cos(\theta_t) e^{-j\beta_2 x \sin(\theta_t)} \quad (\text{IV.97})$$

En avançant le même argument d'adaptation de phase pour la polarisation parallèle, nous obtenons les lois de Snell de la réflexion et de la réfraction:

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ \beta_1 \sin(\theta_i) = \beta_2 \sin(\theta_t) \end{cases} \quad (\text{IV.98})$$

Les coefficients de réflexion et de transmission obtenus pour l'incidence oblique perpendiculaire obtenus à l'aide des équations (IV.96), (IV.97) et (IV.98) seront de la forme :

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\xi_2 \cos(\theta_i) - \xi_1 \cos(\theta_t)}{\xi_2 \cos(\theta_i) + \xi_1 \cos(\theta_t)} \quad (\text{IV.99})$$

$$T_{\perp} = \frac{2\xi_2 \cos(\theta_i)}{\xi_2 \cos(\theta_i) + \xi_1 \cos(\theta_t)} \quad (\text{IV.100})$$

IV.3.3 L'incidence critique

Comme montré sur la figure IV.12, on définit l'angle d'incidence critique comme étant l'angle θ_c pour lequel l'onde transmise se propagera à la surface du milieu 2.

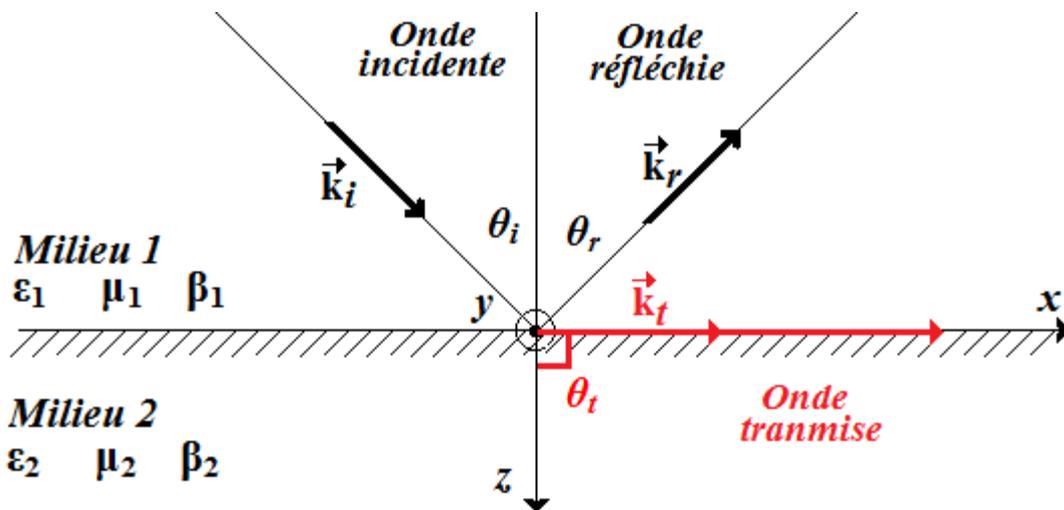


Figure IV.12 : Onde à incidence oblique, angle d'incidence critique

Loi de Snell de la réfraction :

$$\beta_1 \sin(\theta_i) = \beta_2 \sin(\theta_t) \quad (\text{IV.102})$$

L'utilisation des équations (IV.53) et (IV.54) donnant les expressions des constantes de phase β_1 et β_2 respectivement, aboutit au rapport suivant:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}} \quad (\text{IV.103})$$

Du fait que dans la plus part des cas les 2 milieux ont la même perméabilité alors le rapport (IV.103) se réduit à:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{\sin(\theta_t)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \quad (\text{IV.104})$$

L'angle d'incidence critique est l'angle pour lequel $\theta_t = 90^\circ$, ce qui donne :

$$\sin(\theta_c) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \quad (\text{IV.105})$$

IV.1.4 Angle de Brewster

L'angle de Brewster appelé θ_B est défini comme étant l'angle d'incidence aboutissant à une réflexion nulle. Cet angle n'est défini que dans le cas de l'incidence oblique parallèle.

$$\Gamma_{\parallel}(\theta_i = \theta_B) = 0 \quad (\text{IV.106})$$

Dans le cas de l'incidence oblique parallèle, le coefficient de réflexion est donné par l'équation (IV.88):

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\xi_2 \cos(\theta_t) - \xi_1 \cos(\theta_i)}{\xi_2 \cos(\theta_t) + \xi_1 \cos(\theta_i)} \quad (\text{IV.107})$$

Les équations (IV.106) et (IV.107) mènent au résultat suivant:

$$\Gamma_{\parallel}(\theta_i = \theta_B) = 0 \Rightarrow \xi_2 \cos(\theta_t) - \xi_1 \cos(\theta_B) = 0 \quad (\text{IV.108})$$

Comme mentionné dans le chapitre II par l'équation (II.42), Les impédances intrinsèques des deux milieux sont données par:

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \quad (\text{IV.109})$$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \quad (\text{IV.110})$$

Nous considérons que les perméabilités μ_1 et μ_2 des deux milieux sont égales, ce qui est le cas des la plus part des milieux. L'utilisation des équations (IV.88), (IV.88), et (IV.88) dans l'équation (IV.88) mène à:

$$\cos(\theta_t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos(\theta_B) \quad (\text{IV.111})$$

A partir de la loi de Snell de la réfraction nous avons :

$$\sin(\theta_t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sin(\theta_i) \quad (\text{IV.112})$$

Nous avons trigonométriquement :

$$\sin^2(\theta_t) + \cos^2(\theta_t) = 1 \quad (\text{IV.113})$$

$$\Rightarrow \cos(\theta_t) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_t)} \quad (\text{IV.114})$$

La substitution de l'équation (IV.112) dans l'équation (IV.114) donne:

$$\cos(\theta_t) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2(\theta_i)} \quad (\text{IV.115})$$

La substitution de l'équation (IV.111) dans l'équation (IV.115) donne:

$$\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2(\theta_B)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \cos(\theta_B) \quad (\text{IV.116})$$

En élevant au carré l'équation (IV.116) on aura:

$$1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2(\theta_B) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos^2(\theta_B) \quad (\text{IV.117})$$

La substitution de la relation trigonométrique (IV.113) dans l'équation (IV.117) donne:

$$\sin^2(\theta_B) + \cos^2(\theta_B) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2(\theta_B) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cos^2(\theta_B) \quad (\text{IV.118})$$

L'organisation des termes de l'équation (IV.118) aboutit à l'expression de l'angle de Brewster θ_B .

$$\sin^2(\theta_B) \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = \cos^2(\theta_B) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)$$

$$\sin^2(\theta_B) \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = \cos^2(\theta_B) \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)$$

$$\text{tg}^2(\theta_B) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$\theta_B = \text{arctg} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \quad (\text{IV.119})$$

Chapitre V

Propagation d'Ondes Hertziennes

V.1 Milieu Dissipatif

Dans un milieu dissipatif (à pertes), une onde électromagnétique perdra de l'énergie sous forme de chaleur. Les champs électrique et magnétiques diminueront de façon exponentielle dans la direction de propagation.

V.1.1 Permittivité complexe d'un milieu dissipatif

La conductivité σ d'un milieu dissipatif est non nulle, les équations de Maxwell-Faraday, Maxwell-Gauss et celle du flux magnétique en régime harmonique pour les milieux sans pertes sont toujours applicables aux milieux avec pertes:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (\text{V.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\text{V.2})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{V.3})$$

A l'exception de l'équation de Maxwell-Ampère où le caractère dissipatif du milieu est pris en compte en introduisant la densité du courant de conduction donnée par la loi d'Ohm $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E} = j\omega\varepsilon_c\vec{E} \quad (\text{V.4})$$

Où ε_c est la permittivité complexe du milieu dissipatif:

$$\varepsilon_c = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (\text{V.5})$$

Le rapport des modules des densités de courants de conduction et de déplacement qui se réduit au rapport des parties imaginaire et réelle de la permittivité complexe du milieu dissipatif nous permet d'estimer la tangente de pertes:

$$\tan(\delta) = \frac{\sigma|\vec{E}|}{\omega\varepsilon|\vec{E}|} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \quad (\text{V.6})$$

δ est l'angle de pertes du milieu dissipatif. Comme abordé au chapitre IV, le rapport des parties imaginaire et réelle de la permittivité complexe du milieu dissipatif nous permet aussi de classer les milieux dissipatif. Le tableau V.1 donne quelques exemples de milieux dissipatif.

Tableau V.1: Caractéristiques de milieux dissipatifs pour quelques fréquences

Milieu	ϵ_r	σ	Tangente de pertes à la fréquence (MHz)		
			0.5	100	1000
Bois	2.1	$3.3 \cdot 10^{-9}$	$5.7 \cdot 10^{-05}$	$2.8 \cdot 10^{-07}$	$2.8 \cdot 10^{-08}$
Marbre	8	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$4.5 \cdot 10^{-02}$	$2.2 \cdot 10^{-04}$	$2.2 \cdot 10^{-05}$
Sol sec	3.4	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{+01}$	$5.3 \cdot 10^{-02}$	$5.3 \cdot 10^{-03}$
Eau douce	81	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$4.4 \cdot 10^{+00}$	$2.2 \cdot 10^{-02}$	$2.2 \cdot 10^{-03}$
Steak de bœuf	40	$1.0 \cdot 10^{+0}$	$9.0 \cdot 10^{+02}$	$4.5 \cdot 10^{+00}$	$4.5 \cdot 10^{-01}$
Eau de mer	81	$4.0 \cdot 10^{+0}$	$5.7 \cdot 10^{+03}$	$8.9 \cdot 10^{+00}$	$8.9 \cdot 10^{-01}$
Cuivre	1	$5.8 \cdot 10^{+7}$	$2.1 \cdot 10^{+12}$	$1.0 \cdot 10^{+10}$	$1.0 \cdot 10^{+09}$

$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$: milieu diélectrique à pertes,

$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$: milieu conducteur à pertes,

$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \approx 1$: milieu semi conducteur.

V.1.2 Onde plane TEM dans un milieu dissipatif illimité

L'équation de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu dissipatif LHI est la même que celle d'un milieu sans pertes à l'exception du changement dans l'expression du nombre d'onde.

$$\nabla^2 \vec{E} + k_e^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{V.7})$$

Le nombre d'ondes équivalent du milieu dissipatif est donné par:

$$k_e = \omega \sqrt{u\epsilon_e} \quad (\text{V.8})$$

Réécrivant l'équation (V.7) sous la forme:

$$\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0 \quad (\text{V.9})$$

Avec comme citée dans le chapitre précédent:

$$\gamma = jk_e \quad (\text{V.10})$$

est la constante de propagation, développée sous la forme:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (\text{V.11})$$

Rappelant que α et β sont respectivement les constantes d'atténuation et de phase dans le milieu dissipatif. L'utilisation des équations (V.5) et (V.8) dans l'équation (V.10) donne:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left(1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^{1/2} \quad (\text{V.12})$$

En élevant au carré les deux expressions (V.11) et (V.12) de γ , nous pouvons extraire l'atténuation et le déphasage d'une onde électromagnétique parcourant un milieu dissipatif illimité.

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = -\omega^2\mu\varepsilon' + j\omega^2\mu\varepsilon'' \quad (\text{V.13})$$

L'équation (V.13) nous permet d'aboutir au système d'équation suivant:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon' \\ 2\alpha\beta = \omega^2\mu\varepsilon'' \end{cases} \quad (\text{V.14})$$

La résolution du système (V.14) donne:

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu\varepsilon'}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{V.15})$$

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\mu\varepsilon'}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (\text{V.16})$$

Dans le cas d'une onde plane TEM se propageant dans la direction la direction z avec un champ électrique orienté dans la direction x , l'équation d'onde du champ vecteur \vec{E} (V.9) se réduit à l'équation d'onde de la composante E_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x = 0 \quad (\text{V.17})$$

Le champ électrique de l'onde plane vérifiant l'équation (V.17) est de la forme:

$$\vec{E}(z) = E_x(z)\vec{a}_x = E_0 e^{-\gamma z} \vec{a}_x = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \vec{a}_x \quad (\text{V.18})$$

E_0 est l'amplitude du champ électrique. L'expression réelle du champ électrique est donnée par:

$$\vec{E}_r(z) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\beta z) \vec{a}_x \quad (\text{V.19})$$

Comme montré sur la figure V.1, le champ électrique est une fonction sinusoïdale de la variable spatiale z amortie par exponentielle symbolisant les pertes du milieu, considéré au départ comme dissipatif.

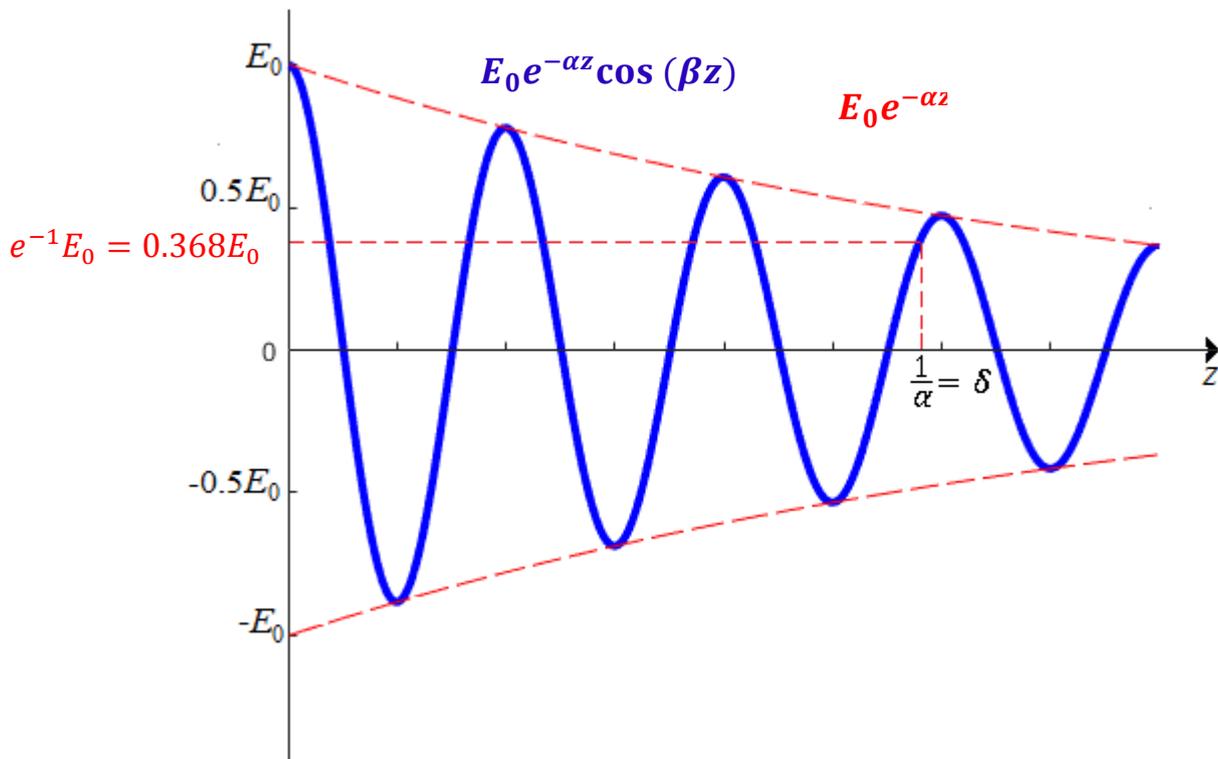


Figure V.1: Allure de la composante réelle du champ électrique en fonction de la direction de propagation

Le champ magnétique associé au champ électrique peut être trouvé à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$:

$$\vec{H}(z) = H_y(z)\vec{a}_y = \frac{E_x(z)}{\eta_e} \vec{a}_y \quad (\text{V.20})$$

L'expression complexe de l'impédance caractéristique équivalente du milieu dissipatif, démontre que les champ magnétique et électrique ne sont pas en phase.

$$\eta_e = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_e}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) \quad (\text{V.21})$$

V.2 Propagation dans l'environnement terrestre

Dans l'environnement terrestre, Il existe différents modes de transmission de l'information entre deux points E (émission) et R (réception). Le modèle de cette propagation tient compte de la présence du sol et de l'atmosphère. La figure V.2 montre que l'onde parvient du point E vers le point R à travers cinq trajets:

- L'onde directe (1),
- L'onde troposphérique (1'),
- l'onde réfléchie (2),
- l'onde de surface (3),
- l'onde réfléchie par l'ionosphère ou onde de ciel (4).

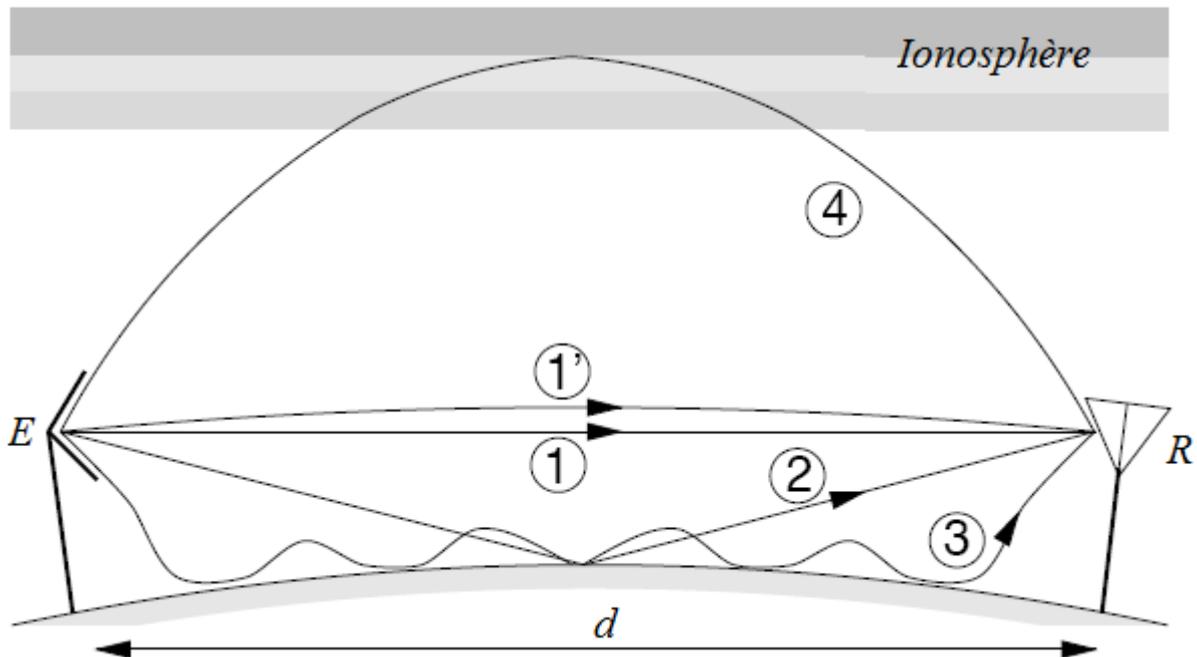


Figure V.2 : Modes de propagation des ondes électromagnétiques

La superposition des ondes directe et réfléchié produit une onde appelée onde d'espace. Les solutions onde d'espace et onde de surface de l'équation d'ondes tiennent compte des conditions aux limites entre les deux milieux: l'air et le sol.

- Les paramètres climatiques de la troposphère variant avec l'altitude produiront une courbure du trajet de l'onde d'espace sous forme de réfraction.
- La présence d'obstacles dans le trajet de l'onde d'espace causera la diffraction de l'onde.

V.2.1 Caractéristiques électriques du Sol et de la basse Atmosphère

V.2.1.1 Paramètres du Sol

Le sol caractérisé par sa constante diélectrique ϵ_r et sa conductivité σ est considéré comme un milieu dissipatif de permittivité équivalente donnée par la formule (V.5):

$$\epsilon_e = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (\text{V.22})$$

Sa permittivité relative complexe est :

$$\epsilon_{er} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - j60\sigma\lambda_0 \quad (\text{V.23})$$

La fréquence pour laquelle les termes réels et imaginaires de la permittivité relative complexe est la fréquence de transition. Cette fréquence définie pour le sol ou tout autre milieu la transition entre un comportement conducteur ou celui d'un diélectrique. Cette fréquence est donnée par:

$$f_t = \frac{18\sigma}{\varepsilon_r} \text{ (GHz)} \quad (\text{V.24})$$

Pour un sol moyennement sec de conductivité $\sigma = 10^{-3}$ et de permittivité relative $\varepsilon_r = 15$ la fréquence de transition est de 1.2 MHz.

En se référant à la formule (V.22), la fréquence de transition nous permet de caractériser le comportement du sol:

Pour $f \gg f_t$, la partie réelle ε' de ε_e est \gg à sa partie imaginaire σ/ω . Les propriétés du sol se rapprochent de celles d'un diélectriques.

Pour $f \ll f_t$, la partie réelle ε' de ε_e est \ll à sa partie imaginaire σ/ω . Les propriétés du sol se rapprochent de celles d'un conducteur.

V.2.1.2 Caractérisation de la basse Atmosphère

La basse atmosphère appelée aussi la troposphère est une région qui s'étend au dessus des plus hautes montagnes. Elle est le siège de phénomènes météorologiques tels que le brouillard, nuages, pluie, neige, etc. Dans la troposphère la température, l'humidité et la pression varient sensiblement avec l'altitude et le temps et il en résulte des variations de son indice de réfraction.

Des mesures ont montré des variations linéairement approximatives de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude, de sorte que:

$$n = n_0(1 + Bh) \quad (\text{V.25})$$

avec n l'indice de réfraction à l'altitude h et n_0 l'indice de réfraction au niveau de la mer. Le paramètre B est donnée par:

$$B = \frac{1}{R_0} \left(-0.2 + 30 \frac{dP}{dh} - 6 \frac{dT}{dh} \right) \quad (\text{V.26})$$

$R_0 = 6400 \text{ km}$ rayon de la Terre, dP/dh est la variation de la pression de la vapeur d'eau en mbars/m, dT/dh est la variation de la température avec l'altitude en °C/m. Puisque n_0 est voisin de 1 et $Bh \ll 1$ alors:

$$n = n_0 + Bh \quad (\text{V.27})$$

V.2.1.2.1 Atmosphère standard

Dans le cas d'une troposphère standard, les pentes du taux d'humidité et la température en fonction de l'altitude diminuent avec les proportions suivantes:

$$\frac{dP}{dh} = -0.0033 \quad (\text{V.28})$$

$$\frac{dT}{dh} = -0.009 \quad (\text{V.29})$$

Ce qui aboutit au paramètre B :

$$B = -\frac{0.25}{R_0} \quad (\text{V.30})$$

Donc l'indice de réfraction d'une troposphère standard est donnée par:

$$n = n_0 - 0.25 \frac{h}{R_0} \quad (\text{V.31})$$

V.2.1.2.2 Atmosphère de référence

La variation de l'indice de réfraction n pour l'atmosphère n'est pas valable pour toute la troposphère. C'est pour cette raison que le Comité Consultatif International des Radiocommunications (CCIR) a défini une atmosphère de référence d'indice de réfraction:

$$n = 1 + 315 \cdot 10^{-6} e^{(-0.136h)} \quad (\text{V.32})$$

Sur les deux premiers kilomètres l'atmosphère de référence est très proche de l'atmosphère standard.

V.2.2 Ondes atmosphériques et ondes de sol

V.2.2.1 La Réflexion sur le sol

Dans le cas d'un émetteur disposé à une certaine hauteur du sol, l'onde peut parvenir au récepteur par deux trajets: soit directement soit par réflexion sur le sol. Pour faire l'étude de ce mode de propagation, selon la distance entre l'émetteur et le récepteur deux profils de sol sont considérés, le sol plan et le sol courbé.

V.2.2.1.1 Cas d'un sol plan

Pour faire l'étude de ce mode de propagation, la distance entre l'émetteur et le récepteur est supposée assez faible pour que l'on puisse négliger la courbure de la Terre. Comme montré sur la figure V.3, deux chemins sont possible pour l'onde émise de l'émetteur E vers le récepteur R : l'un direct d_d et l'autre par réflexion d_r . Le point d'impact de l'onde réfléchi sur le sol est le point T .

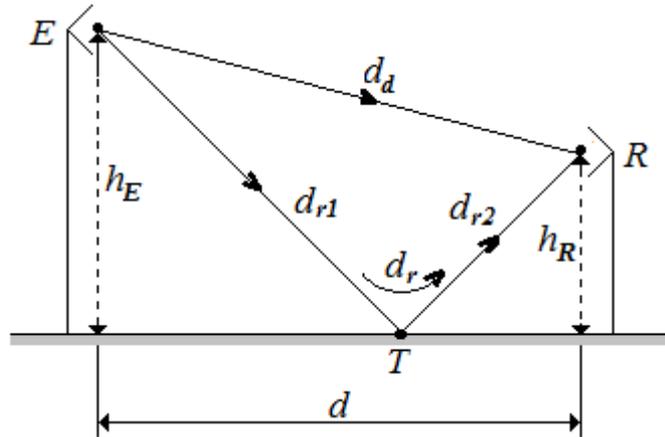


Figure V.3: Chemins empruntés par une onde à proximité d'un sol plan

Le sol est assumé plan lorsque la condition suivante est satisfaite:

$$d(\text{km}) < \frac{100}{f^{1/3}(\text{MHz})} \quad (\text{V.33})$$

Dans le cas où l'on considère que le champ électrique parvenant de l'émetteur au récepteur par le trajet directe d_d est \tilde{E}_0 et \tilde{E}_r le champ produit par le rayon réfléchi au point T avec un coefficient de réflexion de module inférieur à l'unité:

$$\tilde{E}_r = \Gamma e^{j\phi} \tilde{E}_0 \quad (\text{V.34})$$

Comme le champ électrique est inversement proportionnel à la distance qu'il parcourt, alors le rapport des modules des champ parcourant les deux trajet est donné par:

$$\frac{E_r}{E_0} = \Gamma \frac{d_d}{d_r} \quad (\text{V.35})$$

Le déphasage électrique dû à la différence des longueurs des trajets des ondes directe et issue de la réflexion sur le sol est:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (d_r - d_d) \quad (\text{V.36})$$

Le champ total de l'onde d'espace parvenant au point R est la somme des champs parvenant des deux trajets et avec un déphasage φ résultant de la différence des longueurs ($d_r - d_d$) et celui du coefficient de réflexion $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{E}_{esp} = \tilde{E}_0 \left[1 + \Gamma \frac{d_d}{d_r} \exp j(\varphi + \phi) \right] \quad (\text{V.37})$$

La valeur maximale du champ au niveau de récepteur R est obtenue pour $\varphi + \phi = 2k\pi$:

$$E_{esp}^{Max} = E_0 \left[1 + \Gamma \frac{d_d}{d_r} \right] \quad (\text{V.38})$$

La valeur minimale du champ au niveau de récepteur R est obtenue pour $\varphi + \phi = (2k+1)\pi$:

$$E_{esp}^{min} = E_0 \left[1 - \Gamma \frac{d_d}{d_r} \right] \quad (\text{V.39})$$

D'après les relations (V.37), (V.38) et (V.39) : le champ de l'onde d'espace reçu au point R varie donc avec une succession périodique de minimas et de maximas. Calculons la périodicité de cette succession en fonction de la hauteur h_R du récepteur et de la distance d entre l'émetteur récepteur. En se référant à la figure V.4, les distances parcourues par les ondes directe et celle réfléchi par le sol plan sont :

$$d_d = d \sqrt{1 + \left(\frac{h_E - h_R}{d} \right)^2} \quad (\text{V.40})$$

$$d_r = d \sqrt{1 + \left(\frac{h_E + h_R}{d} \right)^2} \quad (\text{V.41})$$

Avec :

$$d_r = d_{r1} + d_{r2}$$

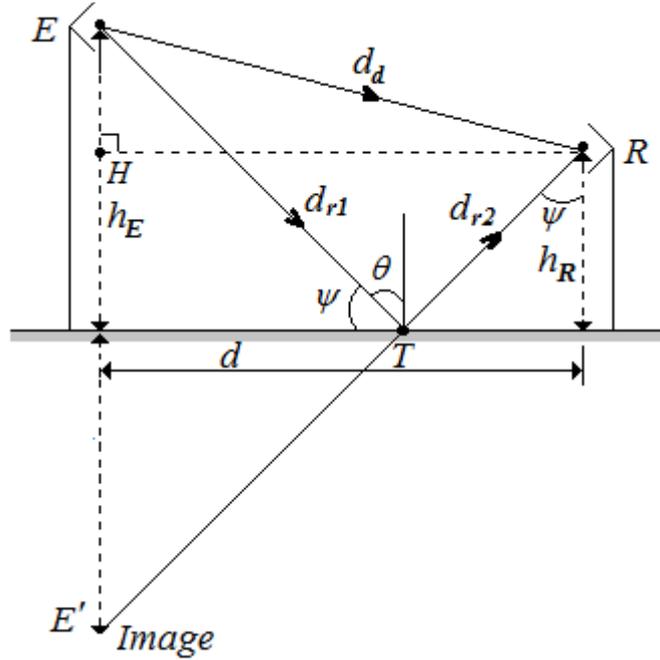


Figure V.4 : Géométrie d'approximation entre l'onde directe et l'onde réfléchiée par le sol

En pratique, la distance d est très supérieure aux hauteurs par rapport au sol h_E et h_R des antennes d'émission et de réception. L'application des expansions binomiales aux distances d_d et d_r réduit leur expressions à :

$$d_d \approx d \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_E - h_R}{d} \right)^2 \right) \quad (\text{V.42})$$

$$d_r \approx d \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h_E + h_R}{d} \right)^2 \right) \quad (\text{V.43})$$

La différence entre les parcours des deux ondes, directe et celle réfléchiée par le sol est :

$$\delta_{d_r - d_d} = d_r - d_d \approx \frac{2h_E h_R}{d} \quad (\text{V.44})$$

Le déphasage électrique dû à la différence des longueurs des trajets des ondes directe et issue de la réflexion sur le sol est :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (d_r - d_d) \approx \frac{4\pi h_E h_R}{\lambda d} \quad (\text{V.45})$$

- Si Le point R du récepteur se déplace à $d = cte$, la périodicité Δh_R selon h_R est telle que:

$$2\pi = \frac{4\pi h_E h_R}{\lambda d} \frac{\Delta h_R}{h_R} \quad (\text{V.46})$$

Nous aurons donc une périodicité selon h_R :

$$\Delta h_R = \frac{\lambda d}{2h_E} \quad (\text{V.47})$$

- Si Le point R du récepteur se déplace à $h_R = cte$, la périodicité Δd selon d est telle que:

$$2\pi = \frac{4\pi h_E h_R}{\lambda d} \frac{\Delta d}{d} \quad (\text{V.48})$$

Nous aurons donc une périodicité selon h_R :

$$\Delta d = \frac{\lambda d^2}{2h_E h_R} \quad (\text{V.49})$$

Comme montré sur la figure V.4, nous pouvons exprimer un angle d'attaque ψ pour l'onde réfléchié par le sol à partir de l'angle d'incidence θ tel que:

$$\psi^o = 90^o - \varphi^o \quad (\text{V.50})$$

Cet angle d'attaque sera exprimé en fonction des paramètres géométriques du profil de propagation du sol plan montrés sur la figure V.4, en prenant l'image de l'émetteur E au dessous de la surface du sol. L'angle d'attaque ψ complémentaire à l'angle d'incidence θ de l'onde réfléchié par le sol est donné par:

$$\psi = \arctan\left(\frac{h_E + h_R}{d}\right) \quad (\text{V.51})$$

V.2.2.1.2 Cas d'un sol sphérique

Dans la propagation des ondes électromagnétiques en espace libre il est plus facile de considérer que la terre est plane et la propagation des ondes se fait en ligne droite. Malheureusement ces deux suppositions ne sont plus valables lorsque les distances entre l'émetteur et le récepteur deviennent plus importantes, dans ce cas il faudrait tenir compte de la courbure de la terre.

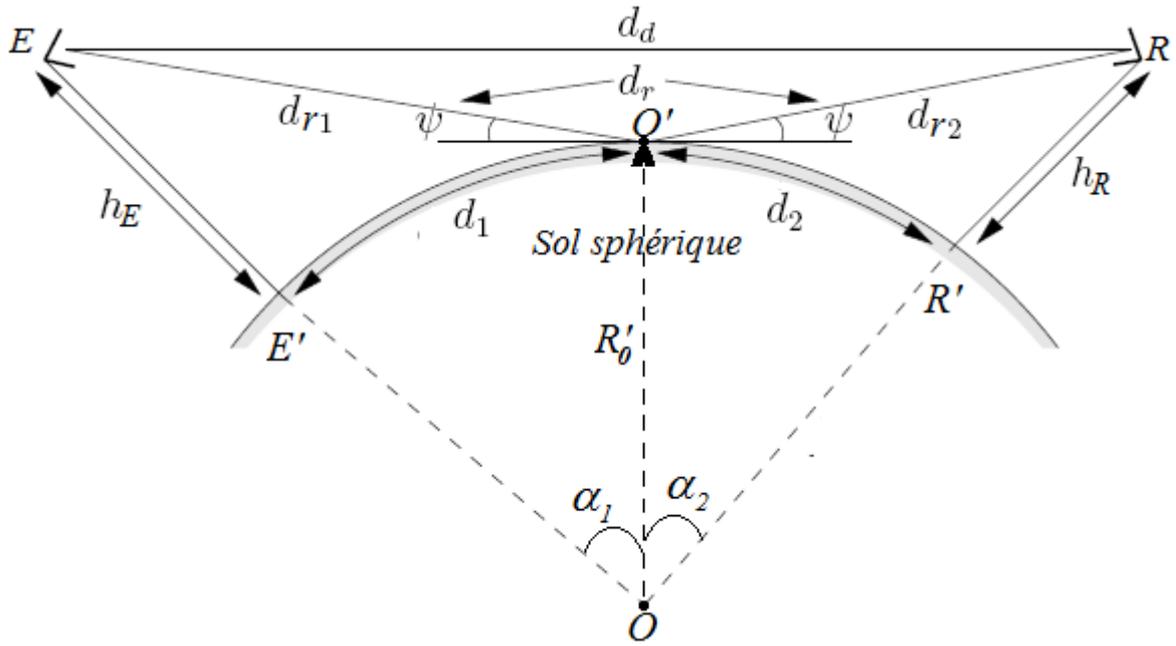


Figure V.5: Trajets d'une onde à proximité d'un sol sphérique

Les calculs de la différence $\delta_{d_r-d_d}$ entre les trajets directe d_d et réfléchi d_r , ainsi que l'angle d'attaque ψ par l'image de E se compliquent dans le cas d'un sol courbé. Le point de réflexion sur le sol ne peut être déterminé en prenant l'image de l'antenne d'émission. La solution de ce problème passe l'utilisation des relations géométriques dans les triangles définis dans la figure V.5.

Dans les triangles $OO'E$ et $OO'R$ nous avons les deux relations suivantes:

$$\frac{d_{r1}}{\sin\alpha_1} = \frac{R'_0}{\cos(\alpha_1+\psi)} \quad (\text{V.52})$$

$$\frac{d_{r2}}{\sin\alpha_2} = \frac{R'_0}{\cos(\alpha_2+\psi)} \quad (\text{V.53})$$

Dans le triangle $EO'R$ nous avons:

$$\begin{aligned} d_d^2 &= d_{r1}^2 + d_{r2}^2 + 2d_{r1}d_{r2}\cos 2\psi \\ d_d^2 &= d_{r1}^2 + d_{r2}^2 + 2d_{r1}d_{r2}(1 - 2\sin^2\psi) \\ d_d^2 &= (d_{r1} + d_{r2})^2 - 4d_{r1}d_{r2}\sin^2\psi \\ (d_{r1} + d_{r2})^2 - d_d^2 &= 4d_{r1}d_{r2}\sin^2\psi \end{aligned}$$

d'où:

$$(d_{r1} + d_{r2}) - d_d = \frac{4d_{r1}d_{r2}\sin^2\psi}{(d_{r1}+d_{r2})+d_d} \quad (\text{V.54})$$

Dans le cas où les angles α_1 , α_2 et ψ sont petits, alors:

$$(d_{r1} + d_{r2}) + d_d \approx 2(d_{r1} + d_{r2}) \quad (\text{V.55})$$

$$\delta_{d_r-d_d} = d_r - d_d = \frac{2d_{r1}d_{r2}\psi^2}{d_{r1}+d_{r2}} \quad (\text{V.56})$$

V.2.2.2 La Réfraction Troposphérique

La formule (V.27) représente la Troposphère comme un milieu où l'indice de réfraction est à variation régulière. Donc la Troposphère peut être considérée une stratification sphérique où les strates sont des sphères épousant la courbure de la Terre. Lorsque la courbure de la terre devient non négligeable, la courbure des ondes dans la troposphère devient comparable à celle de la terre. Ce phénomène se manifestant par un changement progressif et faible de l'orientation des ondes dans la basse atmosphère s'appelle réfraction troposphérique. Ce mode de propagation des ondes est dû à la variation de l'indice de réfraction avec l'altitude, causée par les irrégularités atmosphériques.

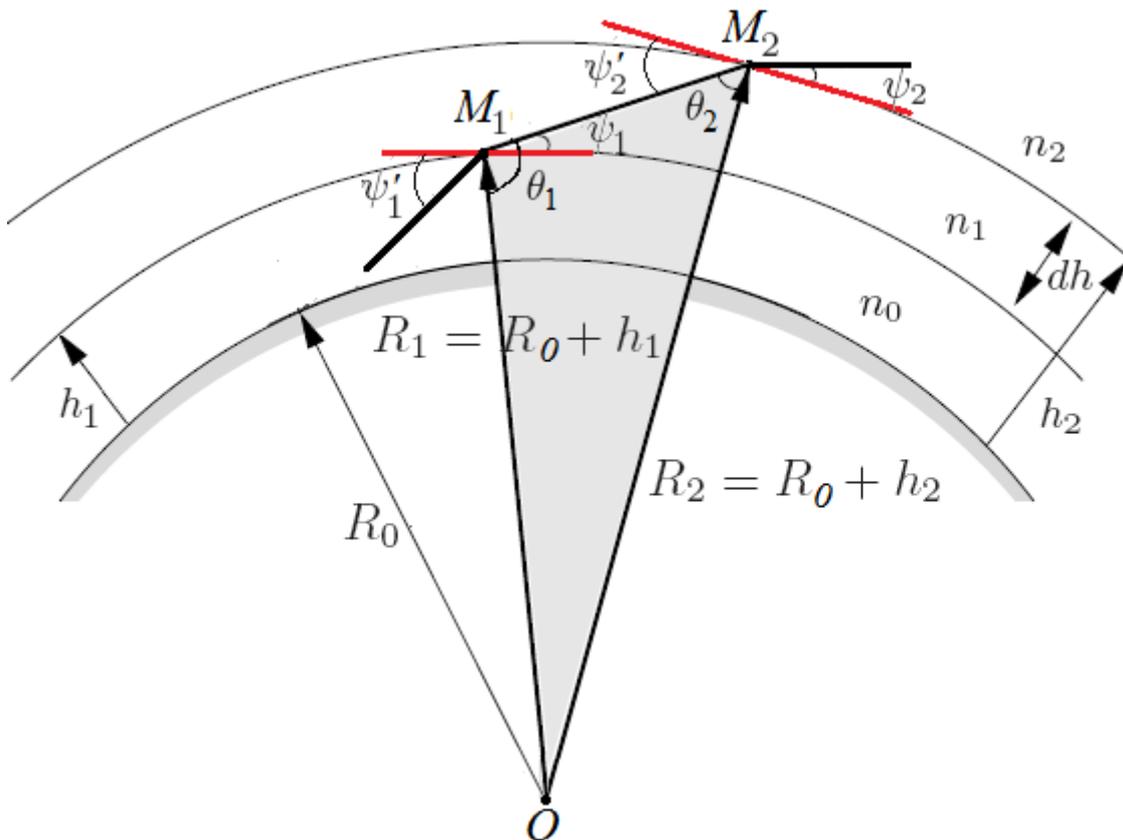


Figure V.6: Onde électromagnétique dans une atmosphère stratifiée

Comme montré sur la figure V.6, considérons les angle $\psi_i (i=1,2)$ formés par les directions de propagation et les tangentes aux strates de la Troposphère et s les abscisses curvilignes au points M_i . La loi de Descartes appliquée aux trajets de l'onde de la figure V.6 est donnée par:

$$n_1 \cos \psi_1 = n_1 \cos \psi'_1 \quad (\text{V.57})$$

Dans le triangle OM_1M_2 , nous avons,

$$\frac{\sin \theta_1}{OM_2} = \frac{\sin \theta_2}{OM_1} \rightarrow \frac{\cos \psi'_1}{R_0+h_2} = \frac{\cos \psi_2}{R_0+h_1} \quad (\text{V.58})$$

d'ou:

$$n_1(R_0 + h_1) \cos \psi_1 = n_1(R_0 + h_2) \cos \psi_2 \quad (\text{V.59})$$

Puisque la Troposphère est considérée comme un milieu à variation continu de l'indice de réfraction, l'équation (V.59) se réduit à:

$$n(R_0 + h) \cos \psi = cte \quad (\text{V.60})$$

Comme montrée sur la figure V.7, pour calculer la trajectoire de l'onde d'une atmosphère dont l'indice de réfraction est à variation continue, on considère une portion da trajectoire au voisinage d'un $M (M' \rightarrow M)$.

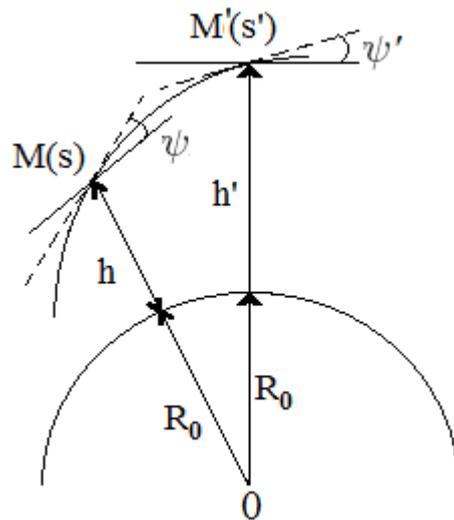


Figure V.7: Propagation dans une atmosphère stratifiée

La courbure entre les points $M(s, \psi)$ et $M'(s', \psi')$ relative par rapport à la courbure de la Terre est donnée par:

$$C_R = \frac{\psi' - \psi}{s - s'} = \frac{d\psi}{ds} \quad (\text{V.61})$$

- Si $C_R = 0$, $\psi =$ constante en tout points de la trajectoire: la courbure de la trajectoire de l'onde est égale à celle de la Terre.
- Si $C_R > 0$, ψ augmente avec l'abscisse s : la courbure propre de la trajectoire ($1/R$) de l'onde est plus petite que celle de la Terre ($1/R_0$) .
- Si $C_R < 0$, ψ diminue avec s : la courbure propre da la trajectoire de l'onde est plus grande que celle de la Terre.

V.2.2.2.1 Applications de la Réfraction Troposphérique aux Télécommunications

Les trajectoires des ondes troposphérique sont aussi estimées à l'aide du rapport dn/dh , en calculant la courbure relative C_R à l'aide de la dérivée logarithmique de la formule (V.60).

$$\frac{dn}{n} + \frac{dh}{R_0+h} - \frac{\sin\psi}{\cos\psi} d\psi = 0 \quad (\text{V.62})$$

Si l'on tient compte de la considération $\sin\psi = dh/ds$ et des approximations $n \approx 1$ et $\cos\psi \approx 1$ (si l'on considère que les trajectoires sont au voisinage de la Terre, les angles ψ restent inférieures à 10°). Dans ces conditions, et en négligeant h devant le rayon R_0 de la Terre, la courbure relative des trajectoires sera égale à:

$$\frac{dn}{dh} + \frac{1}{R_0} = C_R$$

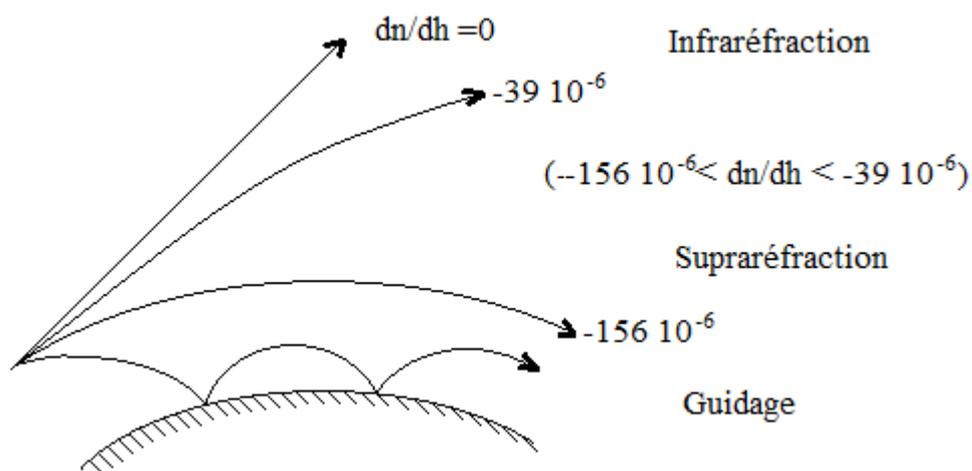


Figure V.8 :Profils de guidage des ondes selon la pente de variation de l'indice de réfraction en fonction de l'altitude

Si l'on dispose d'une antenne dont la direction de rayonnement maximale est parallèle à la Terre alors:

- Si $dn/dh = -1/R_0 (km) = -156 \cdot 10^{-6}$, $C_R = 0$, dans ce cas les trajectoires sont parallèles à la Terre.
- Si $dn/dh > -156 \cdot 10^{-6}$, $C_R > 0$, cela signifie que $d\psi > 0$ pour $ds > 0$ dans ce cas les trajectoires s'écartent de la surface de la Terre. Si $dn/dh = 0$ les trajectoires sont des lignes droites.
- Si $dn/dh < -156 \cdot 10^{-6}$, $C_R < 0$, cela signifie que $d\psi < 0$ pour $ds > 0$ dans ce cas les trajectoires s'écartent de la surface de la Terre. Si $dn/dh = 0$ les trajectoires se rapprochent de la surface de la Terre.

Les différentes possibilités exploitées pour une liaison de télécommunication se définissent par rapport à l'atmosphère standard pour laquelle $dn/dh = -39 \cdot 10^{-6}$.

- Si $dn/dh > -39 \cdot 10^{-6}$, il aura une infraréfraction;
- Si $dn/dh < -39 \cdot 10^{-6}$, il aura une supraréfraction, avec possibilité de guidage des ondes dans le cas où $dn/dh < -156 \cdot 10^{-6}$.

Conclusion

Conclusion

Qui ne mesure pas, aujourd'hui, l'importance des ondes électromagnétiques de toutes fréquences, ondes radio, radar, ondes diverses des systèmes de téléphonie mobile. Ce cours de la Licence de Télécommunications servira à initier les étudiants à la propagation des ondes électromagnétiques.

Historiquement, la transmission à distance de l'information a toujours été une préoccupation humaine importante. Dans l'antiquité, des messagers parcouraient à pied la distance entre l'émetteur et le récepteur du message. A cette époque, l'information ne se déplaçait pas à la vitesse de la lumière et on ne connaissait pas les autoroutes de l'information.

Plus tard, l'homme a utilisé des liaisons optiques. D'abord rudimentaires (signaux de fumée, feu pour avertir d'un danger), elles ont été améliorées plus tard: Samuel Morse invente le télégraphe. C'est le premier système de transmission utilisant des signaux électriques se propageant sur une ligne. On transmet sur la ligne une suite d'impulsions brèves ou longues pour créer des symboles (lettres de l'alphabet). Ce système était très intéressant mais il nécessitait un support physique (une ligne électrique) entre l'émetteur et le récepteur.

A la fin du 19^{ème} siècle, les physiciens ont mis en évidence les ondes électromagnétiques (Maxwell, Hertz). A cet même époque, Guglielmo Marconi, un physicien italien réalise la première transmission radio (on parlait alors de TSF : Télégraphie sans fil) sur une distance de 1,5 km. Au cours de 20^{ème} siècle, des progrès spectaculaires ont été réalisés en téléphonie mobile: nous vivons à l'époque des télécommunications !

Deux façons distinctes nous ont permis d'aborder la propagation des ondes électromagnétiques. La première consiste à reprendre chronologiquement les développements théoriques et expérimentaux qui ont abouti au niveau de connaissance actuelle ; il s'agit d'une approche « historique ». La seconde consiste à poser les lois générales comme postulat de départ (quitte à particulariser par la suite) pour en déduire toutes les implications possibles ; il s'agit d'une approche « axiomatique ». La seconde approche, présente l'avantage de s'appuyer d'emblée sur un formalisme général. C'est un mixage entre les deux approches qui a été adopté dans ce cours pour mener l'étudiant à maîtriser les outils mathématiques et leurs significations physiques pour la compréhension de la propagation des ondes électromagnétiques.

Références Bibliographiques

Références bibliographiques

1. F. Gardiol ; Electromagnétisme : Traité d'électricité ; Edition Lausanne.
2. P. Rosnet ; Eléments de propagation électromagnétique : Physique fondamentale, 2002.
3. G. Dubost ; Propagation libre et guidée des ondes électromagnétiques ; Masson, 1995.
4. M. Nekab ; Ondes et phénomènes de propagation ; OPU, 2004.
5. M. Jouquet ; Ondes électromagnétique 1 : propagation libre ; Dunod, 1973.
6. Garing ; Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques : Exercices et problèmes corrigés, 1998.
7. Garing ; Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs : Exercices et problèmes corrigés, 1998.