Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Tahar Moulay de Saida
Faculté de Technologie

Département d'Electronique

Méthode Numérique

Présenté par :

Dr. CHERIFI Abdelhamid

Maître de conférences « A » en Electronique

Mois et année : juillet 2022

Avant-propos

Ce cours a pour but de présenter le plus large éventail possible des connaissances de base de méthode numérique telles que : concevoir et d'étudier des méthodes de résolution de certains problèmes mathématiques (en général issus et de la modélisation de problèmes réels), a titre d'exemples : commande optimale, structure (architecture, mécanique.), biologie mathématique : propagation d'épidémie ..., modèle mathématique en médecine : cardiologie, cancer ..., et bien d'autres applications. Les théorèmes d'analyse numérique traitent des notions et des lois relatives à un problème de modelé mathématique, avec les spécificités qui lui sont propres, les théorèmes d'analyse numérique restent un domaine qui s'intègre dans la discipline de plusieurs domaines de l'ingénierie : (électronique, télécommunication, électro technique, génie biomédical et automatique…) À cet égard, les lois, les principes fondamentaux, les théorèmes et les méthodes développées pour résoudre les problèmes sont les mêmes. Ce cours rassemble les outils génériques et propose d'étudier les propriétés mathématiques des algorithmes et leur mise en œuvre. L'étudiant y retrouvera tous les théorèmes fondamentaux ainsi que les méthodes qui sont propres à chaque type de régime de fonctionnement de modèle mathématique. IL est destiné aux étudiants de deuxième année Licence technologie. Il correspond au programme officiel du module « Méthode Numérique » enseigné en deuxième année (L2-S4) du domaine technologie. Ce polycopié contient cinq chapitres traitant des concepts de base de l'analyse numérique,

- Le premier chapitre : Résolution des équations non linéaires f(x)=0
- Le deuxième chapitre : Interpolation polynomiale.
- Le troisième chapitre : Intégration numérique.
- Le quatrième chapitre : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires.
- Le dernier chapitre : Résolution des équations différentielles ordinaires

Des exercices et des applications sont présentés à la fin de chaque chapitre

Table des matières

Introduction générale.....07

Chapitre I : Résolution des équations non linéaires f(x)=0

I.1 Introduction.....08

I.2 Equation a une variable.....08

I.2.1 Equation polynomial.....08

I.2.2 Difficulté liés a l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des équations non linéaires.....08

I.2.3 Principe de recherche de « zéro ».....09

I. 2.4 Méthode de bissection "Dichotomie".....09

a) Théorème des valeurs intermédiaires.....09

b) méthode de dichotomie.....09

Exemple.....09

Solution.....10

Exemple.....10

I.2.5 méthode du point fixe.....10

Exemple.....11

I. 2.5.1 Le choix de g(x) et déterminant.....12

a) choix de la fonction g(x).....12

b) ordre de convergence.....12

I.2.6 Méthode de Newton.....13

I.2.6.1 Principe.....13

a) conditions de convergence.....13

b) Le choix de la valeur initiale et déterminant pour la convergence.....13

Exercice I.1.....14

Solution I.1.....13

Exercice I.2.....15

Solution I.2.....15

Exercice I.3.....16

Solution I.3.....16

Exercice I.4.....18

Solution I.4.....18

Exercice supplémentaire..19

Chapitre II : Interpolation polynomiale

II.1 Introduction...20
II.2 $f(x_i)$ sont des valeurs exactes...20
Exemple..20
II.3 Interpolation de lagrange...21
Exercices...21
Exercice II.1...21
Solution exercice II.1..21
Exercice II.2...22
Solution II.2...23
Exercice II.3...22
Solution II.3...22
Exercice II.4...23
Solution II.4...25
Exercice supplémentaire..26

Chapitre III : Intégration numérique

III.1 Introduction...27
Exemple..27
Exemple..27
III.2 les méthodes composées...27
III.3 les méthodes de gauss...27
III.4 méthode de rectangle..28
III.4.1 Calcule de l'erreur...28
III.5 méthode de trapèze..29
III.5.1 Calcule de l'erreur...30
Exemple..30
Exercices...31
Exercice III.1..31
Solution III.1..31
Exercice III.2..32
Solution III.2..32

Exercice III.3..........33
Solution III.3..........33
Exercice III.4..........34
Solution III.4..........34
Exercice supplémentaire..........35

Chapitre IV : Résolution numériques des systèmes d'équations linéaires

IV.1 Introduction..........36
IV.2 Forme matricielle d'un système linéaire..........36
Exemple 1..........36
Exemple 2..........36
Exemple 3..........37
IV.3 Propriété des systèmes linéaires..........37
a) permutation..........37
Exemple..........37
b) multiplication..........37
Exemple..........37
c) addition..........38
IV.4 Méthodes de résolution directe..........38
IV.4 .1 Méthode de Gauss..........38
IV.4.2 Résolution d'un système triangulaire supérieure..........38
IV.4.3 Théorème..........38
IV.5 Etapes de la méthode de gauss..........39
Exemple..........40
IV.6 Méthode de Cholesky..........40
IV.6.1 Définition..........40
IV.6.2 Proposition..........41
IV.6.3 Algorithme..........41
Exemple 1..........41
Exemple 2..........42
Remarque..........43
IV.7 Méthode de Crout-Dolitle ou LU..........43
IV.7.1 Détermination des matrices L et U..........43

Exemple..43

Chapitre V : Résolution des équations différentielles ordinaires

V.1 Introduction...46
V.2 Méthodes numériques 47
V.2.1 Principe générale 47
V.2.2 Méthode d'Euler 47
V.2.2.1 Interprétation Géométrique...48
V.2.3 Méthode de Runge-Kutta 48
V.2.3.1. Runge Kutta d'ordre 2 : RK2...49
V.2.3.2. Runge Kutta d'ordre 4 : RK4...49
Exercice V.1...49
Solution V.1...50
Exercice V.2...51
Solution V.2...51
Bibliographie..53

Introduction générale

Le manuscrit " Méthode numérique" est appuyé par des exercices à la fin de Chaque chapitre. Les solutions d'exercices sont détaillées en vue de guider l'étudiant (de la deuxième année universitaire L.M.D.) vers la maîtrise l'analyse numérique et de ses fonctions absolues. L'objectif de l'analyse numérique consiste à trouver des algorithmes informatiques implémentant ou approximant un modèle analytique résolvant un problème scientifique donné. Le manuel est structuré en cinq (05) chapitres :

- Le premier chapitre : Résolution des équations non linéaires f(x)=0
- Le deuxième chapitre : Interpolation polynomiale.
- Le troisième chapitre : Intégration numérique.
- Le quatrième chapitre : Résolution numérique des systèmes d'équations linéaires.
- Le dernier chapitre : Résolution des équations différentielles ordinaires.

Le polycopié est exhibé en cinquante (50) pages, dans lesquelles Il tente de rendre sa lecture claire, aisée et primitive pour les étudiants du second cycle. L'ouvrage est illustré par de nombreux graphiques et orné par des figures tirées d'exemples numériques. J'espère que le manuel présenté est un support pédagogique assez bien organisé et assurément détaillé à travers lequel l'étudiant et le lecteur peuvent accéder aux renseignements scientifiques et didactiques d'une manière commode.

Chapitre I : Résolution des équations non linéaires f(x)=0

I.1 Introduction

La résolution des systèmes non-linéaires s'avère plus délicat Contrairement aux systèmes linéaires. En général, il n'est pas possible de garantir toujours to Convergence vers la solution exacte (correcte)

Si au moins une équation est non-linéaire le système sera dit non-linéaire

Les techniques les plus utilisées pour résoudre les systèmes d'équations non linéaires sont

- Méthode du point fixe
- Méthode de Newton
- Méthode the moindre carrée

I.2 Equation a une variable

I.2.1 Equation polynomial

Le théorème d'Alembert affirme que l'équation algébrique f(x)=0 ou f(x) est un polynôme de degré « n » admet « n » racine distinctes ou non-réelles on Complexe.

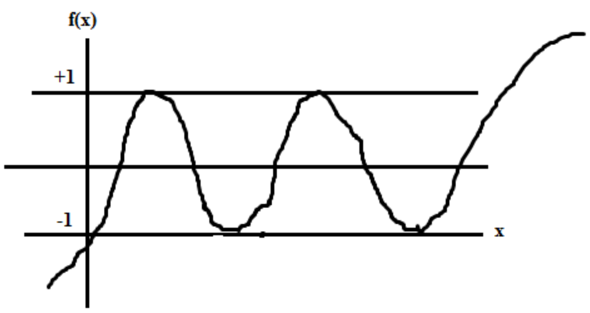
Degré 2 : x^2-*Px*+*9*=*0*

Degré 3: x^3- ax^2 + bx = 0 résolution analytique existe.

Degré $\geq$ ***5*** → complexe, voir impossible analytiquement.

Dans ce cas, il faut se recourir aux méthodes numériques

I.2.2 Difficulté liés a l'utilisation des méthodes numériques pour la résolution des équations non linéaires



f(x) admet plusieurs solutions

Comment obtenir toutes les solutions ?

Quelle est la bonne solution

Figure 1.1 exemple d'une fonction f(x)

I.2.3 Principe de recherche de « zéro »

Toute recherche de "0" démarre avec une solution initiale qui sera améliore dans les itérations suivantes et qui devrait s'approcher de la solution exacte "finale"
Le choix du point de départ détermine vers quelle solution? Ou se dirige.

- Il faut définir un critère d'arrêt.
- Il convient de substituer la solution dans l'équation et vérifiée $f(x_{sol}=0)$

I. 2.4 Méthode de bissection "Dichotomie"

a) Théorème des valeurs intermédiaires

Si *f* est une fonction continue sur [a,b] et si $f(a).f(b) < 0$ alors, il existe au moins un point $c\in [a,b]$ telque f(c)=0. si en plus cette fonction est strictement monotone sur [a,b] la racine est unique dans [a,b] c'est une fonction qui reste toujours soit constante soit décroits (son sens de vacuité est cost)

b) méthode de dichotomie

C’est un procédé systématique de raffinement de la localisation d’une racine. Le mot dichotomie (dicho = deux ; tomie = Coupé) exprime clairement le principe de la méthode :

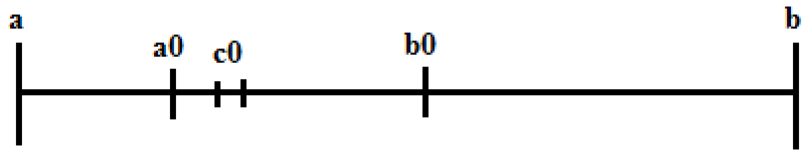


Figure 1.2 méthode de dichotomie

Soit [a,b] un intervalle initial de localisation de la racine recherchée "S"
Supposons que l'on ait $f(a).f(b) <0$. On réduit à chaque pas l'amplitude de la localisation d'un facteur de "2". L'erreur est donc réduite d'un facteur de "2" à chaque itération. En 20 itérations, par exemple l'erreur sera 10^{-6} fois l'erreur initiales. C’est une méthode lente mais qui Converge dans tous les cas.

<u>Exemple</u>

Calculer avec 4 chiffres après la virgule, la racine approches de l'équation

$f(x) = x^3 + x-1=0$

Solution

Il faut choisir un intervalle [a,b] telque:

$f(a).\ f(b) < 0$

Exemple:

$f\,(0).f(1) = (-1).(1)= -1 < 0$

on prend [a,b] = [0,1]

La fonction f est continue dans cet intervalle, elle est aussi monotone, te qui donne une racine unique.

1^er^ itération :

$m= (0+1)/2=0,5$ donc on a $f(0.5).f(0)= (- 0.375)(-1)= 0.375>0$, la racine n'est pas dans cette l'intervalle.

$f(0.5)*f(1)= -0.375< 0$ la racine se trouve dans [0.5,1]

2^éme^ itération :

$m=(0.5+1)/2=0.75 \rightarrow f(0.75).f(0.5)<0\ (f(0.75)=0.1718\ ;\ f(0.5)= 0.375)$

la racine se trouve dans l'intervalle [0.5,0.75]

3^éme^ itération :

$m=(0.5+0.75)/2=0.625$

$\rightarrow f(0.625)*f(0.5) =- 0.1308*(0.375) = 0.05> 0$

$\rightarrow f(0.625)*f(0.75) = -0.0225< 0 \rightarrow [0.625,0.75]$

On continue jusqu'à ce que la valeur de « m » devenue un chargé (à 4 chiffres après la virgule)

m_1= 0.5 → m_2=0.75 → m_3=0.625 → m_4=0.6875 → m_5=0.6563 → m_6=0.6719

→ m_7= 0.6797 → m_8= 0.6836 → m_9= 0.6816 → m_{10}=0.75 → m_3=0.6826 → m_{11}=0.6821

→ m_{12}=0.6824 → m_{13}=0.6823 → **m_{14}=0.6823**

Finalement pour une précision à 4 chiffres après la virgule il a fallu 14 itérations.

I.2.5 méthode du point fixe

Soit fonction *f(x)=0*, on isole un terme contenant « x » de la sort à pouvoir écrire *x=g(x)*

On appelle la fonction *g(x)*, la fonction d'itération l'algorithme s'écrit :

- x_0 donnée ; initialisation
- $x_{new} = (x_0)$
- Critère d'arrêt

Le fait que la solution x_{sol} vérifie $x_{sol}= g(x_{sol})$, fait qu'a appelle x_{sol} : un point fixe. Le choix de *g(x)* est déterminant pour la convergence.

Exemple

$f(x)= x^3+x-1$, on doit l'écrire sous la forme $g(x)=x$

$x=-x^3+1$; $x= \sqrt[3]{1-x}$; $x = \frac{1}{x^2+1}$

Si on choisit $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

La racine se trouve l'intervalle [0,1] ; on peut prendre comme solution initial $x_0=0.5$

- $x_0=0.5$
- $x_{n+1}=g(x_n)= \frac{1}{x_n^2+1}$
- Critère d'arrête : 4 chiffres après la virgule.

$x_1 = \frac{1}{(0.5)^2+1}=0.8 \rightarrow x_2 = \frac{1}{(0.8)^2+1}=06098 \rightarrow x_3 = \frac{1}{(0.6098)^2+1}=0.7290 \rightarrow x_4=0.6530$ $\rightarrow x_5=0.7010 \rightarrow x_6=0.6705 \rightarrow x_7=0.6898 \rightarrow x_8=0.6775 \rightarrow x_9=0.6854 \rightarrow x_{10}=0.6804$ $\rightarrow x_{11}=0.6836 \rightarrow x_{12}=0.6815 \rightarrow x_{13}=0.6820 \rightarrow x_{14}=0.6825 \rightarrow x_{15}=0.6822 \rightarrow$ $x_{16}=0.6824 \rightarrow x_{17}=0.6823 \rightarrow x_{18}=0.6824 \rightarrow x_{19}=0.6823 \rightarrow \boldsymbol{x_{20}=0.6823}$

La méthode du point fixe est lente par rapport à la dichotomie

Si on choisit $g(x) = \sqrt[3]{1-x_n}$

- $x_0=0.5$
- $x_{n+1}= \sqrt[3]{1-x_n}$
- Critère d'arrêt : 4 chiffres après la virgule

$x_1 = 0.7937 \rightarrow x_2 = 0.5909 \rightarrow x_3 = 0.7423 \rightarrow x_4=0.6363 \rightarrow x_5=0.7138 \rightarrow x_6=0.6590$ $\rightarrow x_7=0.6986 \rightarrow x_8=0.0.6704 \rightarrow x_9=0.6907 \rightarrow x_{10}=0.6762 \rightarrow x_{11}=0.6866 \rightarrow x_{12}=0.6792$ $\rightarrow x_{13}=0.6845 \rightarrow x_{14}=6807 \rightarrow x_{15}=0.6834 \rightarrow x_{16}=0.6815 \rightarrow x_{17}=0.6829 \rightarrow x_{18}=0.6819$ $\rightarrow x_{19}=0.6826 \rightarrow x_{20}=0.6821 \rightarrow x_{21}=0.6825 \rightarrow x_{22}=0.6822 \rightarrow x_{23}=0.6824 \rightarrow x_{24}=0.6823$ $\rightarrow x_{25}=0.6824 \rightarrow x_{26}=0.6823 \rightarrow \boldsymbol{x_{27}=0.6823}$

La solution converge après 27 itérations

Si on choisit $g(x) = -x^3+1$

- x_0=0.5
- x_{n+1}=-$x_0{}^3$+1
- Critère d'arrête : 4 chiffres après la virgule.

$x_1 = 0.875 \rightarrow x_2 = 0.33000 \rightarrow x_3 = 0.9640 \rightarrow x_4=0.1041 \rightarrow x_5=0.998 \rightarrow x_6=0.0033$
$\rightarrow x_7=0.9999 \rightarrow x_8=0.1\times 10^{-6} \rightarrow x_9=1 \rightarrow x_{10}=0 \rightarrow x_{11}=1$

L'algorithme ne converge pas, la solution entre 0 et 1

I. 2.5.1 Le choix de g(x) et déterminant

a) choix de la fonction g(x)

si « S » est la racine de $f(x) \rightarrow f(s)= 0 \rightarrow g(s)=s$, l'erreur à l'itération (n+1) $\xi_{n+1}= x_{n+1}$-s = $g(x_n)$-$g(s)$. Appliquons le développement de Taylor :

$g(x_n)=g(s)+(x_n-s)g'(s)+0.5(x_n-s)^2g''(s)+ 0(x_n-s)^3$

$\rightarrow \xi_{n+1}=\xi_n g'(s)+0.5\xi_n{}^2g''(s)+ 0\xi_n{}^3$

$\xi_{n+1} \approx g'(s)\,\xi_n$ → (Suite géométrique de raison $g'(s)$

L'erreur ξ_{n+1} tend vers « 0 » si $|g'(s)|<1$. ***Donc plus |g'(s)| est petit plus la convergence est rapide***

> ***Théorème :***
>
> ***si g(x) est continue et dérivable sur [a,b] si $\forall\, x \in [a,b]$, $\exists\, k < 1$ telque $|g'(s)| \leq k$ alors, $\forall\, x_0 \in [a,b]$, la suite $x_{k+1} = g'(x)$ converge.***

Cette condition est suffisante

b) ordre de convergence

ξ_{n+1}=C ξ_n^P « C » est une constant)

Si $P=1$ → la convergence est linéaire

Si $P=2$ → la convergence est quadratique

Il est souvent difficile de déterminer a prion l'intervalle [a,b], donc dans ce cas le théorème suivant est utile :

> ***Théorème d'Ostowski :***
>
> ***Soit 'α' un point fixe d'une fonction « g » continue et différentiable dans un intervalle [c,d] contenant 'α'.***

***Si* $|g'(\alpha)| < 1$ *alors il existe un intervalle [a,b] ⊂ [c,d] telque la suite* $(\boldsymbol{x_{k+1}})_{k\in N}$ *converge vers 'α', pour tout* $\boldsymbol{x_0} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.**

I.2.6 Méthode de Newton

C'est la méthode la plus utilisé pour résoudre les équations non linéaires (logiciel ou élément finis)

I.2.6.1 Principe

A partir d'une valeur initiale x_0 on recherche une correction δx telle que $f(x_0 + \delta x) = 0$ appliquons un développement de Taylor :

$f(x_0 + \delta x) = 0 = f(x_0) + \delta x\, f'(x_0) + 0(\delta x^2) = 0$

On obtient :

$$\delta x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (1.1)$$

$x_d + \delta_x$ N'est pas la racine exacte mais une solution approchée qu'on appelle x_1

$\boldsymbol{x_1 = x_0 + \delta_x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$

A *(n+1)* itération, on obtient :

$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$

D'où l'algorithme de la méthode de Newton raphson s'écrit :

- x_0 donnée initiale
- $x_{n+1} = n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Critère d'arrête

a) conditions de convergence

si $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, donc la méthode de newton raphson s'écrit : $x_{n+1} = g(x)$,on peut dire que cette méthode est un cas particulier de la méthode du point fixe :

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow g'(x) = 1 - \frac{(f(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$

Si « S » est la racine alors *f(s)=0* ce qui donne *g'(s)=0*, ce qui implique que ξ_{n+1} évoquée dans la méthode du point fixe : $\xi_{n+1} = \xi_n g'(s) + 0.5{\xi_n}^2 g''(s) + 0(\xi_n)^3$ devient

$\xi_{n+1} = 0.5{\xi_n}^2 g''(s)$

C'est une convergence quadratique.

b) Le choix de la valeur initiale et déterminant pour la convergence

$f(x) = x^3 + x - 1$, considérons une valeurs initiale $x_0 = 0.5$, l'algorithme s'écrit alors :

- $x_0 = 0.5$
- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^3+x_n-1}{3{x_n}^2+1} = \frac{2{x_n}^3+1}{3{x_n}^2+1}$
- Critère d'arrête = 10^{-4}

$x_1 = \frac{2{x_0}^3+1}{3{x_0}^2+1} = \frac{2(0.5)^3+1}{3(0.5)^2+1} = 0.7143$

$x_2 = \frac{2{x_1}^3+1}{3{x_1}^2+1} = \frac{2(0.7143\ )^3+1}{3(0.7143\ )^2+1} = 0.6832$

$x_3 = \frac{2{x_2}^3+1}{3{x_2}^2+1} = \frac{2(0.6832)^3+1}{3(0.6832)^2+1} = 0.6823$

$x_4 = \frac{2{x_3}^3+1}{3{x_3}^2+1} = \frac{2(0.6823\ )^3+1}{3(0.6823\ )^2+1} = 0.6823$

La différence entre x_4 et x_3 < 0.0001 alors la solution est donc : S=0.6823. Il nous a fallu 4 itérations pour obtenir la solution de l'équation $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$

Exercice I.1 :

On considère l'équation : $f(x) = x^4 - 3x + 1$

1. calculer le nombre d'itération « n » nécessaire pour résoudre f(x)=0 dans [0.3 ;0.4] avec une précision de ξ=0.5×10^{-2}*=0.005*

2. calculer une valeur approchée de cette racine par la méthode de bipartition (dichotomie)

Solution I.1 :

1) $n \geq \frac{ln\left[\frac{(b-a)}{2\xi}\right]}{ln\ (2)} + 1 \rightarrow n \geq \frac{ln\left[\frac{(0.4-0.3)}{2(0.005)}\right]}{ln\ (2)} + 1 = 4.32 \ \rightarrow n = 5$

2) f(a).f(b) < 0 → f(0.3).f(0.4) < 0 → -0.018 < 0

N	a_k	b_k	*f(*a_k*).f(*b_k*) < 0*	$x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$	$\mid x_k - a_{k-1} \mid \leq \xi$
0	*0.3*	*0.5*	*-0.018 < 0*	*0.35*	*0.35-0=0.35 > 0.005*
1	*0.3*	*0.35*	*-0.0037 < 0*	*0.325*	*0.025 > 0.005*
2	*0.325*	*0.35*	*-0.0012 < 0*	*0.3375*	*0.0125 > 0.005*
3	*0.3375*	*0.35*	*< 0*	*0.3437*	*0.0062 > 0.005*
4	*0.3375*	*0.3437*	*< 0*	*0.3406*	*0.0031 > 0.005*

$x_4 = 0.3406\ \pm 0.005$ *est la racine approchée de α pour f(x)=0*

Exercice I.2 :

On considère l'équation non linéaire :

$$f(x) = x - 0.5\, sin(x) - 1 = 0$$

1. montre que l'équation f(x)=0 admet une solution (racine) unique α dans $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$

2. déterminer cette racine approché avec une précision ξ=10^{-1}*=0.1en utilisant la méthode de dichotomie*

Solution I.2 :

$f(x) = x - 0.5\, sin(x) - 1 = 0$ *; α ∈* $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$

1). Sin(x) = 2(x-1)

Sin(x) et 2(x-1) sont des fonctions continues sur $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ *car leurs limites à ces bornes existes : Sin(x) et 2(x-1) sont des fonctions dérivables sur* $[0\ ;\ \frac{\pi}{2}]$ *car leurs dérivées existes*

$f(0).f(\frac{\pi}{2}) < 0 \equiv (-1).(0.07) < 0$

Les points d'intersections des 2courbes nous donne $\boldsymbol{\alpha} \in [0;\frac{\pi}{2}]$

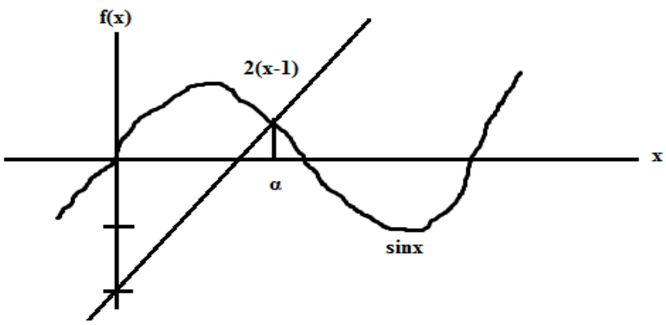


Figure 1.2 fonction f(x)

2) Méthode de dichotomie ξ = 0.1

a_n	b_n	$f(a_n).f(b_n) < 0$	$x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	$\Delta = \mid x_n - a_{n-1} \mid$
0	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{\pi}{4}$ =0.78	0.78
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{3\pi}{8}$=1.17	0.39
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{7\pi}{16}$ =1.37	0.2
$\frac{7\pi}{16}$	$\frac{\pi}{2}$	< 0	$\frac{15\pi}{32}$ = 1.47	0.1

Tableau 1.1 Méthode de dichotomie ξ = 0.1

La racine de l équation f(x)= 0 est α = 1.47 $\pm$ *0.1*

Exercice I.3 :

On se donne la fonction continue $(x) = 2^x + 5x + 2$ *sur l'intervalle [0,1]*

1. Montrez qu'il existe un zéro α pour la fonction f(x) dans [0,1]

2. en utilisant la méthode de dichotomie (la bissection) sur [0,1], estimez le nombre minimale d'itération nécessaire pour calculer le zéro α *avec une tolérance* $e = 10^{-2}$*(2 chiffres significatifs exacte).*

3. Utilisez la méthode de Newton Raphson pour calculer la racine de l'équation avec deux chiffres significatifs exactes $e = 10^{-2}$

Solution I.3 : *f*$(x) = 2^x + 5x + 2$ / *[0,1]*

Montrez qu'il existe un nombre pour la fonction f(x) dans [0,1] en utilisant la méthode de dichotomie (la bissection) sur [0,1].

Estimez le nombre minimale d'itération nécessaire pour calculer le zéro"α*" avec une tolérance* $e = 10^{-1}$.

Utilisez la méthode de Newton Raphson pour calculer $(x) = 2^x + 5x + 2$

1. la méthode de dichotomie (la bissection)

On applique la théorème de valeur intermédiaire

Si $f(0) * f(1) < 0 \Rightarrow \exists\ \alpha \in [0,1]$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = -1 \end{cases} \rightarrow f(\alpha) = 0\ donc\ il\ existe\ une\ solution\ dans\ l'intervalle [0,1]$$

Le nombre minimal d'itération nécessaire $n \geq \frac{log(b-a)-log(e)}{log(2)}$

Où bien $n \geq \frac{ln\,(e^{b-a})}{ln(2)} - 1$

$$n \geq \frac{log(1-2) - log(10^{-1})}{log(2)} \rightarrow n \geq 3.32\ n \rightarrow 4$$

$$x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$$\begin{cases} f(0.5) * f(1) < 0\ choisit\ car\ (< 0) \\ f(0.5) * f(0) > 0\ annule \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$$

$$\begin{cases} f(0) * f(0.75) < 0 \\ f(1) * f(0.75) < 0 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.62$$

$$\begin{cases} f(0) * f(0.62) < 0 \\ f(1) * f(0.62) < 0 \end{cases}$$

$$x_4 = \frac{0.75 + 0.62}{2} = 0.68 \ \rightarrow \ x_4 = 0.68$$

Confirmation

$|x_4 - x_3| \leq e \ \rightarrow \ |0.68 - 0.62| \leq 0.1$

Donc la racine réel de l'équation $f(x) = 2^x + 5x + 2$ *est* $\alpha \ = \ x_4 = |0.68|$ *avec* 10^{-1}

2. la méthode de Newton Raphson

$f'(x) \neq 0$ *et* $f''(x)$ *est continue sur [0.1]*

$2^x = e^{ln2^x}$

$(2^x)' = ln\ (2)e^{xln2}$ $\quad f'(x) = ln2ex^{ln2} - 5 + 0$

$f''(x) = (ln2)^2 e^{xln2}$ *est continue*

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Valeur initial

$$\begin{cases} f(0) * f''^{(0)} = 3ln2 > 0 \rightarrow \ x_0 = 0 \ choisit \\ f(1) * f''^{(1)} = -ln2 < 0 \ \rightarrow annule \end{cases}$$

Pour la 1^{er} *itération* $x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{3}{ln2 - 5} = 0.69$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.64$$

Confirmation

$|x_2 - x_1| \leq e \ \rightarrow \ |0.64 - 0.69| = 0.05 < 0.1$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.64$$

$$x_3 = 0.64$$

Donc la racine réel de l'équation $f(x) = 2^x + 5x + 2$ *est* $\alpha \ = \ x_4 = |0.68|$ *avec* 10^{-1}

Exercice I.4 :

Considérons l'équation x^3 + x - 1= 0 (*)

1. Montrer que l'équation (*) admet une seule racine réelle comprise entre 1 et 2.

2. Quel est le nombre suffisant d'itérations pour estimer la racine de l'équation (1) avec e = 10^{-2} (2 chiffres significatifs exacts) en utilisant **la méthode Newton Raphson**

3. Utiliser la méthode de **dichotomie** *pour calculer la racine de l'équation avec 2 chiffres significatifs exacts. e = 10^{-2} (2 chiffres significatifs exacts).*

Solution I.4 :

x^3 + x - 1= 0 sur [0,1]

On applique le théorème de valeur intermédiaire

Si $f(0) * f(1) < 0 \Rightarrow \exists\, \alpha \in [0,1]$

$f(0) = -1 < 0$ *et* $f(1) = 1$

$f'(x) = 3x^2 + 1 \;\rightarrow f'(x) > \; 0$ *pour tout x*

$f''(x) = 6x$ *ainsi que* $f(x) * f''(x) > 0$

Alors on pose $x_0 = 1$

En applique les itérations jusqu'à ce que $|x_{n+1} - x_n| < 0.5 * 10^{-4}$

En applique newton raphson :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

La première itération n=0 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow x_1 = \frac{3x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 1} = 0.75$$

La deuxième itération n=1 :

$$x_2 = \frac{3x_1^3 + 1}{3x_1^2 + 1} = 0.68605 \;\rightarrow |x_2 - x_1| = 0.6 * 10^{-1} > 0.5 * 10^{-4}$$

La troisième itération n=2 :

$$x_3 = \frac{3x_2^3 + 1}{3x_2^2 + 1} = 0.68234 \;\rightarrow |x_3 - x_2| = 0.37 * 10^{-4} > 0.5 * 10^{-4}$$

La quatrième itération n=3 :

$$x_4 = \frac{3x_3^3 + 1}{3x_3^2 + 1} = 0.68233 \;\rightarrow |x_4 - x_3| = 0.1 * 10^{-4} < 0.5 * 10^{-4}$$

La valeur approchée de la racine de l'équation est ξ=0.6823

$a=0, b=1$ *et* $\xi=0.5 * 10^{-4} \rightarrow n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{2\xi}\right)}{ln2} \rightarrow n \geq 13.28 \rightarrow n = 14$

Exercice supplémentaire :

*On voudrait étudier la nature de l'équation non linéaire f(x) Par la méthode de l'itération de **Point Fixe** lorsque :*

$$(x) = 2x - cos \ , avec\ e = 10^{-2}$$

1. Trouver l'intervalle de point fixe.

2. Etudier les propriétés des points fixe

3. Utiliser cinq itérations de point fixe. Trouver la valeur approche de la racine réel de f(x) En prenant comme point initial (x_0=0.5). Donner l'erreur absolue de point fixe.

Chapitre II : Interpolation polynomiale

II.1 Introduction

Soit un ensemble de points x_0 à x_{n-1} (n points), on connait la valeur de « f » en ces points *f*(x_0) , *f*(x_{n-1}).

Quelle est la valeur de « f » sur les points intermédiaires ?

On suppose donc, un modèle mathématique pour « f », (polynôme, somme de sinus, splines, ..., etc) deux situations se présentent :

1. $f(x_i)$ sont des valeurs exactes
2. $f(x_i)$ sont des valeurs approchées (mesures par exemple)

II.2 $f(x_i)$ sont des valeurs exactes

Dans ce cas la, on construit un polynôme de degré (n-1) telque :

$$f(x) \approx P(x) \sum_{i=0}^{n-1} a_i x \tag{2.1}$$

On doit calculer les « a_i » pour cela, on à « n » équations

$$\begin{cases} a_0 x_0^0 + a_1 x_0^1 + \cdots + a_{n-1} x_0^{n-1} = f(x_0) \\ a_0 x_1^0 + a_1 x_1^1 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 x_{n-1}^0 + a_1 x_{n-1}^1 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}^{n-1} = f(x_{n-1}) \end{cases}$$

On obtient alors le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{Bmatrix}$$

Exemple :

Soient les 4 points suivantes définis par leurs $f(x_i)$:

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3
	0	2	4	6
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	f_4
	0	4	0	4

Tableau 2.1 4 points de f(x)

Nous avons 4 points, donc notre polynôme P(x) est de degré « 3 », le système matriciel défini plus haut s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \qquad (2.2)$$

C'est un système linéaire dont sa résolution par l'une des méthodes évoquées en chapitre « 1 » peut être obtenue la solution finale donne :

$a_0 = 0$, $a_1 = \frac{20}{3}$, $a_2 = -3$, et $a_3 = \frac{1}{3}$

II.3 Interpolation de Lagrange

Fondée sur le développement en série de Taylor, l'approximation polynomiale permet d'approcher une fonction « f » suffisamment régulière par un polynôme de degré « n ».

Soit un « f » une fonction continue d'une intervalle [a,b] dans IR et $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ (n) points distincts de l'intervalle [a,b]. Le polynôme de Lagrange aux points x_i est le polynôme de degré (n-1).

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i(x) \qquad (2.3)$$

Avec $a_i = f_i$ et $L_i(x) = \prod_{J=0\,;J\neq i}^{n-1} \frac{x-x_J}{x_i-x_J}$

Exercices :

Exercice II.1 :

1. Interpoler la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 8$, $x_2 = 27$ par polynôme $P_2(x)$, en utilisant polynôme de Lagrange

2. déduire une valeur approché de $\sqrt[3]{20}$

3. Evaluer l'erreur exacte et l'erreur d'interpolation (théorique) au point x=20

Solution exercice II.1:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 8$, $x_2 = 27$

$f(x_0) = f(x_0) = 1$

$f(x_1) = f(8) = 2$

$f(x_2) = f(27) = 3$

$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) L_i(x) = \; L_0(x) + 2L_1(x) + 3L_2(x)$

$L_i(x) = \prod_{J=0\,;J\neq i}^{n-1} \frac{x-x_J}{x_i-x_J}$

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-8)(x-27)}{(-7)(-26)} = \frac{1}{82}x^2 - \frac{5}{26}x + \frac{108}{91}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2)} = \frac{(x-8)(x-27)}{(7)(-19)} = \frac{1}{133}x^2 - \frac{4}{19}x - \frac{27}{133}$

$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_2)} = \frac{(x-8)(x-27)}{(26)(19)} = \frac{1}{494}x^2 - \frac{9}{494}x + \frac{4}{247}$

$P_2(x) = \; -\frac{6}{1729}x^2 + \frac{43}{247}x + \frac{1434}{1729}$

2. valeur approchée de $\sqrt[3]{20}$

$\sqrt[3]{20} = 2.714417617$

3. erreur exacte ξ_p *commise sur le polynôme au point x=20*

$\xi_p = |f(x_p) - \; P_2(x_p)|$

$f(x_p) = f(20) = 2.714417617$

$P_2(20)$=*2.923076923*

ξ_p *= 0.208659306*

4. l'erreur d'interpolation théorique $\xi_{théo}$ *au point x=20*

$\xi_{théo} = \frac{|\max f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)\,!} \prod_{i=0}^{i=2} |(x-x_i)\,| = \frac{|\max f^{(3)}(x)|}{(3)!} = \; |20-1||20-8|\;|20-27|$

$\left| \begin{matrix} f^{(3)}(x) \\ x \; \in [1{,}27] \end{matrix} \right| = \max \left| \begin{matrix} \frac{10}{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} \\ x \; \in [1{,}27] \end{matrix} \right| = \frac{10}{27}$

$\xi_{théo} = 98.51851852$

Effectivement $\xi_p < \xi_{théo}$ *le polynôme d'interpolation reste valable au point x=20*

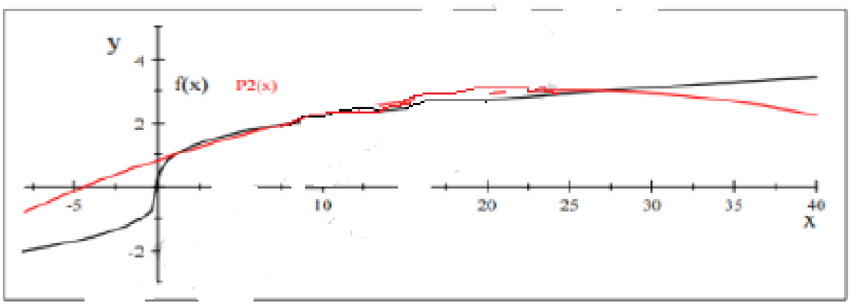


Figure2.1 : la fonction f(x)

Exercice II.2 :

Déterminer le polynôme $P_3(x)$ de Lagrange de la fonction passant par les points :

(-1,-1) ; (0,1) ; (1,0) ; (2 0)

Solution II.2 :

Le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points : (-1,-1) ; (0,1) ; (1,0) ; (2,0)

$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)L_i(x)$ =-$L_0(x) + L_1(x) + 0.L_2(x) + 0.L_3(x)$

$P_3(x)$ =-$L_0(x) + L_1(x)$

$L_i(x) = \prod_{J=0\ ;J\neq i}^{n} \frac{x-x_J}{x_i-x_J}$

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$

$L_1(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_2)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

$P_3(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right) + (\frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1)$

$P_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x + 1$

Exercice II.3 :

Soit la fonction f(x)= ln(x)

1. déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui interpole f par les deux points d'appui d'abscisses : 0.5, 0.7. Quelle est l'ordre de cette interpolation

2. calculer f(0.6). comparer le résultat obtenue avec la valeur exacte de ln(0.6).

3. peut-on utiliser ce polynôme pour calculer f(2) ? Pourquoi ?

4. déterminer le polynôme d'interpolation de lagrange qui interpole f par 3 points d'appui d'abscisses : 0.4, 0.5, 0.7. quelle le résultat obtenue à la valeur exacte ln(0.6) puis au résultat obtenue par l'interpolation précédente.

Solution II.3 :

Rappelons que le polynôme de lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses X_0 , X_1, X_2, X_n est d'ordre n et il s'écrit :

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$

Avec

$L_i(x) = \prod_{J=0\ ;J\neq i}^{n} \frac{x-x_J}{x_i-x_J}$

1- f(x)=ln(x) ; on cherche le polynôme d'interpolation de f avec 2 points d'appui :

$(x_0, f(x_0)) = (0.5, -0.693)$; $(x_1, f(x_1)) = (0.7, -0.357)$;

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} = \frac{(x-0.7)}{(0.5-0.7)} = -5x + \frac{7}{2}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{(x-0.5)}{(0.7-0.5)} = 5x - \frac{5}{2}$

f(x)$\cong$ $P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$

$= -0.693 L_0(x) - 0.357\, L_1(x)$

f(x)$\cong$ $\boldsymbol{P_1(x) = 1.68x - 1.5325}$

n+1=2 $\rightarrow n = 1$ *→ cette interpolation est d'ordre 1elle est dite linéaire.*

2- $ln(0.6)_{approchée} = f(0.6) \cong P_1(0.6) = 1.68 * 0.6 - 1.5325 = -0.5245$

\- $ln(0.6)_{exacte} = -0.5108$

Err_abs=0.0137

3- on ne peut pas utiliser ce polynôme pour calculer f(2) car le contexte de l'interpolation exige que l'approximation de f dans tout point d'abscisse x par un polynôme est valide si et seulement si x$\in [x_0\ , x_n]$ *et dans ce cas 2*$\nexists$ $[0.5\ , 0.7]$ *(dans le cas où x<*x_0 *ou x >* x_n *c'est une extrapolation)*

4- on cherche le polynome d'interpolation de f avec 3 points d'appui :

$(x_0, f(x_0)) = (0.4, -0.916)$; $(x_1, f(x_1)) = (0.5, -0.693)$; $(x_2, f(x_2)) = (0.7, -0.357)$; *cette interpolation est dite quadratique*

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.5)(x-0.7)}{(0.4-0.5)(0.4-0.7)}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0.5)(x-0.7)}{(0.5-0.4)(0.5-0.7)}$

$\boldsymbol{L_0(x) = \frac{100}{3}x^2 - \frac{120}{3}x + \frac{35}{3}}$

$\boldsymbol{L_1(x) = -\frac{100}{2}x^2 + \frac{110}{32}x + \frac{28}{32}}$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0.4)(x-0.5)}{(0.7-0.4)(0.7-0.5)}$

$\boldsymbol{L_2(x) = -\frac{50}{3}x^2 - 15x + \frac{10}{3}}$

f(x)$\cong$ $\boldsymbol{P_2(x) = -0.916L_0(x) - 0.693L_1(x) - 0.357L_2(x)}$

f(x)$\cong$ $\boldsymbol{P_2(x) = -1.813x^2 + 3.865x - 2.17}$

5-$ln(0.6)_{approchée} = f(0.6) \cong P_2(0.6) = -1.813 * 0.6^2 + 3.865 * 0.6 - 2.17 = -0.50368$

$ln(0.6)_{exacte} = -0.5108$

Err_abs=0.00714

6- plus le nombre de points d'appui augmente est plus l'interpolation est meilleur.

Exercice II.4 :

1. déterminer le polynôme d'interpolation de lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous :

x	*0*	*2*	*3*	*5*
f(x)	*-1*	*2*	*9*	*87*

2. donner l'expression analytique de l'erreur.

3. obtenir une approximation de f(1.5)

Solution II.4 :

1. le polynôme de lagrange de degré 3 s'écrit :

$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) L_i(x)$

Avec

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-2)(0-5)}$$

$$= -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$= \frac{x(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)}$$

$$= \frac{1}{6}x(x-3)(x-5)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$= \frac{x(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)}$$

$$= \frac{1}{30}x(x-2)(x-3)$$

D'où le polynôme de lagrange est

$P_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$

$$= \frac{53}{30}x^3 + 7x^2 - \frac{253}{30}x - 1$$

2. on a

$$E = |f(x) - P_3(x)| = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!}\prod_{i=0}^{4}|x - x_i|$$

$$= \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{(4)!} |x(x-2)(x-3)(x-5)|$$

Avec $\xi_x \in [a, b]$

3. d'après le polynôme de Lagrange obtenue à la question 1 on en déduit :

$$f(1.5) \approx P_3(1.5) = \frac{149}{80}$$

Exercice supplémentaire :

1. on veut résoudre l'équation $2xe^x = 1$

1.1. Vérifier que cette équation peut s'écrire sous forme de point fixe : $x = \frac{1}{2}e^{-x}$

Chapitre III : Intégration numérique

III.1 Introduction

Le but est de calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ où « f » est une fonction donnée

Quelle sont mes meilleurs méthodes pour approcher les intégrales de fonctions ?

Il n'est pas toujours possible, pour une fonction arbitraire, de trouver la forme explicite d'une primitive et il est parfois difficile de l'utiliser même si on la connaitre.

Exemple :

Comment peut-on tracer le graphe de la fonction « erf » appelée « fonction d'erreur de gauss » définie comme suit :

erf : *IR* → *IR*

$$x \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Exemple : *f(x)= cos(4π).cos(3sin x)* pour laquelle on a

$$\int_0^\pi f(x)dx = \pi \frac{81}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-9/4\right)^k}{k!(k+4)!}$$

Le calcul de l'intégrale est transformé en un calcul, aussi difficile, de la somme d'une série

Solution : il faut considère des méthodes numériques afin d'approcher la quantité à laquelle on d'intéresse indépendamment de la difficulté à intégrer la fonction.

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction « f » continue sur un intervalle borné [a,b] est remplacée par une somme fin

$$\int_0^\pi f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(x_i) \tag{3.1}$$

Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qui interviennent dans la somme approchant

Les intégrales sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur. Ces méthodes se répartissent en deux catégories.

III.2 les méthodes composées :

Dans lesquelles la fonction est remplacée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision [a,b] ([a,b] =$U_i[x_i]$).

III.3 les méthodes de gauss :

Fondées sur les polynômes orthogonaux pour lesquelles les points de la subdivision sont imposés.

III.4 méthode de rectangle

La méthode des rectangles consiste à :

1. diviser l'intervalle [a,b] en « n » segments égaux. Nous obtenons ainsi (n+1) points équidistants $x_i = a + ih$; i= 0,1,...,n avec

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (3.2)$$

2. approximer la surface de chaque tranche par un rectangle

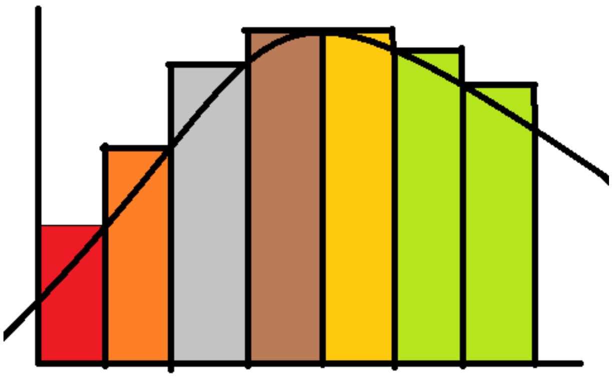


Figure 3.1 méthode de rectangle

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (x_i - x_{i-1})f(\alpha_i) = hf(\alpha_i)$$

Avec $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$

La fonction est remplacée par une constante sur chaque sous intervalle.

On peut prendre $\alpha_i = x_i$ (point à droit) où $\alpha_i = \alpha_{i-1}$ (point à gauche) mais la meilleur valeur de α_i est celle du point milieu c.-à-d. :

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$$

En additionnant la somme des surfaces de tous les rectangles, on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\alpha_i)dx \quad (3.3)$$

III.4.1 Calcule de l'erreur :

L'erreur de la méthode des rectangles (point milieu) est donnée par l'expression :

$$\left|\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n} f(a+ih)\right| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 \quad (3.4)$$

Avec $M_2 = \sup|f''(x)| \quad ; x \in [a,b]$

1. calculer $\int_0^5 e^{\sin x}dx$ en prenant n=5

2. donner une majoration de l'erreur

3. calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de 0.01

$n=5 \to h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$

$\int_0^5 e^{\sin x}dx = h\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) = 1(1.6151 + 2.7115 + 1.8193 + 0.7041 + 0.3762)$

$\int_0^5 e^{\sin x}dx = 7.2263$

x_i	$\alpha_i = \frac{x_{i-1} - x_i}{2}$	$f(\alpha_i)$
$x_0 = a = 0$	$\alpha_i = \frac{x_{i-1} - x_i}{2}$	
$x_1 = x_0 + h = 1$	$\alpha_1 = \frac{x_0 - x_1}{2} = 0.5$	1.6151
$x_2 = x_1 + h = 2$	$\alpha_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} = 1.5$	2.7115
$x_3 = x_2 + h = 3$	$\alpha_3 = \frac{x_2 - x_3}{2} = 2.5$	1.8193
$x_4 = x_3 + h = 4$	$\alpha_4 = \frac{x_3 - x_4}{2} = 3.5$	0.7141
$x_5 = x_4 + h = 5 = b$	$\alpha_5 = \frac{x_4 - x_5}{2} = 4.5$	0.3762

$f(x) = e^{\sin x} \to f''(x) = -e^{\sin x}\,(sin^2(x) + \sin x - 1)$

$M_2 = \sup|f''(x)| = e \quad ; x \in [0,5]$

$\left|\int_0^5 f(x)dx - h\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\right| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 \le \frac{(5-0)^3}{24(5)^2} e = 0.5663$

Pour avoir une précision de 0.01, il faut avoir :

$\frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 \le 0.01$ ce qui donne :

$n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24 \times 0.01}} = 37.77 \ \rightarrow n = 38$

III.5 méthode de trapèze

La méthode des trapèzes consiste à :

1. divisé l'intervalle [a,b] en « n » segments égaux. Nous obtenons donc (n+1) points équidistants avec $x_i = a + ih$; i=0,1,...,n

Et $h = \frac{(b-a)}{n}$

2. approximer la surface de chaque tranche par un trapèze construit à partir des valeurs de la fonction aux bornes de chaque sous intervalles.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = h\frac{f(x_{i-1})+ f(x_i)}{2} \tag{3.5}$$

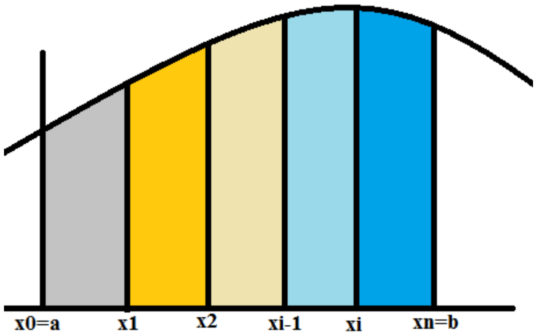


Figure 3.2 méthode de trapèze

La fonction « f » est remplacé par une droite (polynôme de degré 1) sur chaque sous intervalle. En additionnant la somme des surfaces de tous les trapèzes, on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \tag{3.6}$$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} f(x_0) + f(x_1) + \frac{h}{2} f(x_1) + f(x_2) + \ \ldots \ + \frac{h}{2} f(x_{i-1}) + f(x_i) + \ \ldots + \frac{h}{2} f(x_{n-1}) + f(x_n) +$

$$J(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

III.5.1 Calcule de l'erreur :

Pour la forme des trapèzes, l'erreur est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \tag{3.7}$$

Exemple :

$f(x) = \int_0^5 e^{\sin x} dx$ avec n=5

n=5 $\rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$

$\int_0^5 e^{\sin x} dx = \frac{h}{2}[f(0) + f(5) + 2\sum_{i=1}^{4} f(x_i)]$

$\int_0^5 e^{\sin x} dx = \frac{h}{2}[f(0) + f(5) + 2(f(1) + f(2) + f(3) + f(4))]$

$\int_0^5 e^{\sin x} dx = 7.1148$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 0$	1
$x_1 = x_0 + h = 1$	2.3198
$x_2 = x_1 + h = 2$	2.4826
$x_3 = x_2 + h = 3$	1.1516
$x_4 = x_3 + h = 4$	0.4692
$x_5 = x_4 + h = 5 = b$	0.3833

L'erreur :

$\left|\int_0^5 f(x)dx - \frac{h}{2}[f(0) + f(5) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{(5-0)^3}{12(5)^2} e \leq 1.1326$

Pour avoir une précision de 0.01, il faut avoir :

$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq 0.01 \rightarrow \quad n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\times 0.01}} = 53.21 \rightarrow n = 54$

Exercices :

Exercice III.1 :

1. Estimer en utilisant la méthode des rectangles, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ *à partir des données suivantes :*

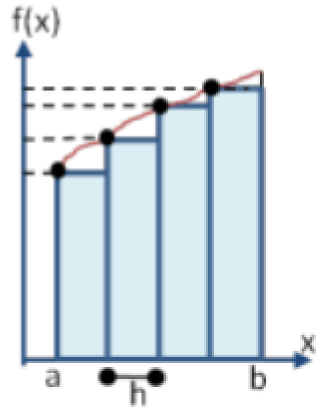
2. calculer l'intégrale par la méthode des trapèzes

X	*0*	$1/2$	*1*	$3/2$	*2*	$5/2$
f(x)	$3/2$	*2*	*2*	*1.6364*	*1.2500*	*0.9565*

Solution III.1 :

D'après les données fournies, nous pouvons utiliser la méthode des rectangles (point de droit ou point de gauche) ; ici la méthode du point milieu ne peut pas être utilisés comme nous se connaissons pas la fonction f(x) donc nous ne pouvons pas calculer f($\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$*)*

On a a=0 et b=$^5/_2$ *donc :* $h = \frac{b-a}{5} = 0.5$



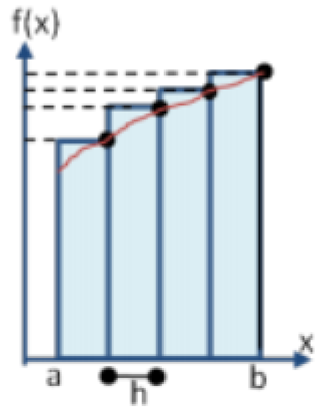
Point à gauche :

$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = 0.5\left(\frac{3}{2} + 2 + 2 + 1.6364 + 1.2500\right)$

$\rightarrow \int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \mathbf{4.1932}$

Point à droite :



$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = 0.5(2 + 2 + 1.6364 + 1.2500 + 0.9565)$

$\rightarrow \int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \mathbf{3.9214}$

2. par la méthode des trapèzes :

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$

$\rightarrow \int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \frac{0.5}{2}\left[\frac{3}{2} + 0.9565 + 2(2 + 2 + 1.6364 + 1.2500)\right] \rightarrow \int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \mathbf{4.0573}$

Exercice III.2 :

1. calculer par la méthode des trapèzes (n=4)

$$I = \int_1^2 \frac{1}{sin\, x} e^{x^2} dx$$

Solution III.2 :

Calculer par la méthode des trapèzes (n=4)

$$I = \int_1^2 \frac{1}{\sin x} e^{x^2} dx$$

Nous avons a=1 et b=2 avec n=4 donc $h = \frac{b-a}{4} = 0.25$

x	*1*	*1.25*	*1.5*	*1.75*	*2*
f(x) $= \int_1^2 \frac{1}{\sin x} e^{x^2} dx$	*3.2304*	*5.0272*	*9.5115*	*21.7289*	*60.0443*

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$

$\rightarrow \int_1^2 \frac{1}{\sin x} e^{x^2} dx = \frac{1}{8}[3.2304 + 60.0443 + 2(5.0272 + 9.5115 + 21.7289)] \rightarrow$

$\int_0^2 f(x)dx = \mathbf{16.9762}$

Exercice III.3:

On voudrait évaluer à l'aide de la méthode des trapèzes l'intégrale; $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$ *Avec une erreur inferieure à (*10^{-3}*).*

1. *Déterminer dans un premier temps la valeur exacte de I.*
2. *Cherchons le nombre de subdivisions de l'intervalle [0,1] et comment choisir le pas h pour que l'erreur soit inferieure à(*10^{-3}*) .*
3. *On pose (*$\boldsymbol{h = 0.20}$*) Calculer la valeur exacte de I par la méthode des* ***trapèzes.***
4. *Comparer les résultats obtenus (résultat théorique avec résultat de* ***trapèzes****.*

Solution III.3 :

1. la valeur exacte de I : $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx \rightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

$$I_{exacte} = \frac{1}{2} ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} ln\ (2) = 0.3465735$$

2. l'erreur de la méthode des trapèzes est : $R(h) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$ *donc*

$$|R(h)| = \left|-\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)\right|$$

$$= \left|-\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)\right|$$

$$\leq \left|-\frac{(b-a)}{12} h^2\right| |f''(\xi)|$$

$$\leq \left|-\frac{(b-a)}{12} h^2\right| \max_{[0,1]} |f''(x)|$$

Posons $M_2 = \max_{[0,1]} |f''(x)|$*, alors* $|R(h)| \leq \left|\frac{(b-a)}{12}\ h^2\right| M_2$

$$= \frac{(b-a)}{12} h^2 M_2$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \ car\ h = \frac{(b-a)}{n}$$

Pour avoir $|R(h)| \le (10^{-3})$, *il suffit de prendre n subdivisions de l'intervalle d'intégration telles que :* $\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \le (10^{-3})$, *donc il suffit que n vérifier* $n \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12(10^{-3})} M_2}$

Cherchons M_2. *On a* $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \to f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \to f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$ *et pour confirmer la croissante et la décroissante de la fonction f(x) on cherche* $f^{(3)}(x) = \frac{-6x^3+36x^2-6}{(x^2+1)^4} \ge 0$, *donc la fonction* f'' *est croissante dans l'intervalle [0,1] ;alors* $\underset{[0,1]}{max} |f''(x)| = |f''(x)| = \frac{1}{2}$

Ainsi l'équation (1) nous donne $n \ge 6.4549 \ \to n = 7\ et\ h = \frac{1}{7} \ \to h = 0.1428$

3. on pose (h=0.20) la valeur exacte de I par la méthode des trapèzes alors :

x_i	0	0.20	0.40	0.60	0.80	1
$f(x_i)$	0	0.192308	0.344828	0.441176	0.487805	0.5

Finalement,

$I_{trapèze} = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\, dx = \frac{h}{2}(f(0) + f(1)) + h \sum_{i=1}^{4} f(x_i) = 0.345739$ *donc on remarque que la valeur théorique = la valeur de trapèze.*

4. comparaison $\xi = |I_{exact} - I_{trapèze}| = 0.0083.(10^{-3})$

Exercice III.4:

Soit $I = \int_0^{\pi} e^x\, sinx\, dx$

1. Déterminer dans premier temps la valeur exact de I *(calcule directe).*

2. donner une approximation du calcul de cette intégrale en appliquant la méthode des ***trapèzes*** *et en utilisant 4 sous intervalles.*

3. Comparer les résultats obtenus.(résultat théorique avec résultat de ***trapèzes****.*

Solution III.4 :

1. déterminer la valeur exacte de $I = \int_0^{\pi} e^x\, sinx\, dx$

$I = \int_0^{\pi} e^x\, sinx\, dx$ *on fait l'intégrale par partie on pose :*

$$\begin{cases} U = e^x \to U' = e^x \\ V' = sinx \ \to V = \ -cosx \end{cases}$$

$$\to \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx = -e^x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \, cosx \, dx$$

$$\to \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx = +e^{\pi} + 1 + \int_0^{\pi} e^x \, cosx \, dx \ldots (I)$$

On intégrer $\int_0^{\pi} e^x \, cosx \, dx$ *pour la* $2^{éme}$ *fois par partie on pose*

$$\begin{cases} U = e^x \to U' = e^x \\ V' = -\cos x \ \to V = \ sinx \end{cases}$$

$$\to \int_0^{\pi} e^x \, cosx \, dx = (e^x \sin x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx \ldots (II)$$

On remplace équation (II) *dans l'équation* (I)

$$\to \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx = +e^{\pi} + 1 + (e^x \sin x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx$$

$\int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx$=$+e^{\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx \; car \; (+1 + (e^x \sin x)]_0^{\pi} = 0$

$\int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx$+$\int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx$=$e^{\pi} + 1$

$2I = +e^{\pi} + 1 \; car \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx$+$\int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx = I + I = 2I$

$$I_{exacte} = \frac{+e^{\pi} + 1}{2} = \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx = 12.070$$

$I = \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx$ *avec n=4* $\to h = \frac{b-a}{n} \ \to h = \frac{\pi}{4}$

x_i	*0*	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x_i)$	*0*	*0.192308*	*4.8124*	*7.4691*	*0*

$$I_{trapèze} = \int_0^{\pi} e^x \, sinx \, dx = \frac{h}{2}\big(f(0) + f(\pi)\big) + h\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = 10.855655$$

Comparaison $\xi = \left|I_{exact} - I_{trapèze}\right| = 1.215$

Exercice supplémentaire :

Soit $F(x) = \int_0^{x} te^{-t} \, dt$ *on a* $F(1) = \int_0^{1} te^{-t} \, dt$

1. Cherchons le nombre de subdivisions de l'intervalle [0,1] pour évaluer F(1) a 10^{-8} *près, en utilisant la méthode des trapèzes*

Chapitre IV : Résolution numériques des systèmes d'équations linéaires

IV.1 Introduction

Un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues.

En général, un système de « m » équations linéaires à n inconnues peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

Où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les inconnues

IV.2 Forme matricielle d'un système linéaire

Un système d'équations linéaires peut aussi s'écrire sous la forme matricielle

$$Ax = b$$

Où A est une matrice de taille m × n, x est un vecteur de taille n et b est un vecteur de taille m.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{m,n} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Le système [A] {x}=[b] admet une solution unique si seulement si son déterminant est non nul

Si le déterminant est nul :

a) soit le système a une infinité de solution

b) soit le système n'a pas de solution

Exemple 1 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

Déterminant =-18, le système a une solution unique $x_1 = 1$, $x_2 = 1$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

Déterminant =0, les deux équations du système sont relié ($L_2 = 2L_1$) le système a une infinité de solution

Exemple 3 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 = 9 \end{cases}$$

Déterminant =0, mais les équations du système sont indépendantes donc le système n'a pas de solution

IV.3 Propriété des systèmes linéaires :

a) permutation :

Dans un système d'équations, nous pouvons permuter entre deux lignes au plus, ainsi qu'entre colonnes.

Exemple :

1. permutation entre lignes :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Permuter entre ligne « 1 » et « 2 »

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

2. permutation entre colonnes :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Si on Permuter entre la colonne « 1 » et la colonne « 2 », le système devient :

$$\begin{cases} x_3 + 3x_2 + 2x_1 = 5 \\ -2x_3 - 3x_2 + 4x_1 = 1 \\ +3x_3 + 4x_2 - x_1 = 4 \end{cases}$$

b) multiplication :

nous pouvons multiplier une équation d'un système linéaire par un réel non nul (λ) et remplacer cette équation par le résultat obtenu

Exemple

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Si on multiplier la 1^{er} équation par λ=3, on obtient :

$$\begin{cases} 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 15 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

c) addition :

Nous pouvons dans un système d'équations remplacer une équation par la somme de deux ou plus équations du système

Exemple

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \;\; (L_1) \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \;\; (L_2) \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \;\; (L_3) \end{cases}$$

Après avoir ajouter (L_1) à (L_3) et enlever (L_2) $(L_1 + L_3 - L_2)$ et la remplacer à la place de (L_3) le système devient :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ -3x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 8 \;\; (L_1 + L_3 - L_2) \end{cases}$$

IV.4 Méthodes de résolution directe

Se sont des méthodes exactes qui permettent de résoudre un système d'équations linéaire. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer :

1. la méthode de gauss
2. la méthode de factorisation
3. méthode de ckolescky

IV.4 .1 Méthode de Gauss :

La méthode de gauss consiste à transformer le système $AX = b$ à un système triangulaire équivalent à l'aide d'un algorithme d'élimination.

IV.4.2 Résolution d'un système triangulaire supérieure :

Si le système $AX = b$ est triangulaire supérieure, il a la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.3}$$

IV.4.3 Théorème

Soit le système triangulaire $Ax = b$ où $A \in M_{mn}(I\ R)$ est une matrice carrée et $B \in (I\ R)$ si $a_{k,k} \neq 0 \; \forall \; k \; \in [1, n]$

Alors le système $Ax = b$ admet une solution unique et cette solution x est donnée par la formule suivante :

$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_{ij}\right]\ i = \overline{n,1}$

Si la matrice A est triangulaire inférieur le système $Ax = b$ s'écrit comme suivant :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i\ i = \overline{n,1}$$

$$a_{ij} = 0\ \text{ si } j > i$$

Alors $x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{1} a_{ij}x_i\right]\ i = \overline{n,1}$

IV.5 Etapes de la méthode de gauss

Soit A une matrice d'ordre n régulière

Principe : transformation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieur, pour cela on construit [A :b] et :

$[A: b] \xrightarrow{transformation} [A^{(n)}: b^{(n)}]$ est une matrice triangulaire supérieur c.-à-d. :

$$[A: b] = \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(1)} & a_{11}{}^{(1)} & a_{1n}{}^{(1)} & b_{11}{}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n-11}{}^{(1)} & a_{11}{}^{(1)} & \vdots & \vdots \\ a_{n1}{}^{(1)} & \cdots & a_{n-1n-1}{}^{(1)} & b^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$[A^{(n)}: b^{(n)}] = \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(1)} & a_{11}{}^{(1)} & a_{1n}{}^{(1)} & b_{11}{}^{(1)} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{11}{}^{(1)} & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1n-1}{}^{(1)} & b^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Puis on résout le système $A^{(n)}x = b^{(n)}$ dont x est la solution exacte du système $Ax = b$

On procède de la manière suivante :

Etape 1 : On pose $A = A^{(1)}\ b = b^{(1)}$

Si $a_{11}{}^{(1)} \neq 0$ on fait les opérations suivantes :

L_1 est maintenue $\begin{cases} L_1{}^{(2)} = L_1{}^{(1)} \\ L_i{}^{(2)} = L_i{}^{(1)} - \frac{a_{ii}{}^{(1)}}{a_{ii}{}^{(1)}} L_1{}^{(1)} \end{cases}$

On obtient alors :

$$[A^{(2)}: b^{(2)}] = \begin{bmatrix} a_{11}{}^{(1)} & a_{12}{}^{(2)} & \dots & \cdots \\ 0 & a_{22}{}^{(2)} & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}{}^{(2)} & \dots & \cdots \end{bmatrix}$$

Et ainsi de suite :

$$\begin{cases} L_k{}^{(k+1)} = L_k{}^{(k)} \\ L_i{}^{(k+1)} = L_i{}^{(k)} - \dfrac{a_{ik}{}^{(k)}}{a_{ik}{}^{(k)}} k^{(k)} \end{cases}$$

Résolution de $A^{(n)}x = b^{(n)}$

$$Ax = b \ \rightarrow \ A^{(n)}x = b^{(n)} \ \rightarrow \begin{cases} a_{11}^{(n)}x_1 + \cdots = b_1^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n + \cdots = b_n^n \end{cases}$$

On commence par déterminer x_n puis x_{n-1}

Exemple :

Trouver la solution du système suivante par la méthode de gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

L'étape 1 : élémination de x_1

$$L_2^{(2)} \rightarrow \ L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$$

$$L_3^{(2)} \rightarrow \ L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

L'étape 2 : élémination de x_2

$$L_3^{(2)} \rightarrow \ L_3^{(2)} - \left(\frac{-7}{-4}\right) L_2^{(2)}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -6 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & \vdots & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

On remplace inversement on obtient :

$$\frac{15}{2}x_3 = \frac{15}{2} \rightarrow x_3 = 1$$

$$-4x_2 - 6x_3 = 2 \rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

IV.6 Méthode de Cholesky :

IV.6.1 Définition

Une matrice est dite définie positive si et seulement si pour tout

$$x \in IR^n \neq 0 : x^t Ax > 0$$

Condition suffisant pour que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{34} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Soit définie positive est : si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs

$$(det\ A_{(k)_{1 \le k \le n}} > 0)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\det A > 0$$

IV.6.2 Proposition

Une matrice A symétrique, définie positive si et seulement s'il existe une matrice L triangulaire inférieure inversible telle que $A = LL^t$

IV.6.3 Algorithme :

Soit A une matrice symétrique, définie positive pour résoudre le système $Ax = b$ il faut résoudre :

$$\begin{cases} L_y = B \\ L_x^t = y \end{cases}$$

Construit la matrice $L = L_{ij}$ triangulaire inferieur telle que

$A = LL^t$ où $A = a_{ij}$

$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk}$ $\qquad\qquad j \le i$

Donc : $a_{11} = l_{11}^2 \rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ et $a_{i1} = l_{i1} l_{11} \rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} \overline{\imath = 2, n}$

La construction de la matrice L se fait colonne par colonne

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{l-1} l_{kj}^2} \qquad (4.7)$$

Et $a_{ik} = \sum_{j=1}^{k} l_{ij} l_{kj}$

Donc : $l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k} l_{ij}\, l_{kj}) - l_{kk}$

Exemple 1 :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in IR^2$

$x^t Ax = (x_1 x_2).\begin{pmatrix} x_1 + & 2x_2 \\ 2x_1 + & 8x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} x = 0$

Alors A est définie positive.

Exemple 2 :

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$

Et le vecteur $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$

Condition de convergence (méthode de Colesky) ⇒A symétrique définie positive.

- A est symétrique

- Est-ce- que A est définie positive

$$\Delta_1 = 9 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 > 0$$

$$\Delta_3 = \det A = 9\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 42 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & 42 \end{vmatrix} + 15\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 7 \end{vmatrix} = 9(161) - 3(21) + 15(54)$$

$$= 1449 - 63 - 810 = 576 > 0$$

$$A = LL^t = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} \\ l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

La 1er colonne :

$$l_{11}^2 = 9 \rightarrow l_{11} = 3$$

$$l_{11}l_{21} = 3 \rightarrow l_{21} = 1$$

$$l_{11}l_{31} = 15 \rightarrow l_{31} = 5$$

La 2^{éme} colonne :

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = 5 \rightarrow l_{22} = 2$$

$$l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = 7 \rightarrow l_{32} = 1$$

La 3^{éme} colonne :

$$l_{32}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 44 \rightarrow l_{33} = 4$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$LY = b = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} = y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} LY = b \\ L^t x = y \end{cases} L^t x = y \ \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Remarque :

On a $A_k = L_k L_k^t$ ou l_k sont les matrices composées des k premières lignes et k premières colonnes de A et de L

det $A_k, = (l_{11}.l_{22}.l_{33} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots l_{kk})^2 = {l_{11}}^2.{l_{22}}^2.{l_{33}}^2 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .{l_{kk}}^2 >$ 0 est symétrique définie positive

La méthode de colesky permet de calculer det A par $det\ A = \prod_{i=1}^{n} {l_{ii}}^2$

IV.7 Méthode de Crout-Dolitle ou LU

Cette méthode consiste à factoriser la matrice A pleine en deux matrices triangulaires *L* et *U*, tel que *L* est triangulaire inférieure et *U* est triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité (U_{ii}= 1). On a donc $AX = b$ et $A = LU$ donc $LUX = b$, on pose $UX = Y$ (Y vecteur inconnu), cela donne

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$$

Le système $AX = b$ est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre. Le système à matrice triangulaire supérieure et résolue par substitution directe, celui à matrice triangulaire inférieure par substitution inverse.

IV.7.1 Détermination des matrices L et U

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 U_{12} & \dots & U_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnée par :

$$l_{11} = a_{Ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} U_{ji} \tag{4.9}$$

Avec : *i= 2,3,....................,n et k= i,i+1,...............,n*

$$u_{ik} = \frac{(a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} U_{jk})}{l_{ii}} \tag{4.10}$$

Exemple:

Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

On appliqué l'algorithme de crout de Doolittle pour résoudre le système $Ax = b$

On cherche $L=\begin{bmatrix} l_{12} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$ et $U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tale que $A=UL$

On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenire la première colonne de L :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & L_{22} & 0 \\ -2 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

On identifie la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & L_{22} & 0 \\ -2 & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

On identifie la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & L_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

On identifie la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & L_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

On identifie la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Puis on remplace dans $\begin{cases} LY=B \\ UX=Y \end{cases}$ on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Et

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Chapitre V : Résolution des équations différentielles ordinaires

V.1 Introduction

Les équations différentielles sont l'un des outils mathématiques les plus importants utilisés dans la modélisation des problèmes en sciences physiques. Trouver la solution d'une équation différentielle ordinaire *EDO* est un problème courant, souvent difficile ou impossible à résoudre de façon analytique. Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre ces équations.

La précision des diverses méthodes de résolution proposées dans ce cours est proportionnelle à l'ordre de ces méthodes. Nous commençons par la méthode simple d'Euler (a une interprétation géométrique) qui nous conduira progressivement à des méthodes plus complexes telles les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4, qui permettent d'obtenir des résultats d'une grande précision.

Dans ce chapitre, On s'intéresse aux équations différentielles du premier ordre de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Le problème de Cauchy (problème de la condition initiale) consiste à trouver une fonction $y(t)$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ telle que :

$$\begin{cases} \frac{d\,y(t)}{dt} = y(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) = y_0, t_0 \in I, y_0 \ \in IR \end{cases} \tag{5.1}$$

La condition $y(t_0) = y_0$ est une condition initiale ou la condition de Cauchy. Si on suppose que la fonction f est continue par rapport aux deux variables t, y et que f vérifie une condition de Lipschitz (fonction Lipschitzienne) par rapport à y c'est à dire que:

$$\exists K > 0 \ tel\ que\ \forall t \ \in [a, b], \forall\ y_1, y_2 \in IR, on\ a\ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le K\ |y_1 - y_2|$$

En pratique pour vérifier cette condition, on calcule :

$$K = \max_{\substack{t \in [a,b] \\ y \in IR}} \left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| \tag{5.2}$$

Alors que la solution du problème de Cauchy existe et est unique sur $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$

V.2 Méthodes numériques

V.2.1 Principe générale

Considérons le problème de Cauchy à condition initiale suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{5.3}$$

On suppose que ce problème admet une solution unique dans l'intervalle $[a, b]$.

Pour obtenir une approximation numérique de cette solution $y(t)$ sur l'intervalle $[a, b]$, on divise l'intervalle donné en n points équidistants $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, avec $t_0 = a$ et $t_n = b$ qui déterminent le pas d'intégration $h = \frac{b-a}{n}$ et le point d'abscisse t_i est donné par $t_i = a + ih$ (pour *i = 0, 1,…, n*).

La solution exacte au point t_i est notée $y(t_i)$, la solution approchée est notée y_i ($y(t_i) \approx y_i$),

une méthode numérique est un système d'équations aux différences impliquant un certain nombre d'approximations successives $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$, où *k* désigne le nombre de pas de la méthode.

Si *k = 1*, on parle de méthode à un pas (à pas séparés) : ils permettent de calculer y_{n+1} en n'utilisant que la valeury_n.

Si *k > 1*, la méthode à pas multiples (à pas liés) : ils permettent d'obtenir y_{n+1} en utilisant les valeurs $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$ (*k* fixé).

La solution à estimer peut être approchée par un développement limité de Taylor. Le développement de la série de Taylor de $y(t_{n+1})$ jusqu'à l'ordre m autour du point t_n s'écrit:

$$y(t_{n+1}) = (t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2!} y^{(2)}(t_n) + \cdots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}(t_n) + O(h^{m+1}) \tag{5.4}$$

V.2.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la plus ancienne et la plus simple des méthodes numériques d'approximation des équations différentielles ordinaires du premier ordre. Si les fonctions $y(t)$ et $y'(t)$ sont continues, on peut écrire le développement en série de Taylor pour $y(t)$ au voisinage de t_n.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + O(h^2) \tag{5.5}$$

Le terme $O(h^2)$ étant le terme d'erreur (à l'ordre 2). On peut alors réécrire cette équation en négligeant les termes du deuxième ordre :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) \tag{5.6}$$

Soit y_i une approximation de y_i ($y(t_i) \approx y_i$), la méthode d'Euler d'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i, y_i), i = 0,1, \dots, n \\ y_0 = y(t_0) \end{cases} \tag{5.7}$$

V. 2.2.1 Interprétation Géométrique

La méthode d'Euler revient à remplacer localement en chaque point t_i la courbe solution passant par y_i par sa tangente.

La tangente à la courbe $y = y(t)$ en $t = t_0$ a pour équation :

$Y_0(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0)$

$\rightarrow Y_0(t) = y(t_0) + f(t_0, y(t_0))(t - t_0)$

Où $Y_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$

Au point : $t = t_1$: $Y_0(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0)$

$Y_0(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0)$

$\rightarrow Y_0(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0)$

En approximant $Y_0(t_1) \approx y_1$, on peut écrire :

$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$

De même considérons la droite d'équation :

$Y_1(t) = y(t_1) + y'(t_1)(t - t_1)$

Au point : $t = t_2$: $Y_1(t_2) = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1)$

$\rightarrow Y_1(t_2) = y_1 + hf(t_1, y_1)Y_0(t_1)$

En faisant de même nous aurons

$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$

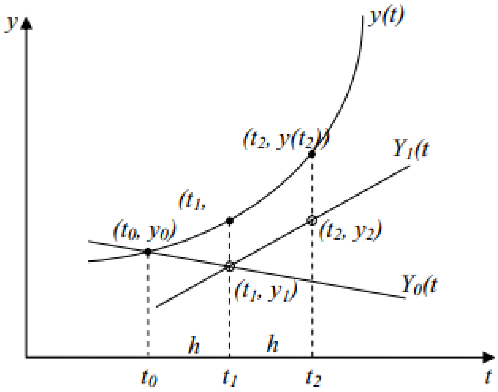


Fig.1 Méthode d'Eluer

V.2.3 Méthode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont les généralisations de la méthode d'Euler à des ordres supérieurs à un (ordre élevé). Ces méthodes permettent d'obtenir une plus grande précision (elles génèrent des solutions numériques plus proches des solutions analytiques) que la méthode d'Euler. Ces méthodes sont de la forme :

$$y_{i+1} = y_i + b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3 + \cdots.$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + c_2 k_1)$$
$$k_3 = hf(x_i + c_3 h, y_i + (c_3 - a_{32})k_1 + a_{32} k_2)$$

V.2.3.1 Runge Kutta d'ordre 2 : RK2

Les méthodes de Runge-Kutta l'ordre 2 sont de la forme :

$$y_{i+1} = y_i + b_1 k_1 + b_2 k_2,$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + c_2 h, y_i + c_2 k_1)$$

Le calcul des valeurs de b_1, b_2, c_1, c_2, k_1 etk_2 nécessite le calcul de $y^{(2)}, y^{(3)}$ et $y^{(4)}$ à partir de $y' = f(x, y)$ et le développement de Taylor. On obtient :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

V.2.3.2 Runge Kutta d'ordre 4 : RK4

C'est la méthode la plus précise et la plus utilisée, elle est d'ordre 4. Elle calcule la valeur de la fonction en quatre points intermédiaires selon :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$
$$k_3 = hf(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$
$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

V.3. Exercices

Exercice V.1 :

Soit l'équation différentielle à condition initiale :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Calculer la solution approximative de cette équation en t = 1 à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle $[0, 1]$ en 10 parties égales.*
2. *Sachant que la solution exacte est $y(t) = 2e^t - t - 1$, comparer le résultat obtenu avec la solution exacte.*

Solution V.1 :

1. *Calcul la solution approximative de l'équation différentielle en t=1 par la méthode d'Euler :*

On a: f (t, y) = y + t

L'intervalle est [0,1] $\rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$

La méthode d'Euler est donnée par :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = \ y_i + h(t_i, y_i) \ i = 0,1,2, \dots ,10 \\ t_i = t_0 + ih \qquad y_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

En utilisant cette méthode on obtient successivement des approximations de $y(0.1), y(0.2)$,

$y(0.3)$, *... notées* $y_1, y_2, y_3, \dots$.

Pour $i = 0 \ y_1 = y_i + h(t_0, y_0) = 1 + 0.1(1 + 0) = 1.1$

Pour $i = 1 \ y_2 = y_i + h(t_1, y_1) = 1.1 + 0.1(1.1 + 0.1) = 1.22$

Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premières itérations :

I	t_i	y_i
0	*0*	*1.0000*
1	*0.1*	*1.1000*
2	*0.2*	*1.2200*
3	*0.3*	*1.3620*
4	*0.4*	*1.5282*
5	*0.5*	*1.7210*
6	*0.6*	*1.9431*
7	*0.7*	*2.1974*
8	*0.8*	*2.4871*
9	*0.9*	*2.8158*
10	*1.0*	*3.1874*

Alors l'approximation de y(t) en t=1 par la méthode d'Euler est :

$$y_{10} = y(1) = 3.1874$$

Comparaison du résultat obtenu avec la solution exacte :

La solution exacte est : $y(t) = 2e^t - t - 1$

$y_{exacte}(1)=2e^{1} - 1 - 1 = 3.4365$

Donc l'erreur commise est :

$$E = |y_{exacte}(1) - y(1)| = |3.4365 - 3.1874| = 0.2491$$

Exercice V.2 :

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - \dfrac{2t}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. *Calculer la solution approximative de cette équation en t = 0.2 à l'aide de méthode de*
   Runge-Kutta d'ordre 2 avec un pas h=0.2.
2. *Sachant que la solution exacte est* $y(t)=\sqrt{2\ x + 1}$, *comparer le résultat obtenu avec la solution exacte.*

Solution V.2 :

1. *Calcul la solution approximative de l'équation différentielle en t=1 par la méthode Runge Kutta d'ordre 2 :*

On a : $f(t,y) = y - \frac{2t}{y}$, $y(0) = 1$

L'intervalle est [0,0.2] , h=0.2

La méthode de RK2 est donnée par :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$
$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

En utilisant cette méthode on obtient les approximations successives $y_1, y_2, \dots, y_5$.

Pour i=0 :

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$k_1 = hf(t_0, y_0) = 0.2$

$k_2 = hf(t_0 + h, y_0 + k_1) = hf(0.2,1.2) = 0.8666$

Alors : $y_1 = 1 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1.1866$

Alors l'approximation de y(t) en t=0.2 par la méthode de RK2 est :

$$y_1 = y(0.2) = 1.1866$$

2. *Comparaison du résultat obtenu avec la solution exacte :*

La solution exacte est : $y(t)$=$\sqrt{2\ x\ +1}$

La solution exacte en t=0.2 donne :

$$y_{exacte}(0.2) = \sqrt{1.4} = 1.1832$$

Donc l'erreur commise est :

$$E = |y_{exacte}(0.2) - y(0.2)| = |1.1866 - 1.1832| = 0.0034$$

Bibliographie

[1] M. Atteia, M. Pradel, Eléments d'analyse numérique, Ceradues-Editions. 1990.

[2] J. Baranger, Introduction à l'analyse numérique, Ed. Hermann 1977.

[3] M. Boumahrat, A. Bourdin, Méthodes numériques appliquées,. Ed. OPU 1983.

[4] J.P. Calvi, Analyse numérique, UPS Université de Toulouse 2011.

[5] Ph. G.Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod, Paris 1998.

[6] F. Curtis., P.O. Gerald Wheatdey, Applied Numerical Analysis, AddisonWesley Pub. Compagny. 2003.

[7] B. Démodovitch, I. Maron, Eléments de calcul numérique, Ed. Mir Mosco. 1979.

[8] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, Presses internationales polytechnique 1994.

[9] M. Lakrib, Cours d'analyse numérique, Office des publications universitaires OPU 4274, 2016.

[10] P. Lascaux, R. Theodor, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art d'ingénieur, Tomes I et II, Masson, Paris. 1986.

[11] G. Legendre, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique, Dauphine université de Paris 2018

[12] G.A. Meurant, G.H. Golub, Résolution numérique des grands systèmes, Ed. Stanford University. 1983.

[13] M. Pierre, A. Henrot, Analyse Numérique, Ecole de MINES de Nancy 2013-2014