



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Tahar Moulay de Saïda

Faculté de Technologie

Département d'Electronique

# Asservissement et Régulation

Par :

**Dr. Khaled DINE**

**Maître de conférences « B »**

**Octobre 2017**

## **Avant Propos :**

Le présent polycopié est le fruit de plusieurs années passées dans l'enseignement du module d'asservissement et régulation (depuis 1994), pour les différents niveaux d'études universitaires, allant des cours pour ingénieurs, puis pour les différents cycles de licences d'Electronique: Optoélectronique, Electronique Numérique.

Ce polycopié constitue un support de cours destiné aux étudiants du cycle de Licence : Electronique et Génie Biomédicale, au sein du département d'électronique, de la faculté de Technologie, de l'université de Saïda, et pour tous les étudiants de l'université algérienne ayant ce programme de cours durant leur formation universitaire. Il est conforme aux nouveaux programmes de Licence (Electronique et Génie Biomédicale), adoptés par le Comité Pédagogique National (CPN).

Lors de la conception de ce support de cours, il a été nécessaire de se plier à deux principaux impératifs : d'une part se conformer au programme établi par le Comité Pédagogique National (CPN) ; et d'autre part surmonter l'obstacle de la langue en évitant, dans la mesure du possible, les structures de phrases longues et complexes qui peuvent être inaccessibles aux actuels étudiants de l'université algérienne.

Par ailleurs, dans le but d'approfondir la compréhension, la plupart des connaissances présentées sont étayés par la présentation d'exemples. A la fin de ce polycopié, ont été rassemblés un nombre assez important d'exercices, pour enrichir le contenu et renforcer les connaissances de l'étudiant et stimuler l'envie de la recherche chez lui.

Il est à préciser que ce cours d'asservissement et de régulation n'intéresse pas que les cycles de Licences électronique et Génie biomédicale, mais peut concerner également d'autres cycles de formations et d'autres spécialités, tels que : l'automatique, l'électrotechnique, etc.

J'encourage fortement les étudiants et tous les lecteurs de ce polycopié à me faire part de leurs critiques et remarques qu'ils jugeront nécessaires pour l'amélioration de ce support de cours.

Enfin, il est à noter que ce support pédagogique ne dispense aucunement de l'obligation de présence aux séances de cours et de travaux dirigés, et encore moyen de la consultation d'autres livres et polycopié de cours; une liste de références bibliographiques est mise à la disposition les personnes intéressées à la fin de ce polycopié.

## Table des matières

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| Introduction :                                                 | 6  |
| Chapitre 1: Rappels sur la transformée de Laplace              | 8  |
| I. Définition :                                                | 8  |
| II. Propriétés des transformées de Laplace :                   | 9  |
| a) Unicité :                                                   | 9  |
| b) Linéarité :                                                 | 9  |
| c) Théorème de la dérivation :                                 | 9  |
| d) Théorème de l'intégration :                                 | 9  |
| e) Théorème des limites :                                      | 10 |
| f) Théorème du retard :                                        | 10 |
| g) Changement d'échelle :                                      | 10 |
| h) Translation :                                               | 10 |
| Chapitre 2 : Introduction sur les asservissements              | 11 |
| I. Définitions :                                               | 11 |
| a) Définition 1:                                               | 11 |
| b) Définition 2 :                                              | 12 |
| c) Définition 3 :                                              | 12 |
| d) Un asservissement :                                         | 12 |
| e) Une régulation :                                            | 12 |
| II. Les différents types de systèmes asservis :                | 12 |
| a) Système asservi non-linéaire :                              | 12 |
| b) Système asservi linéaire :                                  | 12 |
| III. Les principales propriétés des systèmes asservis :        | 13 |
| a) Système asservi en boucle ouverte :                         | 13 |
| b) Système asservi en boucle fermée (closed loop / Feedback) : | 14 |
| c) Système asservi point de vue régulation :                   | 15 |
| d) Système asservi point de vue servomécanisme :               | 15 |
| e) Les transducteurs :                                         | 16 |

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Chapitre 3 : Schémas fonctionnels et fonctions de transfert des systèmes asservis ..... | 17 |
| I.    Schémas fonctionnels des systèmes asservis.....                                   | 17 |
| a) Exemple : schéma fonctionnel d'un système asservi de commande de vitesse. ....       | 17 |
| b) Schéma fonctionnel d'un système asservi quelconque : .....                           | 17 |
| II.   Fonctions de transfert des systèmes asservis : .....                              | 18 |
| III.  Analyse des systèmes linéaires.....                                               | 19 |
| a) Forme générale de la fonction de transfert : .....                                   | 19 |
| b) Analyse de l'influence de la réaction : .....                                        | 21 |
| IV.  Les théorèmes de transformation : .....                                            | 23 |
| a) Combinaison en cascade : .....                                                       | 23 |
| b) Combinaison en parallèle : .....                                                     | 23 |
| c) Elimination de la boucle de retour : .....                                           | 23 |
| d) Arrangement des points de sommation : .....                                          | 24 |
| e) Déplacement en aval d'un point de sommation : .....                                  | 24 |
| f) Déplacement en amont d'un point de sommation : .....                                 | 24 |
| g) Déplacement en aval d'un point : .....                                               | 24 |
| h) Déplacement en amont d'un point : .....                                              | 25 |
| i) Plusieurs entrées : la loi de superposition.....                                     | 25 |
| Chapitre 4 : Méthodes d'analyses des systèmes linéaires à une variable .....            | 27 |
| I.    Nature des signaux d'entrée : .....                                               | 27 |
| a) Fonction Echelon : .....                                                             | 27 |
| b) Fonction rampe : .....                                                               | 27 |
| c) Fonction impulsion : .....                                                           | 28 |
| II.   Les méthodes expérimentales d'analyse des systèmes asservis : .....               | 28 |
| a) Analyse transitoire (ou analyse temporelle): .....                                   | 29 |
| b) Analyse harmonique (ou Analyse fréquentielle): .....                                 | 30 |
| c) Exemples de réponses transitoires et harmoniques : .....                             | 30 |
| III.  Concepts utiles à l'analyse des systèmes asservis : .....                         | 33 |
| a) L'aspect statique : .....                                                            | 33 |
| b) L'aspect dynamique : .....                                                           | 33 |

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| IV. Critères de performances :                                                                                 | 34 |
| a) Critère de l'intégrale du carré de l'écart : (Hall-Sartorius)                                               | 34 |
| b) Critère de l'intégrale de la valeur absolue de l'écart :                                                    | 35 |
| c) Critère I.T.A.E. : "Integral of Time multiplied Absolute value of Error"                                    | 35 |
| Chapitre 5 : Stabilité des systèmes asservis                                                                   | 36 |
| I. Définition et propriétés :                                                                                  | 36 |
| II. Equation caractéristique :                                                                                 | 36 |
| III. Critère de stabilité de Routh :                                                                           | 37 |
| IV. Critère de stabilité de Hurwitz :                                                                          | 39 |
| V. Critère de stabilité des fractions continues :                                                              | 40 |
| Chapitre 6 : classification des systèmes asservis, les constantes d'erreurs, la précision et la sensibilité... | 42 |
| I. Classification des systèmes asservis :                                                                      | 42 |
| II. Constantes d'erreur :                                                                                      | 43 |
| a) Cas d'un échelon :                                                                                          | 43 |
| b) Cas d'une rampe :                                                                                           | 44 |
| c) Cas d'une parabole :                                                                                        | 45 |
| d) Tableau récapitulatif :                                                                                     | 46 |
| e) Les constantes d'erreurs statiques ( $t \rightarrow \infty$ ):                                              | 46 |
| III. Cas général :                                                                                             | 47 |
| a) Constante d'erreur d'un échelon :                                                                           | 48 |
| b) Constante d'erreur d'une rampe :                                                                            | 48 |
| c) Constante d'erreur d'une parabole :                                                                         | 48 |
| IV. Sensibilité des systèmes asservis                                                                          | 48 |
| Chapitre 7 : Diagrammes et abaqes                                                                              | 50 |
| I. Diagrammes de Bode :                                                                                        | 50 |
| II. Diagrammes de Black ou Nichols :                                                                           | 56 |
| III. Diagrammes de Nyquist :                                                                                   | 59 |
| IV. Critères de stabilité par les diagrammes :                                                                 | 61 |
| a) Définition :                                                                                                | 61 |
| b) Conditions de stabilité :                                                                                   | 61 |

|                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------|----|
| c) Critères de Revers : .....                                            | 61 |
| V. Degré de stabilité : .....                                            | 63 |
| a) Marge de gain et marge de phase dans le plan de Black : .....         | 63 |
| b) Marge de gain et marge de phase dans le plan de Bode : .....          | 64 |
| c) Marge de gain et marge de phase dans le plan de Nyquist : .....       | 65 |
| Chapitre 8 : Correction des systèmes asservis linéaires .....            | 66 |
| I. La fonction de correction : .....                                     | 66 |
| II. Les différents types de correcteurs : .....                          | 67 |
| a) Action proportionnelle (P) : .....                                    | 67 |
| b) Action dérivée ou différentielle (D) : .....                          | 67 |
| c) Action intégrale (I) : .....                                          | 67 |
| d) Action PD : .....                                                     | 68 |
| e) Action PI : .....                                                     | 70 |
| f) Action PID.....                                                       | 71 |
| g) Les correcteurs actifs (à base d'amplificateurs Opérationnels): ..... | 72 |
| Références : .....                                                       | 75 |
| Annexe A : Table des transformées de Laplace .....                       | 76 |
| Annexe B : Les termes très utilisés, en anglais .....                    | 77 |

## Introduction :

Les systèmes asservis et de régulation sont un domaine très vaste et englobent plusieurs spécialités, et nécessitent un ensemble de compétences allant des mathématiques, comme outil incontournable pour la conception, l'étude et l'analyse, en passant par l'électricité et l'électronique, et bien d'autres outils d'autres spécialités.

Les objets à base de systèmes asservis envahissent le quotidien de tout un chacun allant du simple interrupteur, en passant par les systèmes embarqués dans les véhicules et divers engins dans divers secteurs d'activité humaine, et jusqu'aux systèmes les plus complexes, intégrés ici et là afin d'améliorer nos conditions de travail ou de vie en général, et rendre ainsi plus faciles toutes les tâches à l'être humain.

L'étude des systèmes asservis et des systèmes de régulation est très vaste et variée; elle englobe les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires, ainsi que les systèmes continus en fonction du temps et ceux échantillonnés. Ce cours est consacré principalement à l'étude des systèmes linéaires continus à une variable.

Ce polycopié est divisé en sept chapitres. Le premier chapitre rappelle les principales définitions, théorèmes et propriétés de la transformation de Laplace, qui est un outil mathématique très puissant pour la résolution des équations différentielles régissant les systèmes. Dans le deuxième chapitre, on aborde la terminologie et les concepts de base des systèmes asservis, ainsi que les différents éléments qui constituent une chaîne de régulation, et les différents types de systèmes asservis. Plusieurs exemples sont présentés pour introduire ces concepts nouveaux pour l'étudiant. Les schémas fonctionnels et les fonctions de transfert des systèmes ainsi que les différents théorèmes de transformation utilisés lors de la manipulation des schémas en bloc sont abordés dans le troisième chapitre.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation des différentes méthodes utilisées pour l'analyse des systèmes asservis. En premier lieu, sont présentés les signaux typiques utilisés dans l'analyse expérimentale des systèmes, ensuite sont exposés les deux types d'analyse, à savoir l'analyse temporelle (ou transitoire) et l'analyse fréquentielle (ou harmonique). Les différents concepts liés à cette analyse sont introduits en fin du chapitre, tels que l'aspect statique et dynamique, la précision, la stabilité, ainsi que les différents critères de performances des systèmes asservis. La stabilité des systèmes par les différentes méthodes (Routh, Hurwitz et fractions continues) est traitée dans le cinquième chapitre.

Le sixième chapitre se concentre sur la classification des systèmes, les constantes d'erreurs, la précision et la sensibilité des systèmes asservis. Le septième chapitre, quand à lui, il traite des différents diagrammes et abaques employés dans l'étude des systèmes asservis : Bode, Nichols (ou Black) et Nyquist. Les différents critères (graphiques) de stabilité y sont aussi présentés.

Le huitième et dernier chapitre de ce polycopié, aborde la correction des systèmes asservis, et traite les différents types de correcteurs utilisés dans ce domaine.

La table des transformées de Laplace des fonctions très utilisées et les principaux termes en asservissement et régulation traduits en anglais sont annexés à ce polycopié.

## Chapitre 1: Rappels sur la transformée de Laplace

Souvent pour faciliter les calculs mathématiques, on procède à une transformation d'espace (de l'espace original, comme celui du temps, à un autre espace, l'espace des transformées). Dans le cas de l'analyse mathématique des systèmes asservis, on utilise la transformée de Laplace, qui est un outil mathématique très puissant dans la résolution des équations différentielles, cette méthode de calcul est appelée : calcul opérationnel. La transformation de Laplace repose essentiellement sur l'emploi de l'opérateur  $P$  (noté aussi  $s$  dans certaines références).

### I. Définition :

A toute fonction du temps  $x(t)$  ; on fait correspondre une fonction notée  $X(P)$  telle que :

$$X(P) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-Pt} dt$$

$P$  est une variable complexe tel que :  $P = \alpha + \beta j$ ,

$\alpha$  et  $\beta$  étant des variables réelles.

### Exemple :

Soit à déterminer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$$x_1(t) = u(t), \quad \text{alors } X_1(P) = \mathcal{L}[x_1(t)] = \int_0^{\infty} u(t) e^{-Pt} dt$$

$$X_1(P) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-Pt} dt = \left[ -\frac{1}{P} e^{-Pt} \right]_0^{\infty} = \left[ -\frac{1}{P} (0 - 1) \right] = \frac{1}{P}$$

$$x_2(t) = t, \quad \text{alors } X_2(P) = \mathcal{L}[x_2(t)] = \int_0^{\infty} t e^{-Pt} dt$$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-Pt} dt \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} u'(t) = 1 dt \\ v(t) = -\frac{1}{P} e^{-Pt} \end{cases}$$

$$X_2(P) = \left[ -\frac{t}{P} e^{-Pt} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{P} \int_0^{\infty} e^{-Pt} dt = 0 + \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{P} = \frac{1}{P^2}$$

$$x_3(t) = e^{at}, \quad \text{alors } X_3(P) = \mathcal{L}[x_3(t)] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-Pt} dt$$

$$X_3(P) = \int_0^{\infty} e^{-(P-a)t} dt = \left[ -\frac{1}{(P-a)} e^{-(P-a)t} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{P-a} = \frac{1}{P-a}$$

On dit que  $X(P)$  est l'unique image de  $s(t)$ . D'une manière réciproque, il existe une transformation inverse qui permet de retrouver  $x(t)$  à partir de  $X(P)$ .

En connaissant  $X(P)$ , on peut connaître  $x(t)$  soit en servant de la table des transformées, soit en utilisant l'intégrale de Mellin-Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} X(P) e^{Pt} dP$$

## II. Propriétés des transformées de Laplace :

### a) Unicité :

à  $x(t)$ , il existe une unique transformée  $X(P)$  et à  $X(P)$ , il existe une unique transformée inverse  $x(t)$

### b) Linéarité :

Si :

$$a. x_1(t) \rightarrow a. X_1(P) \quad \text{et} \quad b. x_2(t) \rightarrow b. X_2(P)$$

Alors :

$$a. x_1(t) + b. x_2(t) \rightarrow a. X_1(P) + b. X_2(P)$$

### c) Théorème de la dérivation :

Si :

$$x(t) \rightarrow X(P)$$

Alors :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{dx(t)}{dt} \right] \rightarrow PX(P) - x(0)$$

En général :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^m x(t)}{dt^m} \right] \rightarrow P^m X(P) - \sum_{i=0}^{m-1} P^{m-1-i} \frac{d^i x(0)}{dt^i}$$

Si :

$$m = 2$$

Alors :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right] = P^2 X(P) - Px(0) - x'(0)$$

### d) Théorème de l'intégration :

Soit :

$$x(t) \rightarrow X(P)$$

Alors :

$$\int_0^t x(t) dt \rightarrow \frac{X(P)}{P}$$

**e) Théorème des limites :**

Il est possible d'obtenir les valeurs initiales et finales de  $x(t)$  à partir de sa transformée de Laplace.

- Valeur initiale :  $x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{P \rightarrow \infty} PX(P)$
- Valeur finale :  $x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{P \rightarrow 0} PX(P)$

**f) Théorème du retard :**

Soit :

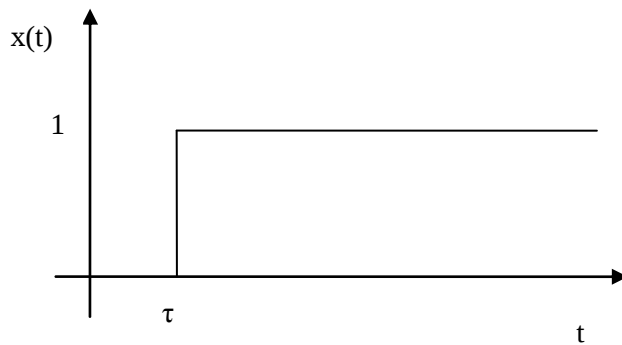
$$x(t) \rightarrow X(P)$$

Alors :

$$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = e^{-P\tau} X(P)$$

La fonction  $x(t - \tau)$  est en retard par rapport à  $x(t)$ .

Exemple : soit une fonction  $x(t)$  donnée par le graphe suivant :



$$\text{alors : } X(P) = \frac{1}{P} e^{-P\tau}$$

**g) Changement d'échelle :**

$$\text{soit } x(t) \rightarrow X(P) \text{ alors : } x(\sigma t) \rightarrow \frac{1}{\sigma} X\left(\frac{P}{\sigma}\right)$$

**h) Translation :**

Soit :

$$x(t) \rightarrow X(P)$$

Alors :

$$\mathcal{L}[e^{\sigma t} x(t)] = X(P - \sigma)$$

## Chapitre 2 : Introduction sur les asservissements

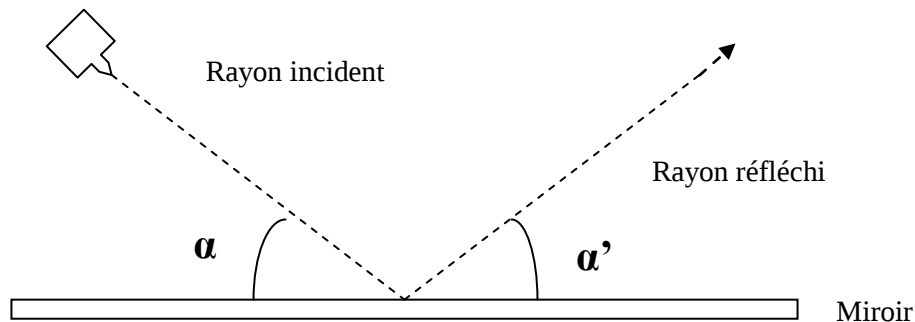
### I. Définitions :

#### a) Définition 1:

Un système asservi est un ensemble d'objets reliés les uns aux autres de telle sorte à commander, contrôler ou réguler, directement ou indirectement, un autre système ou bien lui-même.

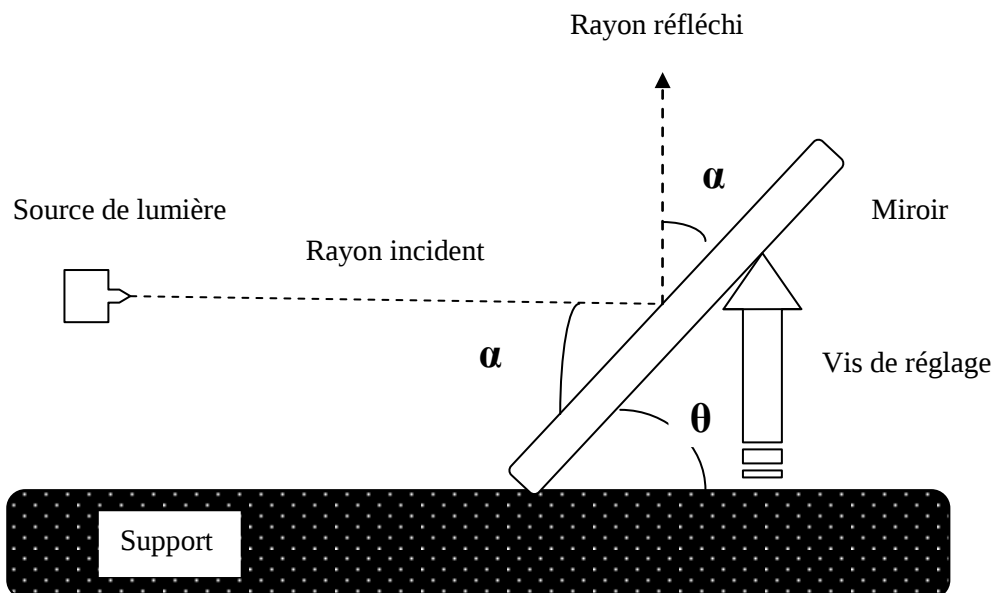
#### Exemples :

Source de lumière



- C'est un exemple très simple, l'angle de réflexion  $\alpha'$  est réglé par l'angle d'incidence  $\alpha$ , tel que :

$$\alpha' = \alpha$$



- L'exemple précédent est rendu plus automatique, le miroir pouvant pivoter et pouvant être relevé ou abaissé au moyen d'une vis, ce système est proprement dit : un système asservi, « l'angle de réflexion est réglé par la vis ».
- L'interrupteur électrique est un système asservi réglant le passage de l'électricité.

**b) Définition 2 :**

On appelle signal d'entrée l'excitation ou le stimulus appliqué au système asservi à partir d'une source d'énergie extérieure, en général, afin d'y provoquer une réponse spécifique.

**c) Définition 3 :**

On appelle un signal de sortie, la réponse effective obtenue à partir du système de commande. Elle peut coïncider ou non avec la réponse que doit normalement provoquer le signal d'entrée.

**Exemple :**

Un appareil de chauffage à thermostat d'une enceinte : on fixe la température en réglant le thermostat. La température qu'on veut (température de référence) est la grandeur d'entrée, la température effective constitue la grandeur de sortie.

- Un système asservi peut avoir une ou plusieurs entrées et aussi une ou plusieurs sorties.
- Les grandeurs qui influent sur un système et qui sont non désirées sont dites : ***perturbations*** ou ***parasites***.
- On distingue deux catégories de systèmes :

**d) Un asservissement :**

La sortie doit reproduire l'entrée qui varie constamment avec le temps. En d'autres termes, maintenir une erreur nulle entre entrée et sortie.

**e) Une régulation :**

La sortie doit rester constante quelles que soient les perturbations. Mais des fois, les deux fonctions peuvent coexister pour un même système.

**II. Les différents types de systèmes asservis :**

Il faut distinguer deux types de systèmes asservis :

**a) Système asservi non-linéaire :**

Il est régi par des équations différentielles non linéaires.

**b) Système asservi linéaire :**

Il est régi par des équations différentielles linéaires, à coefficients constants.

Un système est linéaire s'il répond aux deux conditions suivantes :

**La proportionnalité (homogénéité):**

Si on applique à l'entrée du système un signal  $x(t)$ , on aura en sortie un signal  $y(t)$ , et lorsqu'on multiplie  $x(t)$  par un coefficient  $k$  ( $k$  étant un réel),  $x(t)$  sera multipliée par  $k$ , c'est à dire :

$$\text{si } x(t) \rightarrow y(t) \text{ alors } k.x(t) \rightarrow k.y(t)$$

### L'additivité (superposition):

Si

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) \text{ et } x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

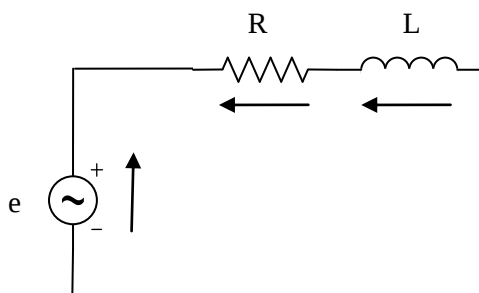
Alors :

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

Les systèmes asservis linéaires se divisent en deux groupes :

- Les systèmes asservis linéaires continus : variation continue en fonction du temps ;
- Les systèmes asservis linéaires discontinus : variation discontinue en fonction du temps (systèmes échantillonnés) ;

### Exemple



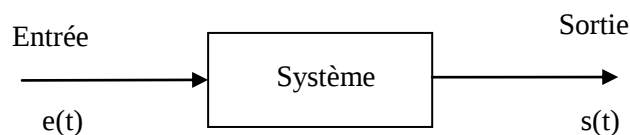
$$e = U_R + U_L = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

R et L sont constantes, et  $i(t)$  varie continuellement avec le temps, alors ce circuit est un système asservi linéaire continu

### III. Les principales propriétés des systèmes asservis :

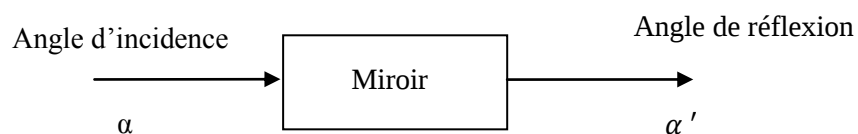
#### a) Système asservi en boucle ouverte :

Un système asservi est dit en boucle ouverte quand la grandeur d'entrée  $e(t)$  contrôle directement la grandeur de sortie  $s(t)$ . C'est à dire que le contrôle du système se fait indépendamment de la sortie.

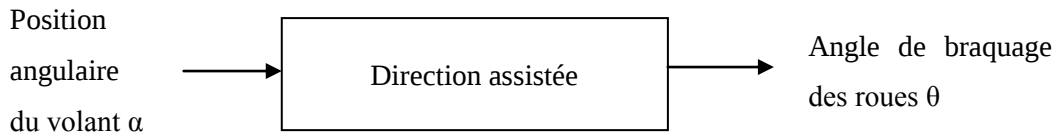


Exemples :

Le miroir :



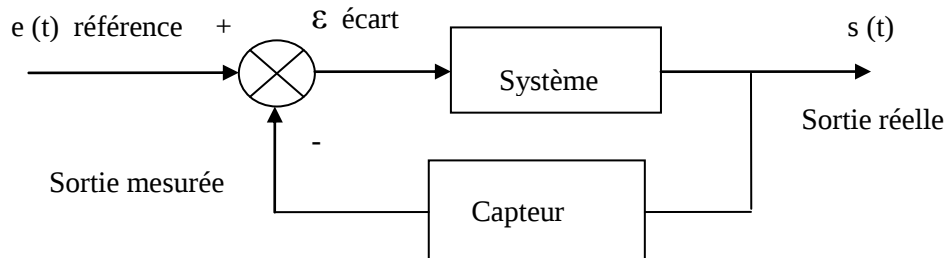
**Direction assistée de véhicule automobile :** constitué du volant (transmission de mouvements, mécanique), de l'assistance (hydraulique ou électrique) et des roues. C'est un système d'amplification de puissance, la puissance de commande est amplifiée par l'assistance pour obtenir la puissance de sortie.



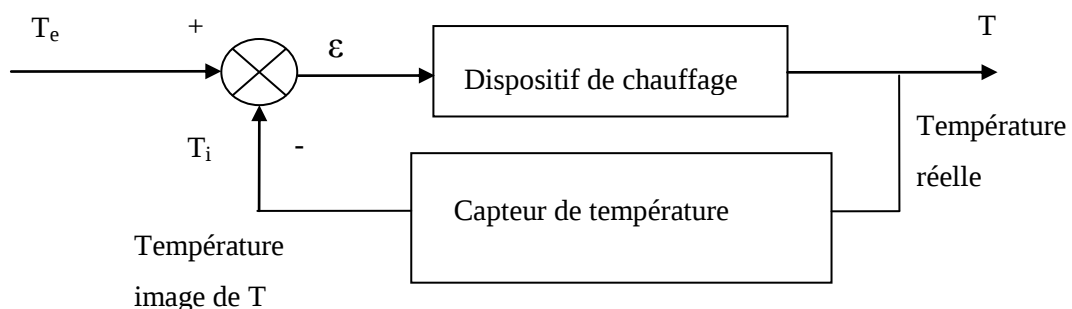
**b) Système asservi en boucle fermée (closed loop / Feedback) :**

Due aux entrées secondaires non désirées au système (bruits, perturbations, parasites, etc.), on aura alors des grandeurs de sortie faussées, pour éviter tout changement de la fonction du système, il va falloir prélever une fraction de la grandeur de sortie et la transformer en une grandeur de la même forme et de la même nature que celle de l'entrée et la comparer avec la valeur désirée par le système. Le contrôle du système dépend de la grandeur de sortie car il y a présence d'une chaîne de réaction (feedback) qui rend compte de la valeur de sortie qui est comparée avec celle d'entrée pour évaluer l'écart qui existe entre elles.

C'est un système asservi à chaîne de retour (boucle fermée). Normalement  $s(t)=e(t)$  mais puisque il y a présence de perturbations on a alors :  $s(t)=e(t)+\varepsilon$  alors le retour doit assurer un écart nul :  $\varepsilon = 0$ .



**Figure 2.1: schéma général d'un système en boucle fermée (retour, feedback)**

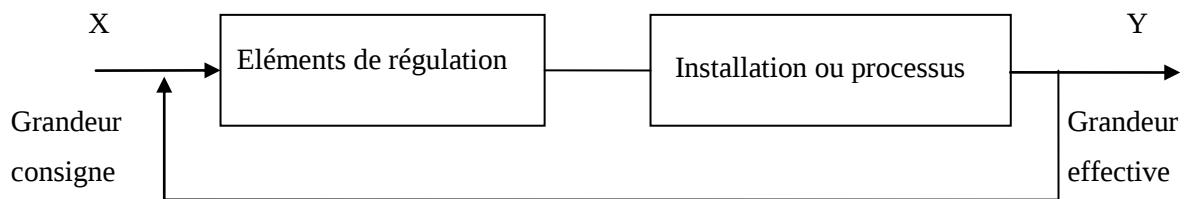


**Figure 2.2: Structure générale d'un système de régulation de température**

### c) Système asservi point de vue régulation :

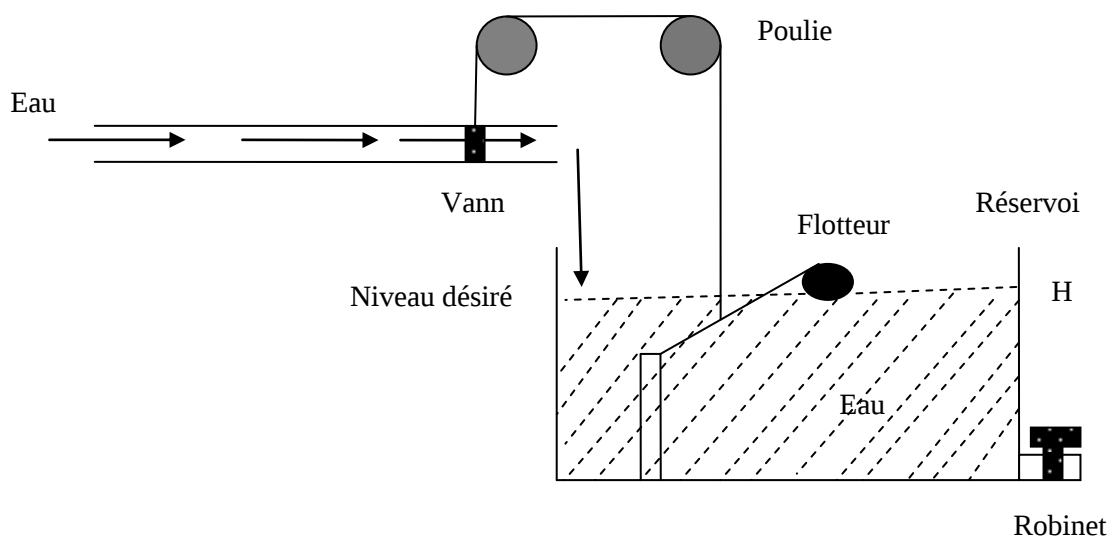
C'est un système de commande de chaîne fermée, la régulation est le processus lors duquel une grandeur (grandeur réglée de sortie : valeur effective) est constamment comparée à une autre grandeur (grandeur de conduite : valeur consigne, désirée) pour l'amener à cette dernière grandeur. Le déroulement de ce processus s'effectue en un circuit fermé : c'est la régulation.

C'est à dire que la sortie doit restée constante quelles que soient les perturbations, tandis que dans un système asservi, la sortie doit suivre l'entrée toujours. Ces systèmes de régulation sont très utilisés dans la vie quotidienne : four, véhicule, etc.



### Exemple d'un système de régulation avec équilibrage :

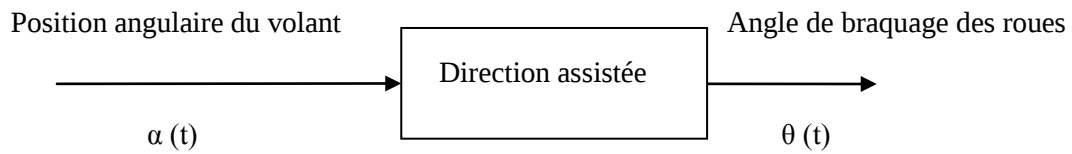
Ce système est destiné à remplir le réservoir d'eau. Il doit automatiquement couper l'eau quand le réservoir est au niveau désiré (H). Le flotteur flotte sur l'eau, au fur et à mesure qu'il s'élève, il ferme la vanne d'arrivée d'eau. Le robinet sert pour l'équilibrage (et pour vider le réservoir).



### d) Système asservi point de vue servomécanisme :

C'est un système asservi à chaîne fermée dont le rôle est d'amplifier une puissance dont la grandeur de sortie est une position mécanique.

**Exemple :**



**Direction assistée de véhicule automobile :**

Réaction du volant d'un véhicule sur la position des roues. La grandeur de sortie est une position angulaire des roues résultant de la position angulaire du volant mais amplifiée par un système de transformation d'énergie.

**e) Les transducteurs :**

Ce sont des éléments constituant généralement des éléments de la chaîne de retour ou des fois à l'entrée du système, et qui ont pour but de transformer une forme d'énergie en une autre.

**Exemple :**

- Potentiomètre (position mécanique → variation du potentiel : énergie électrique).
- Génératrice électrique : qui transforme l'énergie mécanique de rotation du rotor en une énergie électrique au niveau du stator.

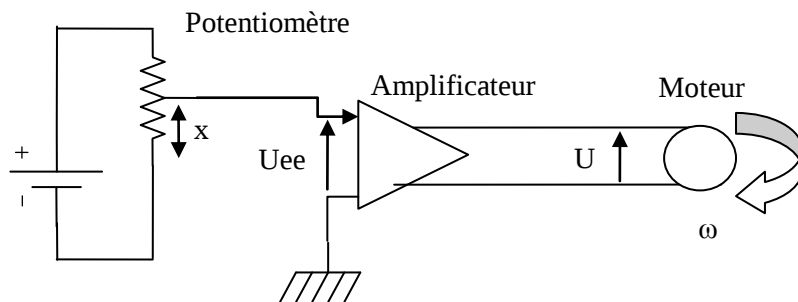
## Chapitre 3 : Schémas fonctionnels et fonctions de transfert des systèmes asservis

### I. Schémas fonctionnels des systèmes asservis

Un système asservi représenté par un ou plusieurs blocs, ces blocs représentent soit le système réglé, soient les équipements de contrôle, soient les éléments de la chaîne de retour. Les variables peuvent exister aussi, al grandeur d'entrée, celle de sortie, les perturbations et la grandeur réglante.

#### a) Exemple : schéma fonctionnel d'un système asservi de commande de vitesse.

Il est possible de commander avec une énergie faible, la vitesse de rotation  $\omega$  d'un moteur électrique à courant continu de grande puissance en agissant sur la position du curseur d'un potentiomètre alimenté en courant continu dont la tension est appliquée par l'intermédiaire d'un amplificateur à l'induit du moteur.



On conçoit que le système est soumis à une perturbation telle qu'une modification du gain de l'amplificateur ou du couple résistant appliqué sur l'arbre du moteur, la vitesse du moteur changera. Ce système peut être représenté par le schéma fonctionnel de la figure dans lequel on a représenté la perturbation qui peut être un couple appliqué sur l'arbre du moteur.

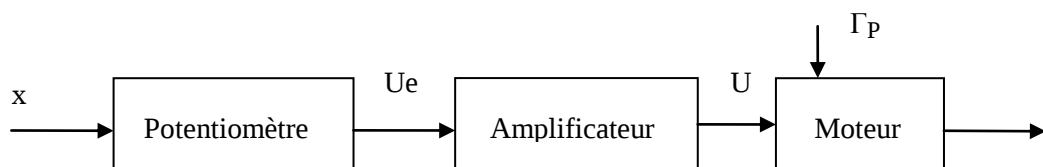
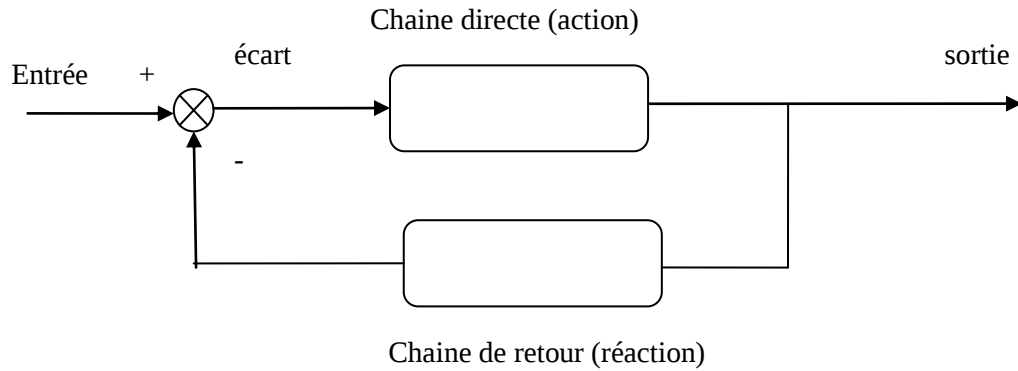


Figure 3.1: schéma fonctionnel du système de commande de vitesse.

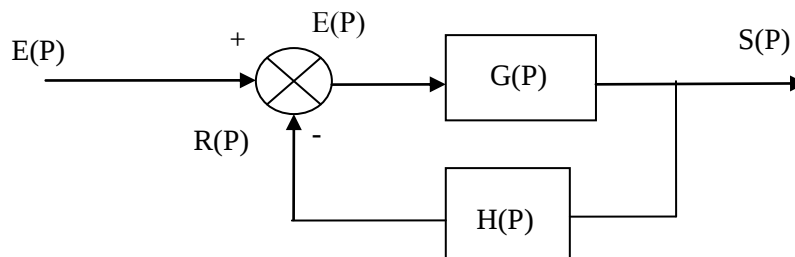
#### b) Schéma fonctionnel d'un système asservi quelconque :

A la lumière de l'exemple précédent, il est possible de mettre en évidence des éléments que l'on retrouve dans tous les systèmes asservis, on symbolise ce comportement par le schéma fonctionnel général suivant :



## II. Fonctions de transfert des systèmes asservis :

Il est possible de représenter un système sur lequel s'exerce une perturbation par le schéma fonctionnel suivant :



Où :

$E(P)$  : désigne la transformée de Laplace de l'entrée  $e(t)$  ;

$S(P)$  : désigne la transformée de Laplace de l'entrée  $s(t)$  ;

$\varepsilon(P)$  : désigne la transformée de Laplace de l'écart  $\varepsilon(t)$  ;

$P(P)$  : désigne la transformée de Laplace de la perturbation  $P(t)$  ;

On désigne par  $G(P)$  et  $H(P)$  les fonctions de transferts suivantes :

$G(P) = \frac{S(P)}{\varepsilon(P)}$  : La fonction de transfert de la chaine directe ;

$H(P) = \frac{R(P)}{S(P)}$  : La fonction de transfert de la chaine de retour ;

$T(P) = G(P) \cdot H(P)$  : La fonction de transfert en boucle ouverte ;

$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$  : La fonction de transfert totale, relative à l'entrée principale ;

On peut calculer  $F(P)$  comme suit :

$$S(P) = \varepsilon(P) \cdot G(P) \quad \text{sans tenir compte de la perturbation}$$

Or

$$\varepsilon(P) = E(P) - R(P)$$

et

$$R(P) = S(P) \cdot H(P)$$

Alors

$$\varepsilon(P) = E(P) - S(P) \cdot H(P)$$

Donc :

$$S(P) = [E(P) - S(P).H(P)].G(P)$$

D'où :

$$S(P) = E(P).G(P) - S(P).G(P).H(P)$$

Alors :

$$S(P) + S(P).G(P).H(P) = E(P).G(P)$$

D'où :

$$S(P)(1 + G(P).H(P)) = E(P).G(P)$$

Et finalement on a :

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{G(P)}{1 + G(P).H(P)}$$

### III. Analyse des systèmes linéaires

La fonction de transfert est une relation fonctionnelle qui lie l'entrée à la sortie et rend compte de l'état physique du système. Cette relation est une équation différentielle dont la forme générale est :

$$\begin{aligned} B_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + B_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + B_1 \frac{ds(t)}{dt} + B_0 s(t) \\ = A_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + A_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + A_1 \frac{de(t)}{dt} + A_0 e(t) \end{aligned}$$

Avec :  $B_n, B_{n-1}, \dots, B_0, A_m, A_{m-1}, \dots, A_0$  : des coefficients constants.

Alors pour calculer la réponse  $s(t)$  du système, on peut appliquer la transformation de Laplace à l'équation différentielle précédente.

#### a) Forme générale de la fonction de transfert :

Si

$$E(P) = \mathcal{L}[e(t)]$$

Et

$$S(P) = \mathcal{L}[s(t)]$$

Et en supposant les conditions initiales nulles (c'est à dire :  $e(0) = 0$  et  $s(0) = 0$ )

Alors :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^m e(t)}{dt^m}\right] = P^m E(P)$$

et

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] = P^n S(P)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle  $e(t)$ ,  $s(t)$  et leurs dérivées successives par leurs transformées de Laplace, il vient la relation :

$$S(P)[B_n P^n + B_{n+1} P^{n+1} + \dots + B_1 P + B_0] = E(P)[A_m P^m + A_{m+1} P^{m+1} + \dots + A_1 P + A_0]$$

On désigne par  $F(P)$ , la fonction de transfert de ce système donnée par :

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{A_m P^m + A_{m+1} P^{m+1} + \dots + A_1 P + A_0}{B_n P^n + B_{n+1} P^{n+1} + \dots + B_1 P + B_0}$$

Cette fonction analytique (rapport de deux polynômes à variable  $P$ )

$$F(P) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (P + z_i)}{\prod_{i=1}^n (P + p_i)}$$

Où :

$z_i$  : sont les racines ou zéros du numérateur  
 $p_i$  : les racines ou pôles du dénominateur

### Conditions initiales différentes de zéro :

Si à  $t = 0$  par exemple où l'on applique  $e(t)$  au système son entrée et sa sortie ont des valeurs  $e_0$  et  $s_0$  non nulles alors :

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{A_m P^m + A_{m+1} P^{m+1} + \dots + A_1 P + A_0}{B_n P^n + B_{n+1} P^{n+1} + \dots + B_1 P + B_0} E(P) + \frac{P(P)}{B_n P^n + B_{n+1} P^{n+1} + \dots + B_1 P + B_0}$$

$P(P)$  étant un polynôme en  $P$  qui dépend des valeurs initiales de  $e_0$  et  $s_0$  et de leurs dérivées successives à  $t = 0$ .

### Remarque sur le plan complexe :

On sait que :

$$F(P) = \frac{\prod_{i=1}^m (p + z_i)}{\prod_{i=1}^n (p + p_i)}$$

Les zéros et les pôles sont donc les racines du numérateur et du dénominateur, ils peuvent être nuls, réels ou complexes.

### Exemple :

$$F(P) = \frac{2P^2 - 2P - 4}{P^3 + 5P^2 + 8P + 6}$$

$F(P)$  peut se mettre sous la forme :

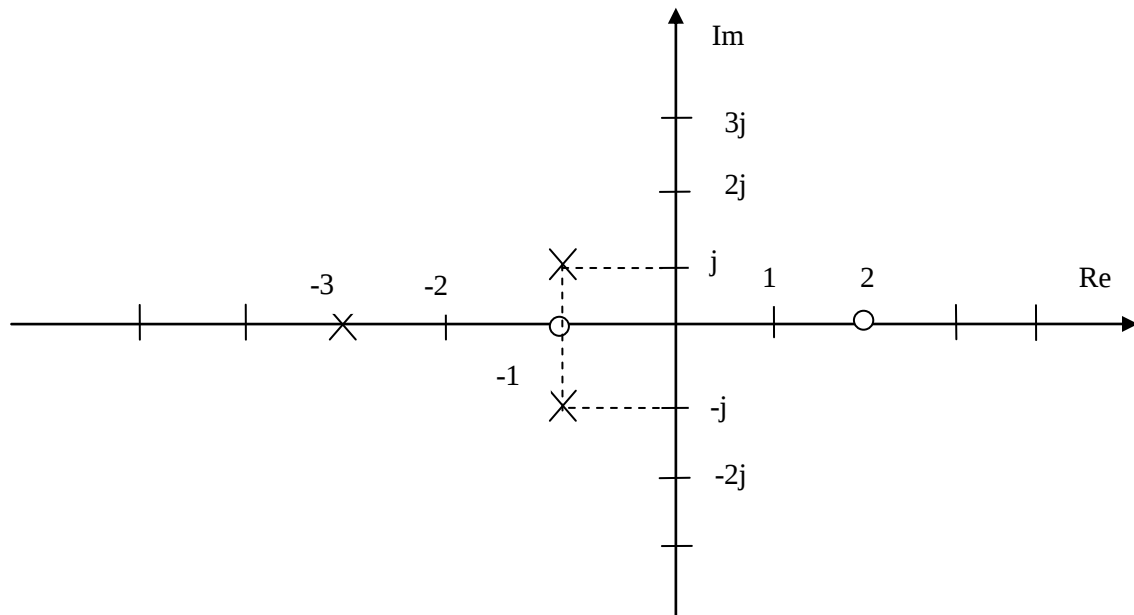
$$F(P) = \frac{2(P + 1)(P - 2)}{(P + 3)(P + 1 + j)(P + 1 - j)}$$

$F(P)$  admet comme zéros :  $P = -1$  et  $P = +2$

$F(P)$  admet comme pôles :  $P = -3$ ,  $P = -1 - j$  et  $P = -1 + j$

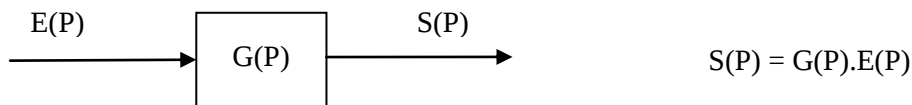
Pour tout nombre complexe, il y a une partie réelle et une partie imaginaire. On définit alors un plan complexe ou plan des  $P$  tels qu'on a en abscisse la partie réelle et en ordonnée la partie imaginaire. Un

pôle est noté symboliquement par une croix(x), et un zéro par un petit rond (o). Pour l'exemple ci-dessus, on peut représenter le plan complexe comme suit :



#### b) Analyse de l'influence de la réaction :

##### Boucle ouverte :



Pour un système idéal, la fonction  $G(P)$  est constante. En fait  $G(P)$  ne peut être constante que dans un domaine limité.

Considérons d'autre part la sensibilité du système vis à vis de variations éventuelles des paramètres intervenant dans sa fonction de transfert :

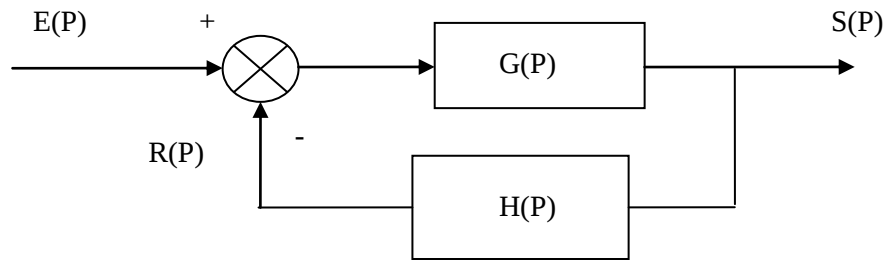
Du moment que  $e(t)=cste$  alors :  $E(P)=cste$  ce qui implique que :  $\Delta E(P)=0$

$$\Delta S(P) = \Delta[G(P).E(P)] = E(P).\Delta G(P) + G(P).\Delta E(P) = E(P).\Delta G(P)$$

$$\frac{\Delta S(P)}{S(P)} = \frac{E(P).\Delta G(P)}{E(P).G(P)} = \frac{\Delta G(P)}{G(P)} \dots\dots\dots (1)$$

Donc : une variation relative  $\frac{\Delta G(P)}{G(P)}$  de la fonction de transfert du système entraîne une variation identique de la grandeur commandée. Donc un système en boucle ouverte est très sensible aux perturbations.

**Boucle fermée :**



En supposant que  $E(P)=cste$  et  $H(P)=cste$

Donc seule la fonction de transfert  $G(P)$  qui est sensible aux perturbations.

$$\Delta E(P) = 0, \quad \Delta H(P) = 0$$

On a:

$$\Delta S(P) \cong dS(P) \text{ et } \Delta G(P) \cong dG(P)$$

D'où :

$$dS(P) = \frac{d(GE) \cdot [1 + GH] - G \cdot E \cdot d[1 + GH]}{(1 + GH)^2} = \frac{E \cdot dG \cdot [1 + GH] - G \cdot E \cdot HdG}{(1 + GH)^2}$$

$$dS(P) = \frac{EdG + EGHdG - EGHdG}{(1 + GH)^2} = \frac{dG(P)}{(1 + GH)^2} \cdot E(P)$$

$$\frac{dS(P)}{dG(P)} = \frac{1}{(1 + GH)^2} \cdot E(P)$$

Donc

:

$$\frac{\Delta S(P)}{\Delta G(P)} = \frac{1}{(1 + GH)^2} \cdot E(P)$$

Or:

$$S(P) = \frac{G(P)}{1 + G(P) \cdot H(P)} \cdot E(P)$$

Alors :

$$\frac{\Delta S(P)}{S(P)} = \frac{E(P) \cdot \Delta G(P)}{(1 + GH)^2} \cdot \frac{(1 + G(P) \cdot H(P))}{G(P) \cdot E(P)} = \frac{1}{(1 + G(P) \cdot H(P))} \cdot \frac{\Delta G(P)}{G(P)}$$

Finalement :

$$\frac{\Delta S(P)}{S(P)} = \frac{1}{(1 + G(P) \cdot H(P))} \cdot \frac{\Delta G(P)}{G(P)} \quad (2)$$

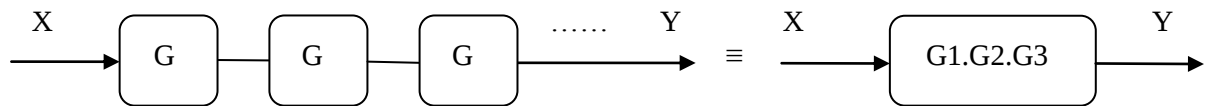
Le facteur

$$\frac{1}{(1 + G(P) \cdot H(P))} \text{ est très faible.}$$

Donc, en comparant l'expression (2) pour la boucle fermée avec l'expression (1) de la boucle ouverte, on voit clairement que l'influence des variations de  $G(P)$  est réduite par la présence d'une boucle de réaction. D'où le système en boucle fermée résiste mieux aux perturbations.

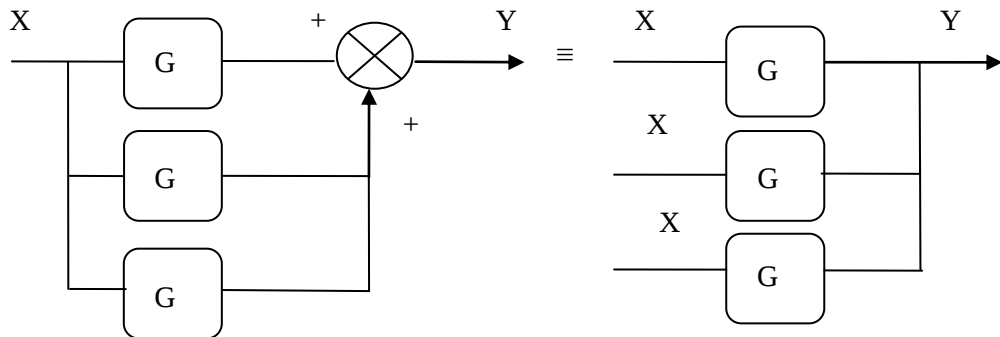
#### IV. Les théorèmes de transformation :

##### a) Combinaison en cascade :



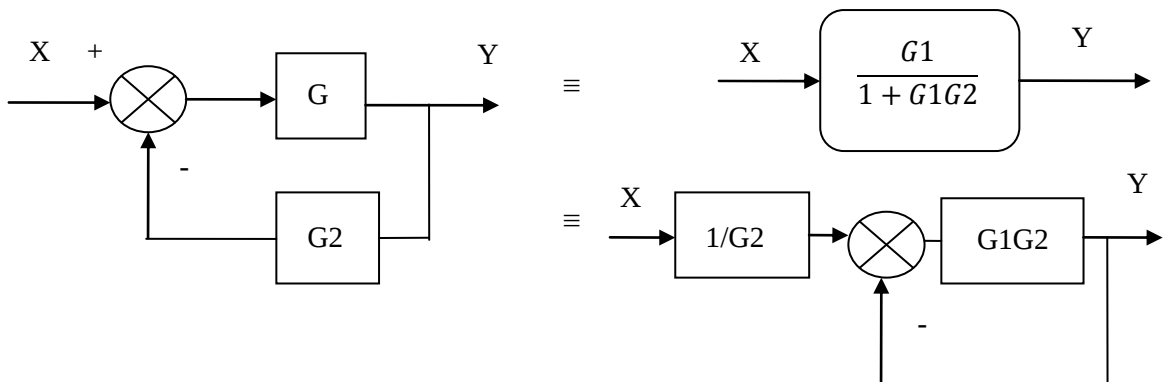
$$Y = (((X.G1).G2).G3) \dots = X.(G1.G2.G3 \dots)$$

##### b) Combinaison en parallèle :



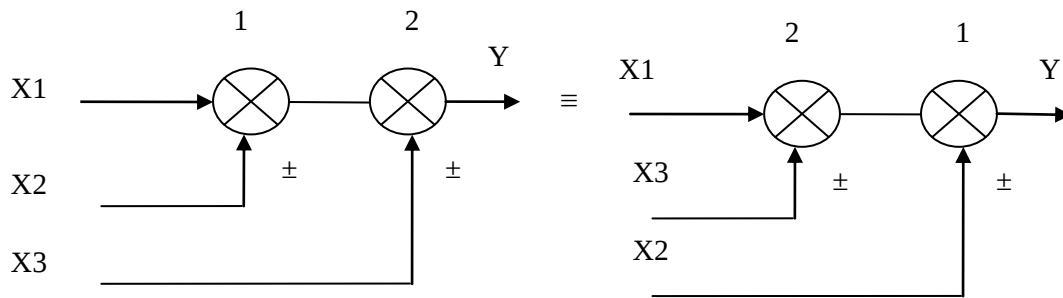
$$Y = X.G1 + X.G2 + X.G3 + \dots = X.(G1 + G2 + G3 + \dots)$$

##### c) Elimination de la boucle de retour :



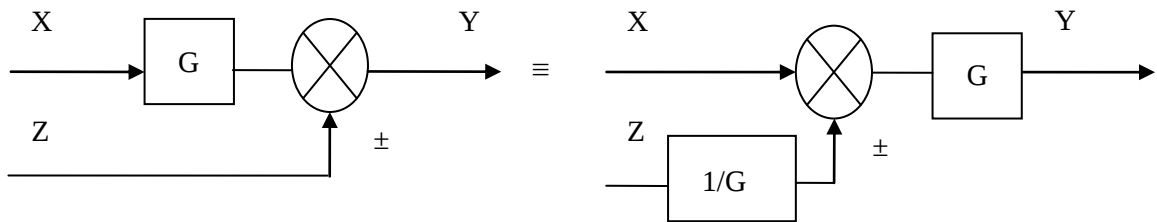
$$Y = \frac{G1}{1 + G1G2} . X$$

**d) Arrangement des points de sommation :**



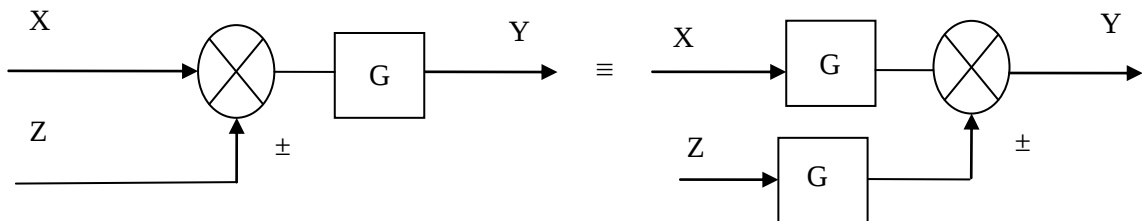
$$Y = (X1 \pm X2) \pm X3 = (X1 \pm X3) \pm X2$$

**e) Déplacement en aval d'un point de sommation :**



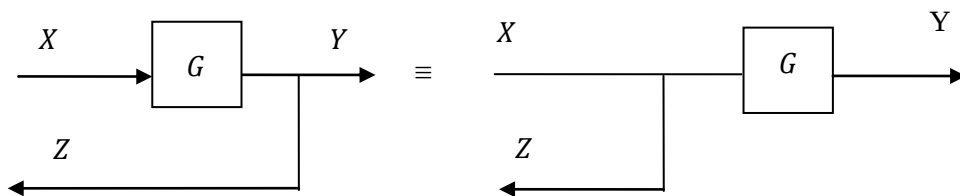
$$Y = XG \pm Z = \left[ X \pm \left( Z * \frac{1}{G} \right) \right] * G$$

**f) Déplacement en amont d'un point de sommation :**



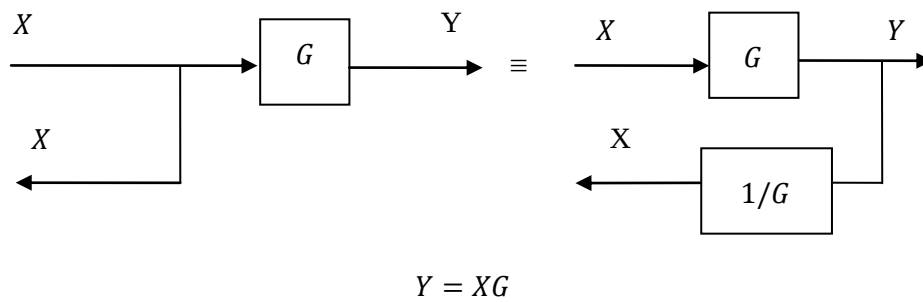
$$Y = (X \pm Z)G = XG \pm ZG$$

**g) Déplacement en aval d'un point :**

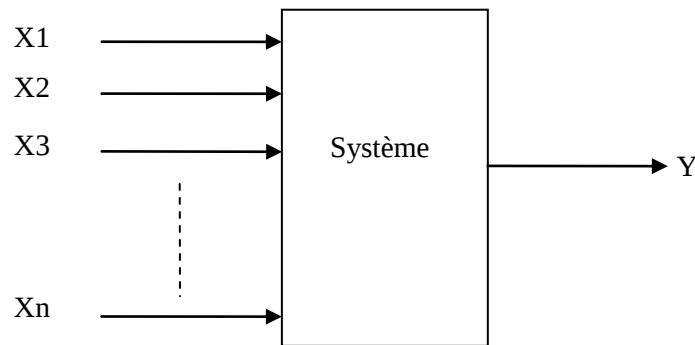


$$Y = XG$$

**h) Déplacement en amont d'un point :**



**i) Plusieurs entrées : la loi de superposition**



Dans le cas où un système subit plusieurs entrées, on doit alors traiter chaque entrée séparément en passant par les étapes suivantes :

**Première étape :** poser toutes les entrées nulles sauf une seule

**Deuxième étape :** arranger tous les blocs et simplifier le schéma fonctionnel en forme canonique

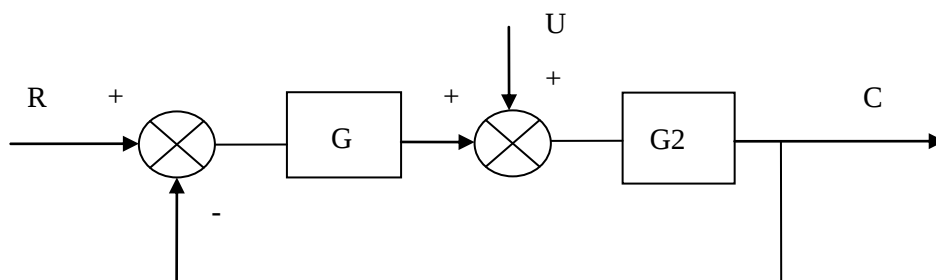
**Troisième étape :** évaluer la réponse du système due à l'entrée choisie

**Quatrième étape :** répéter les étapes : 1, 2,3 pour chaque entrée

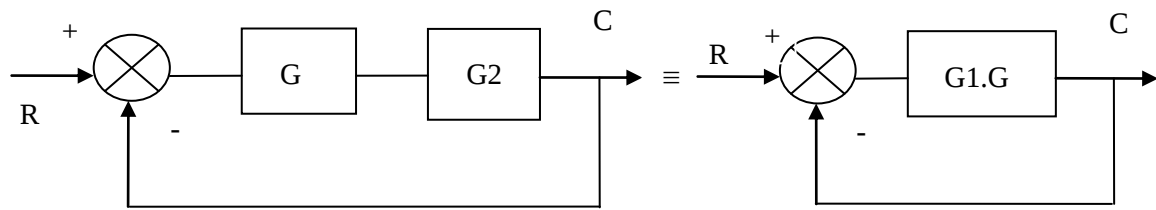
**Cinquième étape :** additionner algébriquement toutes les réponses du système déterminées par les étapes précédentes. Cette somme représente la réponse totale du système avec toutes les entrées agissant simultanément.

**Exemple : (Deux entrées)**

Évaluer la réponse totale du système suivant :



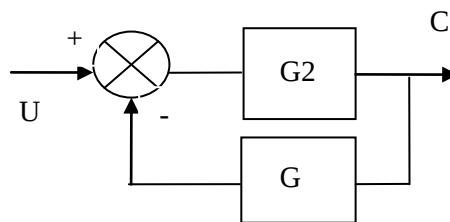
**1ère étape :** on pose  $U=0$  et  $R \neq 0$ .



Donc :

$$C_1 = \frac{G1.G2}{1 + G1.G2} \cdot R$$

**2ème étape :** on pose  $R=0$  et  $U \neq 0$ .



Donc :

$$C_2 = \frac{G2}{1 + G1.G2} \cdot U$$

Alors la réponse totale du système est la somme algébrique des deux réponses particulières, comme suit :

$$C = C_1 + C_2 = \frac{G1.G2}{1 + G1.G2} \cdot R + \frac{G2}{1 + G1.G2} \cdot U$$

## Chapitre 4 : Méthodes d'analyses des systèmes linéaires à une variable

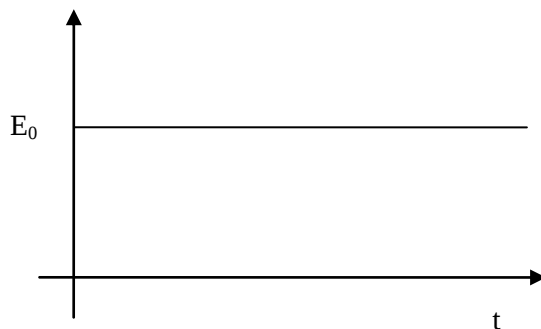
On entend ici par analyse d'un système, la recherche expérimentale et l'étude des propriétés de sa fonction de transfert. Le problème le plus général consiste en la recherche de la représentation mathématique (ou modèle mathématique) du système

### I. Nature des signaux d'entrée :

Dans l'analyse des systèmes, on utilise une famille particulière de fonctions pour plusieurs raisons.

#### a) Fonction Echelon :

C'est une fonction du temps définie par :

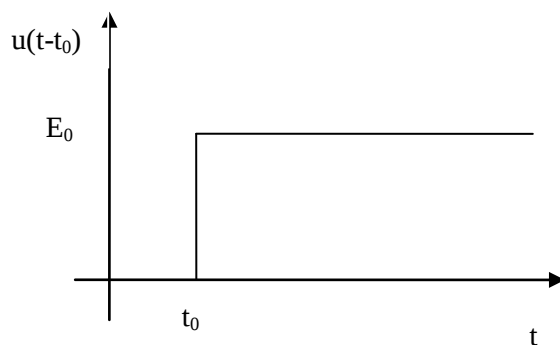


$$u(t) = \begin{cases} E_0 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Dans le cas particulier où  $E_0 = 1$ , on dit que l'on a un échelon unitaire ou fonction de Heaviside, définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La fonction retardée de est définie comme :



$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

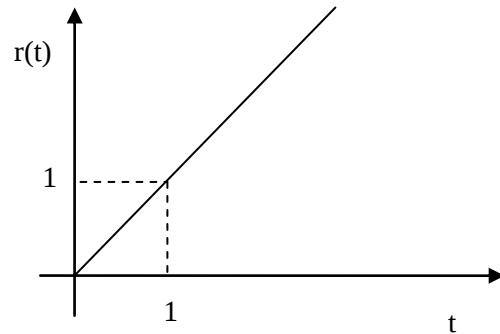
#### b) Fonction rampe :

C'est la fonction du temps définie comme étant l'intégrale d'un échelon tel que :

$$r(t) = \int_0^t u(t) dt = t \cdot u(t)$$

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$\text{donc : } u(t) = \frac{d[r(t)]}{dt}$$

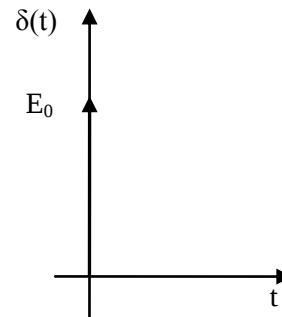


Pour la fonction retardée de  $t_0$  :  $r(t - t_0) = \int_0^t u(t - t_0) dt = \int_{t_0}^t u(t - t_0) dt = (t - t_0) \cdot u(t)$

### c) Fonction impulsion :

C'est la distribution appelée fonction de Dirac. Elle est définie comme une impulsion centrée à l'origine, tel que :

$$\delta(t) = \begin{cases} E_0 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$



Pour l'impulsion unité :

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

On peut remarquer que :

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

De manière analogue, l'impulsion retardée est définie comme :

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

## II. Les méthodes expérimentales d'analyse des systèmes asservis :

Les méthodes d'analyse permettent de trouver un modèle à partir d'une suite temporelle de valeurs d'entrée et de sorties. Parmi ces méthodes, il ya l'analyse transitoire et l'analyse harmonique.

Dans l'analyse transitoire (ou analyse temporelle), on s'intéresse au régime transitoire de la sortie d'un système auquel on a appliqué l'un ou l'autre de certains signaux d'entrée typiques (impulsion unitaire, échelon unitaire, etc.). Expérimentalement, l'analyse transitoire, qui nécessite théoriquement un seul

essai, est une méthode rapide et facile à mettre en œuvre dans la plus part des cas ; cependant les résultats de cette analyse manquent de précision.

Dans l'analyse harmonique (ou analyse fréquentielle), on considère le régime permanent de sortie correspondant à des entrées variant sinusoïdalement à différents fréquences. Expérimentalement, cette méthode d'analyse est longue et parfois difficile à mettre en œuvre.

#### a) Analyse transitoire (ou analyse temporelle):

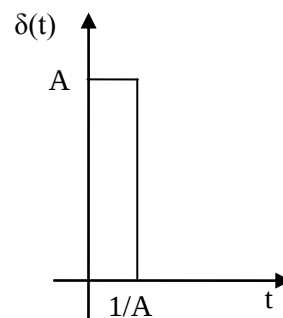
**Réponse d'un système linéaire à un signal Impulsion unitaire :**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \text{ donc } E(P) = 1$$

$$\text{avec } F(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$$

$$\text{alors : } F(P) = S(P)$$

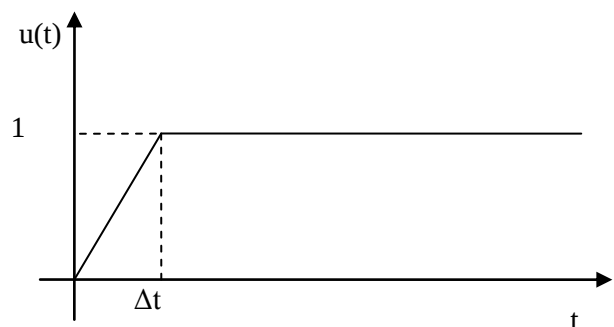


Donc : la connaissance de la réponse à une impulsion unitaire d'un système linéaire caractérise bien le système puisqu'elle est équivalente à celle de sa fonction de transfert.

Expérimentalement, on peut se rapprocher d'une entrée en impulsion unitaire en appliquant à un système un signal d'amplitude très élevée pendant un temps assez court pour que le système n'ait pas la possibilité de réagir sensiblement. Mais on risque alors de sortir du domaine de linéarité du système et on est limité dans la pratique à des signaux de faible amplitude, la sortie est alors difficile à observer.

**Réponse d'un système linéaire à un signal échelon unitaire :**

$$U(P) = \frac{1}{p} \text{ alors } F(P) = \frac{S(P)}{P}$$



En connaissant  $S(P)$ , on peut connaître  $F(P)$ , l'utilisation de ce signal présente un avantage sur celle de l'impulsion unitaire : à amplitude égale, l'énergie mise en œuvre est beaucoup plus élevée et la sortie est plus facile à observer dans le cas de l'échelon unitaire qui est pratiquement le signal le plus utilisé en analyse transitoire.

**b) Analyse harmonique (ou Analyse fréquentielle):**

On va calculer la sortie en régime permanent correspondant à une entrée sinusoïdale :

$$e(t) = u(t) \cdot \sin(wt)$$

Signal d'amplitude unité et pulsation  $w$ , débutant à  $t=0$ .

$$E(P) = \frac{w}{P^2 + w^2} \quad \text{alors :} \quad F(P) = S(P) \cdot \frac{P^2 + w^2}{w}$$

L'analyse harmonique consiste à relever pour tout  $w$  (donc toute fréquence  $f$ , car  $w=2\pi f$ ) :

*le module  $|F(jw)|$  et l'argument de  $F(jw)$ , qui est  $\varphi(w)$*

Cette analyse ne peut se faire que pour les systèmes stables.

**c) Exemples de réponses transitoires et harmoniques :**

**i. Système du premier ordre :**

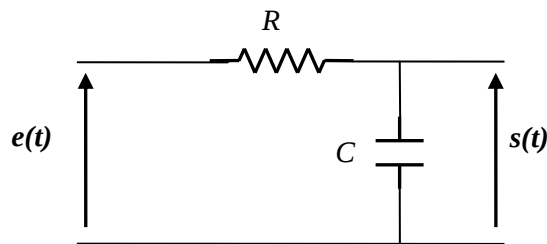
Ce sont les systèmes régi par une équation différentielle du premier ordre, donc de la forme de la forme :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

Donc :

$$F(P) = \frac{K}{1+\tau P}, \quad \tau : \text{constante du temps et } K : \text{gain statique}$$

Exemple : Soit le réseau électrique :



L'équation différentielle régissant ce système est :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

$$\text{Avec : } \tau = RC$$

La fonction de transfert est alors :

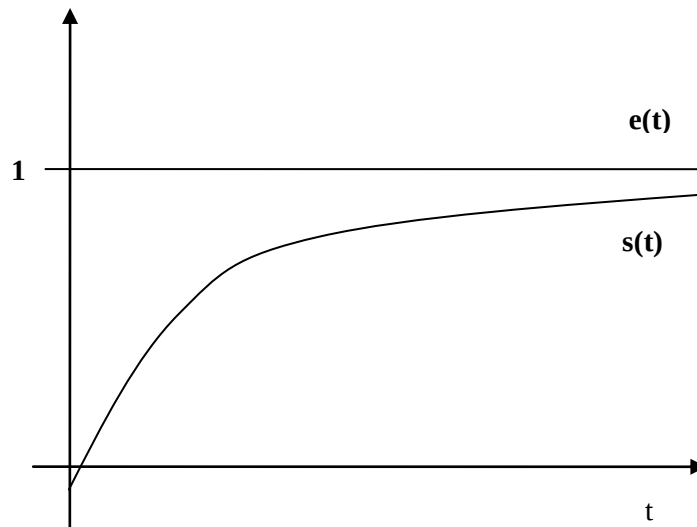
$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{1 + \tau P}$$

### 1) Analyse transitoire :

#### Echelon unitaire :

$$u(t) = 1 \text{ alors } E(P) = U(P) = \frac{1}{P} \text{ donc : } S(P) = \frac{1}{P(1 + \tau P)} = \frac{1}{P} - \frac{\tau}{1 + \tau P}$$

$$S(P) = \frac{1}{P} - \frac{1}{\frac{1}{\tau} + P} \text{ et alors : } s(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}$$



Au bout d'un temps assez long pour que la partie transitoire de la réponse puisse être considérée comme négligeable, le signal de sortie se trouve pratiquement confondu avec le signal d'entrée, le système a alors atteint son régime permanent.  $\tau$  caractérise la durée du régime transitoire de  $s(t)$ , elle est appelée : **constante du temps**.

#### Rampe :

$$e(t) = t \cdot u(t)$$

Alors

$$E(P) = \frac{1}{P^2}$$

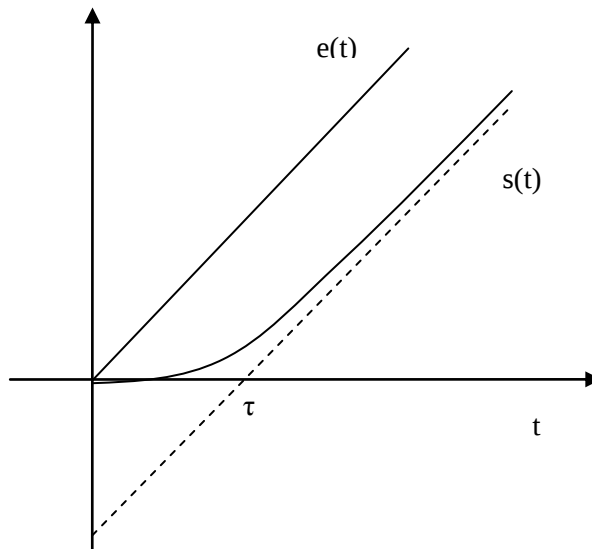
Donc :

$$S(P) = \frac{1}{P^2(1 + \tau P)}$$

$s(t)$  comporte un régime transitoire  $s_1(t) = \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$  qui devient négligeable.

Et en régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ ) :  $s_1(t) = t - \tau$ .

La constante du temps  $\tau$  régit la durée du régime transitoire.



## 2) Analyse harmonique :

Comme

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{1}{1 + \tau P}$$

alors :

$$F(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega\tau)}$$

On varie alors  $\omega$ , et on calcule à chaque fois le module  $|F(j\omega)|$  et l'argument  $\phi(\omega)$ .

### ii. Système du deuxième ordre :

Ce sont les systèmes régi par des équations différentielles du deuxième ordre, donc de la forme :

$$a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_0 e(t)$$

Et dans ce cas la fonction de transfert est :

$$F(P) = \frac{b_0}{a_2 P^2 + a_1 P + a_0}$$

Il faut noter que dans cette formule, tous les coefficients sont positifs. Cette fonction peut s'écrire aussi sous la forme canonique :

$$F(P) = G \cdot \frac{w_n^2}{P^2 + 2z w_n P + w_n^2}$$

Avec :

$G$ : Gain statique;

$w_n$  : Pulsation naturelle (ou pulsation propre non amortie) ;

$z$  : Coefficient d'amortissement.

Une étude détaillée de ces systèmes fera l'objet d'exercices en séance de Travaux Dirigés.

### III. Concepts utiles à l'analyse des systèmes asservis :

Dans l'analyse des systèmes asservis, on distingue deux aspects : l'aspect statique et l'aspect dynamique.

#### a) L'aspect statique :

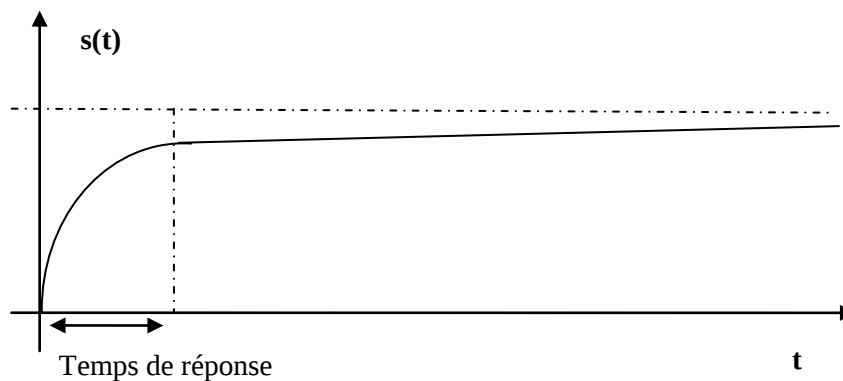
Concerne l'étude des systèmes asservis en mode régulation (entrée fixe), et on définit alors **l'erreur statique** (l'erreur qu'on s'efforcera d'annuler). C'est donc l'erreur qui subsiste lorsque le temps tend vers l'infini, en réponse à des signaux typiques (échelon, rampe, harmonique), cette erreur statique ou permanente caractérise la **précision statique**.

#### b) L'aspect dynamique :

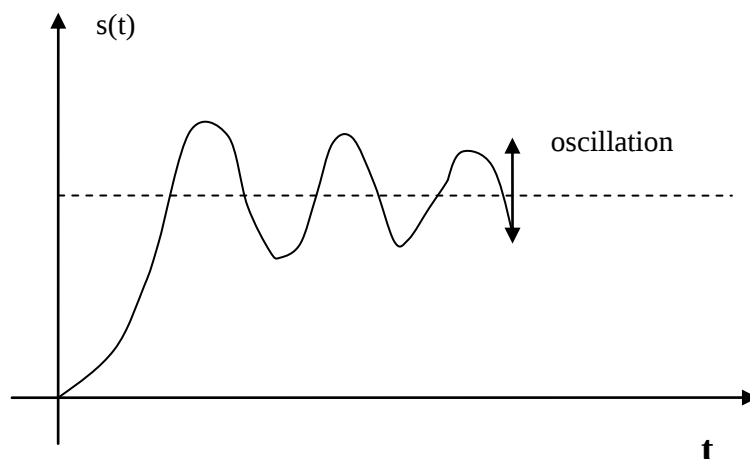
Concerne l'étude des systèmes asservis en réponse à des variations d'entrée et on définit alors **l'erreur transitoire** qui caractérise la **précision dynamique**, la **rapidité** et la **stabilité**.

**La précision dynamique** : caractérisée par l'erreur avec laquelle la sortie suit la loi d'entrée imposée au système.

**La rapidité** : caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (temps de réponse).



**La stabilité** : des fois on a une divergence ou une oscillation de la sortie. Ce comportement est intolérable par un système asservi.

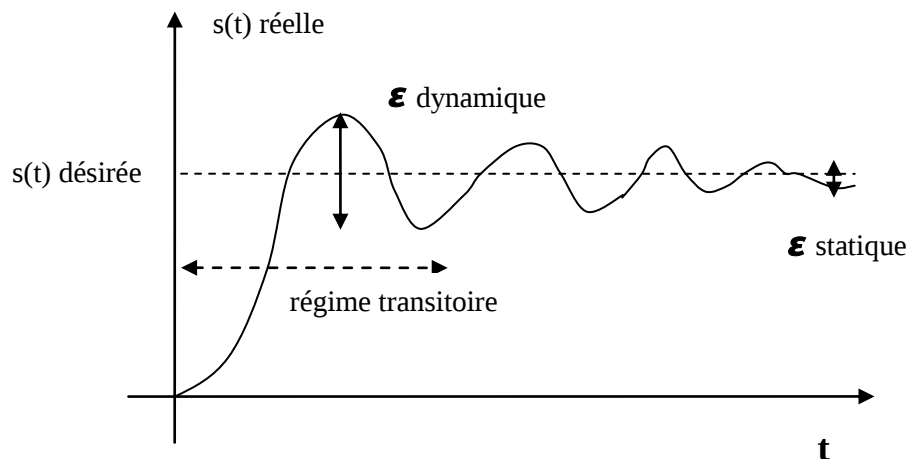


**Précision dynamique :** (relative à l'erreur transitoire)

Elle est déterminée en régime transitoire de la réponse réelle du système asservi à une entrée typique quelconque. Le système est d'autant plus précis que  $\varepsilon(t)$  ait une valeur faible.

**Précision statique :** (relative à l'erreur statique ou permanente : erreur stationnaire)

Elle est déterminée en régime permanent, c'est-à-dire lorsque le temps tend vers l'infini.



$$\varepsilon(t) = S_{désirée}(t) - S_{réelle}(t)$$

#### IV. Critères de performances :

C'est la précision, dynamique et statique, qui caractérise les performances d'un système asservi et les critères de "précision". Ils ont pour but de caractériser la qualité d'un système asservi. Les critères les plus utilisés sont :

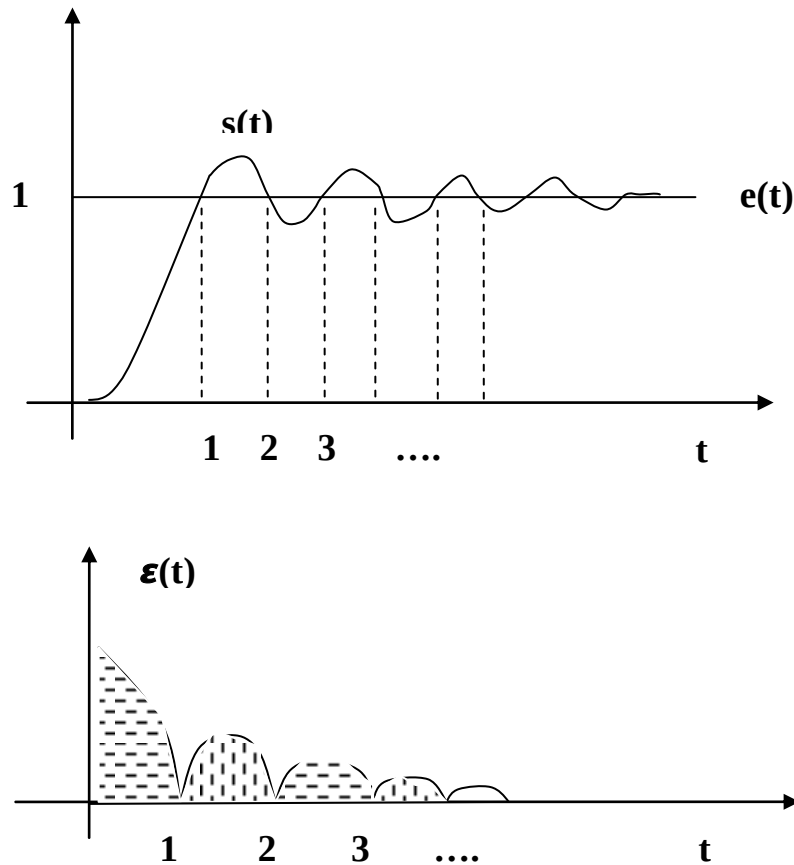
##### a) Critère de l'intégrale du carré de l'écart : (Hall-Sartorius)

D'après ce critère, un système asservi possède des performances d'autant meilleures que la quantité  $I$  soit faible.

$$I = \int_0^{\infty} [\varepsilon(t)]^2 dt$$

$\varepsilon(t)$  : l'erreur

Pour montrer la signification, on va appliquer ce critère à une entrée en échelon unitaire.



$\int \varepsilon^2(t)$ , l'aire (hachurée), plus elle est moindre plus le système est performant.

à  $t = 1, 2, \dots$

$$\varepsilon(t) = 0 \Rightarrow \varepsilon^2(t) = 0$$

$$\oplus t \nearrow \oplus \varepsilon(t) \searrow \oplus \varepsilon^2(t) \searrow$$

#### b) Critère de l'intégrale de la valeur absolue de l'écart :

Dans le critère précédent les valeurs de  $\varepsilon$ , peu élevées pendant  $t > t_1$  jouent un rôle insuffisant dans l'expression de I (car pour  $t < t_1$ ,  $\varepsilon(t)$  est négative et plus grande) pour cela on a proposé de remplacer  $\varepsilon^2(t)$  par la valeur absolue :

$$I = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt$$

#### c) Critère I.T.A.E. : "Integral of Time multiplied Absolute value of Error"

Ce critère considère le système d'autant plus meilleur que l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} t |\varepsilon(t)| dt \text{ est petite.}$$

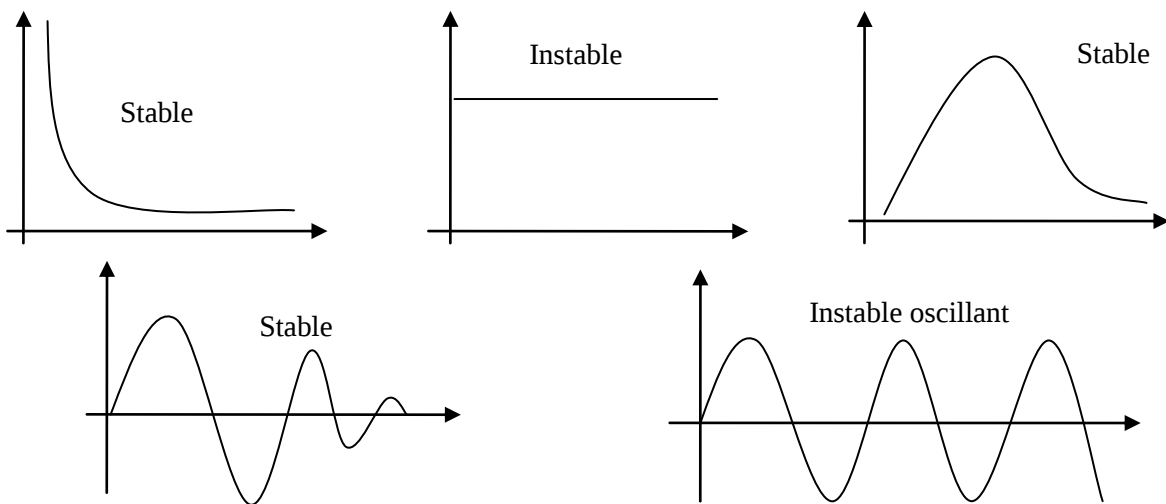
## Chapitre 5 : Stabilité des systèmes asservis

### I. Définition et propriétés :

- La stabilité d'un système est déterminée par sa réponse qui dépend de ses entrées et ses perturbations
- Un système est stable si chaque variation de l'entrée entraîne une variation de la sortie
- Un système est stable s'il reste en position de repos sans être excité par une source externe, et s'il est excité par une autre source, il doit revenir à sa position initiale.
- Un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini
- Physiquement, un système est stable quand il tend à revenir à son état permanent après la disparition de la perturbation.

De point de vue mathématique, un système est stable à la condition nécessaire et suffisante que tous les pôles de la fonction de transfert aient leurs parties réelles négatives ; c'est à dire toutes les racines de l'équation caractéristique ont les parties réelles négatives.

Réponses impulsionnelles suivantes :



### II. Equation caractéristique :

La condition nécessaire et suffisante de la stabilité d'un système est que tous les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée aient leurs parties réelles négatives.

$$F(P) = \frac{G(P)}{1 + G(P).H(P)}$$

On appellera équation caractéristique une équation dont les racines sont les pôles de  $F(P)$ , c'est à dire les racines du dénominateur de  $F(P)$ . On pose  $T(P) = G(P).H(P)$  alors :

$$F(P) = \frac{G(P)}{1 + T(P)}$$

$$1 + T(P) = 0 : \text{équation caractéristique}$$

Donc le système est stable si cette équation ne possède pas de racine à partie réelle positive.

Un examen assez simple de cette équation permet de savoir si certaines de ses racines sont à parties réelle positive ou nulle, rendant le système instable.

Soit :

$$1 + T(P) = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0$$

Avec :

$$a_i > 0 \quad \forall i$$

### III. Critère de stabilité de Routh :

**Enoncé du critère :**

- Si certains  $a_i$  sont négatifs ou nuls, l'équation caractéristique a des racines à droite dans le plan complexe, donc à partie réelle positive et le système est donc instable.
- Si tous les  $a_i$  sont strictement positifs, on ne peut pas prévoir et il faut voir « analyser les coefficients de la première colonne du tableau de Routh »

|     |           |           |           |           |           |       |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|
| (1) | (3)       |           |           |           |           |       |
|     | $P^n$     | $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | $a_{n-6}$ | ..... |
|     | $P^{n-1}$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | $a_{n-7}$ | ..... |
| (2) | $P^{n-2}$ | $b_1$     | $b_2$     | $b_3$     | .....     |       |
|     | $P^{n-3}$ | $c_1$     | $c_2$     | $c_3$     | .....     |       |
|     | ....      |           |           | .....     |           |       |

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}},$$

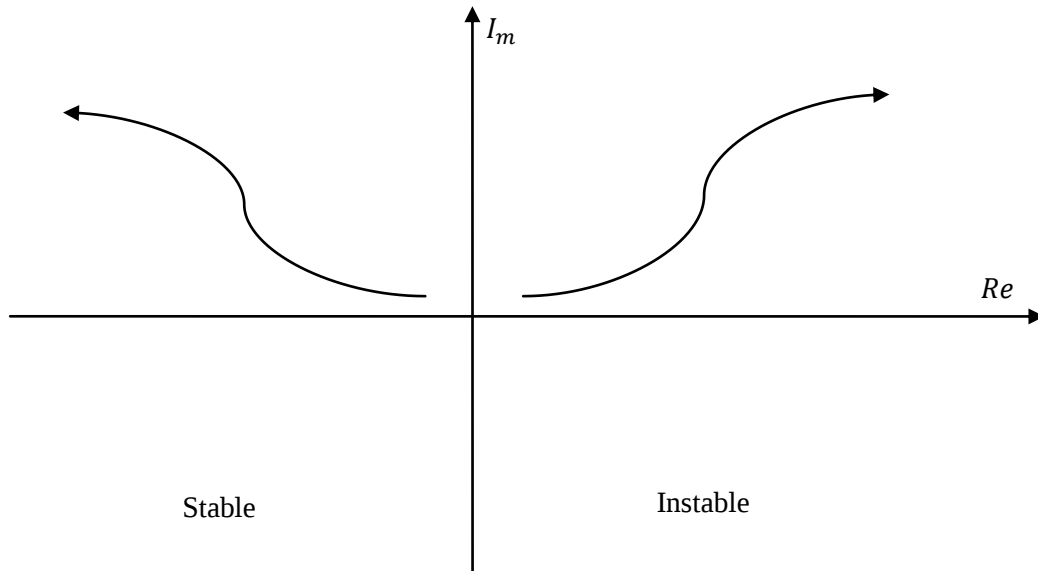
$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

On peut résumer le travail à faire comme suit :

- la zone (1) : on pose (d'après l'équation caractéristique du système)
- la zone (2) : on détermine (d'après les coefficients  $b_i$  et  $c_i$ )
- la zone (3) : on analyse (en utilisant le critère de Routh)

On dira que le coefficient  $a_{n-1}$  est le pivot de la troisième ligne et  $b_1$  est le pivot de la quatrième ligne et ainsi de suite.

Si tous les coefficients de la première colonne du tableau sont **positifs**, l'équation caractéristique ne possède que des racines à partie réelle négative et le système est stable.



**Exemple :** soit un système dont la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H_1(P) = \frac{k}{1 + 6P - 3P^2 + 3P^3 + P^4}$$

Un coefficient est -3, négatif, donc système instable

- Si on a  $n$  changements de signe dans la première colonne, l'équation caractéristique possède  $n$  racines à parties réelle positive (et le système est instable).
- Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls, l'équation caractéristique possède des racines complexes imaginaires pures conjuguées et le système est juste oscillant (instable). La table de Routh se présente sous la forme suivante :

| $P^m$     | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | ..... |
|-----------|------------|------------|------------|-------|
| $P^{m-1}$ | 0          | 0          | 0          |       |

Les racines à partie réelle nulle sont des racines du polynôme de degré  $m$  dont les coefficients sont  $\alpha_1, \alpha_2$ , etc. de la dernière ligne non nulle, c'est à dire des racines de l'équation :

$$\alpha_1 P^m + \alpha_2 P^{m-1} + \dots = 0 \quad (*)$$

Si l'on veut déterminer dans ce cas le signe des autres racines de l'équation caractéristique, il faut continuer le tableau en remplaçant les coefficients nuls de la ligne  $P^{m-1}$  par les coefficients d'un polynôme obtenu en dérivant par rapport à  $P$  le polynôme figurant dans l'équation (\*), c'est à dire par les coefficients  $m\alpha_1, (m-1)\alpha_2$ , etc. si on trouve un pivot nul, les termes de la même ligne n'étant pas tous nuls, on peut continuer le tableau en remplaçant ce pivot par  $\epsilon$ , qui est un nombre réel arbitrairement petit, positif ou négatif.

**Cas particulier :** il peut arriver que la première colonne du tableau de Routh soit formée de coefficients tous nuls, les termes figurant dans les autres colonnes étant différents de zéro. On applique alors le critère de Routh à l'équation :

$$(1 + T(P))(P + a) = 0$$

$a$  étant un réel positif.

Une ligne de zéros au rang  $P^1$  dans le tableau de Routh indique que le polynôme a un couple de racines qui satisfont l'équation auxiliaire formée de la manière suivante :

$$AP^2 + B = 0$$

où  $A$  et  $B$  désignent le premier et deuxième élément de la ligne du rang  $P^2$ .

#### IV. Critère de stabilité de Hurwitz :

Cette méthode utilise les déterminants formés par les coefficients de l'équation caractéristique, un tel système est dit stable si et seulement si :

- Tous les  $a_i$  sont différents de zéro sauf  $a_0$
- Tous les déterminants mineurs sont positifs.

$$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0 = 0$$

Le tableau de Hurwitz comprend  $n$  lignes ( $n$  étant le degré de l'équation)

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5}$ | .....     |
| $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4}$ | ....      |
| 0         | $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | .....     |
| 0         | $a_n$     | $a_{n-2}$ | .....     |
| 0         | 0         | $a_{n-1}$ | ....      |
| 0         | 0         | $a_n$     |           |
| 0         | 0         | 0         | $a_{n-1}$ |
| .....     | .....     | .....     | .....     |

Le système est stable si tous les déterminants  $\Delta_i > 0$ .

**Exemple :**

Soit l'équation caractéristique d'un système :  $P^3 + 8P^2 + 14P + 24 = 0$

$n=3$ , donc un déterminant de 3 lignes et 3 colonnes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = 8 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 8 \cdot 14 - 1 \cdot 24 = 112 - 24 = 88 > 0$$

$$\Delta_3 = \Delta = 8 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 8 & 24 \end{vmatrix} - 24 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 24 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 8 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = 8 \cdot (14 \cdot 24 - 8 \cdot 0) - 24 \cdot (1 \cdot 24 - 0) + 0 = 2112 > 0$$

Tous les déterminants sont positifs, donc système stable

**V. Critère de stabilité des fractions continues :**

Supposons que l'équation caractéristique est :

$$Q(P) = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_1 P + a_0$$

Par définition :

$$Q_1(P) = a_n P^n + a_{n-2} P^{n-2} + \dots + a_0$$

Et :

$$Q_2(P) = a_{n-1} P^{n-1} + a_{n-3} P^{n-3} + \dots + a_1 P$$

Alors

$$\frac{Q_1(P)}{Q_2(P)} = \frac{a_n P^n + a_{n-2} P^{n-2} + \dots + a_0}{a_{n-1} P^{n-1} + a_{n-3} P^{n-3} + \dots + a_1 P}$$

$$\frac{Q_1(P)}{Q_2(P)} = \frac{a_n}{a_{n-1}} P + \frac{(a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}) P^{n-2} + (a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}) P^{n-2} + \dots}{Q_2(P)}$$

$$\frac{Q_1(P)}{Q_2(P)} = h_1 P + \frac{1}{h_2 P + \frac{1}{h_3 P + \frac{1}{h_4 P + \frac{1}{h_5 P + \dots}}}}$$

Si  $h_1, h_2, h_3; \dots, h_n$  sont tous positifs, alors toutes les racines de l'équation caractéristique ont leur partie réelle négative, et le système est donc stable.

**Exemple :** soit l'Equation Caractéristique :

$$Q(P) = P^3 + 6P^2 + 12P + 8$$

Alors :

$$Q_1(P) = P^3 + 12P \text{ et } Q_2(P) = 6P^2 + 8$$

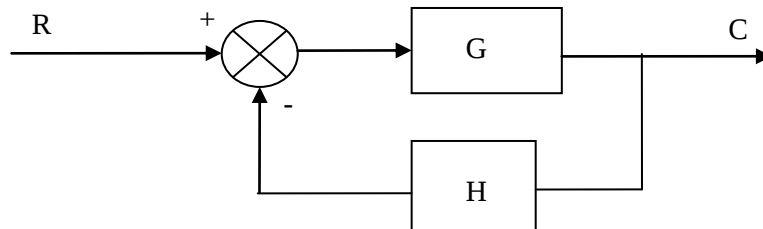
$$\frac{Q_1(P)}{Q_2(P)} = \frac{P^3 + 12P}{6P^2 + 8} = \frac{1}{6}P + \frac{\frac{32}{3}P}{6P^2 + 8} = \frac{1}{6}P + \frac{1}{(6P^2 + 8)/\frac{32}{3}P}$$

$$\frac{Q_1(P)}{Q_2(P)} = \frac{1}{6}P + \frac{1}{\frac{18}{32}P + \frac{1}{\frac{4}{3}P}}$$

$h_1 = \frac{1}{6}, h_2 = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$  et  $h_3 = \frac{4}{3}$  sont tous positifs, alors le système est stable.

## Chapitre 6 : classification des systèmes asservis, les constantes d'erreurs, la précision et la sensibilité

### I. Classification des systèmes asservis :



GH étant la fonction de transfert en boucle ouverte,

$$GH = \frac{\prod_{i=1}^m (p + z_i)}{\prod_{i=1}^m (p + p_i)}$$

Supposons qu'on a zéros et b pôles (avec  $b \geq a$ ), alors GH peut s'écrire sous la forme :

$$GH = K \cdot \frac{p^a \prod_{i=1}^{m-a} (p + z_i)}{p^b \prod_{i=1}^{m-b} (p + p_i)}$$

Supposons que  $l=b-a$ , alors, on peut écrire :

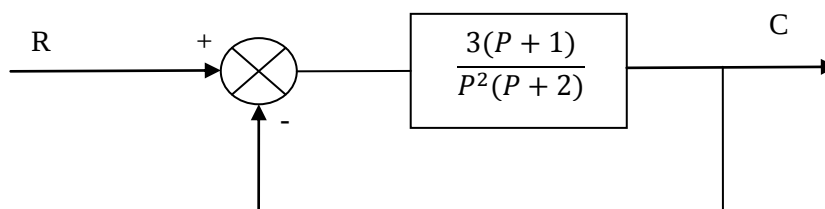
$$GH = K \cdot \frac{p^a \prod_{i=1}^{m-a} (p + z_i)}{p^b \prod_{i=1}^{m-b} (p + p_i)} = K \cdot \frac{B_1(P)}{P^l B_2(P)}$$

On détermine alors le type du système selon la valeur de l, ainsi :

- Si  $l=0$ , alors le système est de type 0 ( $a=b$ )
- Si  $l=1$ , alors le système est de type 1
- Si  $l=2$ , alors le système est de type 2

$K$  est appelé Gain Statique.

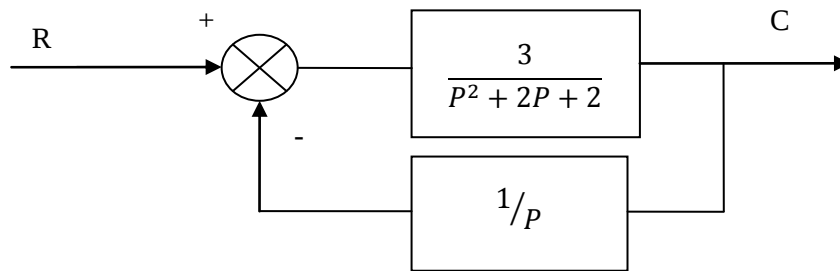
#### Exemple 1:



$$\text{Ici } H = 1 \Rightarrow GH = \frac{3(P+1)}{P^2(P+2)} \quad \text{alors } l = 2$$

Donc ce Système est de type 2

## Exemple 2:

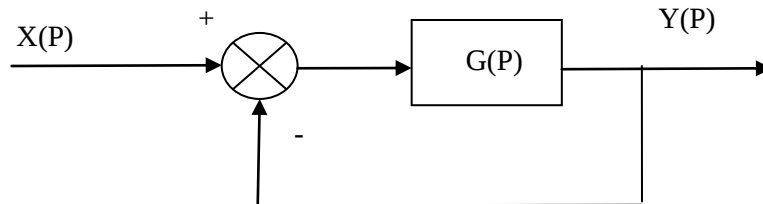


La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$GH = \frac{3}{P(P^2 + 2P + 2)} \quad \text{alors} \quad l = 1$$

Donc ce système est de type 1

## II. Constantes d'erreur :



$H(P) = 1$  par hypothèse.

- Si l'entrée est un échelon,  $x(t) = \text{Cste}$ , alors on parle de **constante d'erreur de position** :  $K_p$
- Si l'entrée est une rampe,  $x(t) = t$ , alors on parle de **constante d'erreur de vitesse** :  $K_v$
- Si l'entrée est une parabole,  $x(t) = t^2$ , alors on parle de **constante d'erreur d'accélération** :  $K_a$

### a) Cas d'un échelon :

**Constante d'erreur de position  $K_p$  :**

Par définition :

$$K_p = \lim_{P \rightarrow 0} G(P) = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{K \cdot B_1(P)}{P^l B_2(P)}$$

$$K_p = \begin{cases} \frac{KB_1(P)}{B_2} & \text{si } l = 0 \\ \infty & \text{si } l > 0 \end{cases}$$

**Erreur stationnaire  $\varepsilon_{sv}$  : (stationnaire :  $t \rightarrow \infty$ )**

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P\varepsilon(P) \quad \text{d'après le théorème de la valeur finale.}$$

Or:

$$\varepsilon(P) = X(P) - \varepsilon(P) \cdot G(P)$$

**Donc :**

$$\varepsilon(P)(1 + G(P)) = X(P)$$

alors :

$$\varepsilon(P) = X(P) \cdot \frac{1}{1 + G(P)}$$

Puisque on a une entrée en échelon, alors  $x(t) = 1$ ,

d'où :

$$X(P) = \frac{1}{P}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon(P) &= \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{1 + G(P)} \rightarrow \varepsilon_{sp} = \lim_{P \rightarrow 0} P \varepsilon(P) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{1 + G(P)} \\ \rightarrow \varepsilon_{sp} &= \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(P)} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{KB_1(P)}{P^l B_2(P)}} = \frac{1}{1 + \lim_{P \rightarrow 0} \frac{KB_1(P)}{P^l B_2(P)}} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{KB_1(P)}{P^l B_2(P)} = K_P$$

donc :

$$\varepsilon_{SP} = \frac{1}{1 + K_P}$$

$\varepsilon_{SP}$  est l'erreur stationnaire dans le cas d'une entrée en échelon

Donc : plus  $K_P$  est grande plus l'erreur stationnaire est petite, meilleur est la précision.

### b) Cas d'une rampe :

L'entrée est une rampe ( $x(t) = t$ ), donc :

$$X(P) = \frac{1}{P^2}$$

**La constante d'erreur est dans ce cas :  $K_v$**

Par définition :

$$K_v = \lim_{P \rightarrow 0} P G(P)$$

Alors :

$$K_v = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{KB_1(P)}{P^l B_2(P)} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{KB_1(P)}{P^{l-1} B_2(P)}$$

D'où :

$$K_v = \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0 \\ \frac{KB_1(0)}{B_2(0)} & \text{si } l = 1 \\ \infty & \text{si } l > 1 \end{cases}$$

**Erreur stationnaire de vitesse  $\varepsilon_{sv}$ :**

$$\varepsilon_{sv} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \varepsilon(P) \quad \text{d'après le théorème de la valeur finale.}$$

Or :

$$\varepsilon(P) = X(P) \cdot \frac{1}{1 + G(P)}$$

donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sv} &= \lim_{P \rightarrow 0} P \varepsilon(P) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{1}{P^2} \cdot \frac{1}{1 + G(P)} \\ \rightarrow \varepsilon_{sv} &= \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{1 + G(P)} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P \left( 1 + \frac{KB_1(P)}{P^l B_2(P)} \right)} = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P + \frac{KB_1(P)}{P^{l-1} B_2(P)}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\varepsilon_{sv} = \begin{cases} \infty & \text{si } l = 0 \\ \frac{B_2(0)}{KB_1(0)} & \text{si } l = 1 \\ 0 & \text{si } l > 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\varepsilon_{sv} = \frac{1}{K_v}$$

### c) Cas d'une parabole :

Entrée en parabole, alors  $x(t) = t^2$ , donc :

$$X(P) = \frac{1}{P^3}$$

### Constante d'erreur d'accélération :

Par définition :

$$K_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 G(P)$$

donc :

$$\begin{aligned} K_a &= \lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot \frac{KB_1(P)}{P^l B_2(P)} \\ \rightarrow K_a &= \lim_{P \rightarrow 0} \frac{KB_1(P)}{P^{l-2} B_2(P)} \\ \rightarrow K_a &= \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0, 1 \\ \frac{KB_1(0)}{B_2(0)} & \text{si } l = 2 \\ \infty & \text{si } l > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

### Erreur stationnaire d'accélération :

Et :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sa} &= \frac{1}{K_a} \\ \rightarrow \varepsilon_{sa} &= \begin{cases} \infty & \text{si } l = 0, 1 \\ \frac{B_2(0)}{KB_1(0)} & \text{si } l = 2 \\ 0 & \text{si } l > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

**d) Tableau récapitulatif :**

|       | Echelon unité            |                                        | Rampe                    |                          | Parabole                 |                          |
|-------|--------------------------|----------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
|       | $K_p$                    | $\varepsilon_{sp}$                     | $K_v$                    | $\varepsilon_{sv}$       | $K_a$                    | $\varepsilon_{sa}$       |
| $l=0$ | $\frac{KB_1(0)}{B_2(0)}$ | $\frac{1}{1 + \frac{KB_1(0)}{B_2(0)}}$ | 0                        | $\infty$                 | 0                        | $\infty$                 |
| $l=1$ | $\infty$                 | 0                                      | $\frac{KB_1(0)}{B_2(0)}$ | $\frac{B_2(0)}{KB_1(0)}$ | 0                        | $\infty$                 |
| $l=2$ | $\infty$                 | 0                                      | $\infty$                 | 0                        | $\frac{KB_1(0)}{B_2(0)}$ | $\frac{B_2(0)}{KB_1(0)}$ |
| $l>2$ | $\infty$                 | 0                                      | $\infty$                 | 0                        | $\infty$                 | 0                        |

Dune manière générale, la précision est d'autant meilleure que K possède une valeur élevée. Or

$$GH = \frac{K \cdot B_1(P)}{P^l B_2(P)}$$

donc : les erreurs décroissent lorsque le gain de la boucle ouverte augmente, c'est à dire lorsque la bande passante du système augmente. La bande passante du système se définit par intervalle de pulsations (fréquences) où le gain en boucle ouverte est supérieur à 1 en module.

$$|G(jw) \cdot H(jw)| > 1 \text{ donc : } \left| \frac{K \cdot B_1(jw)}{(jw)^l \cdot B_2(jw)} \right| > 1$$

**e) Les constantes d'erreurs statiques ( $t \rightarrow \infty$ ):**

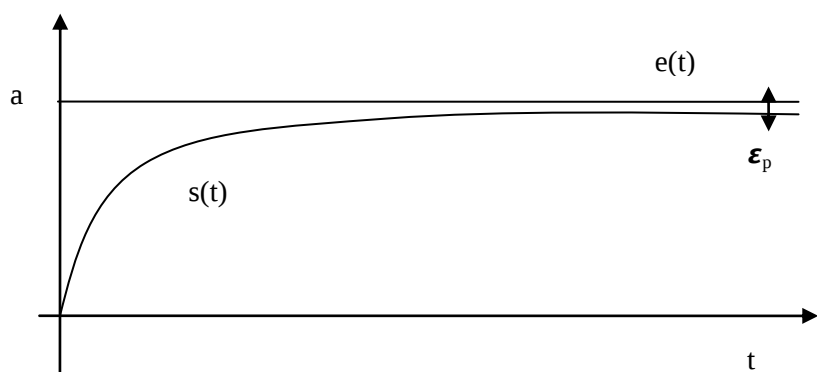
Entrée en échelon :

$$e(t) = a \cdot u(t)$$

alors

$$E(P) = a/p$$

$\varepsilon_p$  étant l'erreur de position



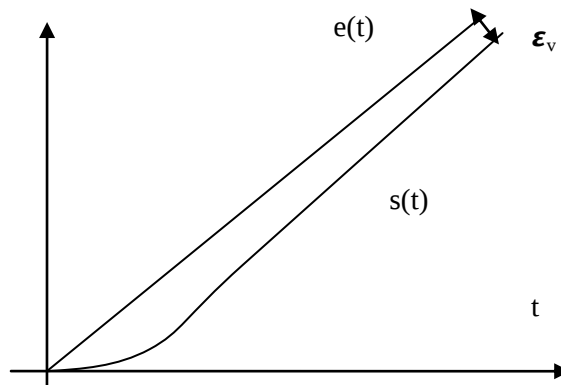
Entrée en rampe :

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$$

alors :

$$E(P) = a/p^2$$

$\varepsilon_v$  étant l'erreur de vitesse



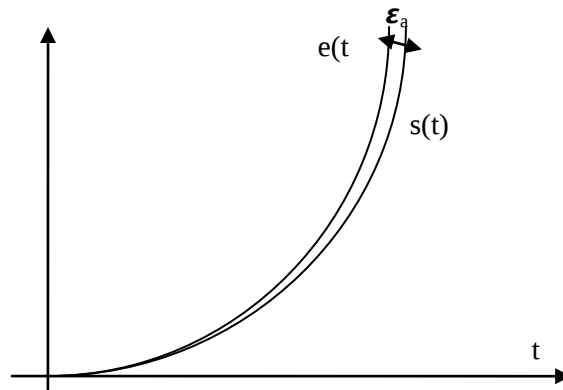
Entrée en parabole :

$$e(t) = a \cdot t^2 \cdot u(t)$$

alors

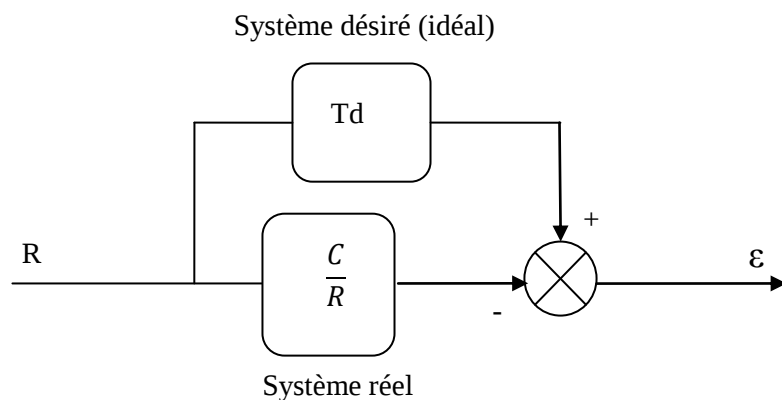
$$E(P) = a/p^3$$

$\varepsilon_a$  étant l'erreur d'accélération



### III. Cas général :

L'étude des constantes d'erreurs vues précédemment a été applicable uniquement pour les systèmes à chaîne de retour unitaire, maintenant, considérons des cas généraux des systèmes quand la chaîne de retour existante. On doit procéder tout d'abord à évaluer la fonction de transfert du système et la comparer à celle du système désirée.



$T_d$  : fonction de transfert du système idéal ;

$C/R$  : fonction de transfert du système réel ;

$\varepsilon$  : l'erreur entre la valeur désirée et celle réelle ;

$R$  : l'entrée du système ;

**a) Constante d'erreur d'un échelon :**

Par définition :

$$K_e = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{\left[ T_d - \frac{C}{R}(P) \right]}$$

L'erreur stationnaire :

$$\varepsilon_{se} = \varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \frac{1}{K_e}$$

**b) Constante d'erreur d'une rampe :**

Par définition :

$$K_r = \frac{1}{\lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P} \left[ T_d - \frac{C}{R}(P) \right]}$$

L'erreur stationnaire :

$$\varepsilon_{sr} = \frac{1}{K_r}$$

**c) Constante d'erreur d'une parabole :**

Par définition :

$$K_{pa} = \frac{1}{\lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P^2} \left[ T_d - \frac{C}{R}(P) \right]}$$

L'erreur stationnaire :

$$\varepsilon_{spa} = \frac{1}{K_{pa}}$$

Remarque : la fonction de transfert d'un système est soit donnée par hypothèse soit elle est calculée par :

$$T_d = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{C}{R}(P)$$

#### **IV. Sensibilité des systèmes asservis**

La première étape de l'analyse des systèmes asservis est de déterminer la fonction de transfert des différents éléments du système. Si le système est supposé linéaire alors, on peut déterminer deux modèles mathématiques, qui peuvent être représentés soit par une fonction de transfert, soit par une réponse en fréquence.

La fonction de transfert est déterminée par le choix d'un nombre bien défini des constantes des paramètres. De ce fait, on appelle fonction de transfert nominale la fonction déterminée par les valeurs nominales des paramètres choisis.

Considérons le modèle mathématique de la fonction de transfert d'un système linéaire indépendant du temps :

$$T(k) = |T(k)|e^{j\varphi_r}$$

$T(k)$  dépend de  $k$ ;  $|T(k)|$  : le module et  $\varphi$  : phase

**Définition n°01** : sensibilité d'une fonction de transfert  $T(k)$  par rapport à  $k$ .

$$S_k^{T(k)} = \frac{d \ln[T(k)]}{d \ln k} = \frac{d[T(k)]/k}{dk/k} = \frac{d[T(k)]}{dk} \cdot \frac{k}{T(k)}$$

**Définition n°02** : sensibilité du module de  $T(k)$  par rapport à  $k$

$$S_k^{|T(k)|} = \frac{d \ln|T(k)|}{d \ln k} = \frac{d|T(k)|}{dk} \cdot \frac{k}{|T(k)|}$$

**Définition n°03** : sensibilité de l'angle de phase  $\varphi_T$  de la fonction de transfert  $T(k)$  par rapport à  $k$

$$S_k^{\varphi_T} = \frac{d \ln \varphi_T}{d \ln k} = \frac{d \varphi_T}{dk} \cdot \frac{k}{\varphi_T}$$

**Définition n°04** : la sensibilité de la fonction de transfert  $T(k)$  est liée aux sensibilités par la formule :

$$S_k^{T(k)} = S_k^{|T(k)|} + j \varphi_T S_k^{\varphi_T}$$

**Remarque** :  $S_k^{|T(k)|}$  et  $S_k^{\varphi_T}$  sont des nombres complexes (lorsque  $k$  est complexe) et sont des réels lorsqu'ils sont réels.

**Cas particulier** : (le plus souvent utilisé)

$$T(k) = \frac{A_1 + kA_2}{A_3 + kA_4}$$

Alors puisque :

$$S_k^{T(k)} = \frac{d[T(k)]}{dk} \cdot \frac{k}{T(k)}$$

On a donc :

$$S_k^{T(k)} = \frac{A_2(A_3 + kA_4) - A_4(A_1 + kA_2)}{(A_3 + kA_4)^2} \cdot \frac{k}{(A_1 + kA_2) / (A_3 + kA_4)} = \frac{k(A_2A_3 - A_1A_4)}{(A_1 + kA_2)(A_3 + kA_4)}$$

$A_1, A_2, A_3, A_4$  : sont des polynômes en  $P$

$K$  : Paramètre qui dépend du cas étudié ( $k$  : capacité ou autre).

## Chapitre 7 : Diagrammes et abaquages

Ce chapitre a pour but de représenter les fonctions de transfert d'un système au moyen de diagrammes de différents types et déterminer graphiquement la stabilité du système. Cette représentation sera en fonction des fréquences, donc :  $P = jw$

### I. Diagrammes de Bode :

La fonction de transfert  $T(P) = T(jw)$ , se présente sous la forme du produit de termes de la forme :

$$KP^\alpha, (1 + \tau P)^\beta, \left(1 + \frac{2\xi}{w_n}P + \frac{P^2}{w_n^2}\right)^\gamma$$

$\alpha, \beta$  et  $\gamma$  : Entiers positifs, négatifs ou nuls

$$T(jw) = [|T(jw)|, \emptyset] = |T(jw)|e^{j\emptyset}$$

$|T(jw)|$  est le module de  $T(jw)$ , tandis que  $\emptyset$  est l'argument de  $T(jw)$

Donc, on a une courbe du module et une courbe de l'argument. Il est préférable de tracer en fonction de  $w$ , le logarithme du module de  $T(jw)$ . Cette courbe est obtenue simplement, en effet par addition graphique des diagrammes d'amplitude (ou diagramme du module), des différents termes de la forme :

$$KP^\alpha, (1 + \tau P)^\beta, \left(1 + \frac{2\xi}{w_n}P + \frac{P^2}{w_n^2}\right)^\gamma, e^{-jw\tau}$$

En pratique, on présente, en fonction de  $w$ , le module  $A$  de  $T(jw)$  exprimé en décibels soit :

$$A_{dB} = 20 \log_{10} |T(jw)|$$

$A$  : gain du module

La courbe de l'argument est dite : **diagramme des phases**.

On va déterminer maintenant les diagrammes d'amplitude et de phase.

$$T(P) = K \frac{(P + z_1)(P + z_2) \dots}{P^\alpha (P + p_1)(P + p_2) \dots}$$

Donc, en remplaçant  $P$  par  $jw$ , on peut écrire :

$$T(jw) = K \frac{(jw + z_1)(jw + z_2) \dots}{(jw)^\alpha (jw + p_1)(jw + p_2) \dots}$$

Ce qui est équivalent à écrire :

$$T(jw) = K \prod_{i=1}^n \frac{z_i}{p_i} \frac{\left(1 + j\frac{w}{z_1}\right)\left(1 + j\frac{w}{z_2}\right) \dots}{(jw)^\alpha \left(1 + j\frac{w}{p_1}\right)\left(1 + j\frac{w}{p_2}\right) \dots}$$

Où :

$$\prod_{i=1}^n z_i = z_1 z_2 z_3 \dots \dots \dots \text{ et } \prod_{i=1}^n p_i = p_1 p_2 p_3 \dots \dots \dots$$

Le gain de Bode en dB est  $K \prod_{i=1}^n \frac{z_i}{p_i} = K_B$

Par définition :

$$|A|_{dB} = 20 \log_{10} |A|$$

$$|A|_{dB} = 20 \log_{10} |K_B| + 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{w}{z_1} \right| + 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{w}{z_2} \right| + \dots$$

Et

$$\text{Arg}[T(jw)] = \arg \left( 1 + j \frac{w}{z_1} \right) + \arg \left( 1 + j \frac{w}{z_2} \right) + \dots$$

**Exemple :**

$$T(jw) = 10 \frac{(1 + jw)}{(jw)^2 \left( 1 + j \frac{w}{4} - \left( \frac{w}{4} \right)^2 \right)}$$

$$G_0 = 20 \log_{10}(10) = 20 \text{ dB}$$

$$G_1 = 20 \log_{10} |1 + jw| = 20 \log_{10} \sqrt{1 + w^2}$$

$$w_c = 1 \text{ alors si } w \ll w_c \Rightarrow G_1 = 0$$

$$\text{et si } w \gg w_c \text{ alors } G_1 = 20 \log_{10}(w) : \text{ droite de pente 6dB/octave}$$

Si on utilise une échelle logarithmique alors  $\log_{10}(w)$  sera une droite (on utilise du papier semi-logarithmique pour ce faire).

**Représentation de Bode :**

Dans cette représentation, on présente séparément le module de la fonction de transfert  $|T(jw)|$  et son argument  $\emptyset(jw)$ , dans une échelle logarithmique, avec  $w$  en abscisse.

**Remarque :**  $w = 0$  se trouve à l'infini sur la gauche

**Exemple :** soit à tracer la fonction de transfert suivante :

$$G(P) = P$$

alors

$$G(jw) = jw$$

**Rappel :** soit une fonction :

$$f = a + bj$$

alors  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$f = |f|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$f = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + j \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

alors :

$$|f| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

or :

$$\tan \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$$

donc :

$$\varphi(f) = \arctg(f) = \frac{b}{a}$$

et pour :

$$G(j\omega) = 0 + j\omega$$

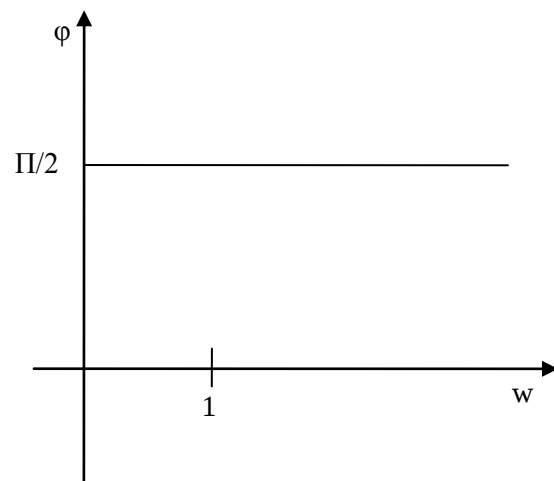
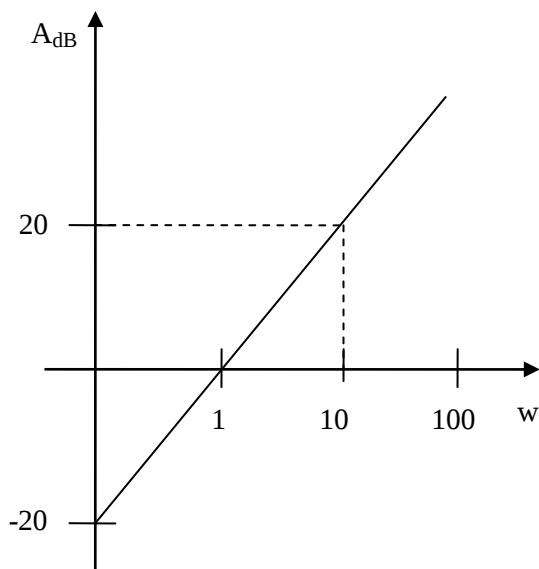
alors

$$\varphi[G(j\omega)] = \arctg\left(\frac{\omega}{0}\right) = 90^\circ$$

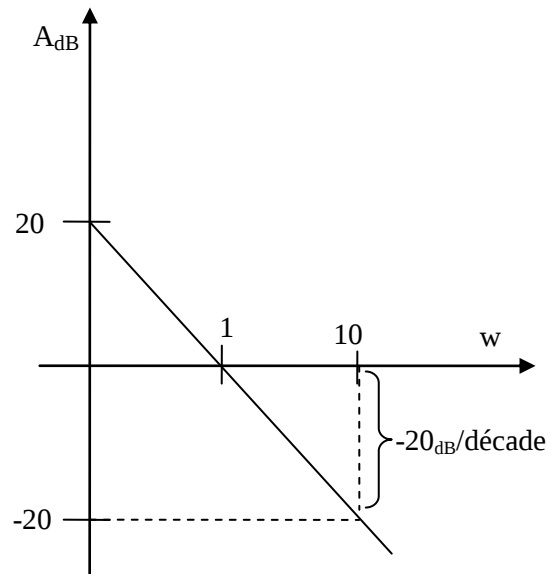
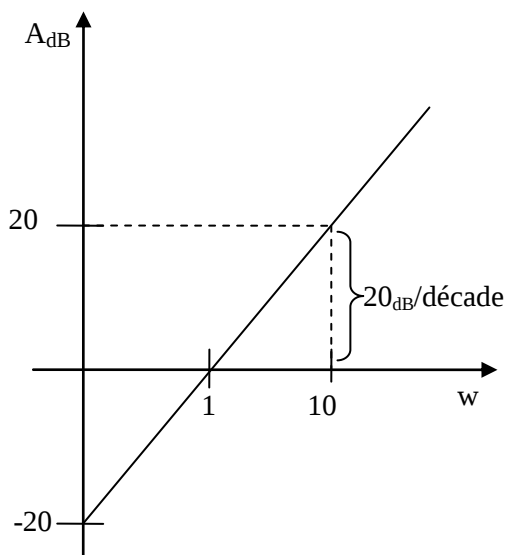
Comme on trace le module et la phase séparément dans une échelle logarithmique, alors on calcule

$$A = 20 \log_{10} [G(j\omega)]$$

| $\omega$ | 0.1 | 1 | 2 | 10 | 100 |
|----------|-----|---|---|----|-----|
| $A$      | -20 | 0 | 6 | 20 | 400 |



On constate que la courbe est une droite ayant une pente de + 20 dB/décade ou + 6dB/octave



**Exemple 2 :**  $G(jw) = \frac{1}{(jw)^2}$

Alors :

$$G_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{(jw)^2} \right| = 20 \log_{10} 1 - 20 \log_{10} |(jw)^2|$$

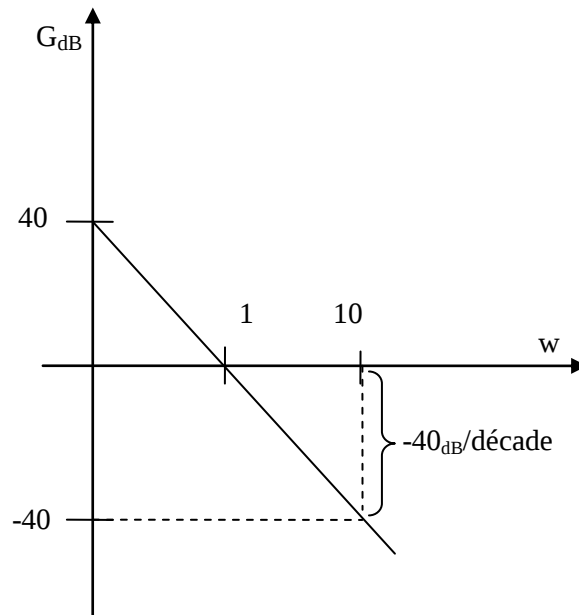
$$G_{dB} = 0 - 20 \log_{10} (\sqrt{(0 - w^2)^2}) = -20 \log_{10}(w^2) = -40 \log_{10} w$$

|                            |     |   |     |       |
|----------------------------|-----|---|-----|-------|
| <b>w</b>                   | 0.1 | 1 | 2   | ..... |
| <b><math>G_{dB}</math></b> | 40  | 0 | -40 | ..... |

Rappel :

|                                  |   |    |                     |                      |                  |                  |                  |
|----------------------------------|---|----|---------------------|----------------------|------------------|------------------|------------------|
| <b>x</b>                         | 1 | 10 | 100=10 <sup>2</sup> | 1000=10 <sup>3</sup> | 10 <sup>-1</sup> | 10 <sup>-2</sup> | 10 <sup>-3</sup> |
| <b><math>\log_{10}(x)</math></b> | 0 | 1  | 2                   | 3                    | -1               | -2               | -3               |

Donc la courbe est une droite de pente – 40 dB/décade ou -12 dB/octave.



**Terme  $(jw)^\alpha$  :**

$$A_{dB} = 20 \log_{10} |(jw)^\alpha| = 20 \cdot \alpha \cdot \log_{10} w$$

Pour une octave (c'est à dire :  $w \rightarrow 2w$ ), la pente est :

$$20 \cdot \alpha \cdot \log_{10}(2w) - 20 \cdot \alpha \cdot \log_{10} w = 20 \cdot \alpha \cdot \log_{10}(2) = 6.0205 \cdot \alpha \text{ dB/octave}$$

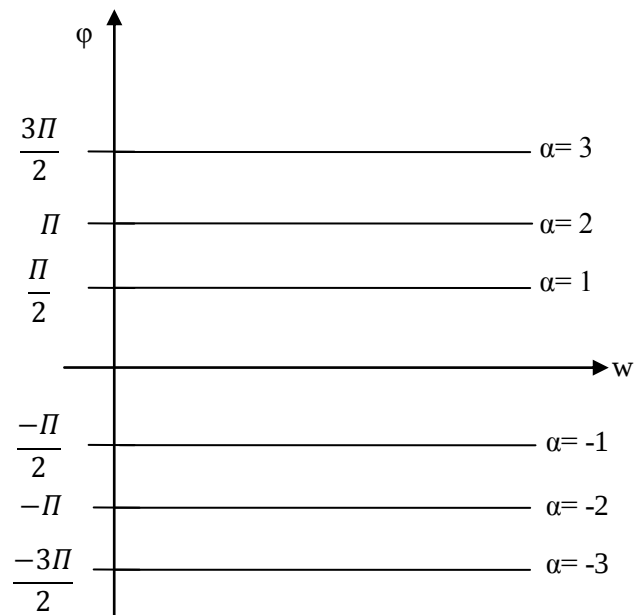
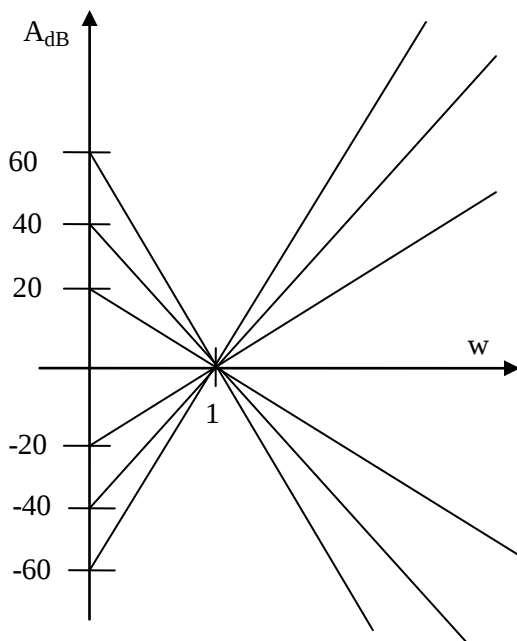
Pour une décade (c'est à dire :  $w \rightarrow 10 w$ ), la pente est :

$$20 \cdot \alpha \cdot \log_{10}(10w) - 20 \cdot \alpha \cdot \log_{10} w = 20 \cdot \alpha \cdot \log_{10}(10) = 20 \cdot \alpha \text{ dB/décade}$$

Cette droite coupe l'axe des  $w$  à  $w_0$  :  $20 \cdot \alpha \cdot \log_{10} w_0 = 0 \Rightarrow w_0 = 1$

Pour l'argument on a

$$\arg[T(jw)] = \arg[(jw)^\alpha] = \alpha \cdot \arctg\left(\frac{w}{0}\right) = \alpha \cdot \frac{\pi}{2}$$



**Terme  $(1+jw\tau)$  : ( $\tau > 0$ )**

$$A_{dB} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + w^2 \tau^2}$$

Lorsque :

$$w^2 \tau^2 < 1 \Rightarrow w\tau < 1 \Rightarrow A_{dB} = 0 : \text{Asymptote}$$

Lorsque :

$$w\tau > 1 \Rightarrow w^2 \tau^2 > 1$$

$$\Rightarrow A_{dB} = 20 \log_{10}(w\tau) : \text{Asymptote} \Rightarrow \text{droite de pente } 6 \text{ dB/octave}$$

Qui coupe l'axe 0 dB à  $w_0$ , tel que :

$$20 \log_{10}(w_0 \tau) = 0 \Rightarrow w_0 \tau = 1 \Rightarrow w_0 = \frac{1}{\tau}$$

En ce point, la courbe réelle possède une ordonnée = 3 dB car :

$$20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 \tau^2} = 20 \log_{10}(\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}$$

Pour  $w = \frac{1}{2}\tau$  et  $w = \frac{2}{\tau}$  on peut vérifier que ses ordonnées sont supérieures de 1 dB des asymptotes.

$$\varphi = \arg(1 + jw\tau) = \arctg(w\tau)$$

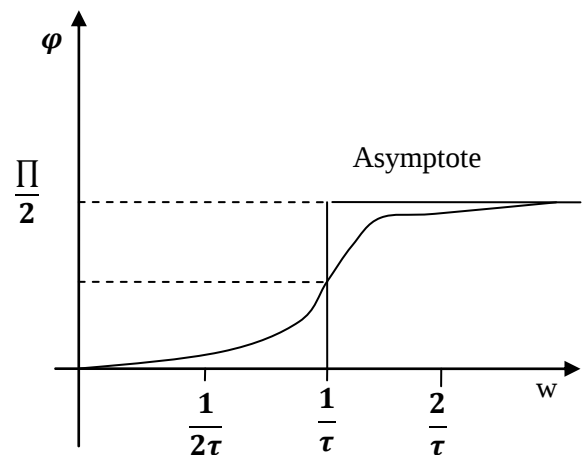
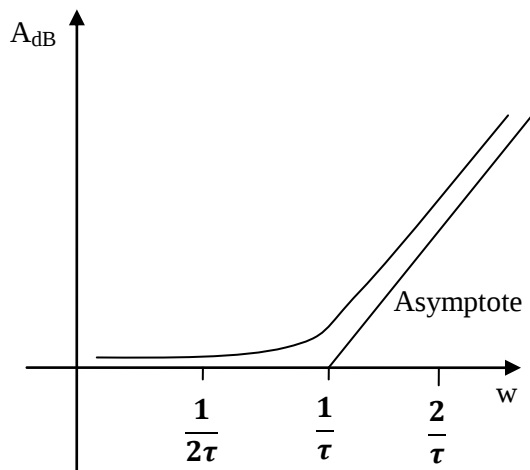
Alors, pour :  $w < \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi = 0$

Et pour :  $w > \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi = \frac{\Pi}{2}$

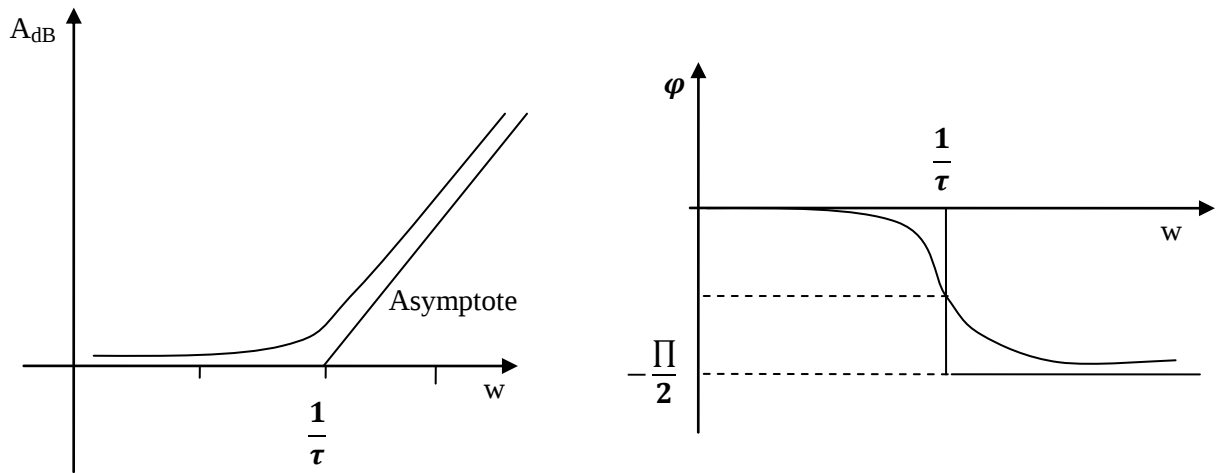
$$\text{si } w \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$$

$$\text{si } w \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\Pi}{2}$$

$$\text{lorsque : } w = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \varphi = \arctg(1) = \frac{\Pi}{4}$$



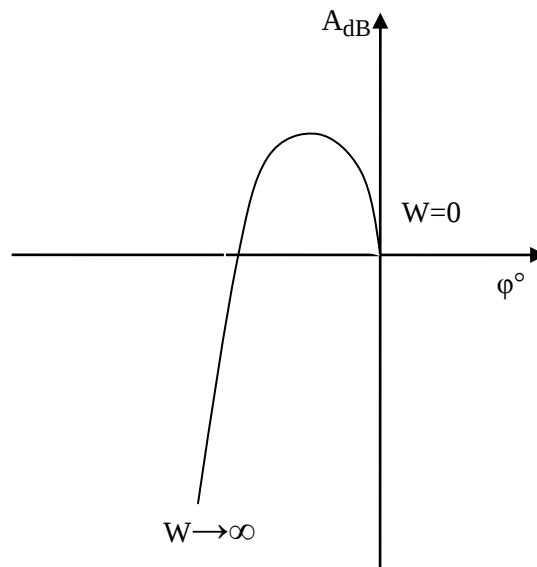
Si l'on considère le terme  $(1 + jw\tau)$  avec  $\tau > 0$ , alors son module est identique à celui du terme  $(1 - jw\tau)$  alors que son argument est identique en valeur absolue mais de signe opposé, c'est à dire on a les courbes suivantes.



Des termes de la forme :  $\frac{1}{1+jw\tau}$  et  $\frac{1}{1-jw\tau}$  ont des modules et des arguments identiques en valeur absolue mais de signes opposés à ceux des termes  $1 + jw\tau$  et  $1 - jw\tau$ .

## II. Diagrammes de Black ou Nichols :

Dans le plan dénommé de Black, on représente une réponse en fréquence  $T(jw)$ , en portant en abscisse, l'argument  $\varphi$  exprimé en degrés, et en ordonnée le module  $A$  de  $T(jw)$ , exprimé en décibels.



Un changement du gain statique  $K$ , se traduit par une translation suivant l'axe des ordonnées. La multiplication de plusieurs réponses en fréquences se réduit d'autre part à une addition vectorielle puisque le module et l'argument de  $T(jw)$  dépendent de  $w$ , on fait varier  $w$  de 0 à l'infini et on aura alors une courbe appelée : lieu de Black ou lieu de Nichols.

Le lieu de Nichols peut être déduit directement du diagramme de Bode, en prenant point par point le module et l'argument en fonction de  $w$ .

### Construction et allure des diagrammes de Black :

On sait que la fonction de transfert d'un système peut être mise sous la forme :

$$T(P) = K \cdot \frac{A_m}{P^l B_n}$$

où  $l = n - m$ , alors :

$$T(jw) \cong \frac{A_m}{B_n} \cdot \frac{1}{(jw)^{n-m}}$$

car  $K = cste$ .

**Aux hautes fréquences :** l'allure de  $T(jw)$  dépend de  $(n-m)$ .

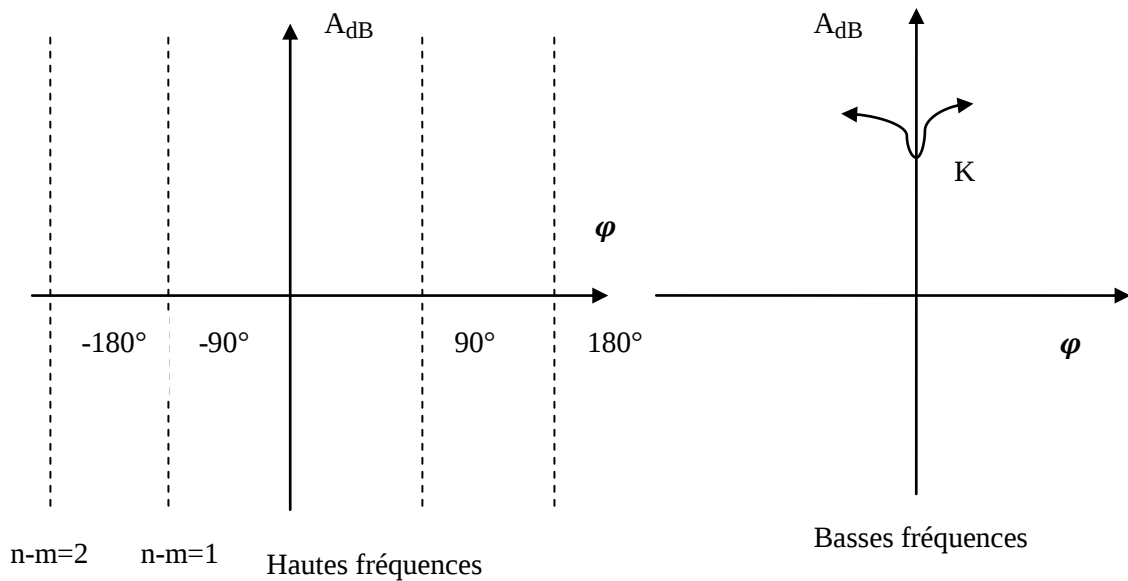
$$W \rightarrow \infty \Rightarrow |T(jw)| \rightarrow 0$$

$$n - m = 1 \Rightarrow \Phi = \arg[T(jw)] \rightarrow -\pi/2$$

$$n - m = 2 \Rightarrow \Phi \rightarrow -\pi$$

etc...

Aux fréquences élevées, les droites verticales sont donc des asymptotes pour les courbes de Black.



Pour  $w = 0$ ,  $T(jw) \rightarrow K$  : donc la courbe commence par ce point (aux basses fréquences).

Donc :

$$T(jw) = \frac{N(P)}{D(P)} \cdot \frac{K}{(jw)^\alpha}$$

$$\mathbf{BF} : w \rightarrow 0 \Rightarrow N(P) \rightarrow 0 \text{ et } D(P) \rightarrow 0 \Rightarrow T(jw) = \frac{K}{(jw)^\alpha} \rightarrow \infty \Rightarrow A_{dB} \rightarrow +\infty$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow T(jw) = K \Rightarrow A_{dB} = 20 \log_{10} K = K_{dB}$$

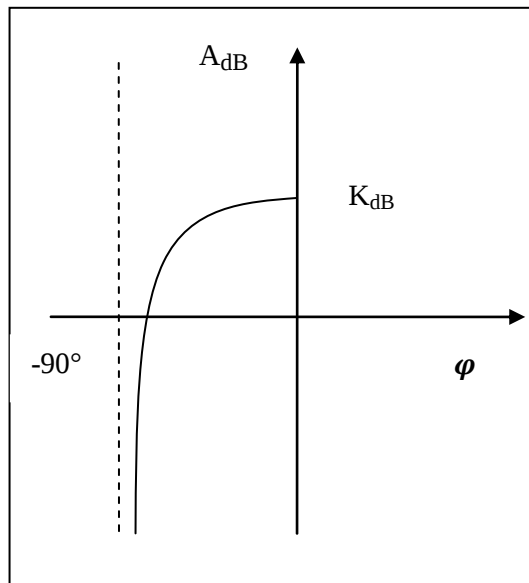
**Exemple :**

$$T(jw) = \frac{K}{1 + \tau P} = \frac{K}{1 + jw\tau}$$

**BF :**  $w \rightarrow 0 \Rightarrow T(jw) = K \Rightarrow A_{dB} = K_{dB} \quad (\varphi = 0)$

**HF :**  $w \rightarrow \infty \Rightarrow T(jw) = \frac{K}{jw\tau} \rightarrow 0 \Rightarrow A_{dB} \rightarrow \lim_{w \rightarrow \infty} (-20 \log(w\tau)) \rightarrow -\infty$

$n - m = 1 \Rightarrow \varphi = \arctg(w\tau/0) = -\frac{\pi}{2}$



**Exemple :**

$$T(jw) = \frac{K}{P(1 + \tau P)}$$

donc :

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad n - m = 2 \quad (HF), \quad P = jw$$

**BF :**

$$w \rightarrow 0 \Rightarrow \tau P < 1$$

$$\Rightarrow T(jw) = \frac{K}{P}$$

$$\Rightarrow A_{dB} = 20 \log K - 20 \log w \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \varphi = -\arctg\left(\frac{w}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

**HF :**

$$w \rightarrow \infty \Rightarrow T(jw) = \frac{K}{\tau P^2} = \frac{K}{\tau(jw)^2} = \frac{K}{\tau w^2}$$

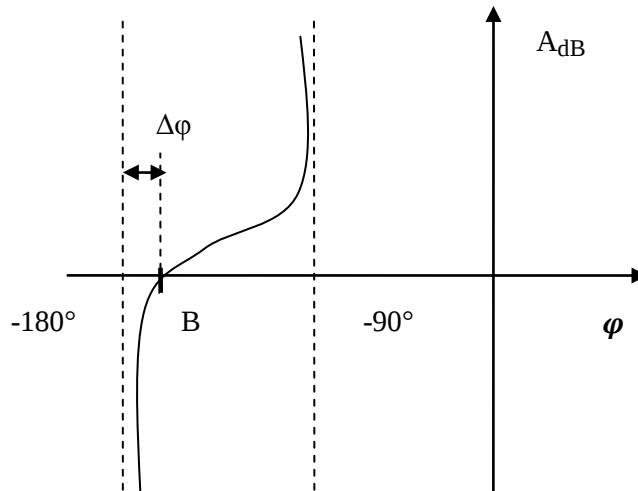
$$\text{Alors } A_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{\tau^2 w^4}$$

$$A_{dB} = 20 \log K - 20 \log \tau w^2 = 20 \log K - 40 \log \tau w$$

$$\text{Alors si } w \rightarrow \infty \Rightarrow A_{dB} \rightarrow -\infty$$

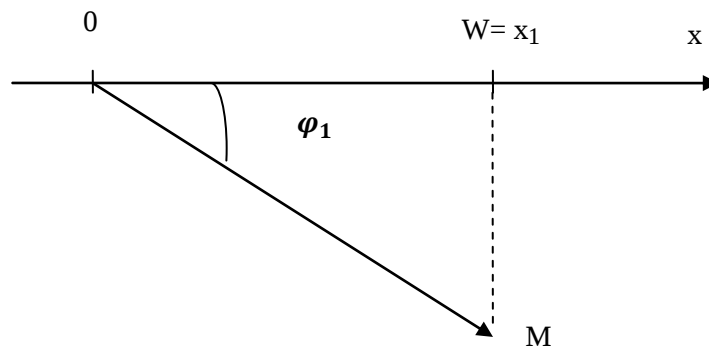
On a alors une variation de  $+\infty$  à  $-\infty$ , donc on assiste a un changement de variation, ce qui implique qu'on a un point B de passage par 0,

$$\varphi = -2 \arctg\left(\frac{\tau w}{0}\right) = -2 \frac{\pi}{2} = -\pi$$



### III. Diagrammes de Nyquist :

Dans ce diagramme, la représentation de  $T(jw)$  est sur la forme polaire, dont chaque point de lieu étant par extrémité du vecteur dont le module est égal à la valeur arithmétique de  $T(jw)$ , faisant un angle  $\varphi$  (qui est l'argument de  $T(jw)$ ) pour une valeur donnée de  $T(jw)$ .



$$T(jw) = |\overrightarrow{OM}| \angle \varphi_1$$

L'allure du lieu de Nyquist dépend toujours des Basses fréquences (BF), des hautes fréquences (HF) et du degré (n-m).

$$T(jw) = |T(jw)| \angle \varphi(w) \quad : \text{forme polaire}$$

$$T(jw) = |T(jw)| [\cos \varphi(w) + j \sin \varphi(w)] \quad : \text{forme d'Euler}$$

Donc :

$$T(jw) = |T(jw)| \cdot \cos \varphi(w) + j \cdot |T(jw)| \cdot \sin \varphi(w) = \text{Re}(T(jw)) + j \cdot \text{Im}(T(jw))$$

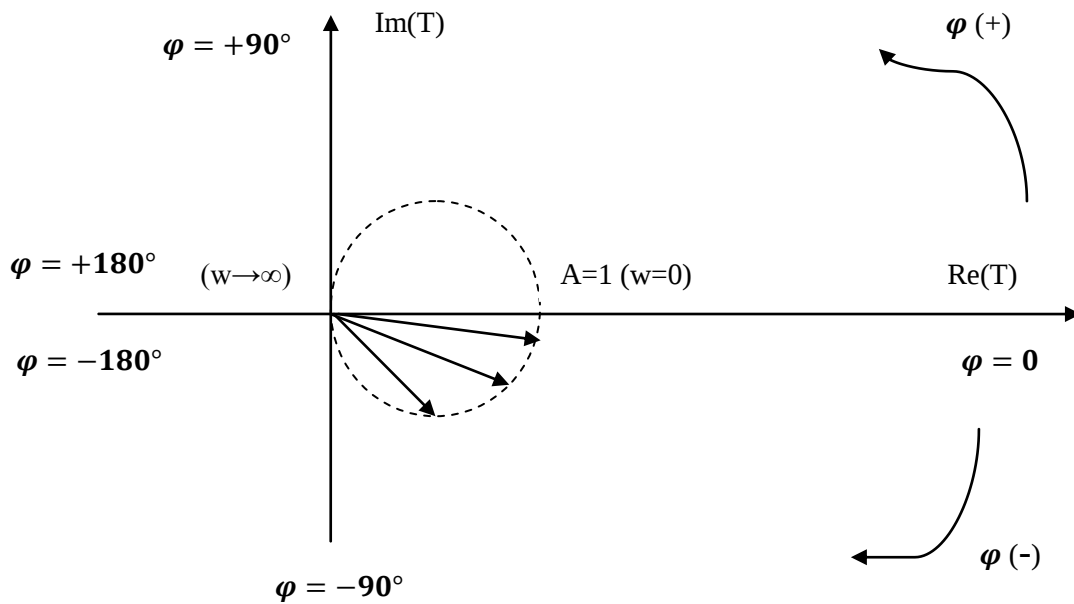
**Exemple :**

$$T(jw) = \frac{1}{jw + 1} \Rightarrow |T(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2}} \text{ et } \varphi[T(jw)] = -\arctan w$$

**BF :**  $w \rightarrow 0 \Rightarrow A = 1 \text{ et } \varphi = 0$

**HF :**  $w \rightarrow \infty \Rightarrow A = 0 \text{ et } \varphi = -\pi/2$

Pour  $w = 1 \Rightarrow (A = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{4})$



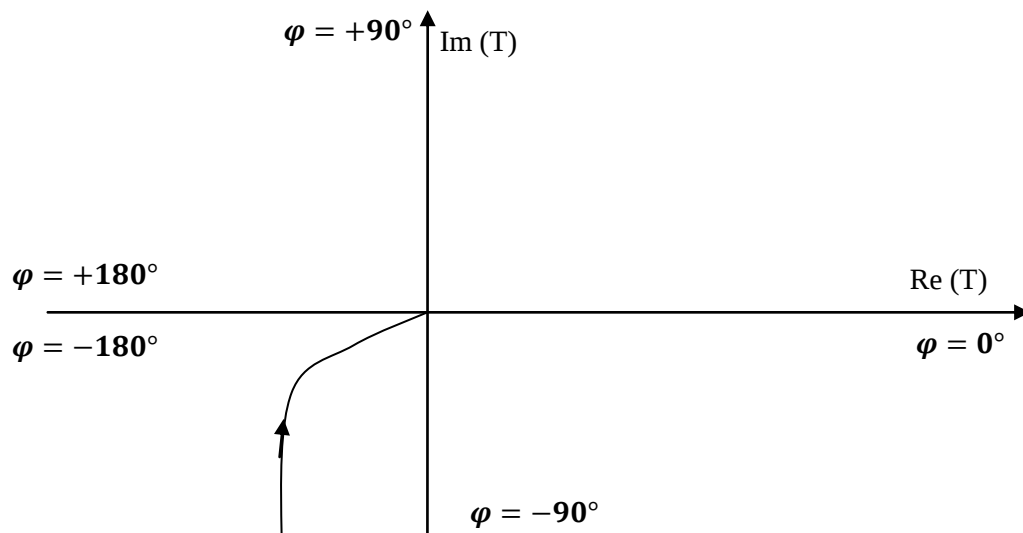
**Exemple 2:**

$$T(jw) = \frac{1}{jw(1 + jw)} : \alpha = 1$$

$$|T(jw)| = \frac{1}{w\sqrt{1 + w^2}} \text{ et } \varphi[T(jw)] = -90^\circ - \arctan w$$

**BF :**  $w \rightarrow 0 \Rightarrow A = \infty \text{ et } \varphi = -90^\circ$

**HF :**  $w \rightarrow \infty \Rightarrow A = 0 \text{ et } \varphi = -180^\circ$



#### IV. Critères de stabilité par les diagrammes :

##### a) Définition :

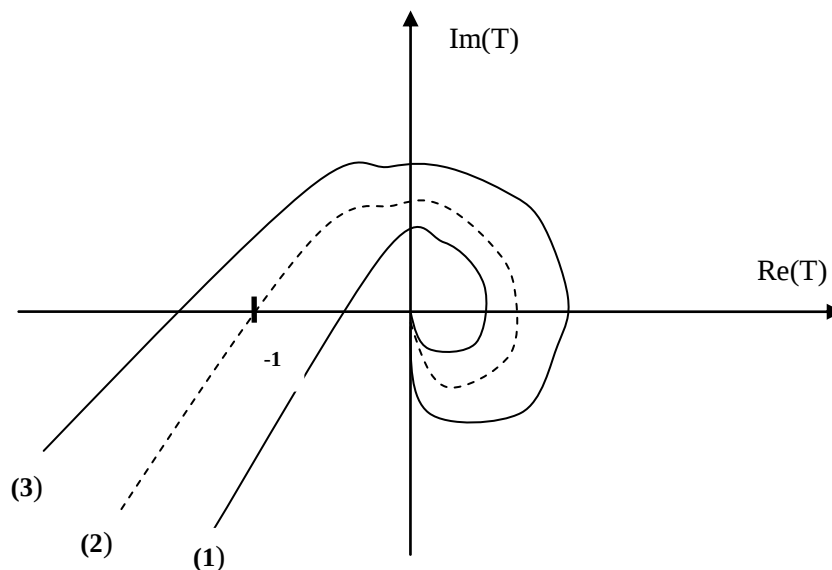
Un système est stable, lorsqu'il tend à revenir à sa position d'équilibre permanente quand on lui applique une perturbation de courte durée.

##### b) Conditions de stabilité :

Un système est stable si sa sortie tend vers zéro lorsque sa sortie tend vers zéro, c'est à dire, les pôles de  $F(P)$  (la fonction de transfert totale du système) aient leurs parties réelles négatives. Donc si  $1+T(P)=0$  (appelée équation caractéristique) a des racines à parties réelles négatives.

##### c) Critères de Revers :

Dans le plan de Nyquist :



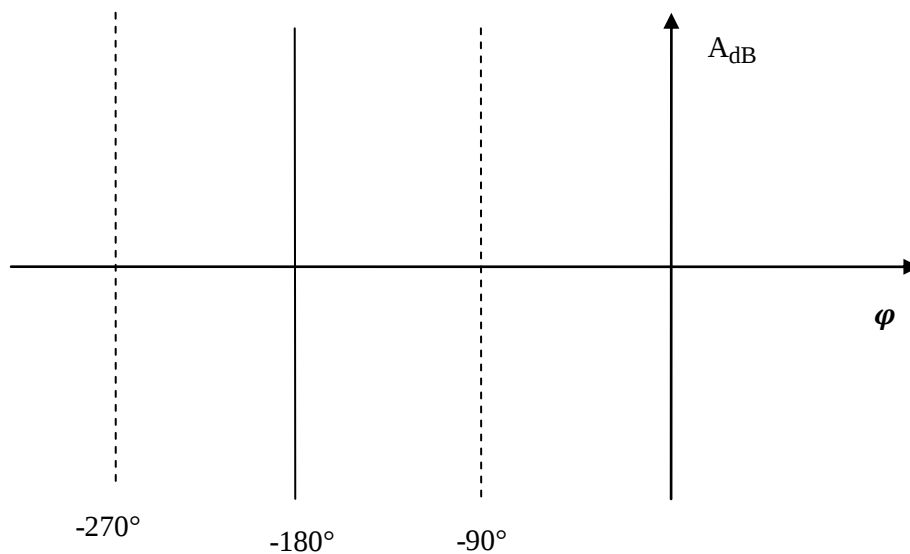
On a alors trois cas possibles :

- Dans le cas de (1), le système est stable
- Dans le cas de (2), le système est juste oscillant.
- Dans le cas (3) , le système est instable

Si en parcourant le lieu de transfert en Boucle ouverte de  $T(j\omega)$  dans le sens des  $\omega$  croissant, on laisse le point critique (-1) à sa gauche, le système est dit stable. Et si on le laisse à sa droite, le système est dit instable. Mais si  $|T(j\omega)| = 1$  (on passe alors par -1), le système est juste oscillant, le point (-1) est point critique.

#### Dans le plan de Black ou Nichols :

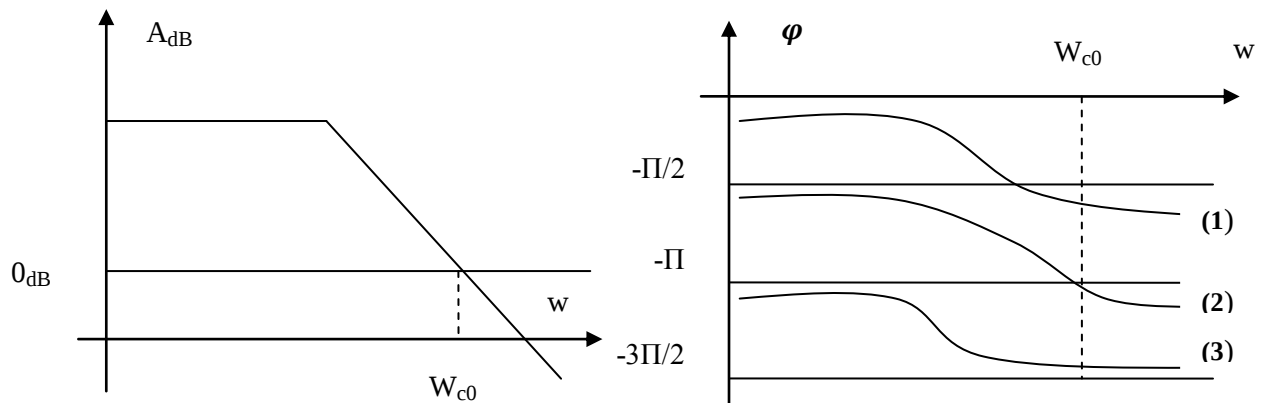
Dans le plan de Nichols ou Black, le point (-1) a les coordonnées :  $A = 0$  et  $\varphi = -180^\circ$



- Si on laisse le point (-180°) à gauche, alors le système est stable.
- Si on passe par le point (-180°), le système est juste oscillant.
- Si on laisse le point (-180°) à droite, le système est instable.

Un système est stable si en parcourant la courbe de  $T(j\omega)$  dans le sens des  $\omega$  croissant, le point (-1) avec ( $\varphi = -180^\circ$ ) est laissé à droite.

Dans le plan de Bode :



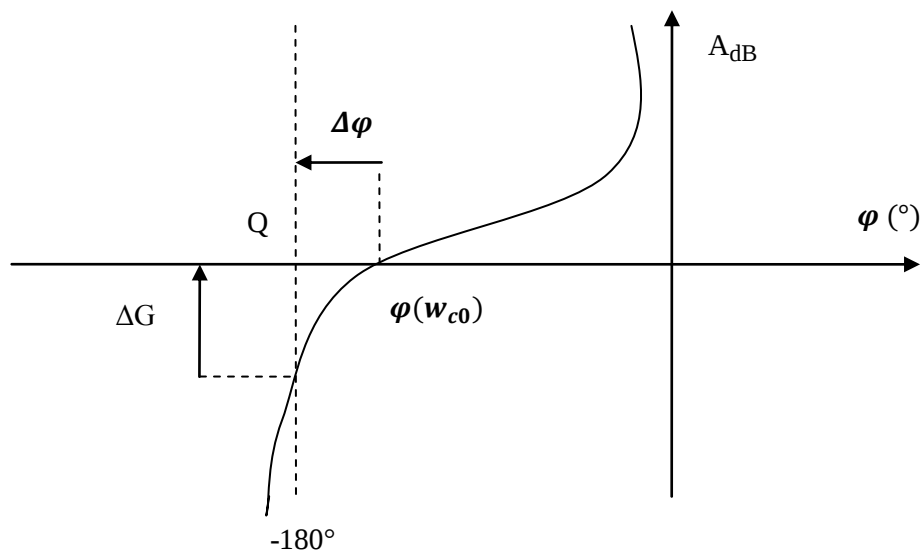
- Si l'argument à la pulsation  $W_{c0}$  est compris entre 0 et  $-180^\circ$ , le système est stable (1).
- Si l'argument à la pulsation  $W_{c0}$  est égal à  $-180^\circ$ , le système est juste oscillant (2).
- Si l'argument à la pulsation  $W_{c0}$  est inférieur à  $-180^\circ$  ( $-190^\circ$ , etc.), le système est instable (3).

#### V. Degré de stabilité :

Jusqu'à là on est arrivé à déterminer si le système est stable ou instable, mais on ne pouvait pas mesurer si le système est plus ou moins loin de la stabilité, cette notion de mesure est dite : **degré de stabilité**.

##### a) Marge de gain et marge de phase dans le plan de Black :

La mesure de la marge de gain (MG) et de la marge phase (MP) est une méthode qui nous permet de mesurer le degré de la stabilité.



- Plus on se rapproche du point critique ( $-180^\circ$ ), plus le point de résonance  $Q$  ( $\varphi = -180^\circ$ ) diminue et plus la marge de gain  $\Delta G$  est petite.
- Plus  $\Delta G$  et  $\Delta \varphi$  (marge de phase) sont grands, plus on est loin de l'instabilité (donc plus on est stable).

On définit donc la **marge de phase**  $\Delta\varphi$ , comme étant la distance du point critique au point d'intersection de la courbe de la fonction de transfert avec l'axe des arguments, elle est exprimée en degrés :

$$\Delta\varphi = 180^\circ + \varphi_{w_{c0}}$$

$w_{c0}$  : étant la fréquence de coupure.

$\Delta\varphi$  est notée aussi  $\phi_{MP}$

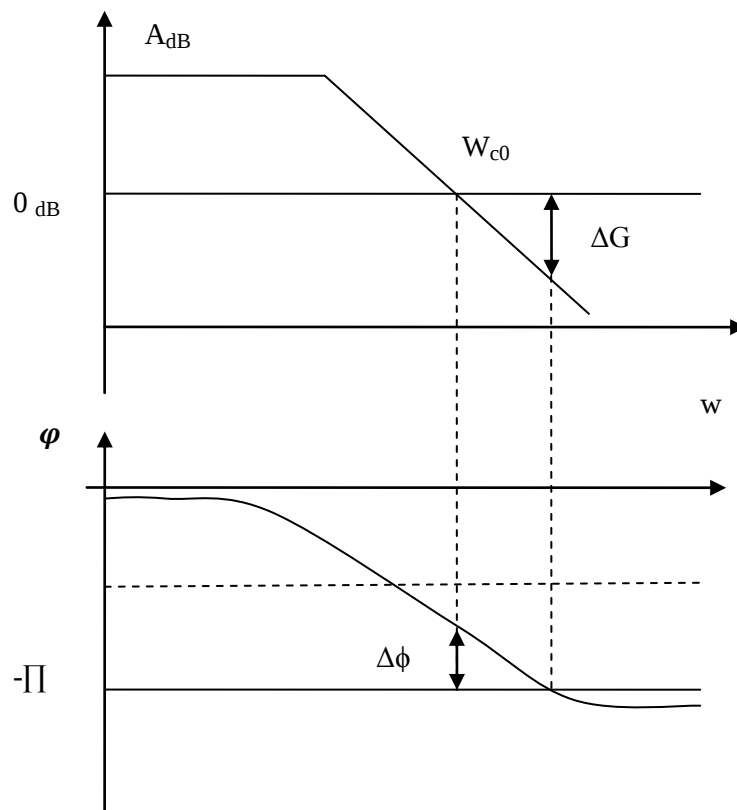
**Remarque :**

- si  $\Delta\varphi > 0 \Rightarrow$  le système est stable
- si  $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow$  le système est oscillant
- si  $\Delta\varphi < 0 \Rightarrow$  le système est instable

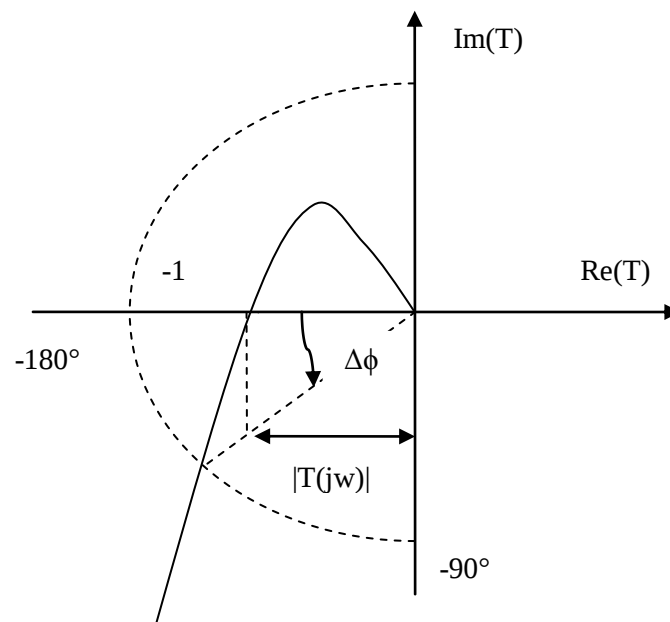
On définit aussi la marge de gain  $\Delta G$ , comme étant la différence entre le point  $(-\Pi)$  (donc  $0_{dB}$ ) à la courbe de  $T(jw)$  quand  $\varphi = -\Pi$ .

$$\Delta G = 0 - 20 \log|T(jw_{\Pi})| = -20 \log|T(jw_{\Pi})|$$

**b) Marge de gain et marge de phase dans le plan de Bode :**



c) Marge de gain et marge de phase dans le plan de Nyquist :



Cercle de rayon 1, si dans le cercle, alors le système est stable, et si en dehors du cercle, alors le système est instable.

$$\Delta G = \frac{1}{|T(jw_{\Pi})|}$$

$w_{\Pi}$  est la fréquence pour laquelle on a :

$$\begin{aligned}\varphi(w_{\Pi}) &= -\Pi \\ \Delta\varphi &= 180 + \varphi(w_{c0})\end{aligned}$$

$\varphi(w_{c0})$  : L'argument pour lequel on a  $|T(jw)|=1$ , (c'est à dire à la fréquence de coupure  $w_{c0}$ ).

Généralement :  $\Delta\varphi > 45^\circ$

## Chapitre 8 : Correction des systèmes asservis linéaires

Le présent chapitre a pour but de donner les moyens de résoudre les problèmes qui se posent couramment dans le domaine des systèmes asservis et de la régulation, tels que :

- Comment diminuer les erreurs stationnaires ?
- Comment augmenter le degré de stabilité ?
- Comment rendre stable un système qui ne l'est pas ?
- Etc....

### I. La fonction de correction :

Grâce à un élément appelé " Correcteur " dont la fonction de transfert peut s'exprimer  $D(p)$  et qui se place après le comparateur de l'écart  $\varepsilon(p)$  peut être corrigé par une multiplication par  $D(p)$

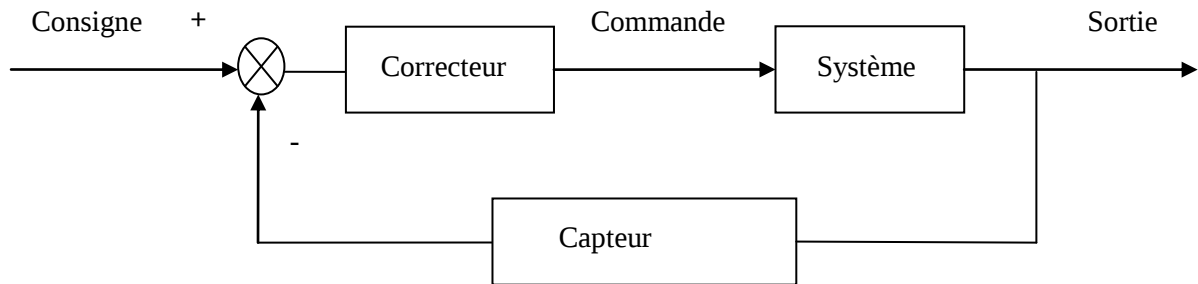
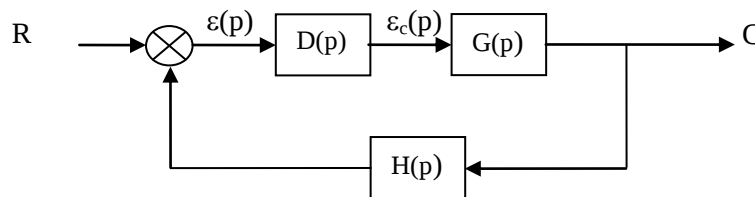


Figure 8.1 : Schéma de la position du correcteur dans un système asservi



$$\varepsilon_c(p) = \varepsilon(p) \cdot D(p)$$

$$T(p) = G(p) \cdot H(p) \quad : \text{Fonction de transfert en BO non corrigée.}$$

$$T_c(p) = D(p) \cdot G(p) \cdot H(p) \quad : \text{Fonction de transfert en BO corrigée.}$$

$$\Rightarrow D(p) = \frac{T_c(p)}{T(p)}$$

L'ambiguïté réside dans le choix du correcteur pour cela, on peut adopter plusieurs façons :

- On fixe  $T_c(p)$ , et on peut donc trouver

$$D(p) = \frac{T_c(p)}{T(p)}$$

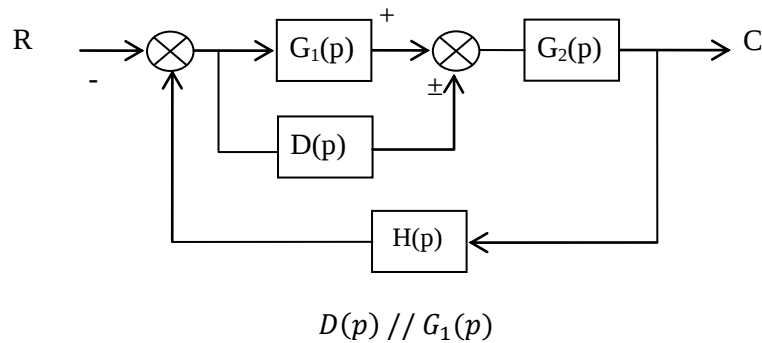
- Seule  $G(p)$  est fixée ; on peut donc choisir par exemple  $T_c(p)$  et  $F_c(p)$  alors :

$$F_c(p) = \frac{D(p) \cdot G(p)}{1 + D(p) \cdot H(p) \cdot G(p)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} H(p) = \frac{T_c(p)}{1 + T_c(p)} \cdot \frac{1}{F_c(p)} \\ D(p) = \frac{T_c(p)}{G(p) \cdot H(p)} \end{cases}$$

Lorsque la fonction de transfert du correcteur  $D(p)$  est déterminée, il se pose le problème de sa réalisation.

**Remarque :** Il y'a des corrections qui sont placés en parallèle ou dans la chaîne de réaction.



## II. Les différents types de correcteurs :

### a) Action proportionnelle (P) :

L'action d'un correcteur est dite proportionnelle lorsque l'écart corrigé  $\varepsilon_c$  est proportionnel à l'écart non corrigé  $\varepsilon$ , la fonction de transfert du correcteur est alors une constante que l'on peut supposer :

$$D(p) = 1$$

### b) Action dérivée ou différentielle (D) :

L'action d'un correcteur est dite dérivée ou différentielle, si l'écart corrigé  $\varepsilon_c(p)$  est proportionnel à la dérivée de l'écart non corrigé  $\varepsilon(p)$  :

$$D(p) = \tau p$$

### c) Action intégrale (I) :

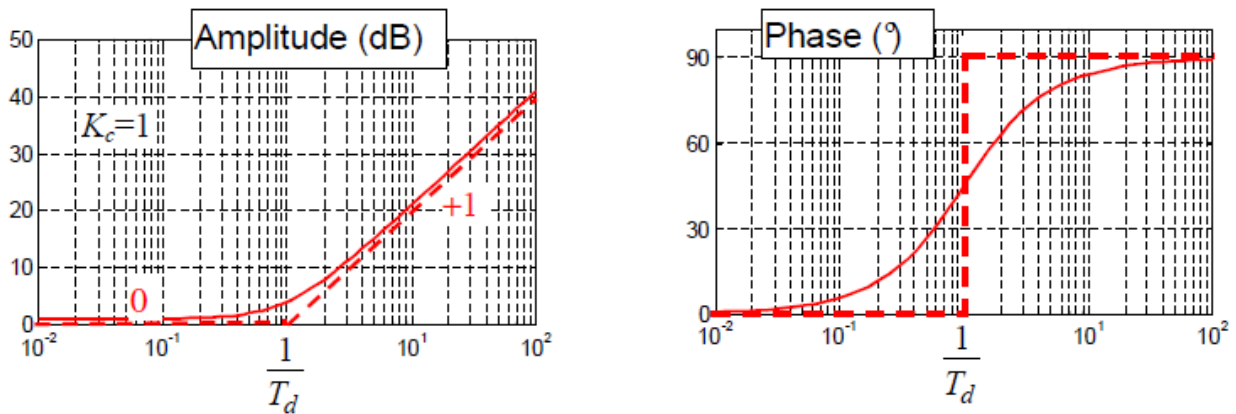
L'action d'un correcteur est dite intégrale si  $\varepsilon_c(p)$  est proportionnel à l'intégrale de  $\varepsilon(p)$  :

$$D(p) = \frac{1}{\tau p}$$

Les actions **D** et **I** ne s'emploient jamais seules mais en combinaison avec l'action **P**. En effet, on désire, en régime permanent, que le signal de commande  $E_c(P)$  soit proportionnel au signal  $E(P)$  et pour cela, on définit les actions appelées comme suit: **PI, PD, PID**

**d) Action PD :**

$$D_1(p) = 1 + \tau p$$



**Figure 8.2: Action du correcteur PD, dans le plan de Bode**

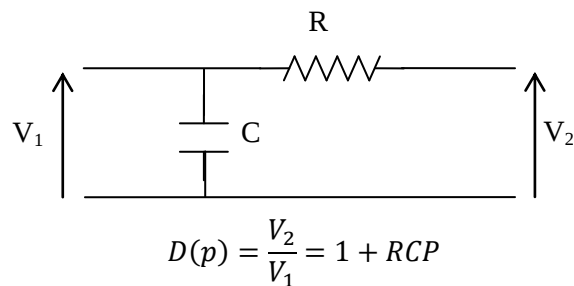
On peut faire intervenir sous l'expression de  $D_1(p)$  d'autres termes, dérivée seconde de  $\varepsilon$  et même d'ordre supérieur. On parle alors de correcteurs PDD<sup>2</sup>, etc....

$$\begin{cases} D_1(p) = 1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2 \\ D_1(p) = 1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2 + \tau_3 p^3 + \dots \end{cases}$$

Mais ils sont irréalisables physiquement. Dans la figure 8.2 ; on a  $\tau_1 = T_d$

**Réalisation pratique d'un correcteur PD :**

Ce type de correcteur a pour effet d'augmenter la phase de la fonction du transfert du système corrigé par rapport à celle du système non corrigé ; ceci pour des pulsations au voisinage de  $\omega = \frac{1}{\tau}$  et pour des pulsations plus élevées.



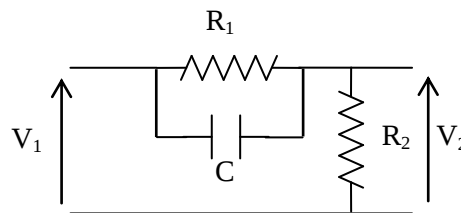
**Forme approchée du PD :**

C'est un correcteur à avance de phase, généralement il est utilisé pour les conditions suivantes :

- Il est utilisé plus souvent dans les plages de fréquences basses et moyennes.
- Ces circuits à avance de phase peuvent se mettre en cascade pour atteindre l'objectif de phase.
- On l'utilise aussi pour augmenter la bande passante d'un système.
- Le PD agit comme un atténuateur en BF.

**Remarque :** Un correcteur de type PD augmente automatiquement le gain statique (de Bode) → il fait augmenter la précision statique et dynamique du système.

**Réalisation de cette forme approchée :**



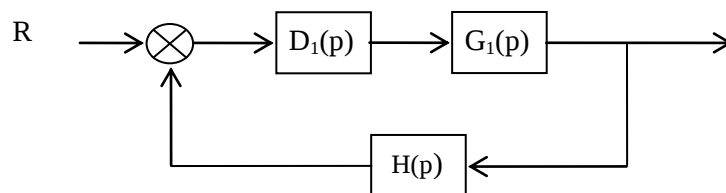
$$\begin{cases} R_1 C = \tau_1 \\ R_2 C = \tau_2 \end{cases}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 + \frac{1}{CPR_1}}{1 + \frac{1}{CPR_2}} = \frac{P + \frac{1}{CR_1}}{P + \frac{1}{CR_2}} = \frac{P + a}{P + b}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{CR_1} \\ b = \frac{1}{CR_2} + \frac{1}{CR_1} \end{cases} \quad b > a$$

En fréquence:

$$D_1(j\omega) = \frac{a}{b} \cdot \frac{(1 + j\frac{\omega}{a})}{(1 + j\frac{\omega}{b})}$$



e) Action PI :

$$D_2(p) = 1 + \frac{1}{\tau p}$$

- Retarde la phase
- Diminue le gain aux basses fréquences.

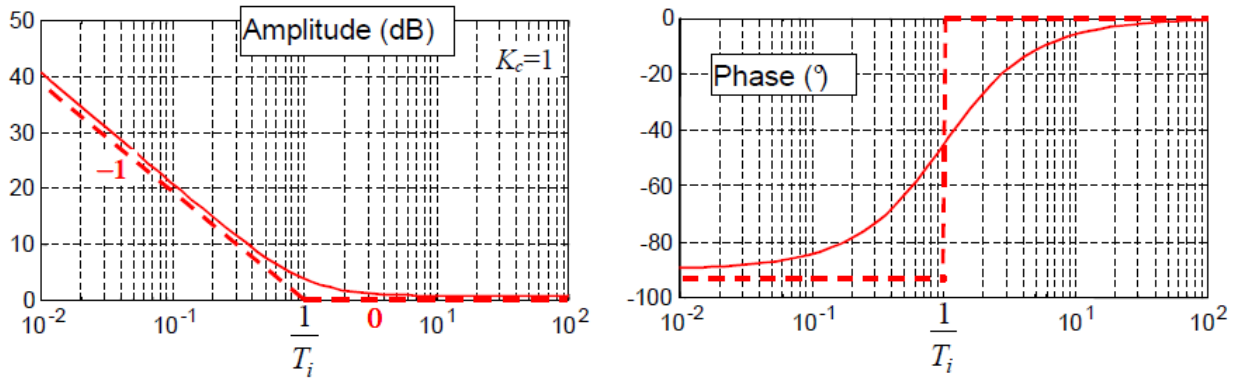
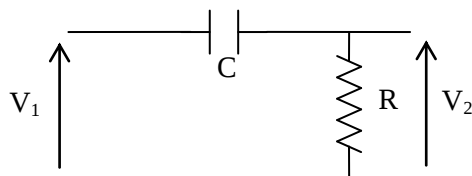


Figure 8.3: Action du correcteur PI, dans le plan de Bode

Dans la figure 8.3, on a :  $\tau = T_i$

Réalisation pratique PI :



On a :  $V_2 = R i(t)$

Et :  $V_1 = \frac{1}{C} \int i(t) dt + V_2$

Donc :  $V_1 = \frac{1}{CP} I + V_2$

Alors on peut écrire :  $V_1 = \frac{1}{CP} \frac{V_2}{R} + V_2$

Ou :  $V_1 = V_2 \left( 1 + \frac{1}{CPR} \right)$

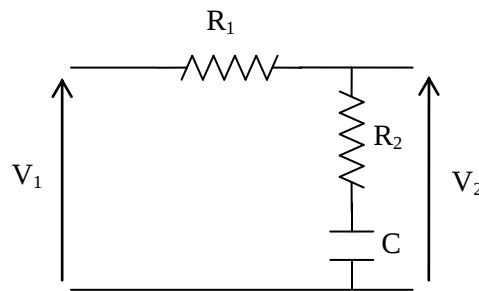
Donc ; on peut écrire :  $\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{CPR}} \right) = \frac{CPR}{1 + CPR}$

Finalement on a :  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\tau P}{1 + \tau P}$

#### Forme approchée d'un PI :

- Il retarde la phase.
- Il réduit la bande de fréquence.
- Il agit comme un atténuateur en HF.
- Il réduit la phase.
- Etc....

#### Réalisation pratique de la forme approchée d'un PI :



$$D_2(j\omega) = \frac{a}{b} \cdot \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{b}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{a}\right)} ; \text{ avec } b < a$$

$$a = \frac{1}{R_1 C} , \quad b = \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}$$

#### f) Action PID

##### Forme approchée d'un PID :

C'est un correcteur à retard-avance de phase, il présente beaucoup d'avantages :

- Avance de phase en hautes fréquences
- Amplification en hautes fréquences  $\Rightarrow$  Effet PD en hautes fréquences
- Gain infini en basses fréquences  $\Rightarrow$  Retard de phase en basses fréquences
- Fréquences moyennes : peu d'influence du correcteur

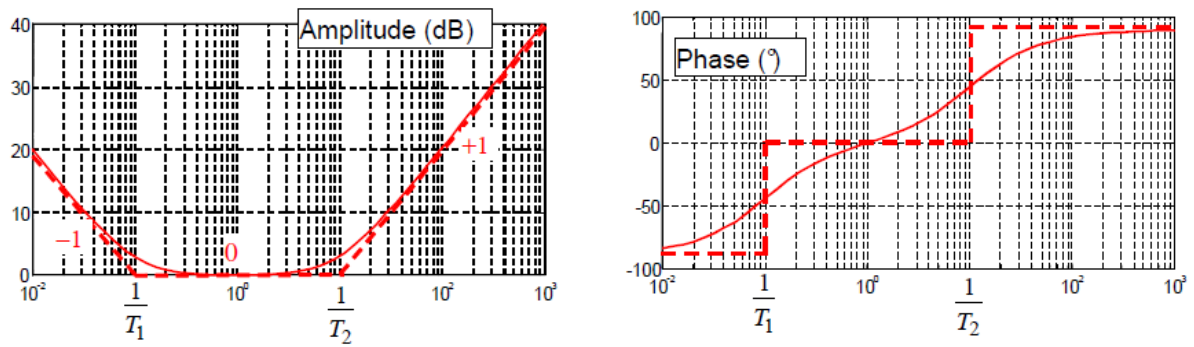
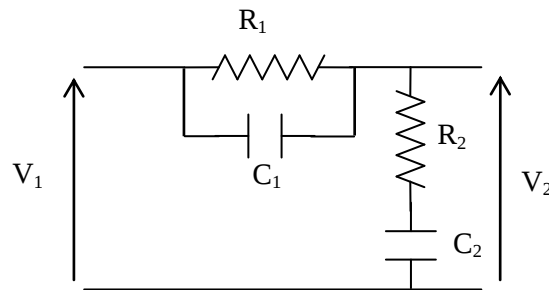


Figure 8.4: Action du correcteur PID, dans le plan de Bode

Dans la figure 8.4, on a :  $T_1 = R_1 C_1$  et  $T_2 = R_2 C_2$

Réalisation pratique de la forme approchée d'un PID :



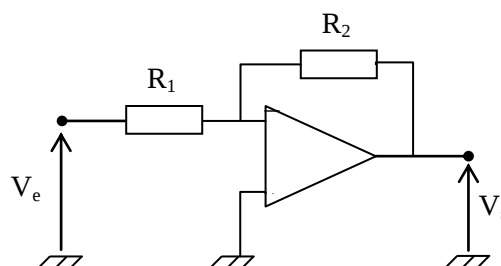
$$D_3(P) = \frac{(a_1 + P) \cdot (b_2 + P)}{(b_1 + P) \cdot (a_2 + P)}$$

$$a_1 = \frac{1}{R_1 C_1} ; b_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot b_2 \\ b_1 + a_2 = b_2 + a_1 + \frac{1}{R_2 C_1} \end{cases}$$

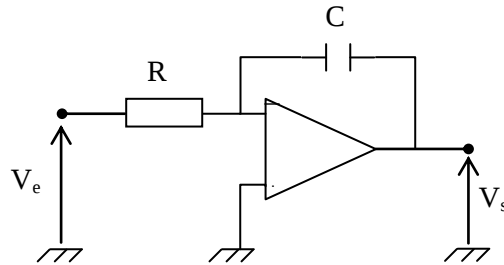
g) Les correcteurs actifs (à base d'amplificateurs Opérationnels):

Régulateur proportionnel (P) :



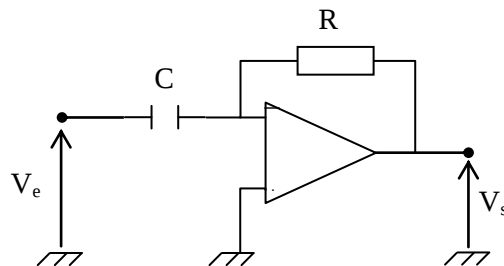
$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1} = K$$

**Régulateur intégrateur (I) :**



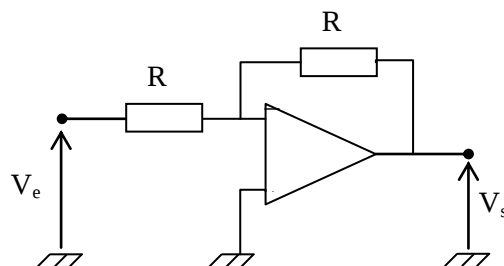
$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{RCP}$$

**Régulateur différentiateur (D) :**



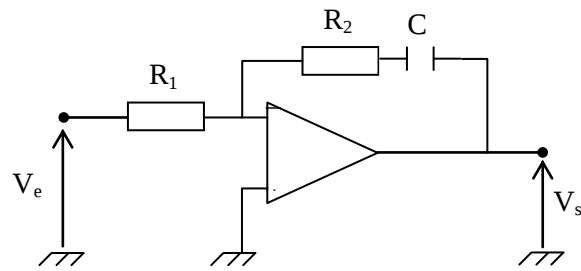
$$\frac{V_s}{V_e} = -RCP$$

**Inverseur :**



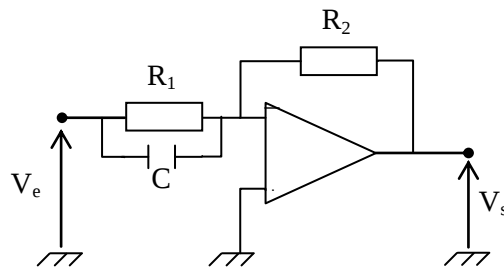
$$\frac{V_s}{V_e} = -1$$

**PI:**



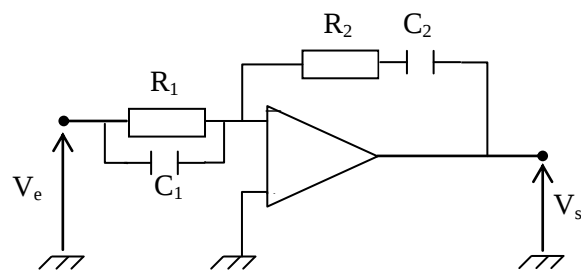
$$\frac{V_s}{V_e} = - \left( \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_2 C P} \right)$$

**PD:**



$$\frac{V_s}{V_e} = - \left( \frac{R_2}{R_1} (1 + R_1 C P) \right)$$

**PID:**



$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{(1 + R_2 C_2 P) \cdot (1 + R_1 C_1 P)}{R_1 C_2 P}$$

## Références :

- [1] J. J. Di Stefano, A. R. Stubberud, I. J. Williams, Systèmes asservis : cours et problèmes, McGraw Hill Edition, 1994
- [2] C. Foulard, J. Calvet, F. de Carfort, Asservissements linéaires continus, édition Dunod, 1987
- [3] M. Rivoire, J. L. Ferrier, Cours d'automatique, Tome 1 : Signaux et systèmes ; 3eme édition, Edition Eyrolles ; 1999.
- [4] M. Rivoire, J. L. Ferrier, Cours d'automatique, Tome 2 : Asservissement-régulation, commande analogique, 3eme édition, Edition Eyrolles, 1999.
- [5] K. Ogata, Automatic Control Engineering, Prentice Hall, fifth edition, 2010.
- [6] B.C. Kuo, Automatic Control Systems, Prentice Hall, ninth edition, 2009.

## Annexe A : Table des transformées de Laplace

| La fonction du temps | La transformée de Laplace         | Observation        |
|----------------------|-----------------------------------|--------------------|
| $\delta(t)$          | 1                                 | impulsion de Dirac |
| $u(t) = 1$           | $\frac{1}{P}$                     | échelon unitaire   |
| $a \cdot u(t)$       | $\frac{a}{P}$                     | échelon            |
| $r(t) = t$           | $\frac{1}{P^2}$                   | rampe unitaire     |
| $e^{-at}$            | $\frac{1}{P + a}$                 | $a \geq 0$         |
| $t^n$                | $\frac{n!}{P^{n+1}}$              | n=1, 2, 3, etc.    |
| $\sin wt$            | $\frac{w}{P^2 + w^2}$             |                    |
| $\cos wt$            | $\frac{P}{P^2 + w^2}$             |                    |
| $e^{-at} \sin wt$    | $\frac{w}{(P + a)^2 + w^2}$       | $a \geq 0$         |
| $e^{-at} \cos wt$    | $\frac{(P + a)}{(P + a)^2 + w^2}$ | $a \geq 0$         |
| $e^{-at} \cdot f(t)$ | $F(P + a)$                        | $a \geq 0$         |
| $\delta(t - \tau)$   | $e^{-\tau P}$                     |                    |

## **Annexe B : Les termes très utilisés, en anglais**

|                               |                                           |
|-------------------------------|-------------------------------------------|
| Bande passante                | bandwidth                                 |
| Coefficient d'amortissement   | damping ratio                             |
| Contre-réaction               | feedback                                  |
| Dépassement                   | overshoot                                 |
| Entrée                        | input                                     |
| Gain                          | gain                                      |
| Invariant (en temps)          | time invariant                            |
| lieu des racines              | root locus                                |
| Linéaire invariant (en temps) | linear time invariant (LTI)               |
| Pulsation amortie             | damped frequency                          |
| Pulsation naturelle           | conditional frequency / natural frequency |
| Pulsation propre non amortie  | natural (undamped) frequency              |
| Régime permanent              | steady state                              |
| Régime transitoire            | transient response                        |
| Réponse impulsionnelle        | impulse response                          |
| Réponse indicielle            | step response                             |
| Sortie                        | output                                    |
| Système asservi               | feedback system                           |
| Système avec contre-réaction  | feedback system                           |
| Temps de montée               | rise time                                 |
| Temps de réponse              | settling time                             |