



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université Dr. Tahar Moulay de Saida
Faculté de Technologie

Département d'Électrotechnique

Vibrations et Ondes

Présenté par :

Dr. BENOUIS ALI

Maître de conférences « B » en Génie Mécanique

Février 2018

Avant-propos

La mécanique a non seulement pour but de décrire les mouvements des objets mais aussi d'en comprendre les causes (les forces). Les lois fondamentales de la mécanique newtonienne, associées à des modèles de forces, et la méthode de Lagrange (le principe des moindres carrés de Lagrange) fournissent les équations nécessaires à la compréhension et à la prévision des mouvements.

La vibration étudie les lois physiques qui sont mises en jeu dans une telle activité. Ces lois, aux effets complexes et subtils, agissent indépendamment des idées vraies ou fausses qu'on peut en avoir : cette science est donc incontournable, qu'on le veuille ou non, si l'on désire comprendre en profondeur une application quotidienne.

D'une façon générale, les vibrations dans les structures mécaniques sont fatales pour les raisons suivantes :

Elles engendrent la défaillance de la structure ou la ruine de ses constituants par rupture;

Elles sont souvent source de défauts de fabrication pour les produits notamment lors d'un usinage des pièces mécaniques.

Ce document constitue une synthèse de quatre chapitres donnés dans le parcours de la deuxième année des filières Sciences et techniques (électrotechnique, électronique, génie civil, hydraulique, génie biomédical, génie des procédés,). Nous avons veillé à prendre des exemples concrets comme étant un point de départ et à retourner au concret dans l'interprétation physique.

Ce polycopié de vibrations mécaniques réparti en quatre chapitres :

Le premier chapitre porte sur un rappel et l'utilisation du principe du Lagrange pour décrire les oscillations des systèmes mécaniques et électriques de faible amplitude à un degré de liberté. L'étude des oscillations linéaires amorties (là où des frottements dus à la viscosité du milieu) des systèmes à un degré de liberté sont présentés dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre traite le mouvement d'un système forcé (libre et amorti) qui prend en compte les forces d'excitations extérieures, abordent ainsi le principe de la notion de résonance, les analogies électriques- mécaniques sont présentées pour les différents chapitres.

Le quatrième chapitre aborde les vibrations à deux à plusieurs degrés de liberté.

Avec des exercices d'application correspondante avec solutions détaillées qui permettent l'éclaircissement du cours ou qu'ils permettent la maîtrise de résolution des systèmes vibratoires à un ou deux degrés de liberté.

Nous espérons que les étudiants trouveront ici les moyens de se familiariser avec les lois de la mécanique des systèmes vibratoires.

Table des matières

Avant-propos

Introduction générale 10

Chapitre I : Oscillations libres non amorties : Système à un degré de liberté

I.1 Introduction et objectifs.....	12
I.2 Mouvement périodique.....	12
I.3 Mouvement vibratoire.....	12
I.3.2 Mouvement vibratoire libre.....	13
I.3.3 Mouvement vibratoire sinusoïdal.....	14
I.4 Coordonnées généralisées.....	15
I.5 Définition du nombre n degrés de liberté d'un système mécanique.....	16
I.5.2 Équations de transformation.....	17
I.6 Équations de Lagrange.....	17
I.6.1 Force et couple d'inertie.....	17
I.6.2 Principe d'Alembert.....	17
I.6.3 Formalisme canonique.....	18
I.7 Exemples d'oscillateurs harmoniques.....	19
I.7.1 Applications élémentaires.....	19

I.7.2 Équation différentielle (L'étude d'une vibration harmonique).....	24
I.7.2 .1 Aspects des forces.....	24
I.7.2 .2 Aspects énergétiques.....	28
I.8 Combinaison de plusieurs éléments élastiques.....	32
I.8.2 Analogie entre le système mécanique " Masse-ressort" et le système électrique "L.C.".	34
I.8.3 Oscillateur harmonique électrique : circuit R.L.....	34
I.8.4 Oscillateur électrique amorti : circuit R.L.C.....	35
I.8.5 Éléments constitutifs des systèmes électriques et mécaniques.....	35

CHAPITRE II : Oscillations libres amorties : Systèmes à un degré de liberté

II.1 Introduction.....	37
II.2 Oscillations libres amorties.....	38
II.3 Équation de Lagrange dans un système amorti.....	39
II.4 Étude du système masse-ressort-amortisseur vertical.....	39
II.4.1 Détermination de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.....	40
II.4.2 La solution de l'équation différentielle.....	41
II.5 L'oscillateur harmonique électrique.....	44
II.6 Décrément logarithmique D.....	45
II.7 Facteur de qualité (Facteur de surtension)	47

II.8 Calcule du facteur de qualité : système masse-ressort-amortisseur (m, k, α)	47
II.9 Calcul du facteur de qualité : système électrique (R.L.C).....	48
II.10 Quelques schémas réels.	48

CHAPITRE III : Oscillations forcées amorties : Systèmes à un degré de liberté

III.1 Introduction	50
III.2 Équation différentielle du mouvement.....	50
III.3 L'oscillateur forcé amorti, expérience de résonance.....	51
III.3.1 Dispositif expérimental.....	51
III.3.2 Courbe de réponse du résonateur.....	52
III.3.3 Influence de l'amortissement.....	53
III.3.4 Importance de la résonance en mécanique.	54
III.4 Établissement du régime d'énergie.....	54
III.5 Étude de la solution.....	55
III.5.1 Calcul de l'amplitude A.....	57
III.5.2 Calcul de φ	58
III.6 Étude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude.....	59

III.6.1 La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ	59
III.6.2 La variation de la phase en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ	61
III.7 Facteur de qualité et bande passante.....	63
III.8 Conclusions.....	64

CHAPITRE IV : Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

IV.1 Introduction.....	65
IV.2 Le degré de liberté.....	66
IV.3 Exemples.....	66
IV.3.1 Les types de couplages.....	68
IV.4 Exemples de systèmes a 2 DDL.....	70
IV.4.1 Pendules couplés libre et visqueux.....	71
IV.4.2 Système masses-ressorts libre et visqueux en translation.....	71
IV.4.3 Systèmes électriques.....	72
IV.4.4 Couplage Inertiel.....	72
IV.5 Méthode générale de résolution des équations de mouvement.....	73
IV.6 Pendules couplés : (Couplage Élastique)	73
IV.6.1 Calcul des pulsations propres.....	76

IV.6.2 Les modes d'oscillations.....	77
IV.7 Calcul des modes d'oscillations.....	77
IV.7.1 Premier mode.....	77
IV.7.2 Deuxième mode.....	78
IV.8 Calcul des solutions des équations différentielles.....	79
IV.9 Calcul des constantes A , B , φ_1 et φ_2	80
IV.10 Phénomène de battement.....	80
Séries d'exercices	80

Liste des symboles

Grandeurs :

$q(t)$	---	Coordonnées généralisées
E	(Jol)	Énergie totale du système
E_c	(Jol)	Énergie Cinétique du système
E_{cm}	(Jol)	Énergie Cinétique moyenne du système
E_p	(Jol)	Énergie potentielle du système
L	(Jol)	Lagrangien du système
D	(Jol)	L'énergie de dissipation (fonction dissipatrice)
F_{ext}	(N)	Forces extérieures appliquées
A	---	Amplitude maximale
M_{ext}	(N.m)	Moments extérieurs appliqués
ω_0	(rad/s)	Pulsation propre du mouvement libre
Φ, φ	(rad)	Déphasage
T_0	(1/s)	Période propre du mouvement libre
k	(N/m)	Constante de raideur du ressort
C	(N.m.rad ⁻¹)	Constante de torsion
J	(kg.m ²)	Moment d'inertie
R	(m)	Rayon d'un disque
m	(kg)	Masse d'un système
x_i	(m)	Coordonnées du système
\vec{V}	(m/s)	Vitesse du déplacement
ρ	(kg/m ³)	Masse volumique
l	(m)	Longueur du ressort
l_0	(m)	Longueur du ressort à vide
P_0	(Pa)	Pression du gaz à l'équilibre
V	(m ³)	Volume du gaz à l'équilibre
dx	(m)	Tranche d'élément entre les positions x et $x+dx$
C_{ap}	(F)	Capacité électrique
L_{ind}	(H)	Inductance
P_{ui}	(W)	Puissance électrique
$q(t)$	(A)	Charge qui circule dans le circuit
$u(t)$	(Volt)	Tension d'alimentation
F_{fr}	(N)	Force de frottement
α	(N.s/m)	Coefficient de frottement

$\sigma = \delta$	(---)	Facteur d'amortissement
ζ	(---)	Rapport d'amortissement
ω	(rad/s)	Pseudo Pulsation du mouvement faiblement amorti
T	(1/s)	Pseudo Période du mouvement faiblement amorti
F_{ext}	(N)	Force extérieure appliquée au système
Ω	(rad/s)	Pulsation Force extérieure appliquée au système
x_g	(m)	Solution générale du mouvement force
$x_{part}(t)$	(m)	Solution particulière
Ω_r	(rad/s)	Pulsation de résonance du mouvement forcé
$\Omega_1,$	(rad/s)	Pulsation de coupure en régime forcé (dissonance) (minimale, et
Ω_2		maximale)
$\Delta\Omega$	(rad/s)	Bande passante
Q	(--)	Facteur de qualité
Z	(H)	Impédance
μ	(Pa.s)	viscosité dynamique
σ_s	(kg/m ²)	Masse surfacique
T	(N)	Tension de la corde
τ	(N/m)	Tension linéaire
E	(MPa/N.m)	Constante de Young
X_s	(---)	Coefficient de compressibilité
v	(m/s)	Vitesse linéaire
$\dot{\theta}$	(rad/s)	Vitesse angulaire
$\gamma = \ddot{x}$	(m.s ⁻²)	Accélération linéaire
$\ddot{\theta}$	(rad.s ⁻²)	accélération angulaire

Introduction générale

La connaissance et l'appréciation des vibrations mécaniques sont fondamentales dans de vastes domaines de la physique, de l'ingénierie et de l'architecture. Les vibrations naturelles intéressent les géophysiciens, les ingénieurs civils ...etc. Protéger contre les effets de vibrations excessives est une préoccupation majeure des ingénieurs d'études, des architectes, des ingénieurs civils, des ingénieurs en mécanique, physiciens de l'instrumentation et ingénieurs biomédicaux. La conception et la construction des machines vibrantes sont souvent l'objectif des ingénieurs mécaniques et des ingénieurs acoustiques. La mesure et l'interprétation des vibrations sont des tâches importantes pour les ingénieurs de maintenance et les physiciens.

Il est fortement recommandé à l'étudiant d'essayer tous les problèmes annexés à chaque chapitre. La valeur du texte sera grandement améliorée si son étude est accompagnée d'un cours d'expérience du laboratoire.

Les étudiants qui se lancent dans ce document doivent avoir les préalables connaissances suivantes: calcul différentiel et intégral, y compris les équations aux dérivées partielles; la physique à peu près au niveau collégial de première année; et l'électricité, qui pourrait être étudiée parallèlement.

Tout mouvement qui se répète après un intervalle de temps s'appelle vibration ou oscillation. Le balancement d'un pendule et le mouvement d'un cordon déchiqueté sont des exemples spécifiques de vibration. La théorie de la vibration traite de l'étude des mouvements oscillants des corps et des forces qui leur sont associés.

Les oscillateurs mécaniques sont présents partout dans notre vie quotidienne que ce soit dans les systèmes d'horlogerie où les oscillations sont entretenues ou les suspensions automobiles pour lesquelles l'amortissement est recherché, on peut trouver un grand nombre d'applications liées à ce phénomène de va-et-vient mécanique.

Une connaissance fondamentale des vibrations mécaniques est indispensable aux spécialistes de ces technologies variées. Le but de ce chapitre est de fournir suffisamment de théorie pour permettre et comprendre le concept des profils de vibration et leurs analyses.

Ce premier chapitre récapitule les idées fondamentales du mouvement, de la force mécanique et de l'énergie qui sous-tendent les vibrations.

Après avoir lu ce chapitre, l'élève devrait pouvoir

- définir la force et l'énergie;
- dériver les relations entre l'accélération, la vitesse et le déplacement pour le mouvement linéaire et pour le mouvement angulaire;
- combiner les forces et les couples vectoriels;
- calculer l'énergie cinétique dans des corps en mouvement linéaire et angulaire;
- calculer l'énergie potentielle dans différents types de système;

- calculer l'énergie potentielle en vertu d'une position dans le champ gravitationnel terrestre ;

- Résoudre les équations différentielles du mouvement passant le principe du Lagrange.

À la fin de ce document, il y a une brève liste de livres pour référence ultérieure, dans la mesure du possible, l'étudiant devrait les consulter afin de compléter et d'élargir la couverture de ce texte, d'obtenir des idées alternatives, approfondir des sujets spécifiques et trouver des problèmes supplémentaires.

Ce cours est mis à votre disposition sur la plateforme d'enseignement à distance:

<https://pmb.univ-saida.dz/moodle/>

Chapitre I : Oscillations libres non amorties : Système à un degré de liberté

I.1 Introduction et objectifs:

Dans ce chapitre, l'objectif est de décrire le comportement oscillatoire d'un système simple en vibrant librement, c'est-à-dire sans influence externe après le démarrage initial.

Après avoir lu ce chapitre, l'élève devrait pouvoir

- développer l'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique simple;
- décrire graphiquement le mouvement de la masse;
- décrire les formes d'énergie dans le système;
- utiliser une variété de conditions initiales pour aider à spécifier le comportement oscillatoire du système;
- décrivez un certain nombre d'oscillateurs harmoniques simples;
- développer des analogues électriques de ces oscillateurs.

I.2 *Mouvement périodique* :

Un mouvement périodique est un mouvement qui se répète à des intervalles de temps successifs égaux.

La période d'un phénomène périodique est la durée au bout de laquelle le phénomène se répète identique à lui-même (1 cycle). On la note T et elle s'exprime en secondes (s).

La fréquence d'un phénomène périodique représente le nombre de phénomènes effectués par seconde. On la note généralement f, son unité est le hertz (Hz). La fréquence est l'inverse de la période:

On peut établir la relation entre la fréquence et la période :

$$T = 1 / f \quad \text{et} \quad f = 1 / T \quad (1.1)$$

La période T des oscillations est le temps mis par le système pour revenir à une position identique quelque soit le choix de cette position.

T = période (unité: seconde)

f = 1/T = fréquence (unité : 1 Hertz = 1 cycle / sec)

I.3 *Mouvement vibratoire* :

I.3.1 Définition : Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique qui s'effectue de part et d'autre d'une position d'équilibre.

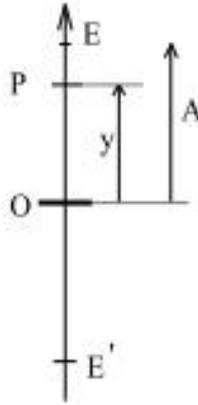


Figure 1.1 Éléments caractéristiques d'un mouvement vibratoire.

- *Un sens positif est choisi sur la trajectoire
- * L'origine des mesures est généralement la position d'équilibre 0
- *L'élongation y est la valeur algébrique de la distance OP
- * L'amplitude A est égale à l'élongation maximale
- * On appelle vibration ou oscillation le trajet parcouru par le mobile P pour repasser à la même position, dans le même sens. (PEE'P; E et E' étant les positions extrêmes du mobile.)
- * La période T est la durée d'une vibration

Tout mouvement vibratoire peut être caractérisé par les caractéristiques suivantes :

Degrés de liberté (ddl) : (un degré de liberté; deux ou plusieurs degrés de liberté)

Causes (On distingue les vibrations (naturelles (ou libres); entretenues; paramétriques; auto-excités.)

Forme, nature (On distingue en particulier les vibrations : linéaires ou non; aléatoires; périodiques ou transitoires, sinusoïdales)

Objet de la vibration (Machine.Véhicule. Bâtiment. Moteur.)

Intensité et fréquence (Selon le type et la nature de vibration, et selon le moyen de mesure,)

C'est aussi, le temps mis pour faire une oscillation complète ou un « aller-retour ».

Mathématiquement, le mouvement périodique de période T est défini par:

a tout instant t , $x(t+T) = x(t)$

I.3.2 Mouvement vibratoire libre

les vibrations libres sont les vibrations qui résultent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre ou on lui donne une vitesse initiale, puis on le laisse vibrer librement.

Exemples : Une masse accrochée à un ressort

- un pendule simple
- le balancier d'une horloge
- la rotation d'un moteur tournant à vitesse constante..... etc.

I.3.3 Mouvement vibratoire sinusoïdal

Définition : un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si un point vibrant possède une élongation du type :

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

les mouvements oscillatoires harmoniques Ici, $x(t)$ varie sinusoïdalement. (c.à.d. que $x(t)$ n'est pas constante) , et qui la caractérise est une fonction sinusoïdale du temps :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.2)$$

Mouvement rectiligne: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Mouvement circulaire: $\theta = \theta_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Où

$y(t)$ = élongation = écart par rapport à la position d'équilibre

$A(m)$ = amplitude = élongation maximum

ω = pulsation = $2 \cdot \pi \cdot f$

$(\omega \cdot t + \varphi)$ = phase

L'angle φ est la phase à l'origine (radian, sans dimension),

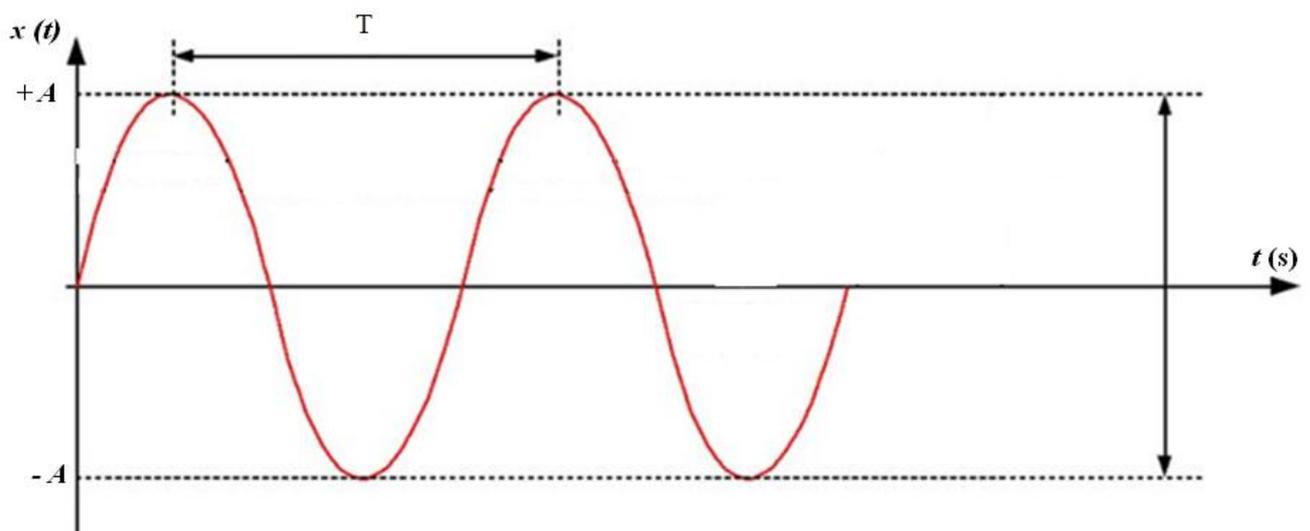


Figure 1.2 schéma d'un mouvement vibratoire sinusoïdal

La fonction cosinus est une fonction périodique de période 2π . Si T est la période temporelle du mouvement, on aura donc :

$$[\omega(t+T)+\varphi]-[\omega t+\varphi]=2\pi \quad \text{et} \quad \omega T=2\pi \implies \omega T=2\pi \quad (1.3)$$

On en déduit l'expression de T en fonction de la pulsation :

$$T=2\pi/\omega \quad (1.4)$$

la fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit par unité de mesure du temps., correspond à l'inverse de la période T : $f=1/T$

Il existe d'autres expressions équivalentes pour la fonction x(t). En effet, la fonction sinus est équivalente à la fonction cosinus décalée de $\pi/2$. On peut donc écrire :

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)=A\sin(\omega t+\varphi') \quad (1.5)$$

Donc :

Les grandeurs caractéristiques d'une vibration harmonique sont :

- L'amplitude A,
 - la période, $T, \omega=2\pi/T=2\pi f$ pulsation, f : fréquence ;
 - La phase ($\omega.t+\varphi$)
- $\omega=2.\pi/T=2.\pi.f$

I.4 Coordonnées généralisées :

On appelle coordonnées généralisées d'un système physique un ensemble de variables réelles, qui ne correspondent pas toutes à des coordonnées cartésiennes (par exemple : angles, positions relatives), et permettant de décrire ce système, en particulier dans le cadre de la mécanique lagrangienne.

Le terme « généralisées » vient de l'époque où les coordonnées cartésiennes étaient considérées comme étant les coordonnées normales ou naturelles.

Coordonnées généralisées (q_s).

Soit un système matériel (ex : N points) possédant r liaisons holonomes : $f_k(x_i, t)=0$. $K=[1, r]$ $i=[1, 3N]$.

Il existe donc r fonctions implicites de 3N coordonnées cartésiennes. On admettra le théorème d'analyse sur les fonctions implicites qui indique que r coordonnées (par exemple les r premières) peuvent s'exprimer en fonction des 3N-r autres coordonnées :

$$x_1=x_1(x_{r+1}, \dots, x_{3N}) \text{ avec : } x_1, x_2, x_3 \text{ pour } x_1, y_1, z_1$$

$$x_r=x_r(x_{r+1}, \dots, x_{3N})$$

Il reste donc $n=3N-r$ coordonnées indépendantes (au sens algébrique).

I.5 Définition du nombre n degrés de liberté d'un système mécanique.

Un système mécanique est à n degrés de liberté lorsque ses liaisons holonomes traitées comme bilatérales réduisent à n nombre de paramètres indépendants qu'on désignera par les variables q_s . Les q_s définissent les coordonnées généralisées du système.

Notation : $n = 3N + 6N' - r$, s'il y a N points matériels et N' solides en interaction.

I.5.1 Exemples :

a) Pendule oscillant dans un plan vertical (N = 1). Les liaisons holonomes :

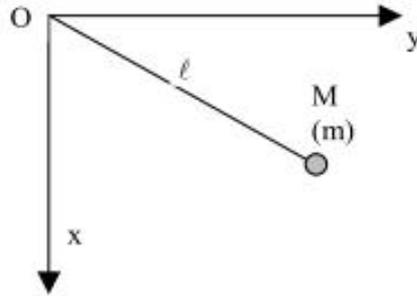


Figure 1.3 Pendule oscillant dans un plan vertical

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

$$z = 0$$

Donnent $r = 2$ d'où $n = 3 \times 1 - 2 = 1$ degré de liberté (par exemple l'angle φ de rotation).

$$\{q_s\} = \{\varphi\}$$

b) Cerceau roulant et pivotant (N' = 1).

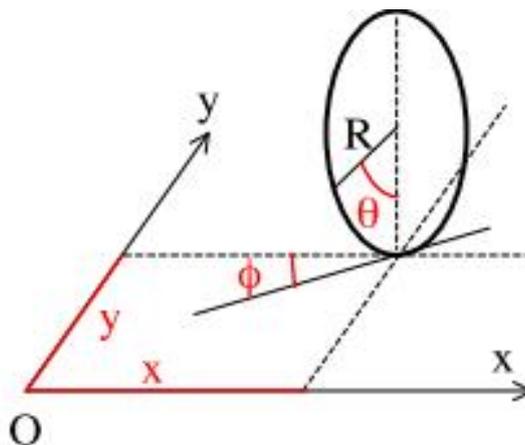


Figure 1.4 Cerceau roulant et pivotant

La liaison holonome :

$$z - a \sin \theta = 0$$

Donne $r = 1$ d'où $n = 6 \times 1 - 1 = 5$ degrés de liberté :

$\{q_s\} = \{x, y, \psi, \theta, \varphi\}$ par exemple.

Remarque : Autre méthode : $n = 3 \cdot N - 2 \cdot P_5 - 1 \cdot P_4$ (cas d'un système en deux dimensions)

N : Nombre de points matériels ;

$2 \cdot P_5$: nombre de liaisons du type quatre (élimine quatre degrés de liberté) (P_5 = nombre de coordonnées généralisées)

$1 \cdot P_4$: nombre de liaisons du type cinq (élimine cinq degrés de liberté) (P_4 = nombre de coordonnées généralisées)

Cas d'un pendule simple : $N = 1$; $P_5 = 1$ (une coordonnée généralisée $\theta(t)$) ; $P_4 = 0$;

Donc : $n = 3 \cdot (1) - 2 \cdot (1) = 1$ DDL

I.5.2 Équations de transformation

Soit N points matériels repérés par :

$r_i = R_i(q_1, \dots, q_s, \dots, q_n, t)$ noté : $r_i = r_i(q_s, t)$ $s: [1, n]$ $i: [1, N]$

Il existe $3N$ équations de transformation.

Exemple : pendule simple $N = 1$: $q = \theta$.

r : $x = l \cdot \cos \theta$, $y = l \cdot \sin \theta$, $z = 0$

Il y a bien 3 équations de transformation.

I.6 Équations de Lagrange

I.6.1 Force et couple d'inertie

Un problème de cinétique est transformé en un problème de statique, puis, on applique le principe du travail virtuel, on introduit des forces d'inertie et des couples d'inertie dans le principe du travail virtuel:

** Une force d'inertie est égale en grandeur au produit de la masse du corps et de son accélération, dans la direction opposée à l'accélération.

** Un couple d'inertie est égal en grandeur au produit du moment d'inertie massique du corps et de son accélération angulaire, dans la direction opposée à l'accélération angulaire

I.6.2 Principe d'Alembert

“Le travail virtuel fait par les forces et couples actifs (autres que ceux prises en compte par les termes d'énergie potentielle) et par les forces et couples d'inertie sur un système mécanique égale la variation correspondante en énergie potentielle élastique et gravitationnelle pour tous et chacun des déplacements virtuels cohérents avec les contraintes.”

On écrit $\delta U' + \delta U^* - (\delta V_e + \delta V_g) = 0 \quad \forall \delta q_i$ avec $\delta q_j = 0$ si $j \neq i$

Où $i=1, I$ est un indice de variable généralisée.

Travail virtuel fait par les forces et couples actifs (autres que ceux prises en compte par les termes d'énergie potentielle), incluant le travail virtuel du aux forces de frottement et d'amortissement

δU^* Travail virtuel fait par les forces et couples d'inertie

δU^* Si un système mécanique est formé d'un ensemble de N particules, le travail virtuel

δU^* est donné par $\delta U^* = -\sum_n m_n \ddot{r}_n \cdot \delta r_n$

I.6.3 Formalisme canonique

Le formalisme canonique n'introduit pas une nouvelle physique mais propose une nouvelle gamme d'outils pour étudier les phénomènes physiques. Son élément central, le "hamiltonien", joue un grand rôle en physique quantique.

Comme dans le formalisme de Lagrange nous travaillerons avec des quantités comme l'énergie, T et U plutôt qu'avec des quantités vectorielles comme la force de Newton.

Dans le formalisme de Lagrange, la description d'un système mécanique à n degrés de liberté décrits par les coordonnées générales (q_i) indépendantes (non contraintes) nous mène à n équations d'Euler Lagrange. Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange ($L = T - U$). L'ensemble d'équations du mouvement s'écrit :

$$\sum_{(i=1)}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad (1.6)$$

L : Fonction de Lagrange ou Lagrangien ;

T : L'énergie cinétique du système;

U : L'énergie potentielle du système ;

q_i : est la coordonnée généralisée et est la vitesse généralisée du système ;

Q_i : la force généralisée.

Les équations du mouvement de Newton sont alors équivalentes à l'ensemble d'équations suivantes, appelées équations de Lagrange :

Pour un système à un degré de liberté, ($N= 1$ ou $ddl=1$) l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Remarque :

Pour un mouvement unidimensionnel x , l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{1.8}$$

Pour un mouvement rotationnel, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_i} \right) = 0 \tag{1.9}$$

I.7 Exemples d'oscillateurs harmoniques

Dans cette section nous donnerons quelques exemples d'applications de la méthode de Lagrange pour obtenir les équations du mouvement. Il est bien sûr beaucoup plus simple d'obtenir ces équations différentielles que de les résoudre !

I.7.1 Applications élémentaires

a) Exemple (Pendule simple)

Un pendule simple est constitué une masse m suspendue à un point O , qu'on prend comme origine, par une tige rigide de longueur l et de masse négligeable. Supposons en outre que cette tige est suspendue de manière à empêcher tout mouvement hors du plan $x y$. Écarté de sa position d'équilibre, il oscille dans le champ de pesanteur terrestre g .

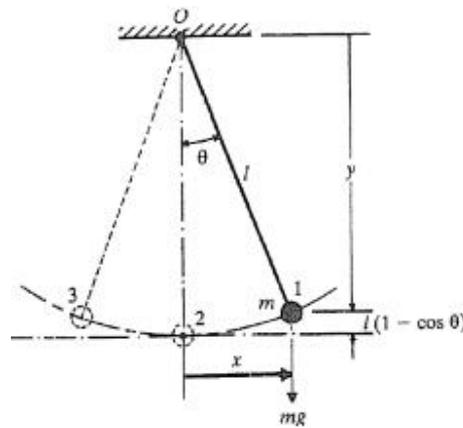


Figure 1.5 Pendule simple

Les coordonnées (x, y, z) du pendule s'expriment ainsi en fonction de la coordonnée généralisée θ :

$$x = l \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = l \dot{\theta} \cos \theta \tag{1.10}$$

$$y = l \cos \theta \Rightarrow \dot{y} = -l \dot{\theta} \sin \theta \tag{1.11}$$

$$z = 0$$

Notez que y est défini positif vers le bas, donc les composantes de la vitesse dépendent de θ et $\dot{\theta}$. et l'énergie cinétique prend la forme:

$$T = \frac{1}{2} m v_m^2 \quad (1.12)$$

$$\implies T = \frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{y})^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad (1.13)$$

$$\implies T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.14)$$

L'énergie potentielle gravitationnelle est, quant à elle, $U = m \cdot g \cdot h$

$U = mgh$ (h est la hauteur de m par rapport à un plan de référence donnée.)

NB : On a deux possibilités pour calculer la valeur du déplacement h , selon le choix de l'origine des énergies potentielles ($U(0)=0$), ce choix doit avoir lieu lorsque la masse est dans sa position d'équilibre $\theta = 0$. L'énergie potentielle correspond à l'énergie potentielle de pesanteur.

Calcul du lagrangien : $L = T - U$

1er cas : Le lagrangien est donc :

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l \cos \theta \quad (1.15)$$

Et l'équation de Lagrange prend alors la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} \quad (1.16)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta \quad (1.17)$$

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta = 0 \quad (1.18)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

On aura donc, $m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \theta = 0$ En divisant par $m \cdot l^2$. On trouve :

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

C'est l'équation bien connue qui gouverne l'oscillation d'un pendule. Sa solution ne peut pas s'exprimer par fonctions élémentaires, sauf dans l'approximation des petites

oscillations ($\sin \theta \approx \theta$, et $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1$), ou l'équation devient $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$
 $\implies \theta(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

les constantes A et φ étant fixées par les valeurs initiales $\theta(0)$ et $\dot{\theta}(0)$.

Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle (EDF) du mouvement est de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.19)$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution sous la forme complexe est de la forme :

$$x(t) = A e^{\alpha t}$$

La dérivée première de la fonction $x(t)$ (la vitesse) : $\dot{x}(t) = A \alpha e^{\alpha t}$

La dérivée seconde de la fonction $x(t)$ (l'accélération) : $\ddot{x}(t) = A \alpha^2 e^{\alpha t}$

On remplace dans l'EDF :

$$A \alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 A \alpha e^{\alpha t} = 0 \Rightarrow A \alpha e^{\alpha t} (\alpha^2 + \omega_0^2) = 0 \quad (1.20)$$

$$\text{Or } A e^{\alpha t} \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \text{donc } \alpha = \pm j \omega_0 \quad (1.1)$$

Donc la solution aura la forme:

$$x(t) = A_1 e^{j \omega_0 t} + A_2 e^{-j \omega_0 t} \quad (1.21)$$

Selon la relation d'Euler :

$$e^{\pm j \omega_0 t} = \cos \omega_0 t \pm j \sin \omega_0 t \quad (1.22)$$

$$x(t) = A_1 (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) + A_2 (\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) \quad (1.23)$$

$$x(t) = (A_1 + A_2) \cos \omega_0 t + j (A_1 - A_2) \sin \omega_0 t = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t \quad (1.24)$$

Tel que :

$$C = (A_1 + A_2) \text{ et } D = j (A_1 - A_2) \quad (1.25)$$

Donc $x(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t$ est aussi une solution de l'équation différentielle.

Si on pose : $C = a \cos \theta$ et $D = a \sin \theta$,

On aura : $x(t) = a \cos \theta \cos \omega_0 t + a \sin \theta \sin \omega_0 t$

$$\cos(x - y) \equiv \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (1.26)$$

Donc :

$$x(t) = \cos(\omega_0 t - \theta) = a \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) = \theta + \frac{\pi}{2} \quad (1.27)$$

Donc : $x(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$ tel que : $a = \sqrt{C^2 + D^2}$ et

$$\theta = \text{arc tang}\left(\frac{D}{A}\right) \quad (1.28)$$

b) Exemple (Pendule élastique vertical)

On considère un pendule élastique constitué d'un solide de masse m et d'un ressort de constante k (exprimée en N.m^{-1}), de longueur à vide L_0 et de masse négligeable devant m .

S'allonge d'une longueur $\Delta L = L_0 - L_c$ où L_c est la longueur du ressort à l'équilibre après la charge.

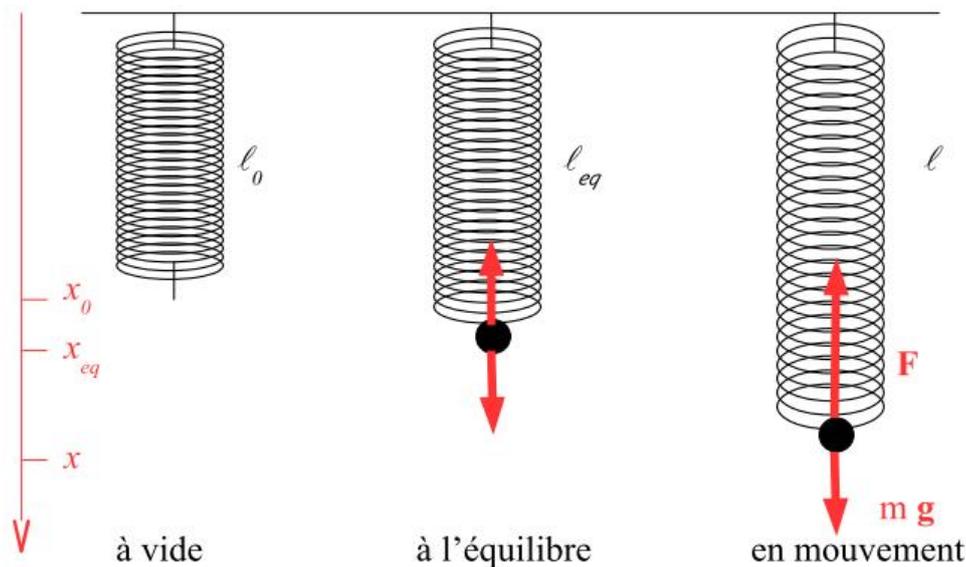


Figure 1.6 Pendule élastique vertical

La raideur d'un ressort traduit sa réponse à la déformation ; dans la suite, on se place dans le cadre de la loi de Hooke pour laquelle k ne dépend pas de la charge m : la force de rappel F du ressort est alors proportionnelle à son élongation.

$$\vec{F} = -k \cdot \Delta \vec{L} \quad \text{Ou} \quad \Delta \vec{L} = x \cdot \vec{i} \quad (1.29)$$

Où Δl d'après les conventions ci-contre. Écarté de sa position d'équilibre, le système oscille entre les positions symétriques $-x$ m et x m.

Donc le système a un seul degré de liberté $d=N=1$.

Supposant que le ressort est idéal.....

* **L'énergie cinétique du système:** $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

* **L'énergie potentielle du système:** l'énergie U emmagasinée dans le ressort dépend de l'allongement des 2 extrémités du ressort. Elle s'exprime :

$$U = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{avec } x_2 = x, x_1 = 0 \quad \text{avec } x_2 = x, x_1 = 0$$

$$[dU = \vec{F}_r \cdot \vec{dx} = -(-kx dx) \Rightarrow U = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2] \quad (1.30)$$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad (1.31)$$

Conditions d'équilibre

L'énergie potentielle du système: l'énergie emmagasinée dans le ressort dépend de l'allongement des 2 extrémités du ressort. Elle s'exprime: $U = m.g.h$

L'équation de Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} - (-kx) = 0$$

On divisant par m

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (1.34)$$

Le rapport $\frac{k}{m}$ étant positif et en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: on obtient l'équation différentielle d'une vibration harmonique de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$:

** La pulsation ne dépend que de la masse et de la raideur du ressort, est appelée « **la pulsation propre** » du système.

** La masse oscille donc indéfiniment avec une période propre T_0 donnée par la relation suivante:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.35)$$

I.7.2 Équation différentielle (L'étude d'une vibration harmonique)

I.7.2 .1 Aspects des forces

a) Écriture du principe fondamental

au point M de masse m en mouvement : L'axe vertical x est orienté vers le bas. Son origine sera précisée ultérieurement.

A l'équilibre : il y a deux forces qui agissent sur la masse m ; son poids et la force de rappel du ressort tension due au ressort :

$$\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow mg - k \Delta l \quad (1.36)$$

\vec{P} : Poids de la masse m.

\vec{T} : Force de rappel du ressort.

En mouvement : La deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique), nous permet d'écrire :

$$\sum \vec{F} = m \vec{y} \quad (1.37)$$

$$\vec{F} + m \vec{g} = m \vec{a} \quad (1.38)$$

Pour un système à une dimension :

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x} \quad (1.1)$$

$$-k(l - l_0)\vec{u}_x + mg\vec{u}_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x \quad (1.39)$$

$$-k(l - l_0) + mg = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.40)$$

b) Origine quelconque

Si on choisit une origine quelconque (c'est un choix inhabituel qu'on évitera en général)

$$-k(x - x_0) + mg = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.41)$$

Cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = (g + \omega_0^2 x_0) \quad (1.42)$$

L'équation différentielle du deuxième ordre possède cette fois un second membre constant.

La solution de cette équation est la somme :

- de la solution de l'équation homogène $m \ddot{x} = -kx \Rightarrow m \ddot{x} + kx = 0$ soit : $x_1 = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- de la solution particulière avec second membre obtenue en faisant $\ddot{x} = 0$ (et donc $\dot{x} = 0$) soit :

$$\omega_0^2 x_1 = (g + \omega_0^2 x_0) \Rightarrow x_1 = \left(\frac{mg}{k} + x_0\right) \quad (1.43)$$

La solution est donc :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + \left(\frac{mg}{k} + x_0\right) \quad (1.44)$$

La projection nous donne $m \ddot{x} = mg - k(x + \Delta l)$. En utilisant la condition d'équilibre précédente on obtient : $m \ddot{x} = -kx \Rightarrow m \ddot{x} + kx = 0$

Or : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow m \ddot{x} = -kx = -m \omega_0^2 x$ avec

$$k = m \omega_0^2 = C^{te} \quad (1.45)$$

Les constantes A et φ sont déterminées alors en utilisant les conditions initiales.

Commentaire : la masse oscille donc autour de l'abscisse $(mg/k + x_0)$. Cette position est donc la position d'équilibre stable de la masse. On a donc $x_{eq} = mg/k + x_0$. On remarquera que sur le plan mathématique, il s'agit de la solution particulière correspondant à $\ddot{x} = 0$, ce qui physiquement correspond bien à la recherche de l'équilibre.

c) Origine quelconque en tenant compte de la position d'équilibre

On étudie dès le départ la relation d'équilibre (il suffit de faire $\ddot{x} = 0$ dans l'étude faite pour le mouvement) et on reporte dans l'équation du mouvement par exemple par soustraction des deux équations

$$-k(\ell - \ell_0) + mg = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (\text{mouvement}) \quad (1.46)$$

$$-k(\ell_{eq} - \ell_0) + mg = 0 \quad (\text{équilibre}) \quad (1.47)$$

Le poids et la tension du ressort s'annulent à l'équilibre. L'allongement du ressort à l'équilibre est donc $(\ell_{eq} - \ell_0) = mg/k$

On obtient :

$$-k(\ell - \ell_{eq}) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.48)$$

Soit toujours avec une origine quelconque :

$$-k(x - x_{eq}) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.49)$$

Dont la solution est :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{eq} \quad (1.50)$$

(L'allongement à l'équilibre nous montrant de plus que $x_{eq} = m \cdot g / k + x_0$)

d) Origine à la position d'équilibre

C'est la méthode la plus performante pour résoudre.

On avait :

$$-k(\ell - \ell_{eq}) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.51)$$

On prend une origine à la position d'équilibre, l'abscisse est alors notée X. Par rapport au cas

précédent $X = \ell - \ell_{eq} = x - x_{eq}$.

$$-kX = m \frac{d^2 X}{dt^2}$$

Et on retrouve alors l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{Avec} \quad X = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

e) Mise en équation rapide du mouvement

On sait (et on l'a retrouvé ci dessus) qu'à l'équilibre la force poids et la tension du ressort due à l'allongement ($\ell_{eq} - \ell_0$) s'annulent. En mouvement, la seule force agissante est donc la tension supplémentaire du ressort en sus de l'équilibre soit \vec{F}_{tot} avec $\vec{F}_{tot} = -k(\ell - \ell_{eq})\vec{u}_x$. (Pour trouver le signe, imaginer le cas particulier $\ell > \ell_{eq}$ et constater que la tension supplémentaire qui apparaît dans ce cas particulier est une force de rappel vers la longueur d'équilibre donc selon $-\vec{u}_x$). On obtient alors immédiatement :

$$\begin{aligned} -k(\ell - \ell_{eq}) &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ -kX &= m \frac{d^2 X}{dt^2} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Mais on n'a pas établi l'expression de ℓ_{eq}

f) Un exemple de conditions initiales

On considère un ressort vertical de longueur ℓ_0 , de raideur k, attaché en O. L'autre extrémité du ressort est désignée par M. On choisit un axe vertical descendant d'origine O.

En $t=0$ on accroche une masse m en M . Déterminer $z(t)$ la cote de M . On néglige tout frottement.

On peut prévoir le résultat :

Position de départ : $z=l_0$

Position d'équilibre : $z=l_0+ m.g/k$

Amplitude du mouvement : $m.g/k$

(Entre la position de vitesse nulle et la position de vitesse maximale)

Pulsation du mouvement : $\omega_0=\sqrt{k/m}$ donc équation : $z=l_0+(m.g/k)+(m.g/k)\cos(\omega_0.t +\varphi)$

Reste à déterminer ϕ ce qui est facile sachant que $z=l_0$ en $t=0$.

Finalement : $z=l_0+(m.g/k)(1-\cos(\omega_0.t))$

Pour établir la solution :

$$\begin{aligned}\vec{F} + m\vec{g} &= m\vec{a} \\ -k(l - l_0) + mg &= m\ddot{z} \\ -k(l_{eq} - l_0) + mg &= 0\end{aligned}$$

Donc

$$l_{eq} = l_0 + mg/k \quad (1.53)$$

Par soustraction :

$$-k(l - l_{eq}) = \ddot{z} \quad (1.54)$$

Avec l'origine choisie $z=l$

$$\ddot{z} + \omega_0^2(z - l_{eq}) = 0$$

Le plus simple est de poser un changement de variable pour résoudre : $Z = z - l_{eq}$

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$$

Solution :

$$\begin{cases} Z = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ z = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + l_0 + mg/k \\ \dot{z} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \quad (1.55)$$

Conditions initiales

$$\begin{cases} \text{en } t = 0, z = l_0 & l_0 = A\cos(\varphi) + l_0 + mg/k \\ \text{en } t = 0, \dot{z} = 0 & 0 = -A\omega_0\sin(\varphi) \end{cases} \quad (1.56)$$

$$A.\cos(\varphi) = - m.g/k \quad (1.57)$$

$$A.\sin(\varphi) = 0 \quad (1.58)$$

On choisit :

$$A = m \cdot g / k \quad (1.60)$$

$$\varphi = \pi \text{ ou } \varphi = 0 \quad (1.61)$$

Finalemment :

$$z = l_0 + (m \cdot g / k) \cdot (1 - \cos(\omega_0 \cdot t)) \quad (1.62)$$

I.7.2 .2 Aspects énergétique

L'étude énergétique permet d'étudier ce problème de façon élégante.

a) Intégrale première de conservation de l'énergie

En l'absence de frottement, l'énergie se conserve :

$E_C + E_P = E$ (constante) (l'énergie mécanique totale)

Avec :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

L'énergie potentielle est ici double : énergie potentielle en lien avec le travail des forces intérieures au ressort (énergie potentielle élastique égale à $E_{P, \text{élastique}} = \frac{1}{2} k \cdot (l - l_0)^2$ à une constante près) et énergie potentielle en lien avec le poids (énergie potentielle de pesanteur égale à $E_{P, \text{pesanteur}} = -m \cdot g \cdot x$ à une constante près. Le signe est en lien avec l'orientation de l'axe vers le bas car si x augmente, $E_{P, \text{pesanteur}}$ doit diminuer).

b) Origine quelconque

C'est un choix inhabituel qui ne simplifie pas les calculs

$$E_C = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (1.63)$$

$$E_P = \frac{1}{2} k \cdot (x - x_0)^2 - m \cdot g \cdot x + \text{constante}$$

On peut - ce n'est pas nécessaire - décider d'un niveau zéro pour E_P , par exemple choisir E_P nul en $x = x_0$, alors on fera :

$$E_P = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 - m g (x - x_0) \quad (1.64)$$

L'intégrale première s'écrit :

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot (x - x_0)^2 - m \cdot g \cdot (x - x_0) = E \quad (1.65)$$

La logique est alors de déterminer E grâce aux conditions initiales puis d'intégrer cette équation différentielle du premier ordre (mais non linéaire). On cherche plutôt à retrouver l'équation différentielle du second ordre en dérivant par rapport au temps, ce qui donne :

$$m \ddot{x} + k(x - x_0) \dot{x} - m g \dot{x} = 0 \quad (1.66)$$

La solution parasite $\dot{x}=0$ s'introduit toujours dans ces problèmes d'énergie. On retrouve l'équation différentielle suivante :

$$-k(x - x_0) + mg = m\ddot{x} \quad (1.67)$$

c) Origine à la position d'équilibre

Expression de E_P :

On choisit $E_P=0$ à la position d'équilibre, l'origine de l'axe est aussi à la position d'équilibre.

– Méthode calculatoire (éviter) :

$$E_{P, \text{élastique}} = \frac{1}{2} k \cdot (l - l_0)^2 - \frac{1}{2} k (l_{\text{eq}} - l_0)^2 \quad (\text{nul pour } l = l_{\text{eq}}) \quad (1.68)$$

$$E_{P, \text{élastique}} = \frac{1}{2} k \cdot (l + l_{\text{eq}} - 2l_0) \quad (1.69)$$

$E_{P, \text{pesanteur}} = -m \cdot g \cdot X$ ou en tenant compte de la relation à l'équilibre :

$$E_{P, \text{pesanteur}} = -k(l_{\text{eq}} - l_0) \quad (1.70)$$

On simplifie :

$$E_P = \frac{1}{2} k (l + l_{\text{eq}} - 2l_0) X - k(l_{\text{eq}} - l_0) \quad (1.71)$$

$$E_P = \frac{1}{2} k \cdot X^2$$

– Méthode élégante :

On sait que la force totale (tenant compte de la pesanteur et de la force élastique) agissant sur la masse m s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = -kX\vec{u}_x \quad (1.72)$$

Pour obtenir l'énergie potentielle totale, il suffit de trouver l'énergie potentielle associée à cette force. À une constante près, cette énergie potentielle vaut :

$$E_{p, \text{tot}} = \frac{1}{2} kX^2 \quad (1.73)$$

Intégrale première :

$$\frac{1}{2} m\dot{X} + \frac{1}{2} kX^2 = E \quad (1.74)$$

On dérive par rapport au temps, ce qui donne :

$$m\ddot{X} + kX\dot{X} = 0 \quad (1.75)$$

On élimine la solution parasite $\dot{X} = 0$ habituelle et on retrouve l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (1.76)$$

Pour l'oscillateur harmonique mécanique, il y a échange entre énergie cinétique et énergie potentielle. La somme des deux est une constante.

On prend $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

On a :

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m k x^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.77)$$

Avec $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ et : $m \omega_0^2 = k$

D'où :

$$E = \frac{1}{2} A^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} k A^2 = C^{te} \quad (1.78)$$

Nous retrouvons ici le fait que l'énergie mécanique de ce système ne varie pas. L'énergie totale est constante.

Lorsqu'un corps de masse m est animé d'un mouvement vibratoire, il possède à tout instant une énergie cinétique de vibration :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 [1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] \quad (1.79)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right] = \frac{1}{2} m \omega_0^2 [A^2 - x^2] \quad (1.80)$$

L'énergie cinétique de l'objet est nulle aux extrémités de la trajectoire; elle est maximale à la position d'équilibre:

Si

$$x = 0 \Rightarrow T = T_{max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2, \quad x = \pm A \Rightarrow T = T_{min} = 0 \quad (1.81)$$

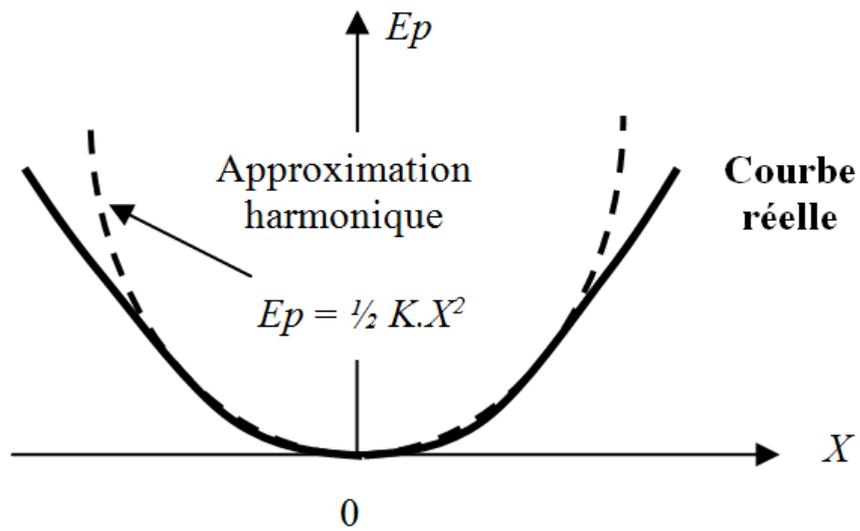
D'autre part :

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \quad (1.82)$$

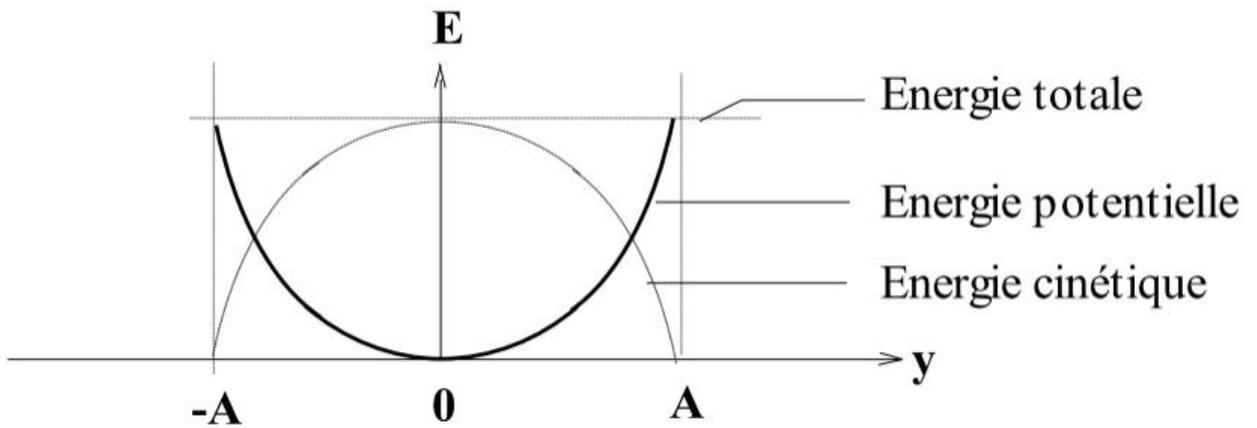
Si $x = 0 \Rightarrow U = U_{min} = 0$ (position d'équilibre)

$$x = \pm A \Rightarrow U = U_{max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \quad (1.83)$$

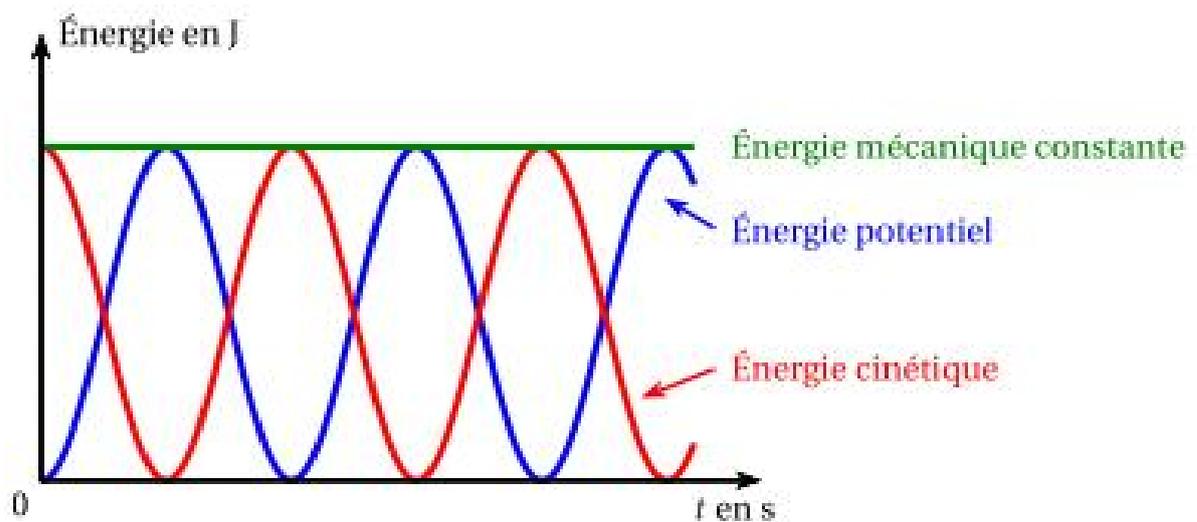
S'il n'y a pas de frottement, l'énergie totale de l'oscillateur reste constante au fil du temps; pendant l'oscillation, l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle de déformation et réciproquement.



(a)



(b)



(c)

Figure 1.7 (a, b, c) Représentation graphique d'échange entre énergie cinétique et énergie potentielle d'un oscillateur harmonique mécanique

L'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle de pesanteur, et réciproquement, l'énergie potentielle de la pesanteur se transforme en énergie cinétique, au cours du mouvement.

I.8 Combinaison de plusieurs éléments élastiques

Les systèmes complexes comportant plusieurs éléments élastiques peuvent être réduits à un système équivalent à une seule constante élastique k , en respectant les règles suivantes:

I.8.1 Ressorts en parallèle ou en série

Souvent, pour éviter les problèmes de résonance, on déplace les fréquences propres d'un système et on est appelé à associer des ressorts de raideurs différentes.

a) Ressort en parallèle

Pour résoudre ce problème, on considère que les 2 ressorts ont même longueur à vide l_0 et subissent le même allongement x (par rapport à leur longueur à vide) quand on accroche une masse m à l'extrémité des 2 ressorts. Le ressort équivalent, de raideur K_e , aura donc lui aussi la même longueur à vide et le même allongement (voir figure ci-dessus). On écrit la condition à l'équilibre au niveau de la masse m pour les deux systèmes :

L'élongation de chaque ressort est égale à $x(t)$ donc :

$$M.g = (k_1 + k_2) \cdot x = k_{eq} \cdot x \quad (1.84)$$

Et donc :

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (1.85)$$

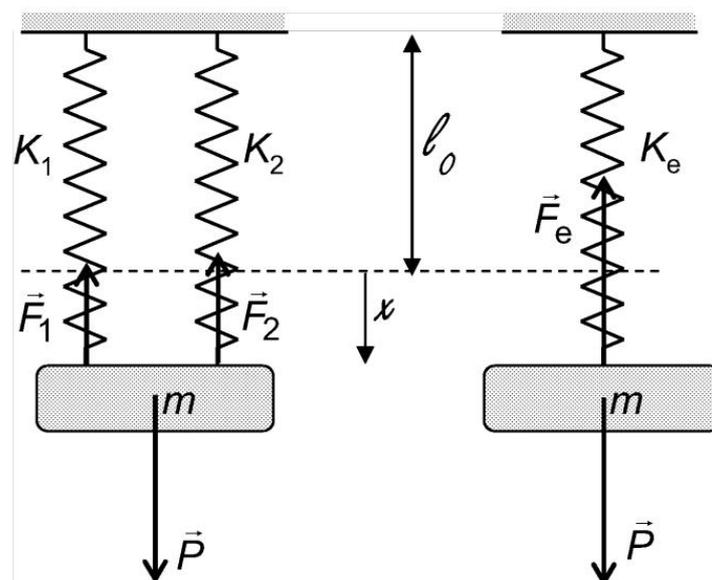


Figure 1.8 Ressort en parallèle

b) Ressort en série.

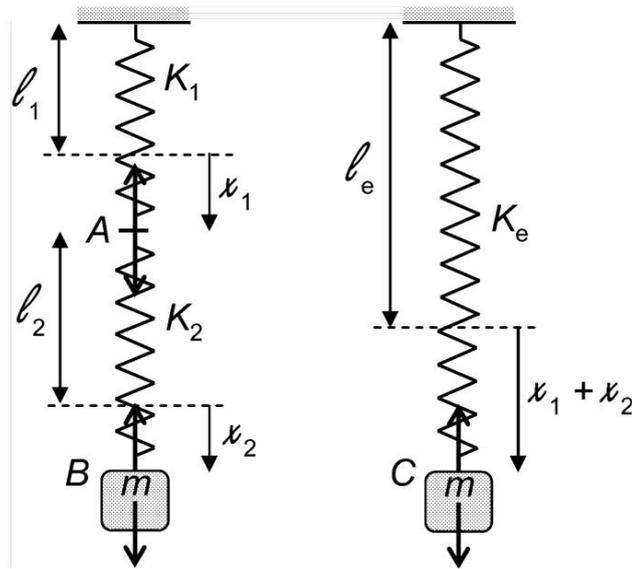


Figure 1.9 Ressort en série

Soient l_1 , l_2 , et l_e les longueurs à vide des ressorts 1, 2 et e (équivalent), et x_1 , x_2 , et x_e leurs allongements respectifs. Pour résoudre ce problème on doit poser : $l_e = l_1 + l_2$ et $x_e = x_1 + x_2$ (voir figure ci-dessus). On écrit la condition d'équilibre en A, B et C :

$$\{(K_1 x_1 = K_2 x_2, mg = K_2 x_2 \text{ et } mg = K_e(x_1 + x_2))\} \quad (1.86)$$

$$\{(x_1 = (K_2/K_1)x_2, K_2 x_2 = K_e(x_1 + x_2) \Rightarrow K_2 x_2 = K_e((K_2/K_1)x_2 + x_2)\} \quad (1.87)$$

$$\Rightarrow x = x_1 + x_2 = M.g \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (1.88)$$

Ou encore $\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (1.89)$

I.8.2 Analogie entre le système mécanique " Masse-ressort" et le système électrique "L.C.".

Bien que les phénomènes mécaniques, électriques et acoustiques soient de natures très différentes ils sont régis par une formulation mathématique identique il existe une profonde analogie entre ces trois phénomènes et le regard dans l'un peut éclairer les autres.

I.8.3 Oscillateur harmonique électrique : circuit R.L.

Si on couple une self (inductance, bobine) et un condensateur chargé, la décharge du condensateur dans la self va provoquer la charge du condensateur en sens inverse. L'énergie potentielle contenue dans le condensateur va se transformer en énergie cinétique dans la self qui, à son tour, va la rendre sous forme d'énergie potentielle au condensateur. Le circuit électrique présente donc des oscillations harmoniques.

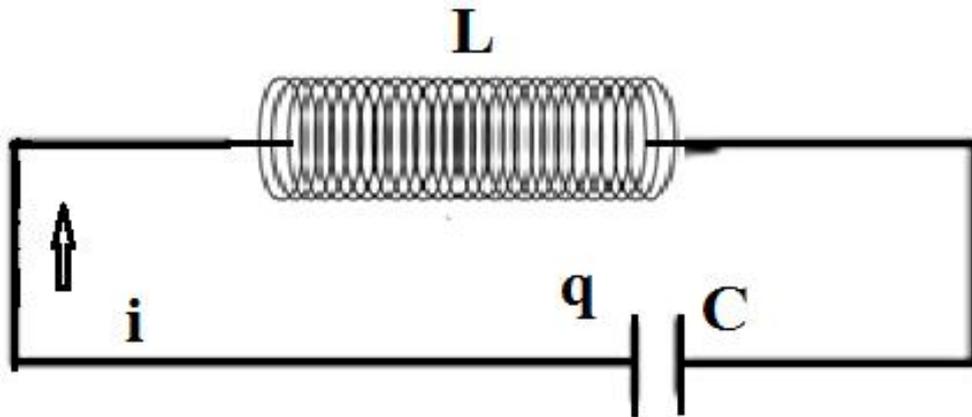


Figure 1.10 circuit R.L.

L'équation qui régit l'évolution de ce circuit électrique est la loi d'Ohm :

$$\sum U = R_i = 0$$

C'est-à-dire ici :

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0 \quad (1.90)$$

Comme $i(t) = dq/dt$, cette équation peut être réécrite en terme de la charge électrique $q(t)$:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (1.91)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre, dont la solution générale est :

$$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad (1.92)$$

Qui est une oscillation harmonique de fréquence propre :

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad (1.93)$$

I.8.4 Oscillateur électrique amorti : circuit R.L.C.

Soit un circuit comprenant un condensateur chargé, une self, et une résistance.

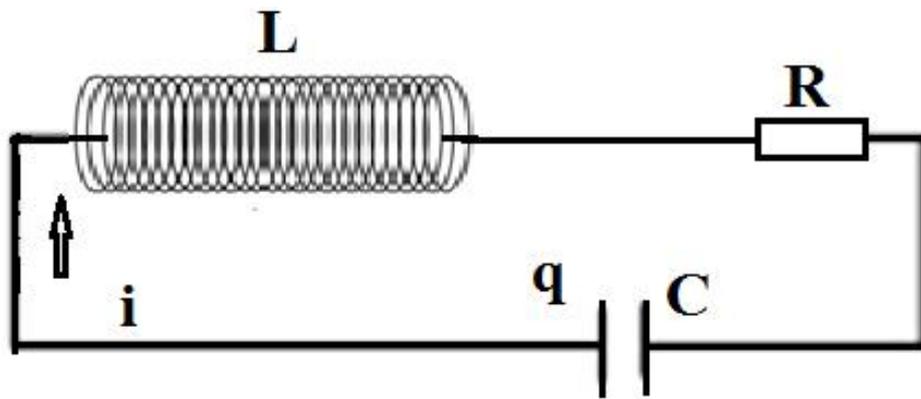


Figure 1.11 circuit R.L.C.

L'équation qui régit ce circuit est la loi d'Ohm :

$$\sum U = R_i = 0 \quad (1.94)$$

Qui se ramène à l'équation différentielle :

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (1.95)$$

I.8.5 Éléments constitutifs des systèmes électriques et mécaniques

Dans un circuit électrique, les trois composants principaux que l'on rencontre sont les résistances, les selfs et les condensateurs. Ce sont ces éléments qui vont respectivement jouer le rôle de l'élément amortisseur, de l'élément de masse et de l'élément élastique.

Système mécanique	Système électrique
Déplacement : $x(t)$	Charge électrique $q(t)$
Vitesse : \dot{x}	Courant électrique $i = \frac{dq}{dt}$
Accélération : \ddot{x}	Variation du courant : \dot{q}
Masse : m	Inductance, bobine, self : L
Ressort k	Inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
Force de rappel : $k x$	d.d.p entre les bornes d'un condensateur : $\frac{q}{C}$
Force d'inertie : $m \ddot{x}$	d.d.p entre les bornes de la bobine : $L \dot{q}$
Énergie potentielle : $\frac{1}{2} k x^2$	Énergie électrique : $\frac{1}{2C} q^2$
Énergie cinétique : $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	Énergie magnétique : $\frac{1}{2} L \dot{q}^2$

Tableau 1.1 L'analogie électro – mécanique

CHAPITRE II

Oscillations libres amorties : Systèmes à un degré de liberté

II.1 Introduction :

On imagine maintenant que le système mécanique étudié est soumis à une force de friction proportionnelle (et opposée) à sa vitesse. Il s'agit là d'une bonne description du « frottement fluide » auquel est soumis un corps solide en déplacement à faible vitesse dans un fluide. Par exemple, une sphère de rayon r se déplaçant dans un fluide subit une force $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$ ou η est la viscosité du fluide (loi de Stokes).

D'une façon générale, il est utile d'écrire cette force de frottement sous la forme $-(m/\tau) \vec{v}$, avec un paramètre τ qui a la dimension d'un temps et qui va fournir une échelle de temps importante dans les phénomènes étudiés par la suite.

Une autre situation physique décrite par un terme de « frottement fluide » est le circuit RLC, comme on l'a mentionné plus haut (précédemment). Une résistance R introduit une différence de potentiel supplémentaire égale à $R I$, selon la loi d'Ohm.

Le frottement sec est caractérisé par une force de frottement constante qui change de direction en fonction de la direction de mouvement du corps oscillant. Il en résulte une diminution linéaire de l'amplitude dans le temps.

Le frottement fluide (dans les liquides et les gaz) se décrit par une force de frottement proportionnelle à la vitesse du mouvement (au moins dans les cas où les turbulences ne dominant pas, exemples: résistance de l'air, amortisseur de voiture).

Dans ces cas, l'amplitude diminue dans le temps de manière exponentielle. On démontrera ci-dessous que l'atténuation d'une oscillation électrique par une résistance ohmique est analogue au cas du frottement fluide.

Amortisseur mécanique Un amortisseur mécanique est constitué d'un élément mobile à l'intérieur d'un récipient contenant un fluide visqueux.

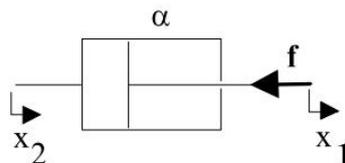


Figure II.1 Représentation d'un Amortisseur

La force de frottement \vec{f} agissant sur la partie mobile repérée par x_1 , est donnée par

$$\vec{f} = -\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Où $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$ représente la vitesse relative des deux éléments qui constituent l'amortisseur.

II.2 Oscillations libres amorties

Pour se rapprocher de la réalité, il faut tenir compte des pertes d'énergie provoquées par les diverses forces de frottement. Nous allons modéliser ces dernières par une force de frottement fluide du type $F_q = -\alpha\dot{q}$ (on travaille à une dimension), α étant une constante.

Tel que :

α : est le coefficient de frottement visqueux. α : [N.s/m] ;

q : la coordonnée généralisée du système ;

\dot{q} : La vitesse généralisée du système.

Le signe moins (-) vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse.

Dans un mouvement unidimensionnel x la force s'écrit sous la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}$$

Les deux figures ci-dessous illustrent de façon qualitative la différence de comportement entre un système physique (masse+ressort) où l'on ne tient pas compte des frottements et le même système lorsque ces derniers sont prises en compte.

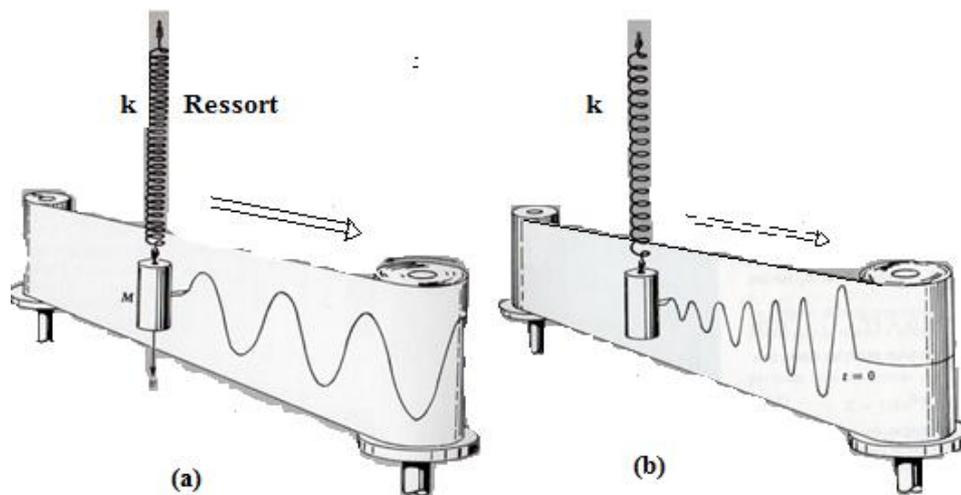


Figure II.2 l'allure de la différence de comportement entre un système physique (masse+ressort)

L'équation du mouvement sur l'axe (Ox) devient (par application du principe fondamental de la dynamique)

II.3 Équation de Lagrange dans un système amorti

Considérons le cas d'une masse m oscillant verticalement et reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α . Repérons par x l'écart de la masse m par rapport à la position d'équilibre. L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = F_q \quad (\text{II.1})$$

Sous l'action des forces de frottements, le système dissipe (perde) de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il y a donc une relation entre la force F_q et la fonction de dissipation D d'un côté et la fonction de dissipation et le coefficient de frottement visqueux α :

$$F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{2}\alpha \dot{q}^2 \quad (\text{II.2})$$

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad (\text{II.3})$$

II.4 Étude du système masse-ressort-amortisseur vertical

L'étude du pendule élastique équipé d'un dispositif d'amortisseur réalise un système amorti (Fig.). La mise en équation de ce problème va ainsi permettre de comprendre l'effet de cette force de frottement sur un système mécanique.

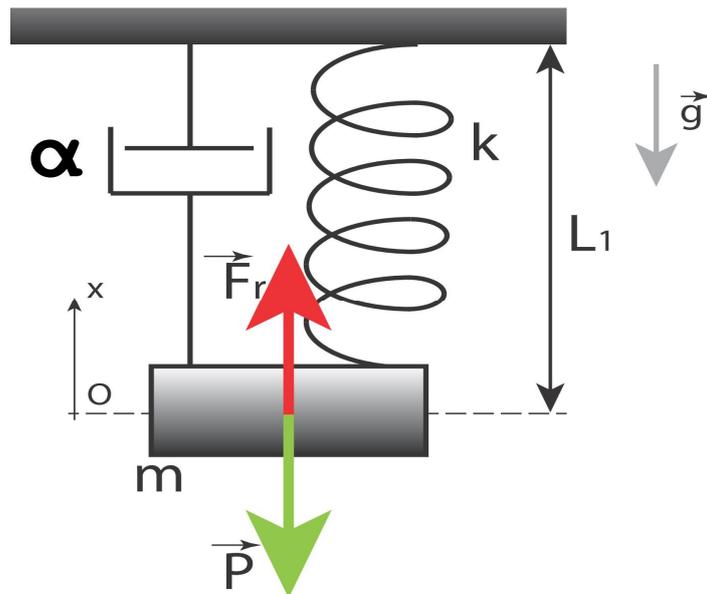


Figure II.3 système masse-ressort-amortisseur vertical

Position d'équilibre : $U=E_p(0)=0$ à $x=0$

II.4.1 Détermination de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

L'énergie cinétique du système : c'est l'énergie cinétique de la masse m : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort $U = \frac{1}{2} k x^2$

Lagrangien :

La fonction de Lagrange : $L=T-U \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

Conditions d'équilibre :

On suppose que l'allongement initial du ressort est nul $x_0=0$;

L'équation différentielle :

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad (\text{II.4})$$

Nous avons :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \quad (\text{II.5})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = -k x \quad (\text{II.6})$$

Avec la fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \quad (\text{II.7})$$

En remplaçant (1), (2) et (3) dans l'équation de Lagrange (I) on aura :

$$m \ddot{x} + k x = -\alpha \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (\text{II.8})$$

C'est une équation différentielle de deuxième ordre, c'est l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système libre amorti.

Par rapport aux oscillations libres non amorties, on reconnaît un nouveau terme $\left(\frac{\alpha}{m} \dot{x} \right)$ Provenant de la dissipation d'énergie.

Nous allons réécrire cette équation sous trois formes dites canoniques que l'on rencontre habituellement. En effet, l'équation canonique s'écrit de façon identique quel que soit le

domaine physique auquel elle s'applique. De plus l'écriture sous forme canonique permet de faire apparaître des grandeurs physiques caractéristiques du problème étudié. On écrira donc :

La forme générale :

$$\ddot{q} + \frac{\alpha}{m} \dot{q} + \frac{k}{m} q = 0 \quad (\text{II.9})$$

Souvent l'équation différentielle est écrite sous une forme dite réduite : $\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

Tels que : $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ [1/s]: Facteur d'amortissement.

$\zeta = \frac{\delta}{\omega_0}$ (sans unité): Rapport d'amortissement.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (rad/sec) : pulsation propre.

À une dimension la forme réduite s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{II.10})$$

II.4.2 La solution de l'équation différentielle :

L'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.

Cherchons pour x une solution particulière de la forme: $x(t) = D e^{rt}$ est une solution particulière de cette équation différentielle à condition que r soit une des deux racines r_1 et r_2 de l'équation du second degré, appelée équation caractéristique.

Soit :

$$\dot{x}(t) = r D e^{rt} \quad \text{Et} \quad \ddot{x}(t) = r^2 D e^{rt} \quad (\text{II.11})$$

par conséquent, l'équation étant satisfaite quel que soit t, on déduit:

$$r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

Calculons:

$$\Delta' = b'^2 - a.c \implies \Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 \quad (\text{II.12})$$

La solution générale de l'équation prend la forme :

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (\text{II.13})$$

Tel que : $r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ et $r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$; on voit bien que la solution dépend des valeurs de δ et ω_0 .

a) $\delta > \omega_0$ ($\zeta > 1$) : système sur- amorti ou fortement amorti (amortissement élevé)

$$r_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (\text{II.14})$$

$$r_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (\text{II.15})$$

Soit la solution : $x(t) = e^{-\delta t} (C_1 e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t})$

Le mouvement est dit "**apériodique**" ou Régime apériodique

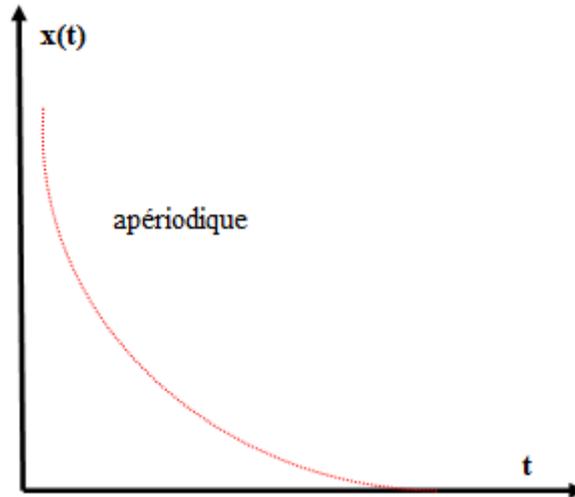


Figure II.4 Régime apériodique

b) $\delta = \omega_0$ ($\zeta = 1$) : Amortissement critique : $r_1 = r_2 = -\delta$

Dans ce cas, on montre que:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t} \quad (\text{II.16})$$

Si $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \alpha = \alpha_c = 2\sqrt{km}$ valeur critique du coefficient de frottement.

Et que les allures des courbes de x en fonction du temps sont presque identiques à celles obtenues pour un mouvement apériodique

$x(t)$ n'est pas oscillatoire car il ne contient pas un terme sinusoïdal.

Le système revient à sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

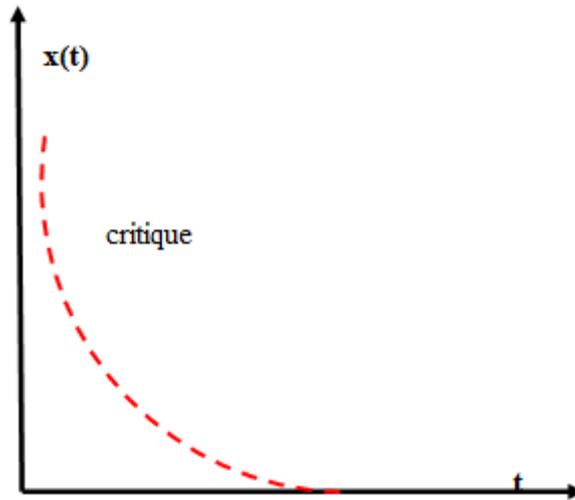


Figure II.5 Régime critique

c) $\delta < \omega_0$ ($0 < \delta < 1$) : système sous-amorti ou faiblement amorti $\Rightarrow \delta^2 - \omega_0^2 < 0$

$$r_1 = -\delta + \sqrt{j^2(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + j\omega_a \quad (\text{II.17})$$

$$r_2 = -\delta - \sqrt{j^2(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - j\omega_a \quad (\text{II.18})$$

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$: C'est la Pulsation des oscillations amorties.

$$T_a = 2 \frac{\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{II.19})$$

Donc : $T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$;

T_a : Pseudo - période.

La solution :

$$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi) \quad (\text{II.20})$$

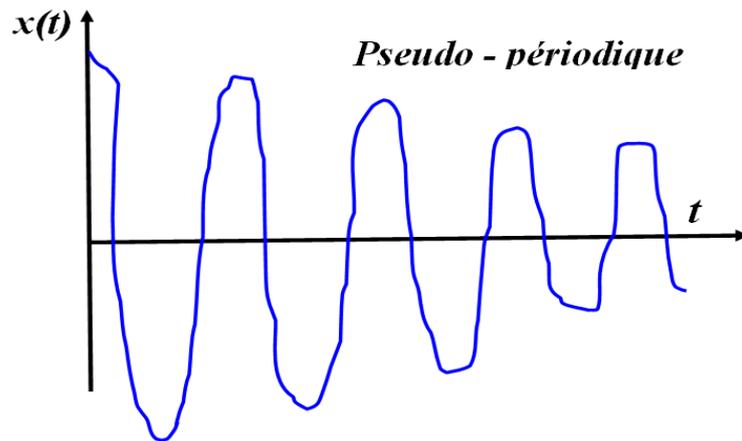


Figure II.6 Régime pseudo - périodique.

Régime oscillatoire amorti est dit pseudo-périodique.

Remarque :

* $x(t)$ représente un mouvement vibratoire.

* L'amplitude $C e^{-\delta t}$ est décroissante : $-C e^{-\delta t}$; $\delta = \omega_0$ ($\zeta = 1$) tend vers 0 quand t augmente.

* L'élongation $x(t)$ va osciller en restant comprise entre $-C e^{-\delta t}$ et $C e^{-\delta t}$. Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par x lorsque le temps s'écoule.

II.5 L'oscillateur harmonique électrique

Nous allons voir maintenant qu'il existe un autre type d'oscillateur harmonique amorti dans un autre domaine de la physique : l'électricité.

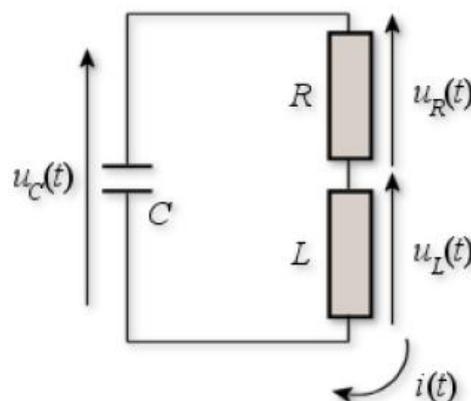


Figure II.7 circuit électrique R.L.C. (oscillateur harmonique amorti)

Soit un circuit électrique, constitué des 3 éléments de base misent en série :

Un résistor de résistance R ;

Un condensateur de capacité C ;

Et une bobine d'inductance L.

Selon la loi de Kirchhoff :

$$u_R + u_C + u_L = 0 \Rightarrow Ri(t) + \frac{1}{c}q + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c}q + L \frac{dq^2}{dt^2} = 0 \Rightarrow R\dot{q} + \frac{1}{c}q + L\ddot{q} = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc}q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{II.23})$$

Avec : $\delta = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{Lc} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Remarque :

Pour un amortissement critique $\delta = \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ donc $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

II.6 Décrément logarithmique D:

Ce paramètre caractérise la décroissance des élongations maximales à chaque période :

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)}; \quad t_2 = t_1 + T_a \quad (\text{II.24})$$

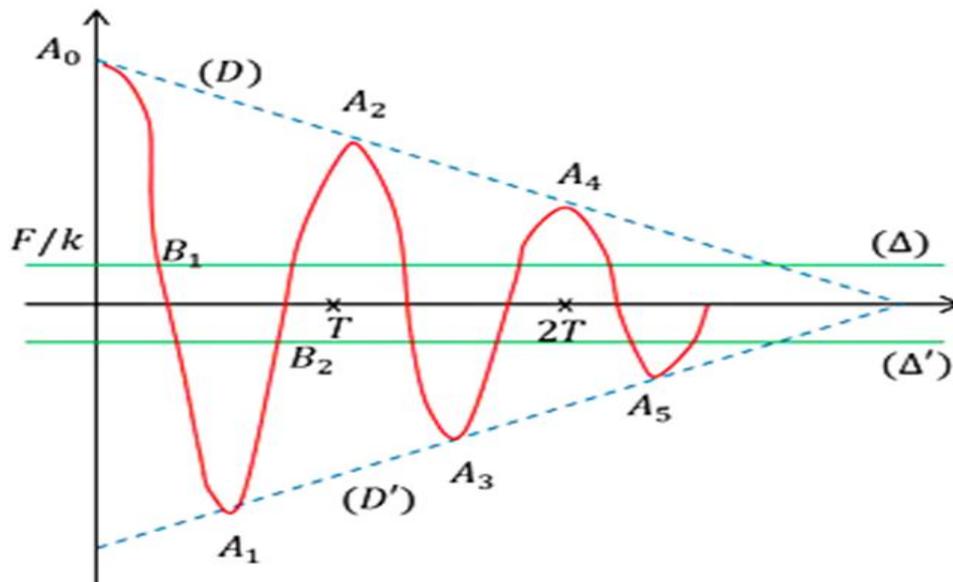


Figure II.8 oscillateur harmonique amorti (représentation de décrément logarithmique)

Où $T = T_a$ est la pseudo période.

Où $x(t_1)$ et $x(t_1 + T_a)$ représentent les amplitudes des oscillations aux instants t_1 et $(t_1 + T_a)$:

$$\delta = \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{donc} \quad R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{II.25})$$

Généralement ces deux instants sont choisis correspondent à deux extremum successifs de même signe. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes pendant une période.

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_a)} \quad (\text{II.26})$$

Pour un système amorti :

$$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi) \implies D = \ln \frac{C e^{-\delta t_1} \sin(\omega_a t_1 + \varphi)}{C e^{-\delta(t_1 + T_a)} \sin(\omega_a(t_1 + T_a) + \varphi)} \quad (\text{II.27})$$

$$D = \ln e^{(\delta T_a)} = \delta T_a \quad (\text{II.28})$$

$$\delta T_a = \delta \frac{T_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \zeta \omega_0 \frac{T_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{II.29})$$

Remarque :

- Pour plusieurs périodes : $T = nT_a$; $t_2 = t_1 + nT_a$

$$\implies D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_1 + nT_a)} = n \delta T_a = 2\pi \frac{n\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (\text{II.30})$$

- La pseudo-période et le décrément logarithmique n'ont de sens que si le régime est pseudopériodique.

II.7 Facteur de qualité (Facteur de surtension)

C'est une grandeur qui mesure la diminution de l'énergie et elle définit par :

$$Q = 2\pi \cdot \frac{E_{max}}{|\Delta E|} \quad (\text{II.31})$$

E_{max} : est l'énergie maximale stockée dans le système.

$|\Delta E|$: est l'énergie perdue par cycle.

La notion 'qualité' est la grandeur qui traduit l'aptitude du système à garder son énergie tout en oscillant. La qualité est d'autant meilleure que le rapport $\frac{E_{max}}{|\Delta E|}$ est grand.

II.8 Calcul du facteur de qualité : système masse-ressort-amortisseur (m, k, α)

Prenons l'exemple d'un système masse-ressort-amortisseur (**m, k, α**) faiblement amorti dont la solution de l'équation différentielle est sous la forme :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad x_0 = C e^{-\delta t} \quad \text{et} \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} \approx \omega_0 \quad (\text{II.32})$$

On a d'une part :

$$E_{max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \quad (\text{II.33})$$

D'autre part :

$$\Delta E = \int_t^{t+T_a} F(t) dx \quad (\text{II.34})$$

Tel que : $F(t)$: est la force de frottement visqueux : $F(t) = -\alpha \dot{x}(t)$

$$\Rightarrow \Delta E = \int_t^{t+T_a} -\alpha \dot{x}(t) dx = \int_t^{t+T_a} -\alpha \dot{x}(t) [\dot{x} dt] = -\alpha \int_t^{t+T_a} \dot{x}^2 dt \quad (\text{II.35})$$

On a : $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow \Delta E = -\alpha x_0^2 \omega_0^2 \int_t^{t+T_a} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt \quad (\text{II.36})$$

$$\int_t^{t+T_a} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \int_t^{t+T_a} \frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2} dt \Rightarrow \Delta E = -\frac{1}{2} \alpha T_a \omega_0^2 x_0^2 \quad (\text{II.37})$$

$$T_a = 2 \frac{\pi}{\omega_a}; \quad \omega_a \approx \omega_0 \Rightarrow \Delta E = -\alpha \pi \omega_0 x_0^2 \quad (\text{II.38})$$

On retrouve bien une variation négative de l'énergie c'est-à-dire une perte d'énergie au cours du temps.

L'énergie perdue se transforme en énergie thermique ou elle se disperse en se diffusant dans le milieu avoisinant.

En remplaçant dans l'expression de Q, on trouve :

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}{\pi \alpha x_0^2 \omega_0} = \frac{m \omega_0}{\alpha} \Rightarrow Q = \frac{m \omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\zeta} \quad (\text{II.39})$$

II.9 Calcul du facteur de qualité : système électrique (R.L.C.)

Dans un système mécanique (m, k) : $E_{max} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$

Dans un système électrique (R.L.C.) : $E_{max} = \frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2$

Dans un système mécanique (**m, k, α**): $\Delta E = -\pi \alpha x_0^2 \omega_0 \implies$ Dans un système électrique (R.L.C.):

Donc :

$$\Delta E = -\pi R q_0^2 \omega_0 \quad (\text{II.40})$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L \omega_0^2 q_0^2}{\pi R q_0^2 \omega_0} = \frac{L \omega_0}{R}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\xi} \quad (\text{II.41})$$

Remarque :

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système oscillant est grande. Or Q est d'autant plus grand pour un ω_0 donné, que l'amortissement est faible. Un système très amorti a un faible

II.10 Quelques schémas réels.

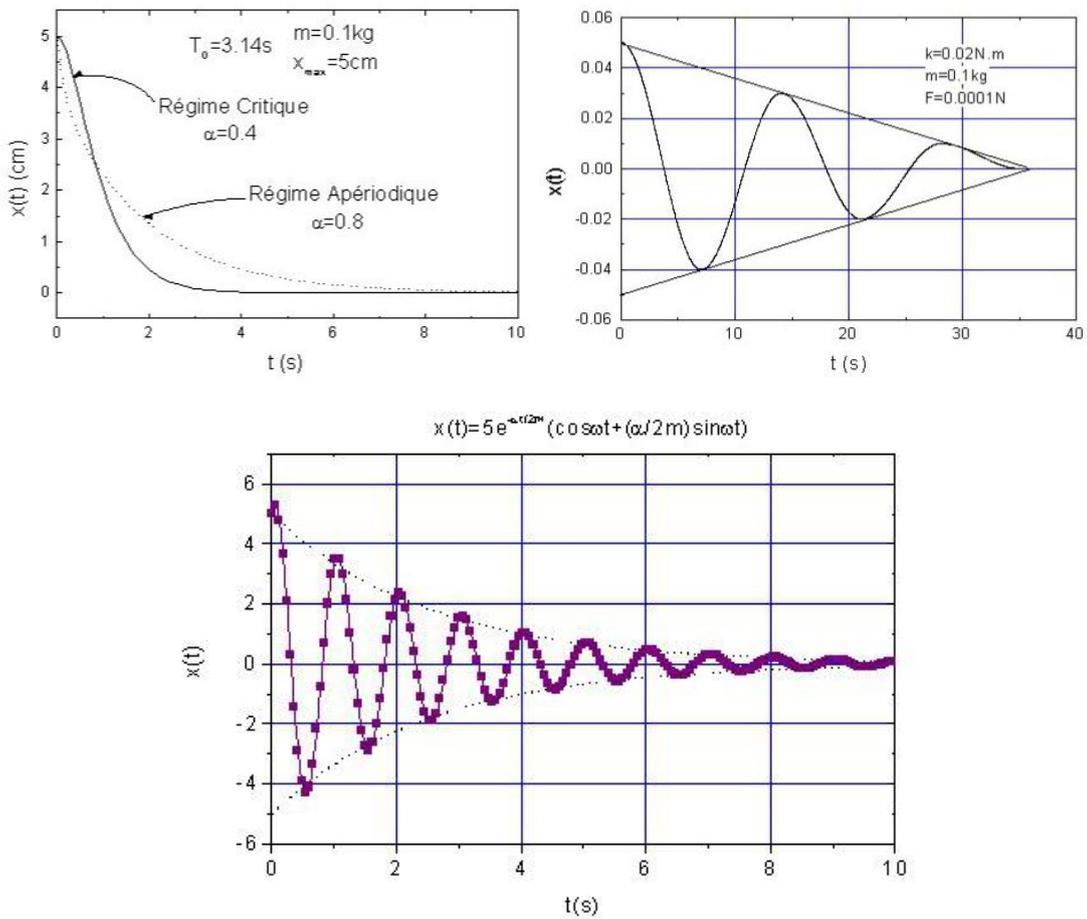


Figure II.9 Quelques schémas réels.

CHAPITRE III

Oscillations forcées amorties : Systèmes à un degré de liberté

III.1 Introduction :

Tous les solides sont capables d'osciller à leur fréquence propre s'ils sont sollicités, ce phénomène peut être voulu et contrôlé, par exemple lorsqu'on pousse une balançoire ou dans le cas des instruments de musique avec par exemple une guitare classique. Sa table en épicéa et sa caisse de résonance en palissandre servent à amplifier le son des cordes. On peut aussi citer les résonateurs de Helmholtz (cavités dans les murs de diverses dimensions pour amplifier des différentes fréquences des sons, petites pour les sons aigus et grosses pour les sons graves) dans certaines salles de concert et certains théâtres antiques. Il peut être produit de façon fortuite et peut occasionner des gênes. On peut citer les vibrations parasites dans les voitures, les canalisations ou celles provoquant des problèmes articulaires, tendineux ou musculaires chez les sportifs comme les joueurs tennis ou les joggers ou chez les conducteurs de voitures et de camions. Il intervient également dans les amortisseurs des véhicules et engins de chantier ainsi que dans les sismographes enregistrant et mesurant les séismes. Il peut aussi causer de gros dégâts matériels et humains (bâtiments, ponts et viaducs en cas de tremblement de terre ou de fort vent).

Nous étudierons dans ce chapitre les oscillations forcées d'un système mécanique soumis à une force sinusoïdale. Tout comme dans le cas des oscillations libres, les équations du mouvement de ces oscillateurs auront la même structure que des équations d'évolution d'un circuit électrique en régime forcé (analogie électro-mécanique).

On étudie la réponse d'un système amorti à 1 ddl à une excitation harmonique sinusoïdale produite par une force extérieure au système. Ce type d'excitation se rencontre fréquemment dans l'industrie (machines tournantes, ventilateurs, moteurs, pompes ...). Les résultats obtenus avec une excitation sinusoïdale pourront s'étendre à des excitations harmoniques plus complexes représentées par des séries de Fourier, en appliquant le principe de superposition. On suppose donc qu'il s'agit de systèmes linéaires.

III.2 Équation différentielle du mouvement

a) Pour un mouvement de translation, on écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext} \quad (\text{III.1})$$

b) Pour un mouvement de rotation avec un angle α , on écrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + M_{(F_{ext})} \quad (\text{III.2})$$

Tel que :

$$M_{(F_{ext})} = F_{ext} \cdot L = \frac{\partial r}{\partial \theta} |F_{ext}| \quad (\text{III.3})$$

M : Est le moment de la force appliquée [N.m].

Le moment : caractérise la capacité d'une force à faire tourner un objet autour d'un point.

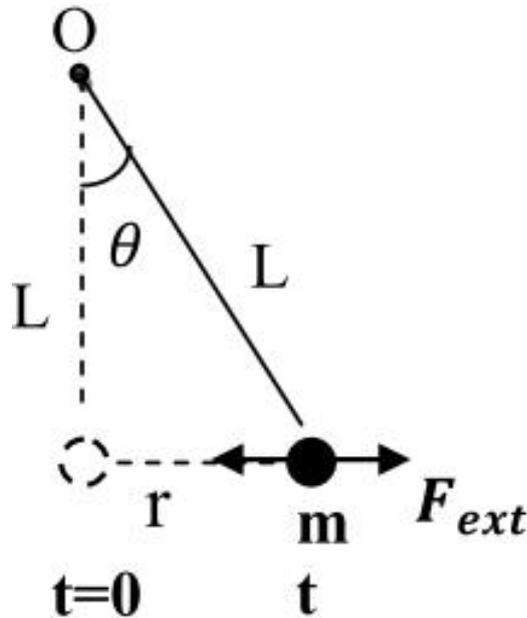


Figure III.1 système d'un pendule simple forcé.

L : Le bras du levier : est la distance droite d'action de la force.

r : La distance parcourue par la masse dans la direction de l'action de la force.

III.3 L'oscillateur forcé amorti, expérience de résonance

III.3.1 Dispositif expérimental : Un pendule élastique, constitué d'un ressort auquel est suspendu un corps (S), est lié par l'intermédiaire d'un fil et d'une poulie à un ergot fixé à la périphérie d'un disque vertical entraîné en rotation à vitesse constante par un moteur. La période T de rotation du disque est réglable. Il en résulte une excitation périodique de même période du pendule. (S) effectue des oscillations de période T dont on peut mesurer l'amplitude X_m . Le mouvement de (S) est amorti car le corps est immergé dans l'eau. On fait tourner le moteur à vitesse constante et pour chaque valeur de T , on relève l'amplitude

du mouvement de (S), ce qui permet de tracer la courbe de réponse du résonateur (le pendule élastique) à l'excitation du résonateur (le moteur).

disque muni d'un ergot
entraîné par un moteur

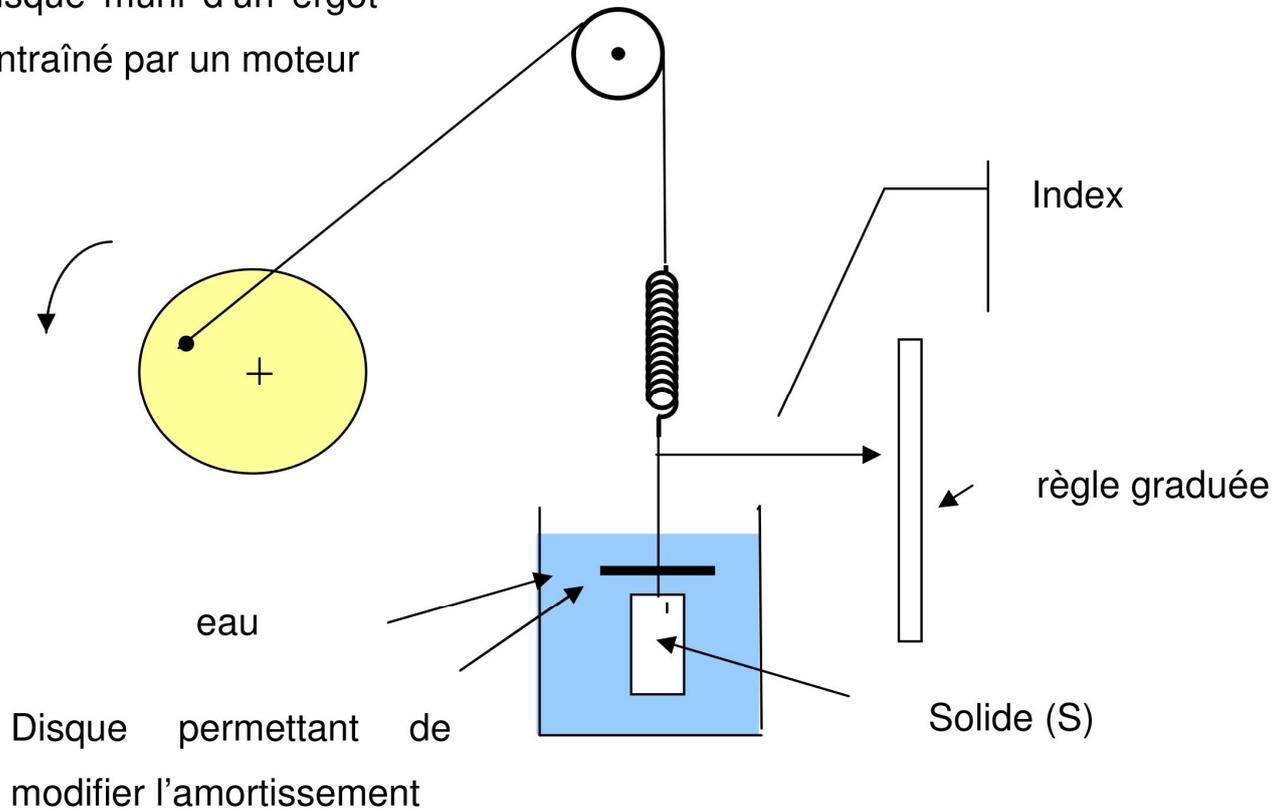


Figure III.2 Schéma de l'oscillateur libre mécanique forcé amorti.

III.3.2 Courbe de réponse du résonateur

On constate que :

- (S) effectue des oscillations de période T ; ces oscillations sont des oscillations forcées à un rythme imposé par l'excitateur.
- L'amplitude du mouvement de (S) dépend de T ; elle est maximale lorsque T est voisine de T_0 , période propre des oscillations du pendule.
- A la résonance, l'amplitude du mouvement du pendule est maximale.

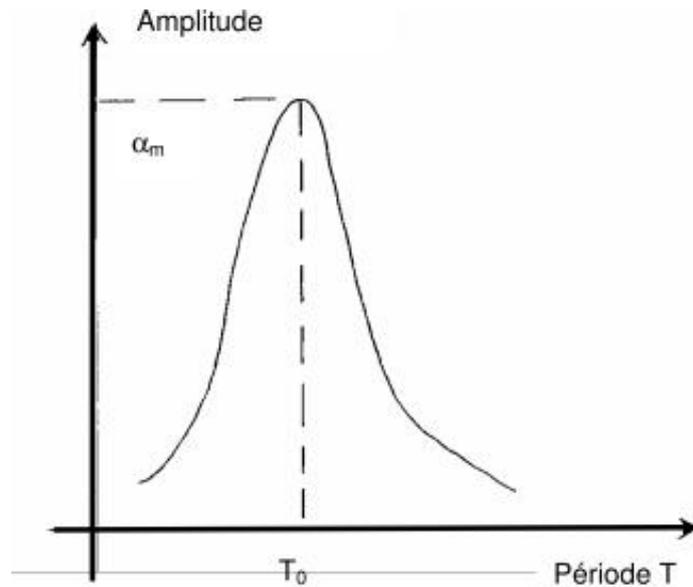


Figure III.3 Courbe de réponse du résonateur

III.3.3 Influence de l'amortissement

En modifiant le diamètre du disque de masse négligeable solidaire du solide (S), on peut amortir plus ou moins le mouvement du pendule. Si l'amortissement est faible, la résonance est aiguë ; si l'amortissement est très grand, la résonance est floue. Ce phénomène est à rapprocher de la résonance d'un dipôle R.L.C en électricité. Il est à noter que la résonance s'effectue en mécanique pour une période très légèrement différente de T_0 et d'autant plus différente de T_0 que l'amortissement est plus grand.

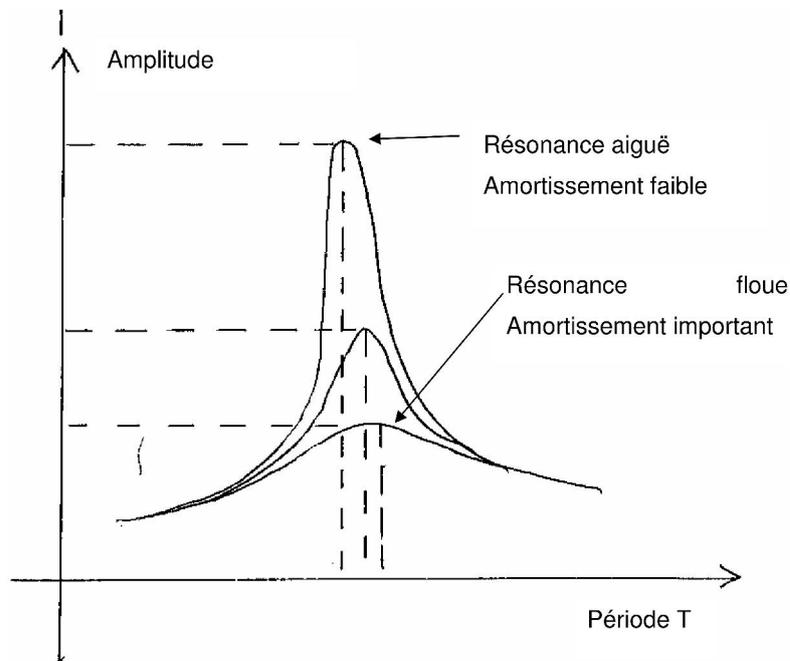


Figure III.4 Schéma d'influence de l'amortissement

III.3.4 Importance de la résonance en mécanique.

Les vibrations qui se produisent en mécanique peuvent engendrer la mise en résonance de pièces mécaniques et provoquer leur desserrage ou leur rupture. Des ouvrages tels que des ponts ont été détruits ou fortement endommagés suite à des phénomènes de résonance lors de tempêtes. Cela s'est produit lorsque les phénomènes atmosphériques se sont accordés à la période d'oscillation du tablier du pont.

III.4 Établissement du régime d'énergie

Reprenons l'exemple de l'oscillateur mécanique. Considérons le problème où l'oscillateur est soumis à une force extérieure oscillante $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ générée par le moteur. Pour que notre description soit réaliste, intégrons dès maintenant les effets de dissipation d'énergie par frottement (*voir chapitre II*)

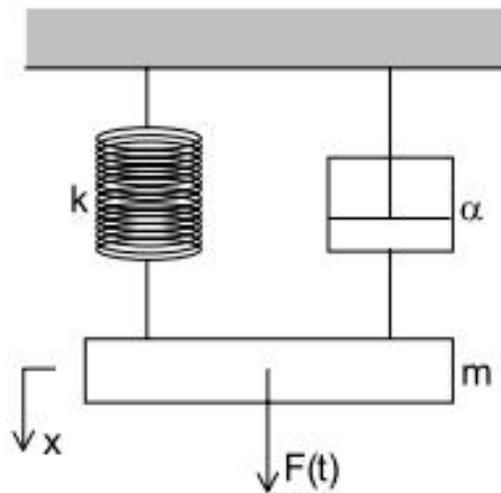


Figure III.5 Système forcé.

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F_{ext} \quad (\text{III.4})$$

On se limitera dans la suite aux excitations sinusoïdales appliquée à la masse m :

$$F_{ext} = F_0 \sin \omega t \quad (\text{III.5})$$

L'énergie cinétique du système : c'est l'énergie cinétique de la masse m : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système : c'est l'énergie emmagasinée dans le ressort :

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$

La fonction de Lagrange:

$$L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \quad (\text{III.7})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = -k x \quad (\text{III.8})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \quad (\text{III.9})$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura : $m \ddot{x} + k x = -\alpha \dot{x} + F_0 \sin \omega t$

On divise alors par m et on trouve :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (\text{III.10})$$

Souvent l'équation différentielle est écrite sous la forme réduite :

$$\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (\text{III.11})$$

Tels que :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} \quad [1/s] : \text{Facteur d'amortissement } (\sigma) ;$$

$$\zeta = \frac{\delta}{\omega_0} \quad (\text{Sans unité}) : \text{Rapport d'amortissement.}$$

Nous obtenons donc une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.

III.5 Étude de la solution

La solution générale de cette équation différentielle est la somme de deux termes :

Une solution de l'équation sans second membre : solution homogène ($x_H(t)$),

Une solution de l'équation avec second membre : solution particulière ($x_P(t)$).

La solution totale de l'équation du mouvement sera donc $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$;

La solution $x_H(t)$ de l'équation sans second membre a été déjà étudiée dans **le chapitre (I)**. Cette solution disparaît avec le temps, (régime transitoire), seule reste la solution particulière (régime permanent).

Cherchons la solution particulière sous forme de :

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t - \psi) \quad (\text{III.12})$$

Solution homogène :

La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{III.13})$$

Il apparaît que la solution de l'équation différentielle homogène est tout simplement la solution trouvée pour l'oscillateur harmonique amorti en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties :

$$x_H(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \Phi), \quad \text{et} \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\text{III.14})$$

Remarque :

La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime transitoire (qui ne dure qu'un certain temps).

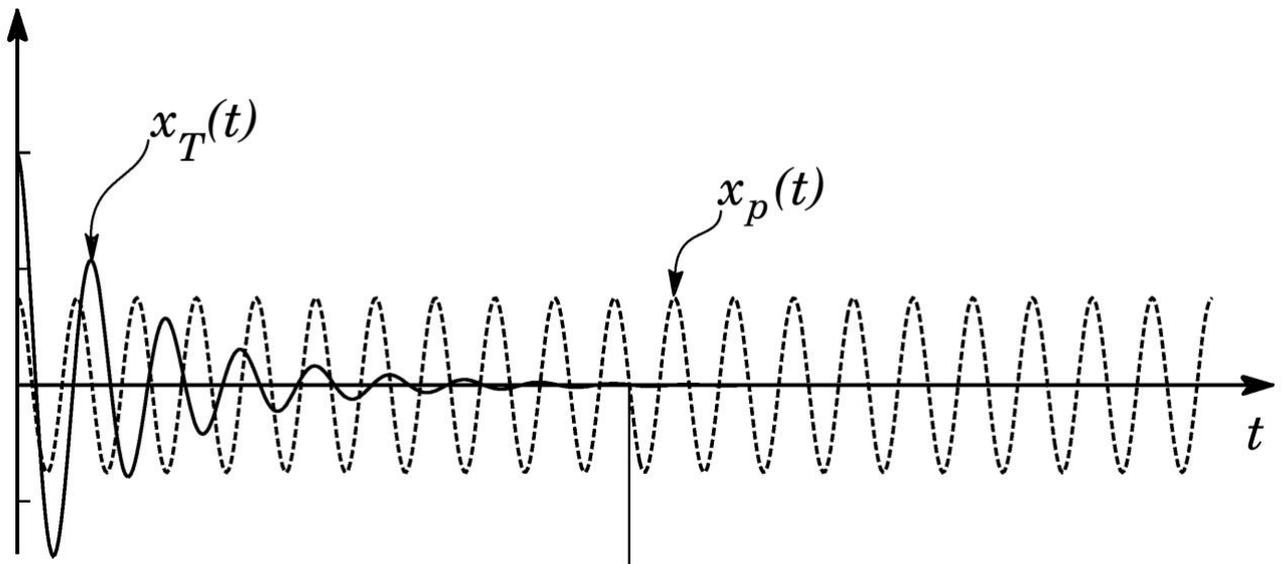


Figure III.6 Représentation graphique de la solution en régime transitoire et permanent.

Solution particulière:

Lorsque la composante ($x_H(t)$) devient vraiment négligeable, il ne reste plus que la solution particulière, qui est la solution imposée par la fonction d'excitation. Nous disons que nous sommes en régime forcé ou régime permanent.

La force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle équivalente à la sienne. Donc si F_{ext} est une fonction sinusoidale de pulsation ω ; alors la solution particulière ($x_p(t)$) sera une fonction sinusoidale de même pulsation ω .

Les oscillations de la masse ne sont pas forcément en phase avec la force excitatrice et présente un déphasage noté φ . La solution particulière correspondant au régime permanent s'écrit dont :

$$x_p(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{III.15})$$

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe. La grandeur complexe associée à $x(t)$ s'écrit :

$$z_p(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{et} \quad F_{ext} = F_0 e^{j\omega t} \quad (\text{III.16})$$

Déterminer les grandeurs A et φ revient à chercher le module de *l'amplitude complexe*.

III.5.1 Calcul de l'amplitude A

Vérifie l'équation différentielle avec second membre :

$$\ddot{z}_p + 2\delta \dot{z}_p + \omega_0^2 z_p = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} = B e^{j\omega t} \quad (\text{III.17})$$

Calculons la dérivée première puis le dérivé second :

$$z_p(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \dot{z}_p(t) = A j \omega e^{j(\omega t + \varphi)} = j \omega z_p(t) \quad \text{et} \quad \ddot{z}_p(t) = A j \omega^2 e^{j(\omega t + \varphi)} = -\omega^2 z_p(t) \quad (\text{III.18})$$

On remplace dans (*) et on trouve :

$$-\omega^2 z_p(t) + 2\delta j \omega z_p(t) + \omega_0^2 z_p = B e^{j\omega t} \quad (\text{III.19})$$

$$\implies [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta \omega j] z_p(t) = [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta \omega j] A e^{j(\omega t + \varphi)} = B e^{j\omega t} \quad (\text{III.21})$$

$$\implies [(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta \omega j] A e^{j\varphi} = B \quad (\text{III.22})$$

On divise sur " $e^{j\varphi}$ " et on trouve:

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta \omega j] A = B e^{-j\varphi} \quad (\text{III.23})$$

Le conjugué de cette équation est la suivante :

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\delta \omega j] A = B e^{j\varphi} \quad (\text{III.24})$$

(III.23)*(III.24)

$$\Rightarrow A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2] = B^2 \Rightarrow A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta \omega)^2}} = C^{te} \quad (\text{III.25})$$

III.5.2 Calcul de φ :

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega j]A = Be^{-j\varphi}$$

$$\text{et } B(\cos\varphi - j\sin\varphi) \Leftrightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2) = B\cos\varphi \quad \text{et} \quad 2\delta\omega A = -B\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{tg } \varphi = -\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (\text{III.26})$$

$$\Rightarrow \varphi = \text{Arctg}\left(\frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \quad (\text{III.27})$$

Donc

$$x_p(t) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \sin\left[\omega t + \text{Arctg}\left(\frac{-2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)\right] \quad (\text{III.28})$$

Remarques:

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit : $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$.

$(x_H(t))$ Est appelée solution homogène caractérisant un régime transitoire qui disparaît exponentiellement avec le temps. Quand le régime transitoire disparaît : $x(t) \approx x_P(t)$

$(x_P(t))$ Est appelée solution particulière d'amplitude $A = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$ caractérisant un régime permanent (stationnaire) car il subsiste aussi longtemps que la force extérieure (F_{ext}) est appliquée. Nous notons la dépendance de l'amplitude A de la pulsation ω .

La solution $x(t)$ aura donc souvent une allure caractéristique comme celle présentée sur la figure ci-dessous :

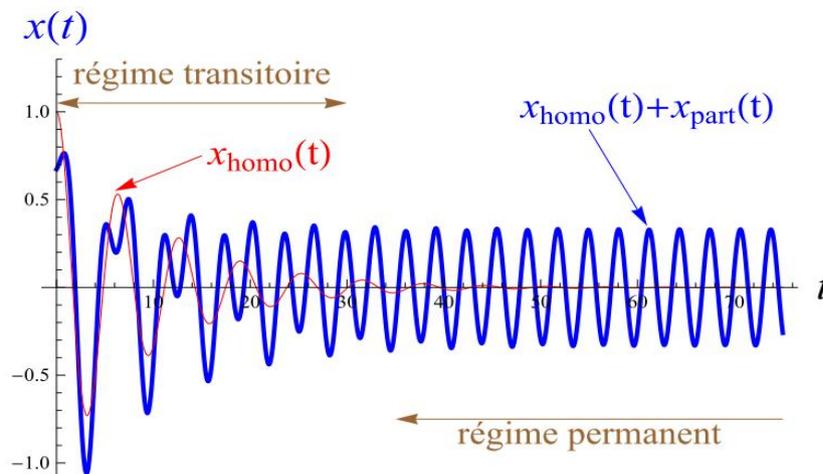


Figure III.7 Représentation graphique de la solution générale.

III.6 Étude du régime permanent : phénomène de résonance en amplitude :

III.6.1 La variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ

Soit ($A(\omega)$) l'amplitude de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé) :

$$A(\omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \quad (\text{III.29})$$

$$A(\omega) = \frac{B}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\delta)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{B/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (\text{III.30})$$

$$A(\omega) = \frac{B}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\delta)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{B/\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\delta}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (\text{III.31})$$

Tels que : $A_0 = \frac{B}{\omega_0^2}$ et $\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$ avec $B = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$ donc : $A_0 = \frac{F_0}{k}$

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + (2\xi)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (\text{III.32})$$

Posons $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$ et cherchons la valeur maximale de $A(r)$.

$A(\omega)$ Est maximale quand le dénominateur est minimal.

Posons $r = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow A(r) = \frac{A_0}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$ et cherchons la valeur maximale de $A(r)$.

$$A(r)_{\max} \Leftrightarrow \frac{dA(r)}{dr} = 0 \Rightarrow [2(1-r^2)(-2r) + 8\xi^2 r] = 0 \quad (\text{III.33})$$

$$\frac{dA(r)}{dr} = 0 \Rightarrow -4r[1-r^2 + 2\xi^2] = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = \sqrt{1-2\xi^2} \quad (1.34)$$

On a un minimum ou un maximum selon le signe de la deuxième dérivée :

$$\frac{d^2 A(r)}{dr^2} = 12r^2 + 8\zeta^2 - 4 \Rightarrow r=0 \Rightarrow \frac{d^2 A(r)}{dr^2} = 8\zeta^2 - 4 < 0; \text{ car } 0 < \zeta < 1$$

$$\text{et } r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Rightarrow \frac{d^2 A(r)}{dr^2} = 8 - 16\zeta^2 > 0; \text{ car } 0 < \zeta < 1$$
(III.35)

$\frac{\omega}{\omega_0} = 0$ solution refusée

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$
(III.36)

Donc : $\frac{A(\omega)}{A_0}$ est maximale pour $(\frac{\omega}{\omega_0})^2 = \sqrt{1 - 2\zeta^2} < 1 \Rightarrow \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Voici, pour différentes valeurs du coefficient de frottement, les courbes donnant l'amplitude

de l'oscillation forcée en fonction de la fréquence.

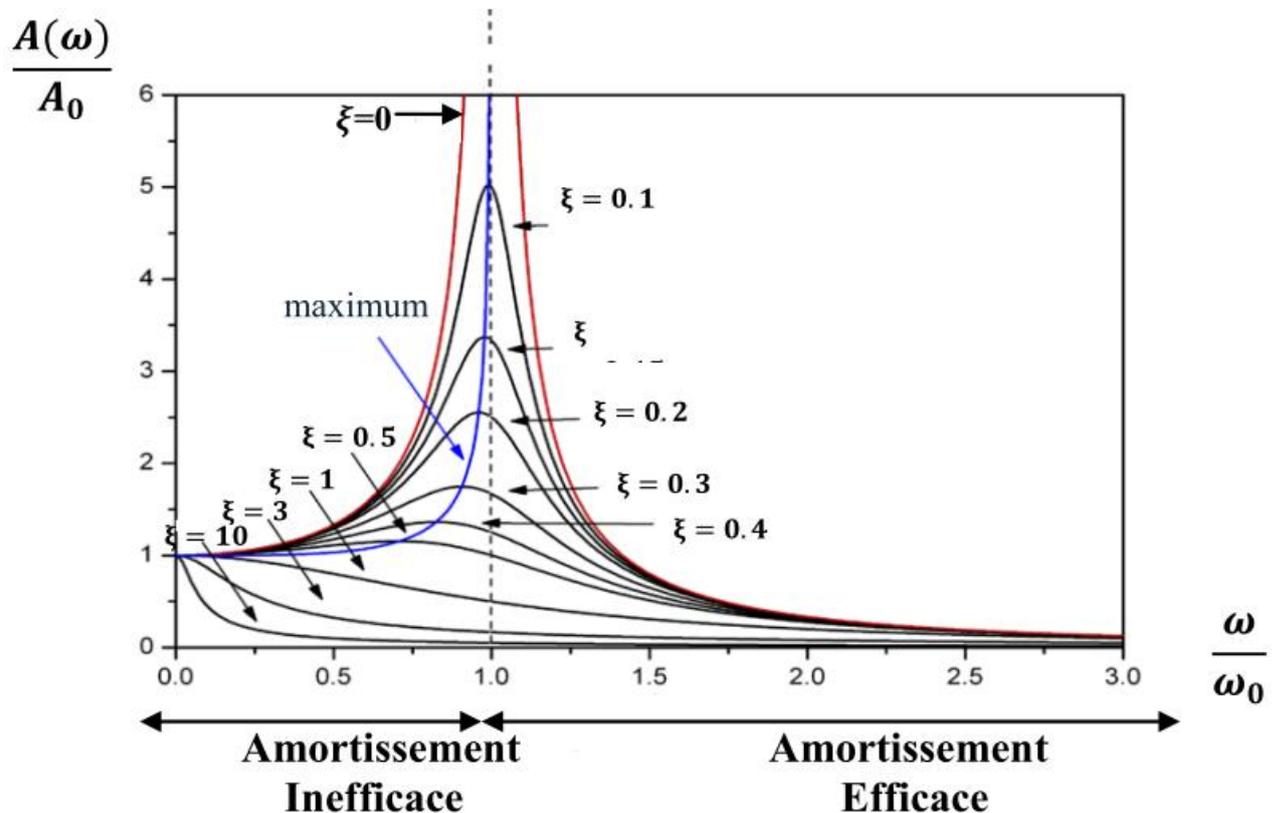


Figure III.8 Variation de l'amplitude en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ

Remarques :

L'amplitude A augmente quand le rapport d'amortissement ξ diminue.

L'amplitude de vibration atteint un maximum quand $\omega \simeq \omega_0$: on dit qu'il y-a **résonance** :

la valeur maximale $(\frac{\omega}{\omega_0})^*$ (correspondant à la valeur maximale de l'amplitude) n'est pas égale à 1 mais égale à $\sqrt{1-2\xi^2} < 1$.

Dans le cas d'un amortissement négligeable, l'amplitude accroît indéfiniment si la fréquence $\omega_e = \omega_0$, fréquence propre du système.

Avec un amortissement non négligeable le maximum de l'amplitude est obtenu lorsque la fréquence d'excitation satisfait à la condition de "résonance d'amplitude"; la valeur de ω_e est alors presque (mais pas tout à fait) égale à la fréquence propre ω_0 (la différence étant pratiquement négligeable dans la plupart des cas pratiques).

Si l'on demande la fréquence d'excitation à laquelle la force extérieure pompe le plus d'énergie dans le système oscillant, on trouve que cette "résonance d'énergie" a lieu quand $\omega_e = \omega_0$ (cela si F_0 est constante, les formules changent si F_0 dépend de ω).

Pour la pratique il suffit normalement d'admettre : résonance $\Leftrightarrow \omega_e = \omega_0$

III.6.2 La variation de la phase en fonction de la pulsation de la force pour différentes valeurs de ξ :

Soit φ la phase initiale de la solution particulière caractérisant le régime permanent (forcé) tel que :

$$tg(\varphi) = \frac{-2\xi\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (III.37)$$

Nous remarquons qu'est négatif. Cela paraît normal qu'il y ait un retard de l'oscillateur par rapport à la force qui entretient le mouvement. L'oscillateur harmonique essaie de suivre le mouvement en étant ralenti par les frottements, donc il doit obligatoirement prendre du retard par rapport à l'oscillation excitatrice donc avoir un déphasage négatif. Ce déphasage est dépendant de la pulsation de la force ω .

$$\begin{aligned} tg(\varphi) &= \frac{-2\xi\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{-2\xi\omega}{\omega_0^2(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)} = \\ &= \frac{\frac{-2\xi\omega}{\omega_0^2}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} = \frac{-2(\frac{\delta}{\omega_0})(\frac{\omega}{\omega_0})}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \end{aligned} \quad (III.38)$$

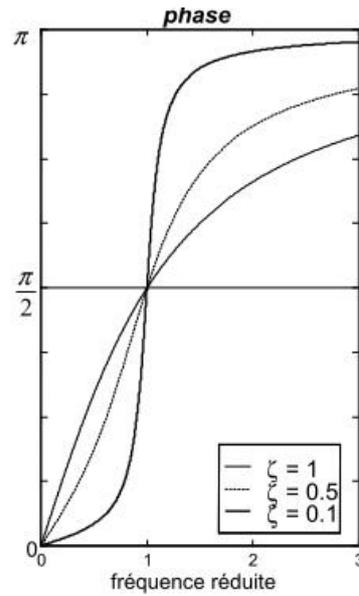


Figure III.9 La variation de la phase en fonction de la pulsation

$$tg(\varphi) = \frac{-2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (\text{III.39})$$

- Si $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ ($\omega = \omega_0$) $\Rightarrow tg \varphi = -\infty \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}; \forall \zeta.$
- Si $\zeta = 0 \Rightarrow tg \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$ ou $\varphi = -\pi$

Remarques :

- * L'oscillateur est en résonance de phase quand $\varphi = -\frac{\pi}{2};$ pour $\omega = \omega_0.$
- * L'oscillateur est toujours en retard de phase par rapport à la force et ce retard augmente lorsque la pulsation augmente.
- * L'oscillateur et la force sont en phase pour $\omega = 0$

Conclusions :

Selon la valeur de ζ on a 3 cas possibles :

- 1^{er} cas : faible fréquence : $\zeta \ll 1 (\omega \ll \omega_0) \rightarrow A \approx A_0 = \frac{F_0}{k}$ et $\varphi = 0$
- 2^{eme} cas : hautes fréquences : $\zeta \gg 1 (\omega \gg \omega_0) \rightarrow A \approx 0$ et $\varphi = -\pi$

3^{ème} cas : la résonance :

$$\zeta = 1 (\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r) \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \frac{A_{max}}{A_0} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Remarque :

* Si $\zeta = 0$ (système non amorti) : l'amplitude tend vers l'infini or en réalité, les systèmes sont tous amortis donc l'amplitude n'est jamais infini ;

* Si $\zeta \ll 1$ (système faiblement amorti) : $\frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\zeta}; \quad (\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r)$

III.7 Facteur de qualité et bande passante

* Dans les systèmes électriques, ce phénomène permet de calculer le facteur de qualité

$$Q = \frac{A_{max}}{A_0} \approx \frac{1}{2\zeta}$$

Q qui augmente lorsque l'amplitude maximale augmente

* Une autre méthode pratique pour déterminer le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$

Pour caractériser l'acuité de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une bande passante $\omega_2 - \omega_1$

$$\omega_1 < \omega_0 < \omega_2;$$

Telle que :

1. l'amplitude de la vitesse $v_m(\omega) \geq v_m(\omega_0)/\sqrt{2}$;
2. la phase est $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$;
3. la puissance $P(\omega) \geq P(\omega_0)/2$.

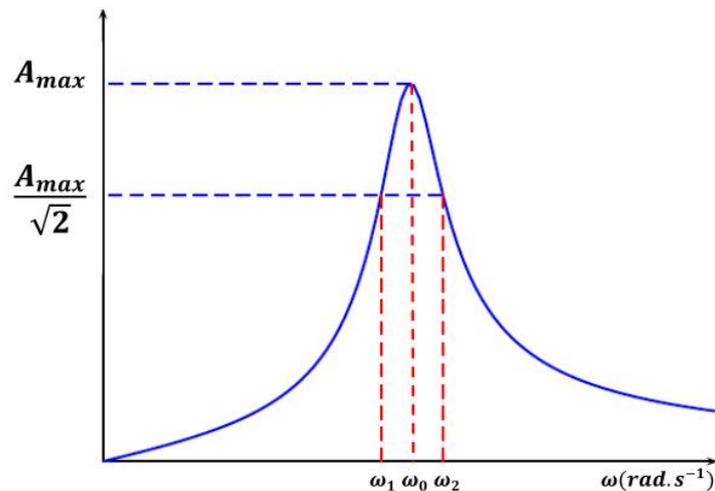


Figure III.10 Représentation graphique de la bande passante.

III.8 Conclusions :

- En faisant varier la fréquence, on constate que les deux oscillations diffèrent dans le temps (elles ne sont pas en phase), tout en restant de même fréquences. L'amplitude et la phase du mouvement forcé de la masse dépendent de la fréquence de l'excitateur.
- Lorsque l'excitation est de fréquence très basse, les deux oscillations en élongation sont identiques en amplitude et sont aussi en phase.
- Lorsque l'excitation est de fréquence « grande », l'oscillation en élongation de la masse a une petite amplitude, et elle est en opposition de phase avec celle de l'excitation.
- Lorsque le facteur d'amortissement Q est « grand » (supérieur à 0,7) il existe une fréquence (1,3 Hz) pour laquelle l'amplitude de la masse passe par un maximum, les deux oscillations d'élongation sont alors déphasées de $\pi/2$ (plus précisément l'élongation de l'oscillateur forcé d'élongations sont alors déphasées de $\pi/2$ (plus précisément l'élongation de l'oscillateur forcé est en retard de $\pi/2$ sur celle de l'excitation). La cause de l'excitation (l'élongation du point d'attache) et l'effet (la vitesse de l'oscillateur forcé, en avance de $\pi/2$ sur l'élongation) sont donc en phase. Donc en phase.
- On constate que cette fréquence correspond à la fréquence propre du régime d'oscillation libre de la masse. C'est le phénomène de résonance, l'élongation et la vitesse de la masse p , g deviennent grandes.

CHAPITRE IV

Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

IV.1 Introduction :

Ce cours, au-delà des sujets qu'il aborde autour des phénomènes liés aux systèmes physiques oscillants, illustre une démarche scientifique se situant entre l'approche cartésienne et systémique. D'une part, la réduction de l'objet d'étude en entités mathématiques au niveau de sa structure (ici des points associées aux composants d'inertie), tout en considérant de manière explicite les caractéristiques physiques associées aux systèmes et en décrivant dans sa globalité le système étudié.

D'autre part, en dissociant les phénomènes physiques associés, tout en définissant des stratégies de résolution des équations à partir d'outils d'analyse.

Enfin nous sommes amenés à distinguer de manière explicite la résolution du problème mathématique et du problème physique.

Nous aborderons d'abord les systèmes à un degré de liberté libre avec ou sans amortissement, et soumis à une sollicitation extérieure avec ou sans amortissement. Nous expliciterons l'ensemble des grandeurs physiques associées à leurs descriptions et la présentation des différents phénomènes relatifs à ces types de système.

Nous intéresserons ensuite aux systèmes à deux degrés de liberté dans les mêmes cas d'études que ceux des systèmes à un degré de liberté. Il sera abordé notamment ici les systèmes symétriques libres qui peuvent faire apparaître directement des coordonnées normales pour découpler les degrés de liberté, puis les systèmes non symétriques qui feront appel à la notion de mouvement propre pour mettre en évidence une solution appropriée aux équations différentielles du mouvement. Nous développerons ensuite les cas des systèmes à N degrés de liberté, pour compléter et généraliser les approches que nous mettons en œuvre dans l'étude des systèmes à deux degrés de liberté. Plusieurs outils de description de ces systèmes seront proposés : la R.F.D, l'approche Lagrangienne, l'approche matricielle.

Nous poursuivrons nos développements par l'étude des systèmes en chaîne, l'étude de la propagation des vibrations dans un système discontinue et l'analogie mécanique électrique

IV.2 Le degré de liberté :

Dans la mécanique, pour chaque particule appartenant à un système, et pour chaque direction indépendante dans laquelle le mouvement est possible, deux degrés de liberté, sont définis, on décrivant la particule élan dans cette direction, l'autre décrivant la position des particules le long d'un axe défini par cette direction.

Une définition plus générale :

Dans la mécanique statistique, un degré de liberté est un simple scalaire nombre décrivant le classique micro-état d'un système. micro-état d'un système est complètement décrit par l'ensemble de toutes les valeurs de tous ses degrés de liberté.

Si le système étudié peut être décrit comme ensemble de particules mécaniques, alors des degrés de liberté sont définis de la même manière comme ci-dessus. Ainsi, a micro-état du système est un point dans le système l'espace de phase

À ce stade il doit noter que pour un système, un micro-état défini en utilisant des degrés de liberté est intrinsèquement a classique état. Pour a quantum micro-état, définir une valeur précise de la position et élan d'une particule viole Principe d'incertitude de Heisenberg. La description d'un système bien qu'un ensemble de degrés de liberté soit ainsi seulement valide dans la limite classique (ou haute température) de mécanique statistique.

Dans certains cas, quand le système n'est pas convenablement décrit comme ensemble de particules mécaniques, d'autres types de degrés de liberté doivent être définis. Par exemple, dans le 3D chaîne idéale modèle, deux angles sont nécessaires pour décrire l'orientation de chaque monomère. La valeur de chacun de ces angles peut jouer le rôle d'un degré de liberté.

Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté.

IV.3 Exemples

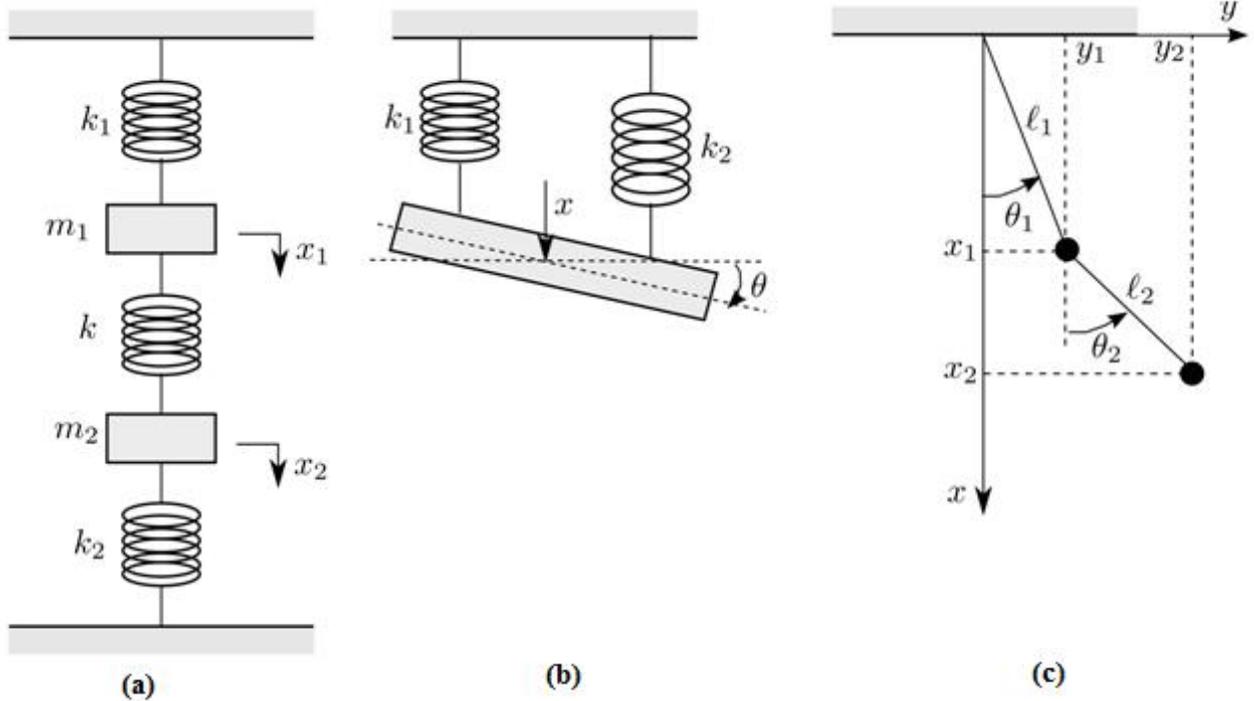


Figure V.1 Systèmes à deux degrés de liberté

** Figure 1a Si les masses m_1 et m_2 sont astreintes à se déplacer verticalement, 2 coordonnées x_1 et x_2 sont nécessaires pour spécifier la position de chaque masse à chaque instant.

** Figure 1b Si la masse M est astreinte à se déplacer dans un plan vertical, deux coordonnées sont nécessaires pour spécifier la configuration du système. L'une de ces coordonnées peut être le déplacement x qui correspond à la translation verticale de la masse. L'autre coordonnée peut être le déplacement angulaire θ pour tenir compte de la rotation de la masse.

Ces deux coordonnées sont indépendantes l'une de l'autre.

** Figure 1c Dans le cas du double pendule, deux coordonnées sont nécessaires pour spécifier la position des masses m_1 et m_2 . Plusieurs choix sont pourtant possibles, et on peut choisir (x_1, x_2) ou (y_1, y_2) ou (θ_1, θ_2) .

Il est possible de spécifier la configuration d'un système à l'aide de plusieurs ensembles de coordonnées indépendantes ; un ensemble quelconque de ces coordonnées est appelé coordonnées généralisées. Il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté ou

de coordonnées généralisées. Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

Un système à 2 degrés de liberté possède 02 coordonnées généralisées, 02 équations différentielles et 02 pulsations propres (ω_2, ω_1) .

IV.3.1 Les types de couplage

a) Couplage Élastique : Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.

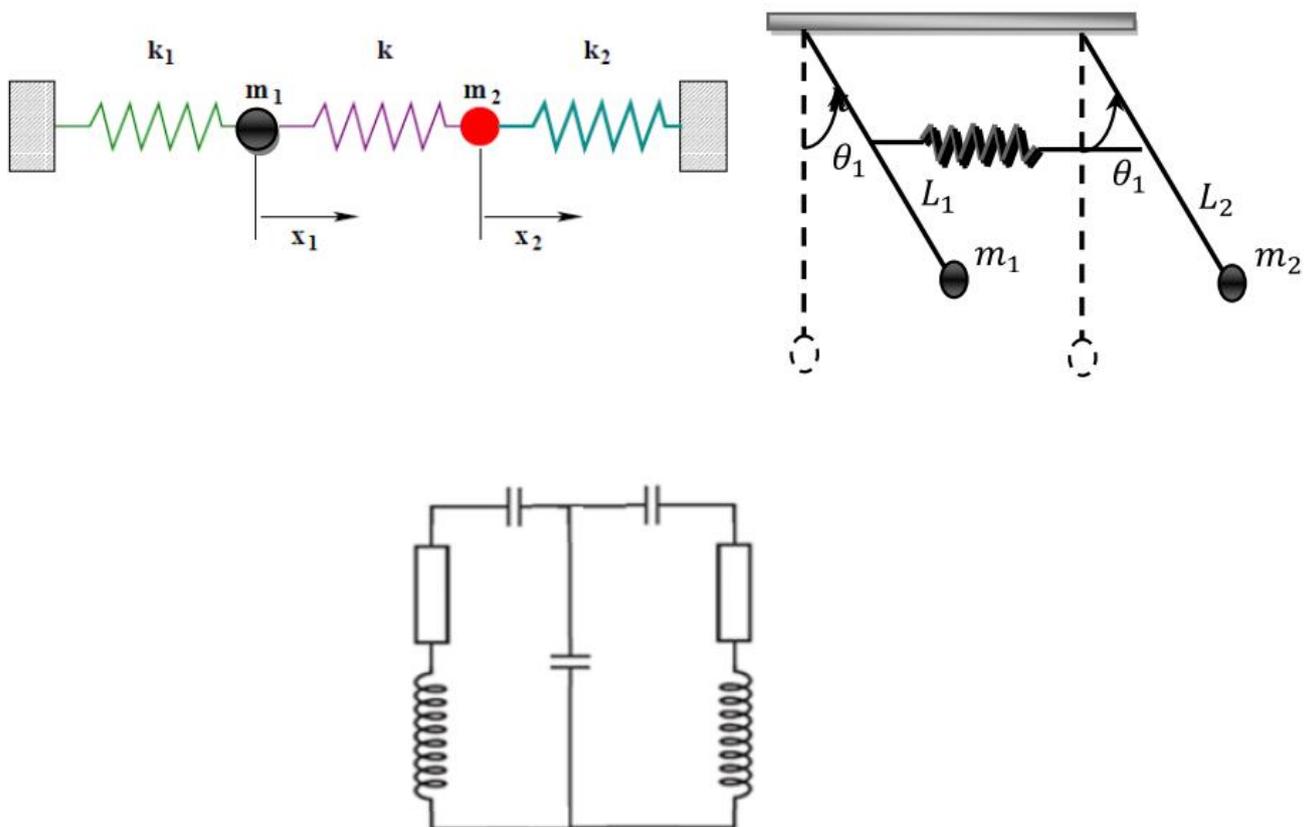


Figure V.2 Couplage Élastique

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_{11}\dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= a_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_{12}\dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= a_2 x_1 \end{aligned}$$

Tels que : $a_1 \dot{x}_1$ et $a_2 \dot{x}_2$ sont les termes de couplage. a_1 et a_2 sont des constantes.

b) Couplage Visqueux : Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par résistance, équivalents au couplage par amortisseur.

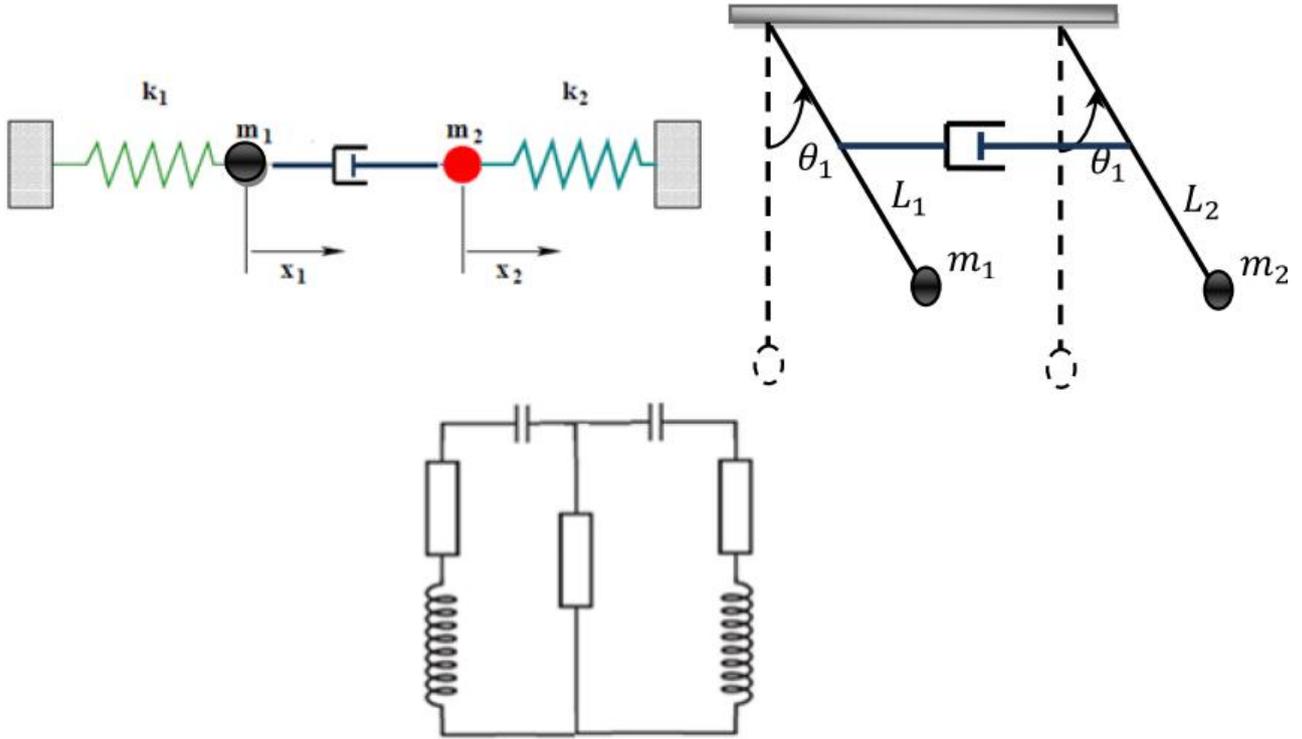


Figure V.3 Couplage Visqueux

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= b_1 \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= b_2 \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (V.2)$$

Tels que : $b_1 \dot{x}_2$ et $b_2 \dot{x}_1$ sont les termes de couplage. b_1 et b_2 sont des constantes.

c) Couplage Inertiel : Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.

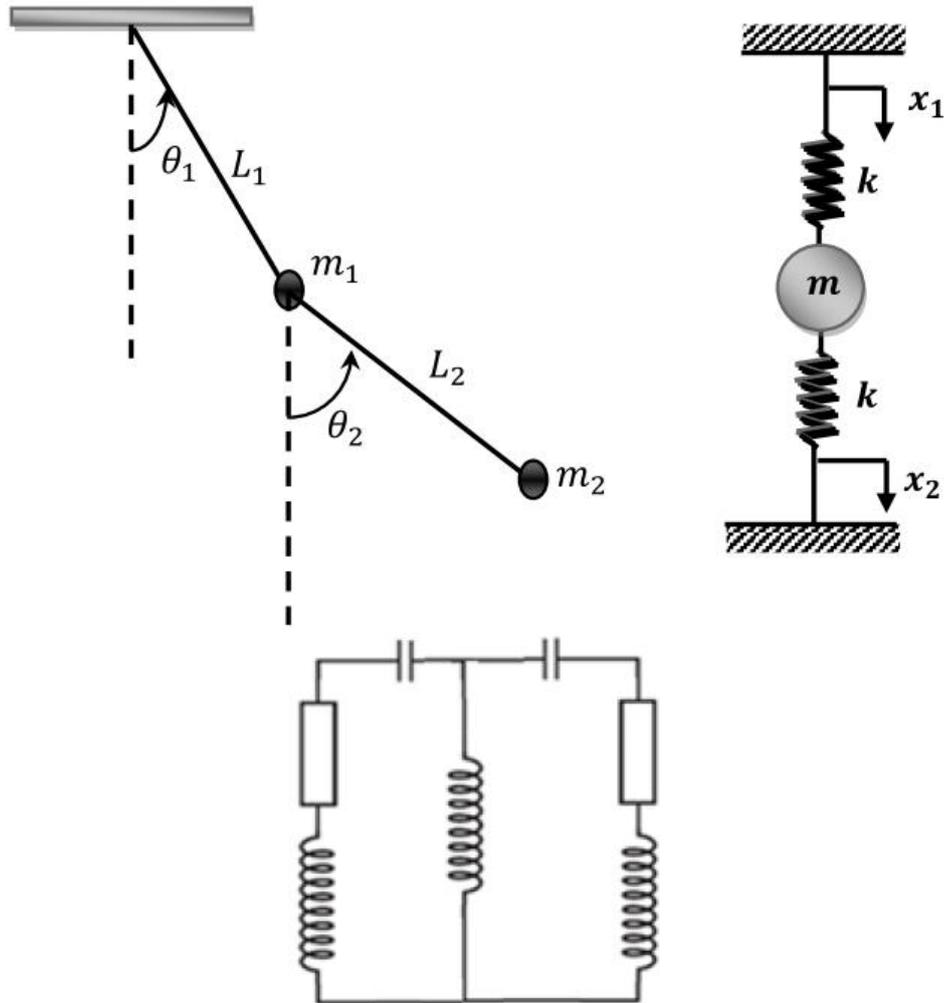


Figure V.4 Couplage Inertiel

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= c_1 \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= c_2 \ddot{x}_1 \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Tels que : $c_1 \ddot{x}_2$ et $c_2 \ddot{x}_1$ sont les termes de couplage. c_1 et c_2 sont des constantes.

IV.4 Exemples de systèmes a 2 DDL

Système masse ressort couplés : (Couplage Élastique)

Soit le système mécanique, composé de deux oscillateurs linéaires (m, k) couplés par un ressort de raideur k' .

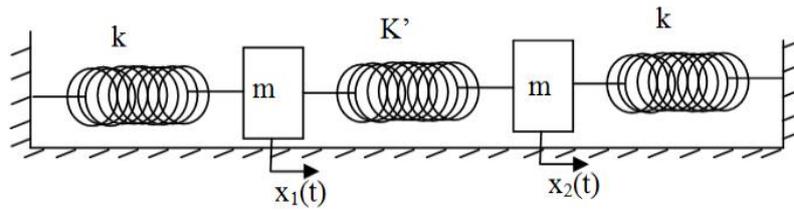


Figure V.5 Système 2DDL (Couplage Élastique)

IV.4.1 Pendules couplés libre et visqueux

Considérons le cas de deux pendules simples identiques couplés par un ressort de raideur K et qui effectuent des oscillations de faible amplitude repérées par les angles θ_1 et θ_2 . Le milieu visqueux est représenté par amortisseur

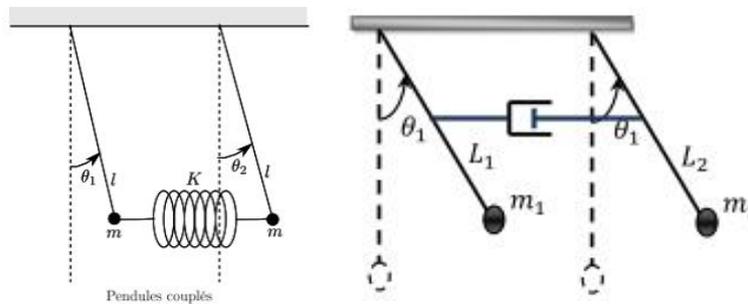


Figure V.6 Pendules couplés libre et visqueux

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= a_1 x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_{12} \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= a_2 x_1 \end{aligned} \tag{V.4}$$

Tels que : $a_1 x_2$ et $a_2 x_1$ sont les termes de couplage. a_1 et a_2 sont des constantes.

IV.4.2 Système masses-ressorts libre et visqueux en translation

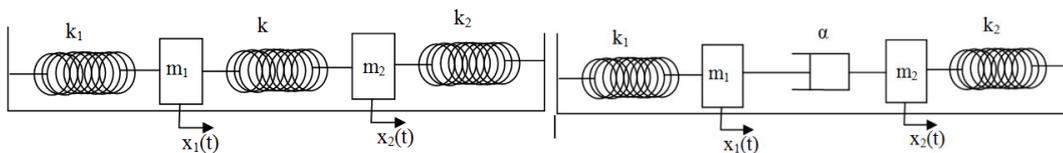


Figure V.7 Système masses-ressorts libre et visqueux

Considérons le système ci-dessus, constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2 à deux bâtis fixes. Les deux masses sont reliées par un ressort de raideur K . Ce ressort est appelé ressort de couplage.

IV.4.3 Systèmes électriques

On trouve les circuits couplés par résistance

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= b_1 \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= b_2 \dot{x}_1 \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

Tels que : $b_1 \dot{x}_2$ et $b_2 \dot{x}_1$ sont les termes de couplage. b_1 et b_2 sont des constantes.

IV.4.4 Couplage Inertiel : Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.

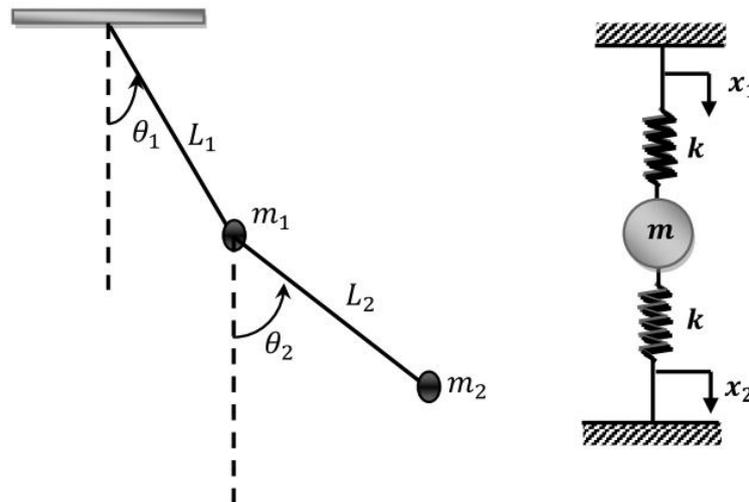


Figure V.8 Couplage Inertiel

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= c_1 \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\delta_2 \dot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= c_2 \ddot{x}_1 \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Tels que : $c_1 \ddot{x}_2$ et $c_2 \ddot{x}_1$ sont les termes de couplage. c_1 et c_2 sont des constantes.

IV.5 Méthode générale de résolution des équations de mouvement.

Pour un système mécanique, la mise en équation du système couplé passe par la méthode à suivre suivante :

- Traiter le système en équilibre (position d'équilibre) après avoir connaître le repère et les coordonnées généralisées ;
- d'écrire l'énergie cinétique et potentielle pour chaque point matériel, en reliant les coordonnées ;
- d'écrire le lagrangien ;
- On écrit les 2 équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.
- On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques. Ce qui signifie que le système peut osciller avec la même pulsation pour tous les oscillateurs.
- La résolution des systèmes d'équations permet d'obtenir 2 pulsations particulières ω_1 et ω_2 ; ce sont les pulsations propres.
- On substitue ensuite ω_1 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 1er mode propre. On substitue ensuite ω_2 dans l'une des 2 équations et l'on obtient le 2ème mode propre.
- On écrit les 2 solutions générales des équations différentielles du mouvement.

IV.6 Pendules couplés : (Couplage Élastique)

Considérons deux pendules qui sont couplés par un ressort horizontal de constante de rappel k à une distance a de l'axe de rotation. Pour déterminer les équations du mouvement pour les deux pendules, on peut utiliser le théorème du moment cinétique, Lagrange.

La force d'un ressort est proportionnelle à l'élongation Δx du ressort par rapport à sa longueur d'équilibre.

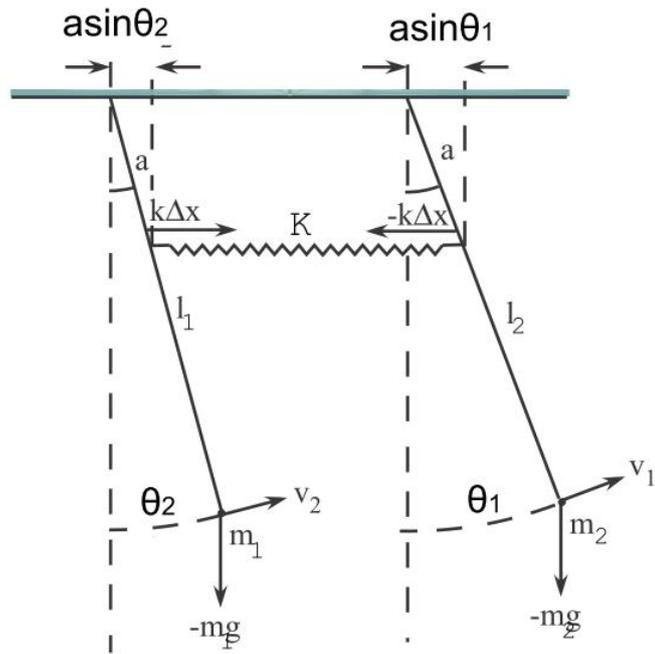


Figure V.9 Système des pendules couplés

Équations différentielles du mouvement :

Les coordonnées des éléments du système : La masse m_1 se trouve à une distance l_1 de O. θ

$$\begin{aligned}
 m_1 \quad x_{m1} &= l_1 \cdot \sin \theta_1 & \Rightarrow \quad \dot{x}_{m1} &= l_1 \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 \\
 y_{m1} &= -l_1 \cdot \cos \theta_1 & \Rightarrow \quad \dot{y}_{m1} &= -l_1 \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 & \Rightarrow \quad v_{m1}^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2
 \end{aligned}
 \tag{V.7}$$

La masse m_2 se trouve à une distance l_2 de O.

$$\begin{aligned}
 m_2 \quad x_{m2} &= l_2 \cdot \sin \theta_2 & \Rightarrow \quad \dot{x}_{m2} &= l_2 \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2 \\
 y_{m2} &= -l_2 \cdot \cos \theta_2 & \Rightarrow \quad \dot{y}_{m2} &= -l_2 \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2 & \Rightarrow \quad v_{m2}^2 &= l_2^2 \dot{\theta}_2^2
 \end{aligned}
 \tag{V.8}$$

$$k = (a \cdot \sin \theta_1 - a \cdot \sin \theta_2) = a (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$$

L'énergie cinétique du système :

$$T = T_{m1} + T_{m2} = \frac{1}{2} m v_{m1}^2 + \frac{1}{2} m v_{m2}^2 \tag{V.9}$$

$$\begin{aligned}
T_{m1} &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{m1} + \dot{y}_{m1})^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \\
&\Rightarrow T_{m1} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2
\end{aligned} \tag{V.10}$$

$$\begin{aligned}
T_{m2} &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{m2} + \dot{y}_{m2})^2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) \\
&\Rightarrow T_{m2} = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{V.11}$$

$$\Rightarrow T = T_{m2} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

L'énergie potentielle du système :

$$U = U_k + U_{m1} + U_{m2} \tag{V.12}$$

Si on choisi comme origine des énergies potentielles l'axe (Ox) on a pour les deux masses :

$U_{m1} + U_{m2} = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$ (Le signe moins vient du fait que la masse m est inférieur à l'axe choisi).

$$U = \frac{1}{2} k a^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 - m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \tag{V.13}$$

La fonction de Lagrange sera donc :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} k a^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 + m_1 g l_1 \cdot \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cdot \cos \theta_2 \tag{V.14}$$

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) &= 0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{V.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\
\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) &= -k a^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) - m_1 g l_1 \cdot \sin \theta_1 \\
\Rightarrow m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + k a^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) + m_1 g l_1 \cdot \sin \theta_1 &= 0
\end{aligned} \tag{V.16}$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a :

$$\begin{aligned}
\sin \theta &\approx \theta \\
\cos \theta &\approx 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \approx 1 \\
m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1^2 + k a^2 (\theta_1 - \theta_2) + m_1 g l_1 \theta_1 &= 0
\end{aligned} \tag{V.17}$$

Donc les 02 équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{aligned}
m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1^2 + (k a^2 + m_1 g l_1) \theta_1 &= k a^2 \theta_2 \\
m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2^2 + (k a^2 + m_2 g l_2) \theta_2 &= k a^2 \theta_1
\end{aligned} \tag{V.18}$$

Remarque :

Le terme de couplage ka^2 est en fonction de k donc le couplage est élastique.

Si $a=0$ ou $k=0$ couplage nul : les deux systèmes sont indépendant.

Les deux équations différentielles possèdent 02 solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$ et $\theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi')$ et

Tels que : A_1, A_2, φ et φ', ω est l'une des pulsations propres du système.

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) &\Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\
\theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi') &\Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2
\end{aligned} \tag{V.19}$$

On remplace dans les équations (1) et (2) donc :

$$\begin{aligned}
(k a^2 + m_1 g l_1 - m_1 l_1^2 \omega^2) \theta_1 - k a^2 \theta_2 &= 0 \\
-k a^2 \theta_1 + (k a^2 + m_2 g l_2 - m_2 l_2^2 \omega^2) \theta_2 &= 0
\end{aligned} \tag{V.20}$$

IV.6.1 Calcul des pulsations propres : On suppose que $m_1 = m_2 = m; l_1 = l_2 = l$

$$\begin{pmatrix} k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{V.21}$$

Ces deux équations accepteront une solution si le déterminant =0

$$\begin{vmatrix} k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 & -k a^2 \\ -k a^2 & k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2)^2 - (k a^2)^2 = 0 \tag{V.22}$$

$$(k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2)^2 - (k a^2)^2 = 0 \Rightarrow k a^2 + m g l - m l^2 \omega^2 = \begin{cases} +k a^2 \\ -k a^2 \end{cases} \tag{V.23}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l} + 2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{a}{l}\right)^2 \\ \omega_2^2 = \frac{g}{l} \end{cases} \quad \text{tel que :} \quad \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 : \text{la 1}^{\text{ère}} \text{ pulsation propre} \\ \omega_2 : \text{la 2}^{\text{ème}} \text{ pulsation propre} \end{cases} \quad (\text{V.24})$$

Remarques

Si $a=0$ ou $k=0$, le couplage est nul $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{g}{l}$

Lorsque le système oscille avec une de ses 02 pulsations on dit que le système oscille dans un de ses deux modes.

IV.6.2 Les modes d'oscillations

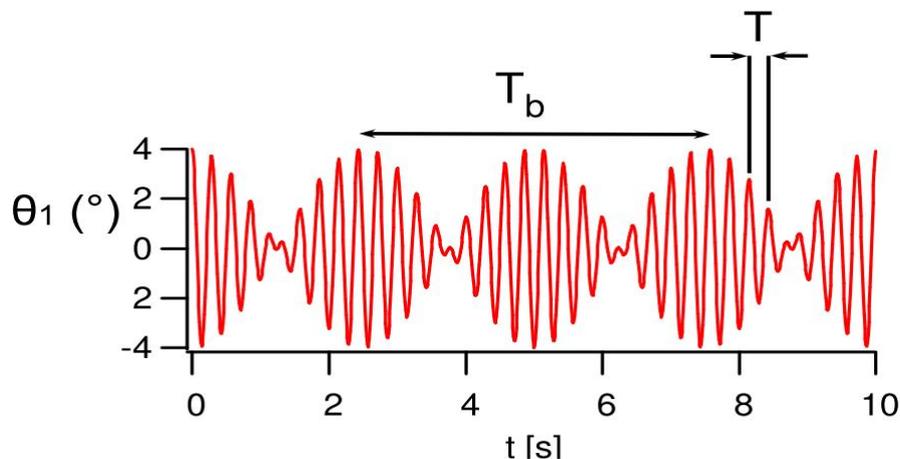
Le mode c'est l'état dans lequel les éléments dynamiques du système effectuent une oscillation harmonique avec la même pulsation qui correspond à une de ses deux pulsations.

IV.7 Calcul des modes d'oscillations :

Dans chaque mode les deux masses effectuent des mouvements harmoniques simples avec la même pulsation (ω_1 ou ω_2) et les deux pendules passent par la position d'équilibre au même instant.

IV.7.1 Premier mode : on remplace dans (3) ou (4) par $\omega_1^2 = \frac{g}{l} + 2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{a}{l}\right)^2$: On obtient après calcul :

$$\theta_2 = -\theta_1$$



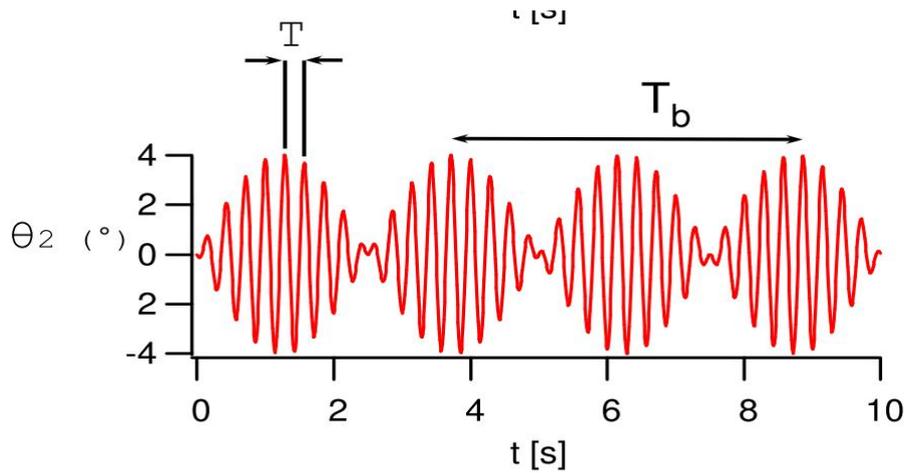


Figure V.10 Oscillations asymétriques

Remarques :

Dans le premier mode les deux pendules ont la même pulsation ω_1 , la même amplitude et un déphasage π .

Les deux pendules ont des mouvements opposés.

Élongation et compression du ressort chaque période sauf au point du milieu du ressort.

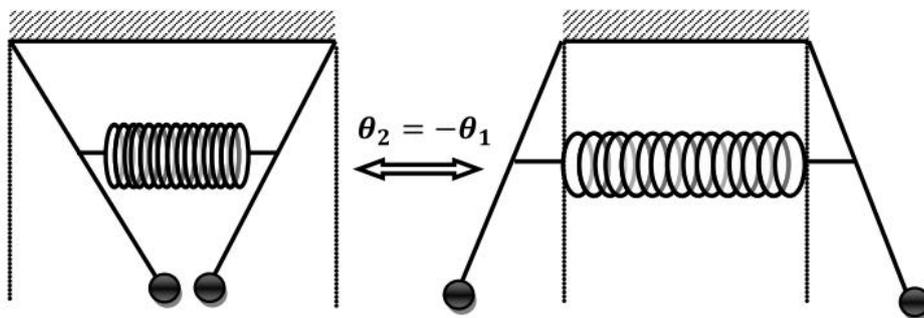


Figure V.11 Système de deux pendules ont des mouvements opposés.

IV.7.2 Deuxième mode :

On remplace dans (3) ou (4) par $\omega_2^2 = \frac{g}{l}$: On obtient après calcul : $\theta_2 = \theta_1$

Remarque :

Les deux pendules se déplacent dans le même sens.

Le ressort ne subit aucune variation de sa longueur.

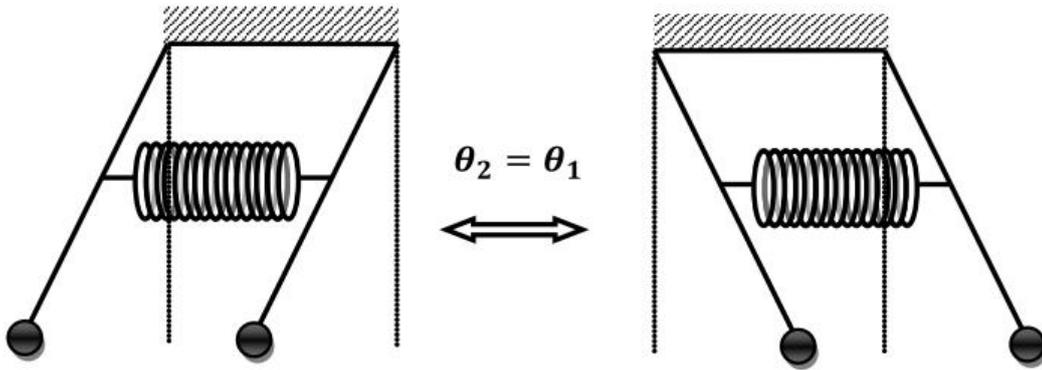


Figure V.12 Système de deux pendules se déplacent dans le même sens.

IV.8 Calcul des solutions des équations différentielles :

Chacune des mouvements θ_1 et θ_2 possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 ou ω_2 . Comme les équations différentielles sont linéaires, toute combinaison de solutions reste solution du système.

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (\text{V.25})$$

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \vec{V}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{V.26})$$

Dans le premier mode : $\omega = \omega_1 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, est le 1er

Vecteur propre

Dans le deuxième mode : $\omega = \omega_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \vec{V}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, est le 2ème

Vecteur propre

Donc :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = A \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(t) = -A \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (\text{V.27})$$

IV.9 Calcul des constantes A, B, φ_1 et φ_2

Supposons que :

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 & \dot{\theta}_1(t) = 0 \\ \theta_2(t) = 0 & \dot{\theta}_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(0) = A \omega_1 \cos(\varphi_1) + B \omega_2 \cos(\varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(0) = -A \omega_1 \cos(\varphi_1) + B \omega_2 \cos(\varphi_2) \end{cases} \quad (\text{V.28})$$

$$\begin{cases} \theta_1(0) = A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = \theta_0 \\ \theta_2(0) = -A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1(0) = A \omega_1 \cos(\varphi_1) + B \omega_2 \cos(\varphi_2) \\ \dot{\theta}_2(0) = -A \omega_1 \cos(\varphi_1) + B \omega_2 \cos(\varphi_2) \end{cases} \quad (\text{V.1})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2} \\ A = B = \frac{\theta_0}{2} \end{cases} \quad (\text{V.29})$$

Donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} [\sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2})] \\ \theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2} [-\sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{2})] \end{cases} \quad (\text{V.30})$$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t) \\ \theta_2(t) = -\theta_0 \sin(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \sin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t) \end{cases} \quad (\text{V.31})$$

IV.10 Phénomène de battement :

Lorsque le couplage est faible (k faible), les pulsations propres des 2 oscillateurs ω_1 ou ω_2 sont voisines ($\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est faible), il se produit un phénomène de battement. Les 2 oscillateurs se transmettent de l'énergie entre eux et vibrent avec une

pulsation ω égal à la moyenne des deux pulsations Propres $\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$ avec une

période égale à Tandis que la pulsation du battement est égale à $\omega_B = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$, avec

une période $T_B = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$.

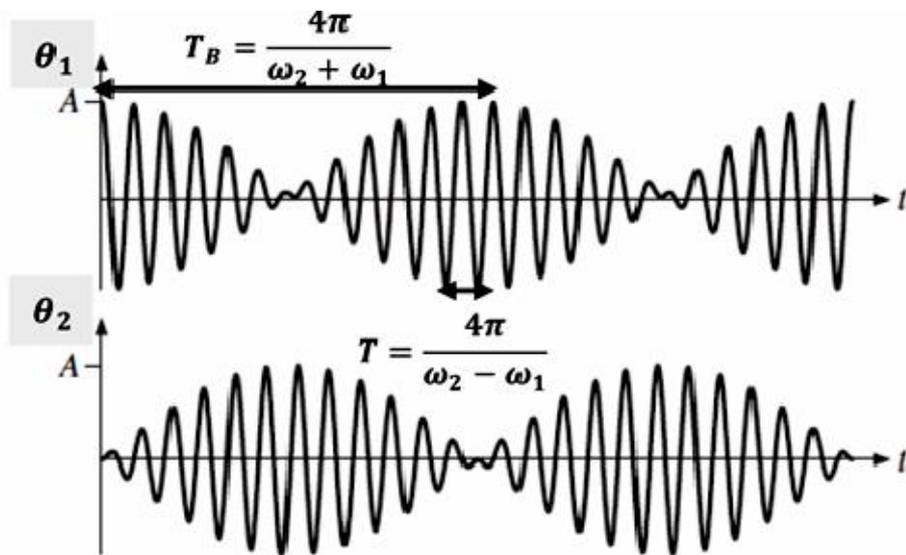
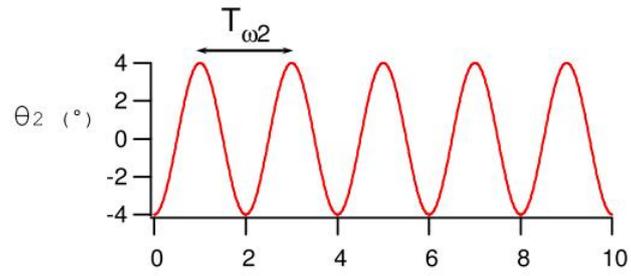
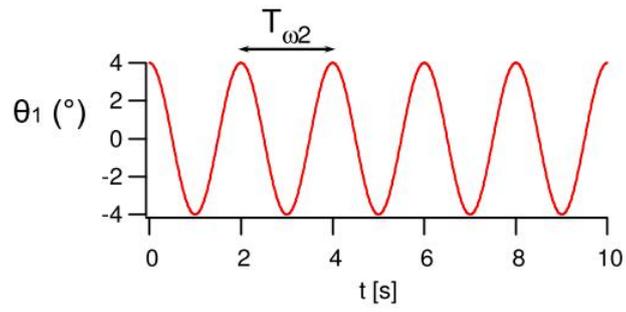


Figure V.13 Oscillations avec battements



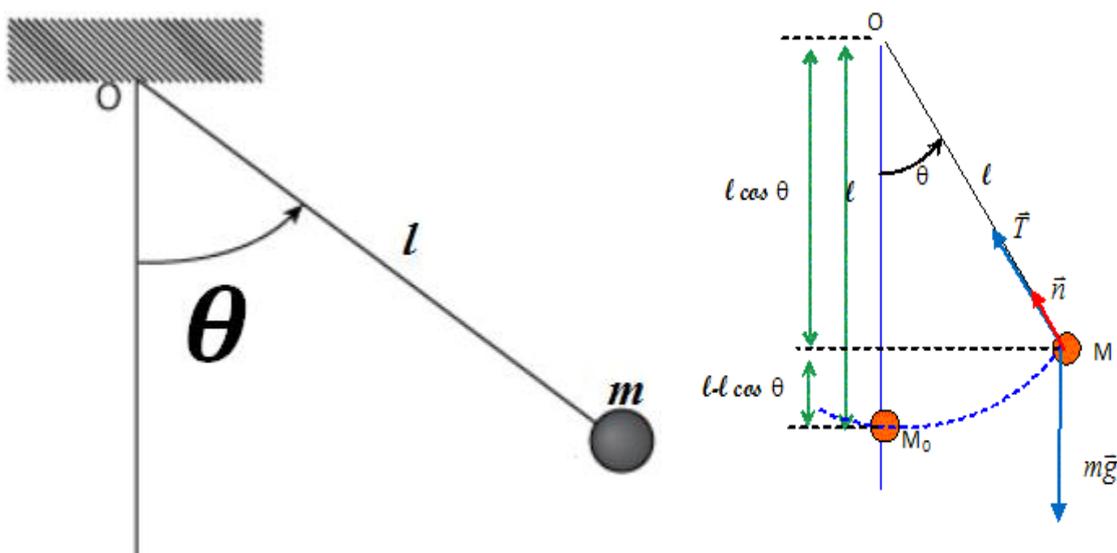
Séries d'exercices

Fiche N° 01 :

EXERCICE N° (01) :

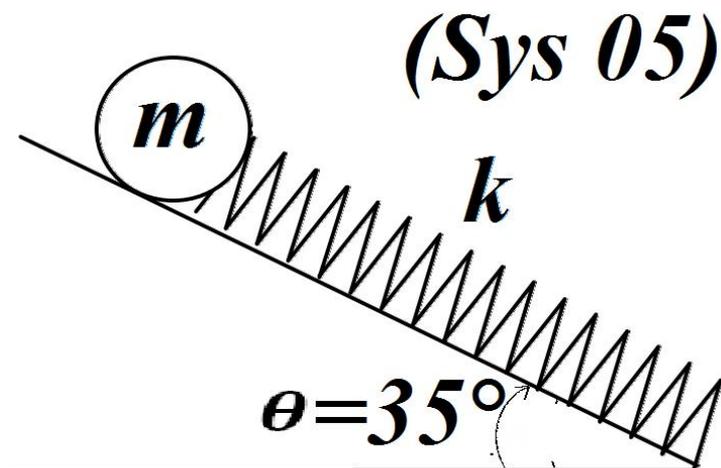
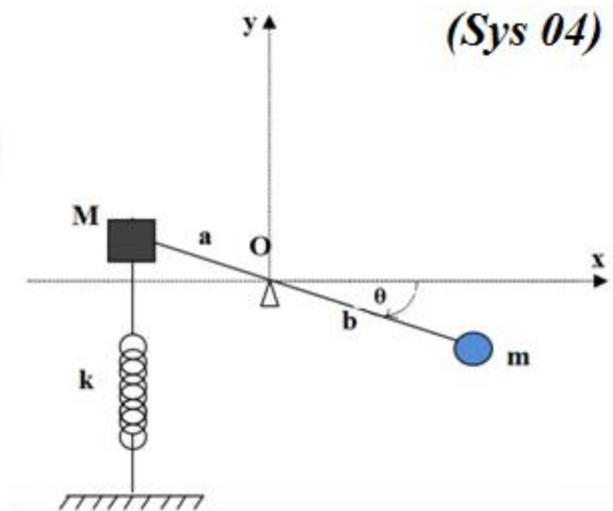
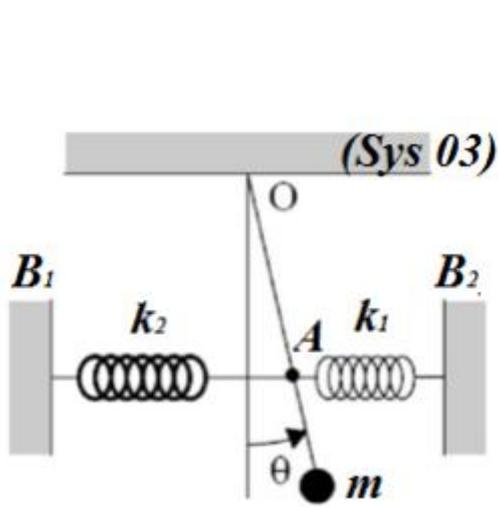
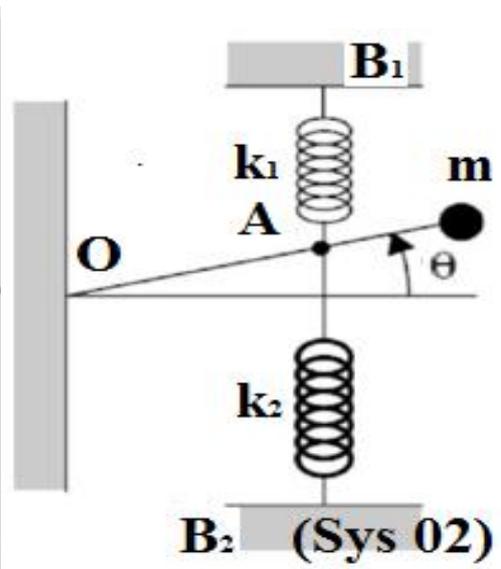
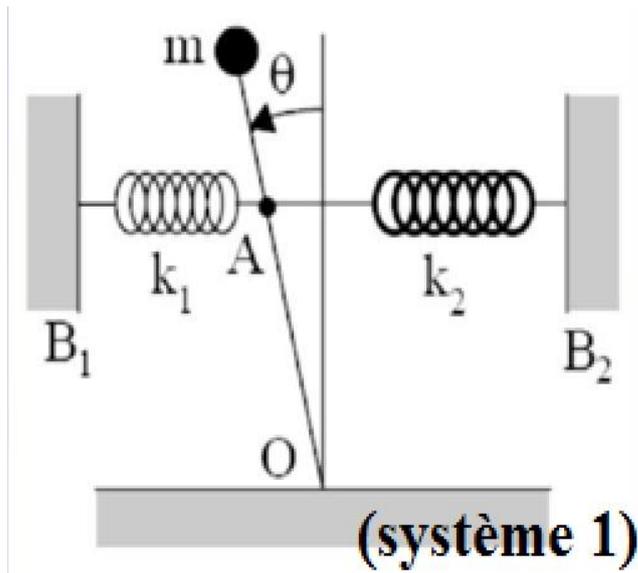
Un pendule simple est constitué d'une masse m supposée quasiment ponctuelle par rapport à la longueur l du bras, accrochée à un fil de longueur l sa masse est considérée comme négligeable lui même fixé au point O . Lâché sans vitesse initiale à un angle θ . On note v la norme de son vecteur vitesse.

Dans ces conditions, le moment d'inertie autour de l'axe est $J_0 = ml^2$ (à démontrer)



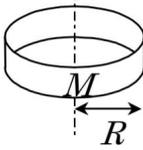
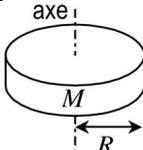
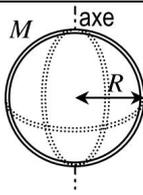
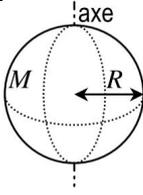
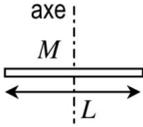
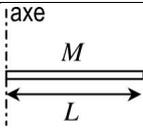
1. Calculer le degré de liberté.
2. Indiquer la position d'équilibre, et formuler l'énergie cinétique et potentielle du système.
3. Dédire l'expression du Lagrangien
4. Dédire l'expression du Lagrangien
5. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes.
6. Déterminer l'expression de la pulsation propre du système.
7. Donner la solution générale de l'équation différentielle pour les conditions initiales suivantes : $\theta(t = 0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t = 0) = \dot{\theta}_0$.

Refaire les mêmes questions pour les systèmes suivants :



Rappel (Moment d'inertie de différentes géométries):

Voici un tableau de différentes géométries où le moment d'inertie a été calculé en fonction de la masse de l'objet, de sa forme et de sa position par rapport à l'axe de rotation.

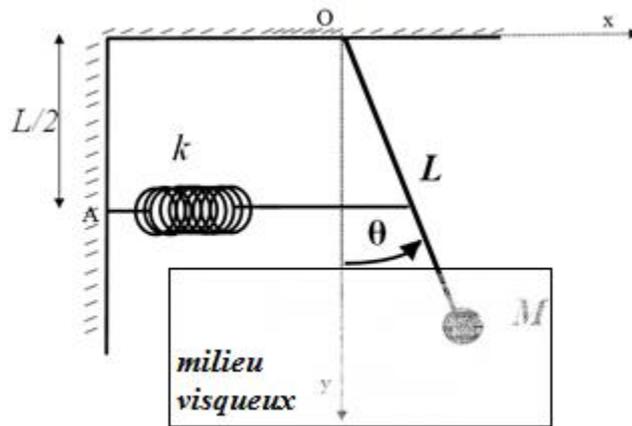
Géométrie	Schéma	Moment d'inertie	
Cylindre	Cylindre creux de rayon R tournant autour de son axe de symétrie		$J = MR^2$
	Cylindre plein de rayon R tournant autour de son axe de symétrie		$J = \frac{1}{2}MR^2$
Sphère	Coquille sphérique mince de rayon R tournant autour de son centre		$J = \frac{2}{3}MR^2$
	Sphère pleine de rayon R tournant autour de son centre		$J = \frac{2}{5}MR^2$
Tige	Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par son centre		$J = \frac{1}{12}ML^2$
	Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par une extrémité		$J = \frac{1}{3}ML^2$

Fiche N° 02 :

EXERCICE N° (01) :

Dans la figure ci-dessous, une masse M fixée à une tige de longueur L oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en O . (la tige attachée à un ressort fixé au point A)

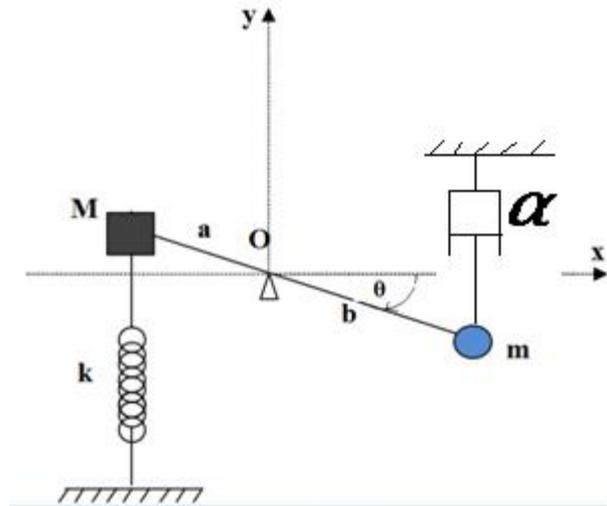
8. Formuler les différentes énergies du système.
9. Déduire l'expression du Lagrangien
10. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes.
11. Déterminer l'expression de la pulsation propre du système.
12. Donner la solution générale de l'équation différentielle.



EXERCICE N° (02) :

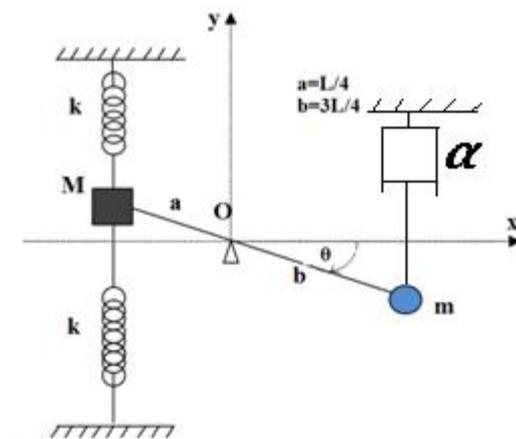
Pour le système mécanique de la figure ci-dessous, on considère une barre de masse négligeable de longueur L , portant deux masses m et M , tournant sans frottement autour de son axe au point fixe O comme le montre la figure ci-dessous, la masses M attachée à un de ressort de raideur k . La position d'équilibre correspond à $\theta(0) = 0$. La masse m émergée dans un milieu de visqueux dont le coefficient de frottement est α .

1. Établir l'équation différentielle du mouvement libre pour des oscillations de faibles amplitudes, déduire la pulsation propre du système.
2. Trouver la solution $\theta(t)$.



EXERCICE N° (03) :

On considère un fléau constitué d'une tige métallique de masse négligeable, de longueur l portant deux masses m et M , tournant sans frottement autour de son axe au point fixe O comme le montre la figure ci-dessous. La masse m est soumise à une force de frottement visqueuse dont le coefficient de frottement est α . A l'équilibre la barre est horizontale $\theta(0)=0$.



- Formuler les différentes énergies du système.
- Dédire l'expression du Lagrangien
- Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes, et l'expression de la pulsation propre du système ?
- Donner la solution générale de l'équation différentielle avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t = 0) = 0 \text{ et } \dot{x}(t = 0) = x_0$$

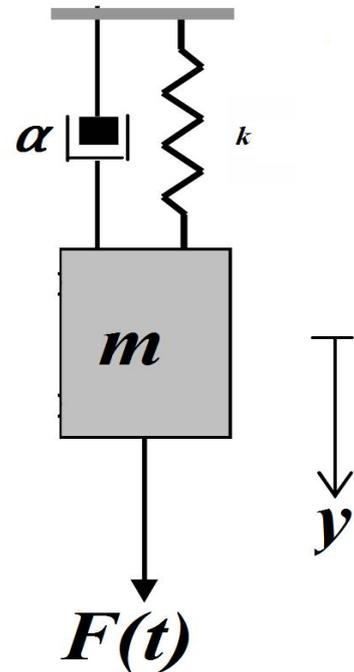
Fiche N° 03 :

EXERCICE N° (01) :

Un sismographe est un appareil permettant de mesurer l'amplitude d'une secousse quelle que soit sa fréquence. Le dispositif peut être schématisé par une masse m suspendue à un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité du ressort est accrochée à un support horizontal mobile. Le mouvement est amorti par une force de frottement de type fluide dont le coefficient de frottement est α (négligeable). La masse du ressort est négligeable.

Lorsqu'une secousse se produit, elle applique sur le support mobile une force d'excitation sinusoïdale de la forme $F(t) = F \cos(\omega t)$

On notera g l'accélération de la pesanteur.

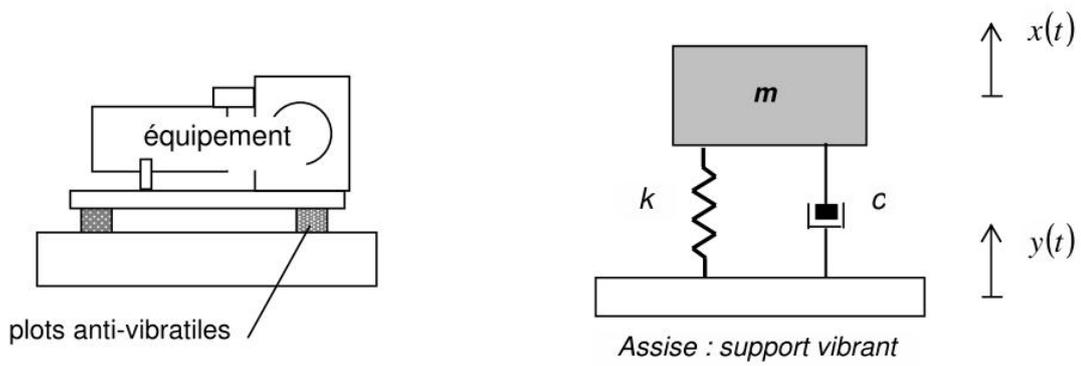


1. Schématiser la position d'équilibre du système.
2. Établir les différentes énergies, en déduire le lagrangien du système.
3. Établir l'équation différentielle gouvernant l'évolution de la position de la masse.
4. Écrire la solution d'évolution de la position de la masse $x(t)$ dans ce cas de régime permanent.
5. En utilisant la notation complexe, déterminer et étudier l'amplitude du mouvement de la masse $A(\omega)$ et son déphasage $\varphi(\omega)$.

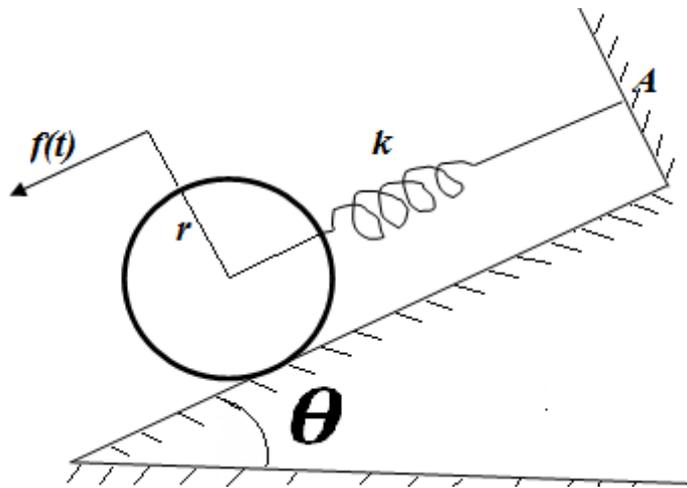
Étudier les systèmes suivants :

2) Isolation vibratoire d'une machine : Transmissibilité de la force

Machine vibrante isolée pour ne pas transmettre de vibrations illustrant la transmissibilité de la force.

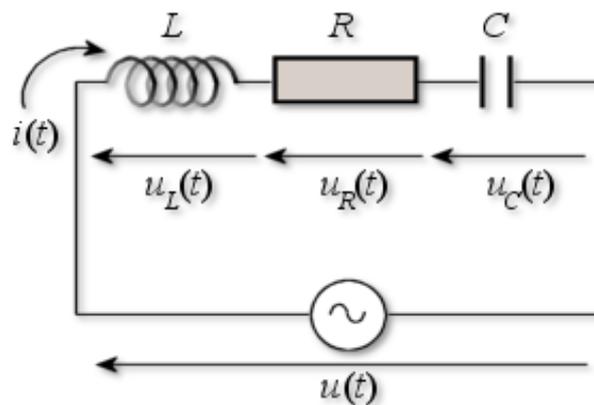


3) un cylindre circulaire de masse m et de rayon r est attachée par un ressort de raideur k sur un plan incliné. Le cylindre est excité par une force $f(t) = F \cos(\omega t)$



EXERCICE N° (02) :

Un générateur de tension de forme sinusoïdale $u(t) = U_m \cos \Omega t$ est branché aux bornes d'un circuit en série formé d'une bobine d'inductance L , d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C initialement déchargé.



Soit $i(t)$ l'intensité instantanée du circuit.

- Montrer en établissant l'équation différentielle satisfaite par $i(t)$ que le système se comporte comme un oscillateur harmonique forcé. vérifier par la méthode énergétique.
- Donner les expressions du coefficient d'amortissement, de la pulsation propre et du facteur de qualité de l'oscillateur.
- Déterminer à partir de la représentation complexe de l'équation différentielle, l'expression de $i(t)$ en régime permanent. Déterminer l'impédance complexe du circuit étudié.

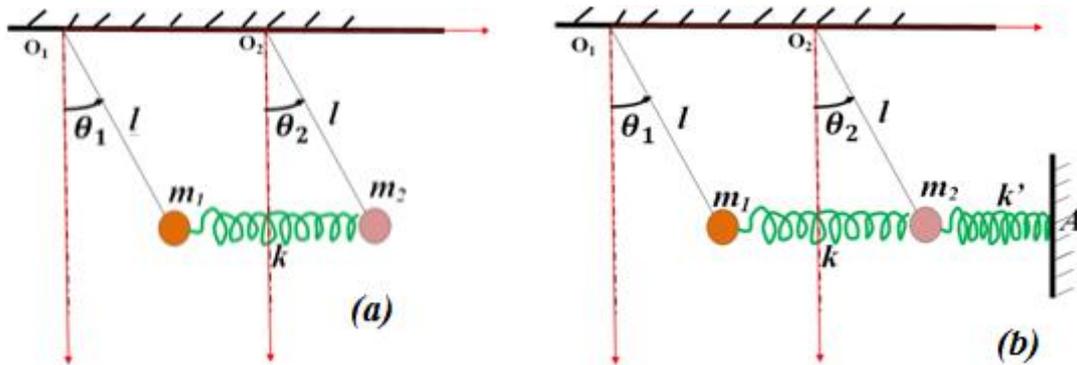
Fiche N° 04 :

EXERCICE N° (01) :

Soit deux pendules simples identiques (longueur l , masse m_1 et m_2 respectivement), reliés par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k (système *a*), et un ressort de raideur k' attaché à la masse m_2 (système *b*). Décalés de ses positions d'équilibre avec un angle de θ_1 et θ_2 . Les déplacements x_1 et x_2 , des points matériels m_1 et m_2 sont supposés faible par rapport à la longueur l .

Le ressort est au repos lorsque les fils des pendules sont verticaux (figure).

Les frottements seront négligeables.

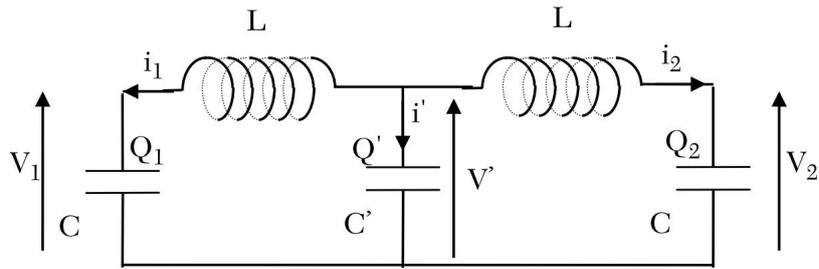


- Quel est le nombre de degré de liberté ?
- Formuler les différentes énergies du système.
- Déterminer le Lagrangien du système
- Établir les équations différentielles du mouvement.
- En déduire les modes fondamentales.

EXERCICE N° (02) : (Couplage capacitif d'oscillateurs électriques)

On considère deux oscillateurs L.C. identiques, couplés par le condensateur de capacité C' . On note Q_1 , Q_2 et Q' les charges prises par les armatures supérieures de chaque condensateur.

Soit Q_{10} , Q_{20} et Q'_0 leurs valeurs à l'équilibre, c'est-à-dire quand $i_1 = i_2 = 0$.



- Déterminer le Lagrangien du système (basant sur le principe d'énergie).
- Donner les équations du mouvement.
- En déduire les pulsations propres du système en fonction.
- Donner les solutions générales.

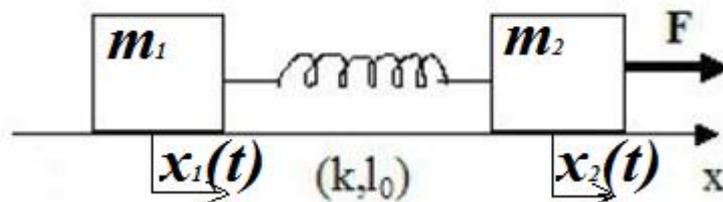
EXERCICE N° (03) :

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 .

Elles peuvent se déplacer sans frottement sur un axe horizontal ($x'x$).

Pour $t = 0$, le ressort est non tendu et les masses m_1 et m_2 sont au repos.

A partir de $t = 0$, on exerce sur m_2 une force horizontale constante F .



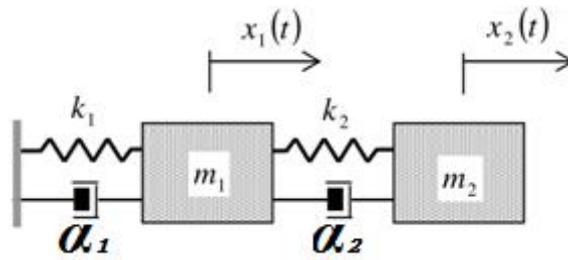
- Déterminer le Lagrangien du système (basant sur le principe d'énergie).
- Donner les équations du mouvement.
- En déduire les pulsations propres du système en fonction.
- Donner les solutions générales.

EXERCICE N° (04) :

On représente le système mécanique dans la figure ci-après :

Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par deux ressorts de raideur k_1 et k_2 .

Elles peuvent se déplacer avec la présence de frottement.



- Déterminer le Lagrangien du système.
- Donner les équations du mouvement.

Considérant que : $m_1 = m_2$ et $k_1 = k_2$.

- Réécrire les équations du mouvement.
- En déduire les pulsations propres du système en fonction.
- Donner les solutions générales.

Bibliographie

- [01] T. BECHERRAWY, Vibrations et Ondes, Tomes 14, Ed. HermesLavoisier, (2010).
- [02] H. DJELOUAH, Vibrations et Ondes Mécaniques, Offices des Publications Universitaires OPU, (2011).
- [03] J. BRUNEAUX, Vibrations et Ondes, Ed. Marketing, (2010).
- [04] Vibrations et Ondes mécaniques, cours et exercices par H. Djelouah @ USTHB
- [05] Vibration et Ondes mécaniques (Tome 1, Tome 2), polycopies par F. Boukli @ UHBC
- [06] Ondes et Vibrations, par J-M. Richard @ IUT
- [07] Dr. Fouad BOUKLI HACENE Dr. Mohamed MEBROUKI, PHYSIQUE VIBRATIONS, Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen
- [08] JEAN-CLAUDE PASCAL, Introduction aux vibrations et à acoustiques, école nationale supérieure d'ingénieurs du mans – université du maine, 2007-2008.
- [08] French, A. P. Vibrations and Waves. New York, N.Y.: W.W. Norton & Company, January 1, 1971. ISBN: 9780393099362
- [10] G. C. King, Vibrations and Waves. John Wiley & Sons Ltd (2009). ISBN 978-0-470-01189-8
- [11] Bekefi and Barrett. Electromagnetic Vibrations, Waves and Radiation. Cambridge, MA: The MIT Press, September 15, 1977. ISBN: 9780262520478.
- [12] Vibrations and waves, course @ MIT